

Lebesgue : convergence dominée et espaces L^p

Thomas CHEN

Dans la suite, $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable. Sauf mention du contraire, nos mesures seront positives.

1 Théorème de convergence dominée

On souhaite démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de fonctions $E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables telle que :

- $(f_n)_n$ converge simplement μ pp, disons vers f .
- Presque partout, il existe $g \geq 0 : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $|f_n| \leq g$ μ pp et $\int g d\mu < +\infty$.

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

1. Soit $f : E \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une suite croissante de fonctions étagées qui converge simplement vers f . On pourra subdiviser $[0, +\infty]$ avec des intervalles de la forme $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ où $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n2^n \rrbracket$.
2. (Théorème de Beppo-Levi) Soit μ une mesure positive sur $(E, \mathcal{E})$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions et mesurables de $E \rightarrow [0, +\infty]$.
 - (a) Montrer que la suite $\left(\int f_n d\mu \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. En déduire que

$$\int \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n}_{=: f} d\mu \geq \alpha$$

(on s'assurera de l'existence de cette intégrale).

- (b) Soit s une fonction étagée telle que $0 \leq s \leq f$ et soit $c \in]0, 1[$. Soit $E_n := \{x \in E : f_n(x) \geq cs(x)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est mesurable.
 - ii. Montrer que la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que E est réunion des $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, x \in E_n$.
- (d) Montrer que pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on a

$$f_n(x) \geq c s(x) \mathbb{1}_{E_n}(x)$$

et en déduire que $\alpha \geq c \int s d\mu$.

(e) En déduire que $\alpha = \int f d\mu$.¹

3. En déduire le théorème de Fubini-Tonelli pour les séries numériques : pour tout $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ suite positive, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p \in \mathbb{N}} u_{n,p} = \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n,p}.$$

4. (Théorème de Fatou) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $E \rightarrow [0, +\infty]$. Appliquer Beppo-Levi sur la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = \inf_{k \geq n} f_k$ pour montrer que

$$\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n.$$

5. On prend les notations du théorème de convergence dominée. Soit $\varphi_n = 2g - |f_n - f|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Appliquer le théorème de Fatou pour obtenir

$$0 \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int |f_n - f| \geq 0$$

puis conclure.

2 Espaces de Lebesgue

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sauf mention du contraire, $p \in [1, +\infty] = [1, +\infty[\cup \{+\infty\}$. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et μ une mesure positive sur E . On note $\text{Mes}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{T}$ -mesurables de X dans $\mathbb{K}$. Pour $p \in [1, +\infty]$, on note, pour tout $f \in \text{Mes}(X, \mathbb{K})$,

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} & \text{si } p < +\infty \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| := \inf \{c \in \mathbb{R} : \mu(|f(x)| > c) = 0\} & \text{si } p = +\infty \end{cases} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

On appelle $\|\cdot\|_p$ la norme p .

On note alors, pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\mathcal{L}^p(E, \mathbb{K}) = \{f \in \text{Mes}(E, \mathbb{K}) : \|f\|_p < +\infty\}$. Enfin, pour $p \in [1, +\infty]$, on appelle exposant conjugué de p l'élément $q \in \mathbb{R}$ de sorte que

- $q = \infty$ si $p = 1$
- $q = 1$ si $p = \infty$
- q vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i.e. $q = \frac{p}{p-1}$.

1. (Inégalité de Young) Soit a, b deux réels positifs. Soit $p \in]1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. Montrer que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. *Indication. On utilisera, au choix, la convexité de $\exp$ ou la concavité de $\ln$.*
2. (Inégalité de Hölder). Soit $p \in [1, +\infty]$ et q l'exposant conjugué de p . Soit $f \in \mathcal{L}^p(E, \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{L}^q(E, \mathbb{K})$.
- (a) Dans cette question, $p \in]1, +\infty[$. On suppose que la norme p de f vaut 1 ainsi que la norme q de g . A l'aide de l'inégalité de Young, montrer que $fg \in \mathcal{L}^1(E, \mathbb{K})$ et $\|fg\|_1 \leq 1$.
- (b) On se place dans le cas général. Montrer alors que

$$fg \in \mathcal{L}^1(E, \mathbb{K}) \text{ et } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

1. On rappelle que pour f , une fonction mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $[0, +\infty]$, son intégrale par rapport à la mesure μ est

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \text{ étagée}, 0 \leq s \leq f \right\}.$$

3. (Inégalité de Minkowski) Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $f, g \in \mathcal{L}^p(E, \mathbb{K})$. Montrer que $f + g \in \mathcal{L}^p(E, \mathbb{K})$ et

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Indication. On écrira $\|f + g\|_p^p = \int_E |f + g| |f + g|^{p-1} d\mu$ dans le cas $p \in]1, +\infty[$.

