Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1.
1. Soit I un ensemble (arbitraire) et $(\mathcal{A}_i, i \in I)$ une famille de tribus d'un ensemble E. Justifier que $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ est encore une tribu.
2. Soit $\mathcal{A}$ une famille de parties de E. En déduire que la tribu $\sigma(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$, définie comme la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$, satisfait l'égalité :
$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{T}\text{tribu}:\mathcal{A}\subset\mathcal{T}} \mathcal{T}.$$
3. Montrer que σ est croissante par rapport à l'inclusion : Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux familles de parties de E telle que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, alors $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$.
4. Montrer que la réunion de deux tribus n'est pas toujours une tribu.
5. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus sur E. Montrer que
$$\sigma(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) = \sigma(\{A\cup B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}) = \sigma(\{A\cap B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

Exercice 2.
1. Soit $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ une partition finie d'un ensemble E. Décrire la tribu $\sigma(\mathcal{A})$. Quel est son cardinal ?
2. Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ une partition dénombrable d'un ensemble E. Décrire la tribu $\sigma(\mathcal{A})$.

Exercice 3. On considère sur $\mathbb{R}$ la tribu $\mathcal{A} = \sigma(\{x\}|x \in \mathbb{R})$ engendrée par les singletons. Décrire les éléments de $\mathcal{A}$.

Exercice 4. Soit $f : E \to F$ une application et $\mathcal{B}$ une tribu sur F. Montrer que $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B)|B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur E.[1]

Exercice 5. Pour chacune des familles d'ensembles suivantes, déterminez s'il s'agit ou non d'une tribu.
1. $\mathcal{C}_1 = \{O \mid O \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n\}$.
2. $\mathcal{C}_2 = \left\{\{u = (u_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} | (u_1, \ldots, u_k) \in A\} | A \subset \{0;1\}^k\right\}$, $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.
3. $\mathcal{C}_3 = \bigcup_{k\geq 1}\left\{\{u = (u_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} | (u_1, \ldots, u_k) \in A\} | A \subset \{0;1\}^k\right\}$.
4. $\mathcal{C}_4 = \{A \subset \mathbb{N}^* | A \text{ a une densité}\}$. (On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^*$ a une densité si $n^{-1}\text{Card }(A \cap [\![1;n]\!])$ a une limite lorsque n tend vers l'infini.)

Exercice 6. Soit $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B})$ deux ensembles mesurables, et $f : E \to F$ une application. Supposons qu'il existe une famille de parties $\mathcal{C}$ de E telle que
$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \text{ pour tout } B \in \mathcal{C}, \text{ avec } \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}.$$
Montrer que f est mesurable.

Exercice 7. Soit $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) | A = -A\}$ l'ensemble des boréliens symétriques.
1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une tribu.
2. Quelles applications parmi $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto x^3$ sont mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$? de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$? de $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$?

1. C'est la tribu engendrée par f, quelquefois notée $\sigma(f)$ (si $\mathcal{B}$ est clair dans le contexte).

Exercice 8. Soit a un réel. On note δ_a la masse de Dirac en a sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, définie pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A$ et 0 sinon. Montrer que δ_a est une mesure.

Exercice 9. On considère à nouveau sur $\mathbb{R}$ la tribu $\mathcal{A} = \sigma(\{x\} | x \in \mathbb{R})$ engendrée par les singletons. Soit $\nu : \mathcal{A} \to [0; 1]$ définie par $\nu(A) = 0$ si A est dénombrable et 1 sinon. Montrer que ν est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

Exercice 10. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ une fonction mesurable et μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$. Montrer que

$$\mu_f : \begin{array}{l} \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}^+ \\ B \mapsto \mu(f^{-1}(B)) \end{array}$$

définit une mesure sur $(F, \mathcal{B})$: on l'appelle la mesure image de μ par f.

Exercice 11. Soient μ une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $F(x) = \mu(]-\infty, x])$.

1. Montrer que F est croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites en $\pm\infty$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que F est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$. En déduire que $\{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) \neq 0\}$ (l'ensemble des atomes de μ) est dénombrable.

Exercice 12. (Lemme de Borel-Cantelli) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. On appelle limite supérieure de la suite d'ensemble $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\limsup A_n$ l'ensemble $\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{m\geq n} A_m$. On suppose que $\sum_n \mu(A_n) < \infty$. Montrer que $\mu(\limsup A_n) = 0$.

Exercice 13. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient $f, g : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables.

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une union dénombrable d'intervalles ouverts.
2. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme une union dénombrable de pavés ouverts.
3. Montrer que l'application $\Phi : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ définie par $\Phi(x) = (f(x), g(x))$ est mesurable.
4. En déduire que $f + g, fg, f/g$ (si $g \neq 0$) sont mesurables.

Exercice 14. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in E \,|\, f_n(x) \text{ converge}\}$$

est un élément de $\mathcal{A}$.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est borélienne.