

Théorème de FEJÈR

Thomas CHEN

Le théorème de FEJÈR est un théorème d'approximation de fonctions. Lorsqu'on se donne une fonction continue sur un segment, le théorème de WEIERSTRASS assure qu'il existe une suite de fonctions polynomiales qui convergent uniformément vers la fonction initiale.

Lorsque f est une fonction périodique, on va être capable de l'approximer uniformément avec des fonctions polynomiales trigonométriques. C'est le théorème de FEJÈR.

Exercice 1. *On souhaite généraliser le théorème de Weierstraß en le suivant : toute fonction continue et 2π -périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques. Le théorème de Fejér donne une réponse. L'exercice propose une preuve orientée vers ce corollaire. On laissera le cas général au lecteur. On parle dans la suite, sans le dire, de la théorie des séries de Fourier. Nous ne rentrons pas dans les détails, c'est un prétexte pour faire des séries de fonctions. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que f est 2π -périodique. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k : x \in \mathbb{R} \rightarrow e^{ikx} \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit pour $n \in \mathbb{N}$*

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, S_n := \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k, C_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k.$$

Ce sont respectivement le n -ème coefficient de Fourier de f , la somme partielle de la série de Fourier de f , la moyenne de Cesàro de la série de Fourier. On note aussi

$$\tilde{S}_n := \sum_{k=-n}^n e_k, \tilde{C}_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \tilde{S}_k.$$

1. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{C}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Montrer que $(\tilde{C}_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$.
3. On pourra admettre cette question dans un premier temps. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $(C_n)_n$ tend uniformément vers f .

Indication : on pourra montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, C_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \tilde{C}_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \tilde{C}_n(t) dt$.

Corrigé :

1. Il est aisé de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_k = \delta_{k,0}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{S}_n(t) dt = 1$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{C}_n(t) dt = 1.$$

2. D'abord, $\tilde{S}_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{S}_n = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} (e^{ix})^k = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \Im(e^{i(n+\frac{1}{2})x}).$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \Im(e^{i(k+\frac{1}{2})x}) = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \Im\left(e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}\right) \\ &= \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \Im\left(e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right) = \left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2. \end{aligned}$$

De fait,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{C}_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2.$$

On en déduit donc que

$$\forall \alpha \in]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha], |\tilde{C}_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1) \sin^2(\alpha/2)}.$$

Donc la série de fonctions converge uniformément.

3. Disons $T > 0$, la période. Fixons $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[-T, 2T]$: il existe donc $\eta > 0$, $\forall x, y \in [-T, 2T], |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On peut supposer $\eta \leq T$ (si $\eta > T$, la propriété est vraie pour T en particulier). Soit donc x, y tel que $|x - y| \leq \eta$. x est alors compris entre kT et $(k+1)T$ pour un certain k . Alors $x' = x - kT \in [0, T]$. Puisque $|x - y| \leq \eta \leq T$, on a $y' := y - kT \in [-T, 2T]$. Puisque $|x' - y'| = |x - y| \leq \eta$ et que $x', y' \in [-T, 2T]$, on a $|f(x') - f(y')| \leq \varepsilon$. Mais $f(x') = f(x)$, $f(y') = f(y)$ donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
4. Déjà, on remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \tilde{S}_n(x - t) dt.$$

Ainsi, on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, C_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \tilde{C}_n(x - t) dt.$$

Par le changement de variable $u = x - t$ et la 2π -périodicité de l'intégrande, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, C_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \tilde{C}_n(x - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) \tilde{C}_n(t) dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par la question précédente, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On peut supposer que $\eta < \pi$. Une fonction continue périodique étant bornée, notons M un majorant de $|f|$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |f(x) - C_n(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ((f(x - t) - f(x)) \tilde{C}_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} 2M \tilde{C}_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varepsilon \tilde{C}_n(t) dt \\ &\leq \frac{2M}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} \tilde{C}_n(t) dt + \varepsilon. \end{aligned}$$

La convergence uniforme de $(\tilde{C}_n)_n$ assure que l'intégrale est bornée par ε à partir d'un certain rang. On a la convergence uniforme voulue.