

ÉLÉMENTS D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE COMPLEXES

M2 AAG, Septembre 2019 – H. Auvray

Les objets de départ en Analyse Complexe à Plusieurs Variables sont les *fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes*, que l'on peut définir comme des fonctions continues, et holomorphes par rapport à chacune de leurs variables.

Comme en dimension 1 (complexe), une formule de Cauchy (itérée ici) donne l'analyticité, et en particulier la régularité C^∞ , de telles fonctions. On peut en conséquence définir, par analogie avec le cas réel, la catégorie des *variétés complexes* (ou holomorphes) en toute dimension complexe.

On va alors disposer de méthodes géométriques, reposant en particulier sur le formalisme des *courants* (généralisation aux variétés de la notion de distribution), adaptées à l'étude d'un phénomène nouveau par rapport à la dimension 1, à savoir la possibilité dans de nombreux cas de pouvoir prolonger *toutes* les fonctions holomorphes d'un ouvert donné de \mathbb{C}^n ($n \geq 2$). Il s'agira plus précisément dans ce cours d'aborder la résolution de ce problème, consistant en une caractérisation des « *domaines d'holomorphie* », ainsi que sa généralisation aux variétés. Cet enseignement peut donc naturellement être envisagé comme introduction aux cours de J.-B. Bost (*Introduction aux variétés complexes*) au 1^{er} semestre; les notions d'Analyse harmonique abordées en feront également une première introduction aux thématiques liées à l'étude des EDP (elliptiques) – *cf.* cours de J.-F. Babadjian. À travers son contenu, ce cours donnera également l'occasion de se familiariser avec la Géométrie différentielle (*cf.* cours de F. Bourgeois), ou d'apporter simplement quelques éléments de Géométrie complexe avant une orientation vers la Géométrie algébrique.

Prérequis : Analyse complexe en une variable, Théorie des Distributions (*cf.* poly de Th. Ramond, ch. 1 à 4), Géométrie Différentielle (bases).

Il n'y aura pas de notes écrites complètes; l'essentiel du contenu figure néanmoins dans le chapitre 1 du livre de J.-P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*.

Programme :

- I - *Fonctions holomorphes à plusieurs variables et variétés (analytiques) complexes*
- 1) Définition (continuité et holomorphic séparée), formule de Cauchy et conséquences immédiates (analogues à la dimension 1 : développements en série entières, prolongement analytique, inversion locale).
 - 2) Variétés (analytiques) complexes
 - a) définition *via* un atlas (définition alternative/faisceautique en remarque); espaces tangent et cotangent, (bi)degré, structure complexe.
 - b) Calcul différentiel/intégral sur les variétés (complexes) : cas réel : courants (notamment la formule $F^*[Z] = [F^{-1}(Z)]$, F submersion, Z sous-variété orientée); cas complexe : opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ (remarque : formes différentielles, intégration, lemme de Poincaré, cohomologie de de Rham : fait la semaine précédente par R. Leclercq).
- II - *Étude locale des fonctions holomorphes : prolongements*
- 1) Théorème d'extension de Hartogs
 - a) Énoncé du théorème, et démonstration modulo la résolution de l'équation $\bar{\partial}$ à support compact en dimension ≥ 2 .
 - b) Noyaux (Newton, Bochner-Martinelli), formule de Koppelman et résolution de l'équation $\bar{\partial}$ à support compact.
 - c) Lemme de Dolbeault-Grothendieck.
 - 2) Phénomène de Hartogs
 - a) Figure de Hartogs; prolongement *via* la formule de Cauchy.
 - b) Théorème d'extension de Riemann.
- III - *Domaines d'holomorphic I*
- 1) Définition domaine d'holomorphic; exemples (ouverts convexes – exercice/digression sur la boule et le polydisque unité en guise de contre-exemple à l'application conforme en dimension ≥ 2 ?).
 - 2) Enveloppe d'holomorphic et convexité holomorphic, propriétés élémentaires; caractérisation I des domaines d'holomorphic.
- IV - *Domaines d'holomorphic II et fonctions psh*
- 1) Définition fonction d'exhaustion. Caractérisation II des domaines d'holomorphic – et des variétés de Stein – *via* l'existence de fonctions d'exhaustion lisses pluri-sous-harmoniques (définies comme fonctions à hessien complexe positif).
 - 2) Fonctions harmoniques. Noyau de Green et problème de Dirichlet.
 - 3) Fonctions (pluri-)sous-harmoniques.
 - 4) Démonstration des énoncés « un domaine d'holomorphic est (faiblement) pseudo-convexe », ainsi que « une variété de Stein est fortement pseudo-convexe »; problème de Levi.

ELEMENTS OF COMPLEX ANALYSIS AND GEOMETRY
AAG M2, September 2019 – H. Auvray

Programme:

I - *Holomorphic functions of several variables and complex manifolds*

- 1) Definition (continuity and separate holomorphy), Cauchy formula and (analogous to complex dimension 1: power series expansions, analytic extension, local inversion).
- 2) Complex manifolds
 - a) definition *via* an atlas (remark: alternative/sheaf-theoretic definition); tangent and cotangent spaces, (bi)degree, complex structure.
 - b) Integral and differential calculus on (complex) manifolds: real case: currents (in particular, formula $F^*[Z] = [F^{-1}(Z)]$, F submersion, Z oriented submanifold); complex case: ∂ and $\bar{\partial}$ operators; (remark: differential forms, integration, Poincaré lemma, de Rham cohomology: done the week before by R. Leclercq).

II - *Local study of holomorphic functions: extensions*

- 1) Hartogs' extension theorem
 - a) Statement of the theorem, proof modulo resolution of $\bar{\partial}$ equation with compact support in dimension ≥ 2 .
 - b) Kernels (Newton, Bochner-Martinelli), Koppelman formula and resolution of $\bar{\partial}$ equation with compact support.
 - c) Dolbeault-Grothendieck lemma.
- 2) Hartogs' phenomenon
 - a) Hartogs' figure; extension *via* Cauchy formula.
 - b) Riemann extension theorem.

III - *Domains of holomorphy I*

- 1) Definition; examples (convex open sets – exercise/digression on unit ball and polydisc as a counterexample of the Conformal Mapping in dimension ≥ 2).
- 2) Holomorphic hull and holomorphic convexity, basic properties; first characterisation of domains of holomorphy.

IV - *Domains of holomorphy II and psh functions*

- 1) Definition of exhaustion functions. Second characterisation of domains of holomorphy – and of Stein manifolds – *via* the existence of smooth pluri-subharmonic exhaustion functions (*i.e.* functions with positive complex Hessian).
- 2) Harmonic functions. Green kernel and Dirichlet problem.
- 3) (Pluri-)Subharmonic functions.
- 4) Proofs of the statements "a domain of holomorphy is (weakly) pseudoconvex", and "a Stein manifold is strongly pseudoconvex"; Levi problem.

There will be no complete typewritten notes; most of these contents may however be found in J.-P. Demailly's book, first chapter. Prerequisites are: Complex analysis (in one complex variable), Basic differential geometry, Distribution theory (see e.g. Th. Ramond's notes, chapters 1 to 4).