

Loi du 0–1 de BOREL

Thomas CHEN

On présente ici un exercice classique : le lemme de Borel-Cantelli. Il existe beaucoup d'applications que l'on ne détaillera pas dans ce document.

Exercice 1. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite d'événements. On définit

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k}_{=: B_n}.$$

1. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que ω réalise $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$ si, et seulement si, $\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\}$ est de cardinal infini (dit en français, A_n est réalisé une infinité de fois).
(b) Lemme de Borel-Cantelli. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 0$.
2. Loi du zéro-un de Borel. On suppose que les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des événements indépendants. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n)$ vaut 0 ou 1 selon que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge ou diverge.

Corrigé :

1. Par définition, on a ω réalise $\limsup A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, \omega \in A_k$.
2. Il est aisé de montrer que $(B_n)_n$ est décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante, on a donc

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

Or, par σ -sous-additivité,

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

3. Si la série converge, on a déjà le résultat et pas besoin d'indépendance. Prenons donc la série divergente. L'astuce est d'utiliser l'inégalité de convexité $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déjà,

$$\Omega \setminus B_n = \Omega \setminus \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \Omega \setminus A_k.$$

Fixons alors $N \geq n$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega \setminus B_n) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^N \Omega \setminus A_k\right) \\ &\stackrel{\text{II}}{=} \prod_{k=n}^N (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\ &\leq \prod_{k=n}^N \exp(-\mathbb{P}(A_k)) \\ &= \exp\left(-\sum_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k)\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\Omega \setminus B_n) = 0$. Par σ -sous-additivité, on a donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega \setminus B_n\right) = 0.$$

En passant au complémentaire, on a le résultat.