Différentielle de l'inverse matriciel

Thomas CHEN

On présente ici trois méthodes pour calculer la différentielle de l'inverse matriciel.

Exercice 1. Soit Inv : $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que Inv est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. On souhaite calculer la différentielle de l'inverse.
   (a) Première méthode. Déterminer les dérivées partielles de Inv en I_n, puis en déduire la différentielle de Inv en I_n et le cas général.
   (b) Deuxième méthode. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $|||\cdot|||$. Soit H telle que $|||H||| < 1$. Montrer que $\sum_{k\geq 0} H^k$ converge. En déduire que $I_n + H$ est inversible puis déterminer la différentielle de Inv en I_n puis le cas général.
   (c) Troisième méthode. Etudier la différentielle de l'application $M \mapsto M \times \mathrm{Inv}(M)$.

Corrigé :

1. Déjà, Inv a pour ensemble de départ un ouvert [1].Pour une matrice M quelconque, on a $A[\mathrm{Com}(A)]^T = \det(A)I_n$. Alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}[\mathrm{Com}(A)]^T$ et A^{-1} est alors une fraction rationnelle en les coefficients de A ($\det(A)$ est polynômial en les coefficients de A, $\mathrm{Com}(A)$ aussi car les mineurs le sont) donc Inv est $\mathcal{C}^\infty$.
2. (a) On note $(E_{ij})_{i,j}$ base canonique et on note une matrice M par ses coefficients (m_{ij}). Alors

$$\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial m_{ij}}(I_n)(M) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left([I_n + tE_{ij}]^{-1} - I_n\right).$$

Si $i = j$,

$$\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial m_{ii}}(I_n)(M) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\left[\frac{1}{t+1} - 1\right]\right) E_{ii} = -E_{ii}.$$

Si $i \neq j$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, (I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij}$$

car $E_{ij}^2 = 0$. Ainsi, $\dfrac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial m_{ij}}(I_n)(M) = -E_{ij}$. Ainsi, vu que Inv est $\mathcal{C}^1$, l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles est

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d\mathrm{Inv}_{I_n}(H) = \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{ij}\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial m_{ij}}(I_n) = -H.$$

Repartons dans le cas général. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour H suffisamment petit, $M+H$ est inversible (car $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est inversible) donc

$$\begin{aligned}(M+H)^{-1} &\underset{\star}{=} (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} \\ &= \mathrm{Inv}(I_n + M^{-1}H)M^{-1} = (\mathrm{Inv}(I_n) + d\mathrm{Inv}_{I_n}(M^{-1}H) + o(H))M^{-1} \\ &= \mathrm{Inv}(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(H)\end{aligned}$$

[1]. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \overset{-1}{\det}(\mathbb{R}^*)$

quand $H \to 0$. Attention à $\star$: les matrices ne commutent *a priori* pas ! On a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$! On en déduit que

$$\forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d\mathrm{Inv}_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}.$$

(b) Une norme d'algèbre est sous-multiplicative. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\!\left|\!\left| H^k \right|\!\right|\!\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |||H|||^k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1 - |||H|||}.$$

La série $\sum_{k \geq 0} H^k$ converge alors absolument donc converge. Ainsi, on peut considérer

$$(I_n - H)\sum_{k=0}^{+\infty} H^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(H^k - H^{k+1}) = I_n.$$

Ainsi,

$$(I_n + H)\sum_{k=0}^{+\infty}(-H)^k = I_n$$

et

$$(I_n + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-H)^k = I_n - H + o(H)$$

quand H tend vers 0. On retrouve alors les résultats de la méthode précédente et on continue de même :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d\mathrm{Inv}_{I_n}(H) = -H.$$

Repartons dans le cas général. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour H suffisamment petit, $M + H$ est inversible (car $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est inversible) donc

$$\begin{aligned}
(M+H)^{-1} &\underset{\star}{=} (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} \\
&= \mathrm{Inv}(I_n + M^{-1}H)M^{-1} \\
&= (\mathrm{Inv}(I_n) + d\mathrm{Inv}_{I_n}(M^{-1}H) + o(H))M^{-1} \\
&= \mathrm{Inv}(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(H)
\end{aligned}$$

quand $H \to 0$. Attention à $\star$: les matrices ne commutent *a priori* pas ! On a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$! On en déduit que

$$\forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d\mathrm{Inv}_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}.$$

(c) $\varphi : M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M\mathrm{Inv}(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est constante égale à I_n donc de différentielle nulle. En fait, en notant $\psi : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AB$ est différentiable et ici, $\varphi(M) = \psi(M, \mathrm{Inv}(M))$. Par la règle de la chaîne [2], on a

$$0 = d\varphi_M(H) = \mathrm{Id}(H)\mathrm{Inv}(M) + Md\mathrm{Inv}_M(H)$$

ce qui donne

$$-M^{-1}HM^{-1} = d\mathrm{Inv}_M(H).$$

2. plus simplement, la différentielle d'une application bilinéaire