4. En déduire que $\mathcal{L}^p(E, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
5. Soit $f \in \text{Mes}(E, \mathbb{K})$. On suppose que f est positive et que $\int_E f d\mu = 0$. Montrer que $f = 0$ μ -presque partout.
6. Montrer que f n'est pas nécessairement identiquement nulle.
7. Quelle propriété manque-t-il pour que $(\mathcal{L}^p(E, \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ soit un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ?
8. On note $\sim$ la relation défini par

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K}), f \sim g \iff f - g = 0 \text{ } \mu\text{-p.p..}$$

Montrer que $\sim$ c'est une relation d'équivalence.

On note alors $L^p(E, \mathbb{K})$ l'espace $\mathcal{L}^p(E, \mathbb{K}) / \sim$ et π la projection canonique. Pour $f \in L^p(E, \mathbb{K})$, on note $\|f\|_p = \|g\|_p$ où g est un représentant de f .

9. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est bien définie de $L^p(E, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}^+$.

On admet alors que l'inégalité de Hölder et de Minkowski tiennent en changeant les $\mathcal{L}$ curvilignes en dans L droit.

10. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(E, \mathbb{K})$. *On montrera au passage que cette application est bien définie.*
11. En déduire que $(L^p(E, \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et que π est une isométrie.

Pour ces raisons, on confond f et sa classe dans L^p . Ainsi, on dira : soit $f \in L^p(E, \mathbb{K})$ et on écrira

$$\int_E f d\mu = \int_E f(x) d\mu(x)^2.$$

Il est donc absolument pas rigoureux d'évaluer une fonction de L^p ! Écrire $f(x)$ quand $f \in L^p$ n'a pas de sens. Si l'on veut l'évaluer, on doit dire « soit $F \in L^p$ et $f \in \mathcal{L}^p$ un représentant de F . Alors $f(x)$ etc. ».

Maintenant, on va montrer un résultat plus fort que « les espaces de Lebesgues sont des espaces vectoriels normés ». En fait, ce sont des espaces de Banach : c'est le théorème de Riesz-Fischer. Par commodité, on notera L^p au lieu de $L^p(E, \mathbb{K})$ et *idem* pour $\mathcal{L}^p$.

12. Traitons le cas $p = +\infty$. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}^\infty$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n soit un représentant de F_n . Soit $\varepsilon > 0$.

- (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, il existe un négligeable de E noté $A_{p,q}$ tel que

$$\forall x \in E \setminus A_{p,q}, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

- (b) Rappeler pourquoi une union dénombrable de négligeable est négligeable.

- (c) En déduire qu'il existe un négligeable A telle que pour tout $x \in E \setminus A$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$.

- (d) En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement, et ce, vers une fonction mesurable.

- (e) Montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty$ puis conclure.

13. Traitons le cas où p est fini. On prend les mêmes notations que la question précédente en changeant ∞ par p .

2. la première notation est un peu plus rigoureuse quoiqu'abusive, la deuxième est un abus dans un abus

- (a) Montrer qu'il existe une extraction φ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq \varphi(k), \|f_n - f_{\varphi(k)}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$.³
- (b) On note $g_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} |f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}|$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. Montrer que $(g_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction mesurable g à valeurs dans $[0, +\infty]$.
- (c) Montrer que chaque g_ℓ pour $\ell \in \mathbb{N}$ est de norme p finie.
- (d) En déduire que g est dans L^p . *On pourra utiliser le théorème de Fatou.*
- (e) Soit $A = \{x \in E : g(x) < +\infty\}$. Montrer que $\mu(E \setminus A) = 0$. En déduire que $(f_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction mesurable f définie par

$$f: E \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \begin{cases} f_{\varphi(0)}(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} (f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (f) Conclure.

3. Ce fait est possible pour n'importe quelle suite de Cauchy ! On n'utilise pas les espaces de Lebesgue ici.