Corrigé : Centrale PC 2023 Maths 1

Thomas Chen

Dans toute la suite, si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $[A]_{i,j}$ son coefficient en (i,j) pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Si X est un vecteur colonne (ou matrice colonne) de taille n, on note $[X]_i$ son coefficient en i pour $i \in [\![1,n]\!]$.

I. Résultats préliminaires

1. On a
$$[AX]_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{[A]_{i,j}[X]_j}_{\geq 0} \geq 0.$$
Si on a $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $[AX]_i = 0$, alors $\forall j \in [\![1,n]\!], \underbrace{[A]_{i,j}}_{\neq 0}[X]_j = 0$. Ainsi,
$$\left(\exists i \in [\![1,n]\!], [AX]_i = 0\right) \Longrightarrow X = 0.$$
Par contraposée, comme on a $X \neq 0$ par hypothèse,
$$\forall i \in [\![1,n]\!], [AX]_i \neq 0$$
donc $\boxed{AX > 0}$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors
$$(|AB|)_{i,j} = \left|\sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |[A]_{i,k}||[B]|_{k,j} = \left(|A||B|\right)_{i,j}.$$
Ainsi,
$$\boxed{|AB| \leq |A||B|}.$$

2. On a
$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$
avec égalité si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $X = \lambda Y$. On applique donc Cauchy-Schwarz pour les vecteurs $|Z|$ et $|W|$ où $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$; $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$: on obtient alors
$$\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} |z_k||w_k|}_{\geq 0}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2.$$
En passant à la racine carrée, on a
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} |z_k||w_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right)^{1/2}}.$$

3. Soit z un tel complexe. *Deux rédactions sont possibles* a priori.
   - On a $|1+z| \leq 1+|z|$ par inégalité triangulaire. Or, on est dans le cas d'égalité qui n'a lieu que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $z = \lambda \times 1$ donc $z \in \mathbb{R}^+$.
   - On a
   $$|1+z|^2 = (1+z)(1+\overline{z}) = 1 + |z|^2 + 2\Re(z)$$
   et
   $$(1+|z|)^2 = 1+|z|^2+2|z|$$
   donc $\Re(z) = |z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$: on a donc $\Im(z) = 0$ et $\Re(z) = |z|$ $\boxed{\text{donc } z \text{ est un réel positif}}$.

   On privilégie la deuxième rédaction puisque le but de la question est de démontrer le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

   Pour conclure, soit z, z' deux tels nombres complexes. Alors
   $$\frac{|z+z'|}{|z|} = \left|\frac{z+z'}{z}\right| = \left|1+\frac{|z'|}{|z|}\right| = 1 + \frac{|z'|}{|z|}.$$
   Par ce qu'on vient de démontrer, il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\dfrac{z'}{z} = \alpha$ *i.e.* $\boxed{z' = \alpha z}$.
4. Comme tous les $(z_i)_{1\leq i\leq n}$ sont non tous nuls, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $z_i \neq 0$. Quitte à échanger les termes, supposons que $z_1 \neq 0$. Soit maintenant $j \in [\![2,n]\!]$. Alors
   $$\sum_{k=1}^n |z_k| = |z_1| + |z_j| + \sum_{k=2,k\neq j}^n |z_k|$$
   et
   $$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| = \left|z_1 + z_j + \sum_{k=2,k\neq j}^n z_k\right| \leq |z_1+z_j| + \left|\sum_{k=2,k\neq j}^n z_k\right| \leq |z_1+z_j| + \sum_{k=2,k\neq j}^n |z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$
   Ainsi,
   $$|z_1+z_j| + \sum_{k=2,k\neq j}^n |z_k| = |z_1| + |z_j| + \sum_{k=2,k\neq j}^n |z_k|$$
   donc
   $$|z_1+z_j| = |z_1| + |z_j|.$$
   Il existe donc $\alpha_j \in \mathbb{R}^+$ tel que $\underline{z_j = \alpha_j z_1}$. Comme z_1 s'écrit $re^{i\theta}$, on a $|z_j| = \alpha_j r$ donc
   $$z_j = e^{i\theta}|z_j|.$$
   Cette égalité tient pour $j=1$ donc $\boxed{\text{il existe donc bien } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall k \in [\![1,n]\!], z_k = e^{i\theta}|z_k|}$.

II. Matrices strictement positives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

5. On a
   $$\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$$
   donc
   $$\boxed{\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = a^2+d^2-2ad+bc = (a-d)^2+bc}.$$
6. Comme $bc > 0$ et $(a-d)^2 \geq 0$, on a $(a-d)^2 + bc > 0$ donc $\boxed{\Delta > 0}$. Ainsi, χ_A possède deux racines réelles distinctes, que l'on note $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ avec $\lambda < \mu$. Ainsi, χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable :

$$\boxed{A \text{ est semblable à la matrice } \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}.$$

7. Comme $\lambda + \mu = \mathrm{tr}(A) = a + d > 0$, on a $\mu > -\lambda$ donc $\mu > \max(\lambda, -\lambda) = |\lambda|$.
8. Soit $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que
$$A = PDP^{-1} \ ; \ D = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^kP = D^k$ donc $(A^k)_k$ converge si, et seulement si, $(D^k)_k$ converge par continuité du produit matriciel.
   - Si $\mu < 1$, alors par la question précédente,
   $$0 \leq |\lambda| < \mu < 1$$
   donc
   $$\mu^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \ ; \ \lambda^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
   donc (A^k) converge vers la matrice nulle.
   - Si $\mu > 1$, la suite $(D^k)_k$ diverge.
   - Si $\mu = 1$, alors $0 < |\lambda| < \mu = 1$ donc $\lambda^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\mu^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $(D^k)_k$ converge vers $E_{1,1}$ donc $(A^k)_k$ converge vers une matrice non nulle.

   Par disjonction de cas, $\boxed{(A^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge vers une matrice non nulle si, et seulement si, } \mu = 1}$.
   Dans le cas de convergence, $L = PE_{1,1}P^{-1}$ par continuité du produit matriciel et comme P et P^{-1} sont inversible, $\boxed{\mathrm{rg}(L) = \mathrm{rg}(E_{1,1}) = 1}$. On a aussi $E_{1,1}^2 = E_{1,1}$
   $$L^2 = PE_{1,1}^2P^{-1} = PE_{1,1}P^{-1} = L$$
   donc $\boxed{L \text{ est la matrice d'un projecteur}}$.
9. La matrice B est strictement positive donc par la question 6, elle est diagonalisable. 1 est valeur propre pour le vecteur propre $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ puisque
$$(B - I_2)\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Comme $\mathrm{tr}(B) = 2 - \alpha - \beta = 1 + \lambda$ où λ est la seconde valeur propre de B, on a
$$\lambda = 1 - \alpha - \beta$$
et
$$\boxed{B \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha - \beta \end{pmatrix}}.$$
Pour trouver S, il suffit de trouver un vecteur propre pour la valeur propre $1 - \alpha - \beta$. On a
$$B - (1 - \alpha - \beta)I_2 = \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$
donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B pour la valeur propre $1 - \alpha - \beta$. Ainsi, par le théorème de changement de bases,
$$\boxed{A = SDS^{-1} \ ; \ S = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}}.$$

10. Par la question 8, en reprenant les notations précédente, $\mu = 1$ donc $(B^k)_k$ converge vers $SE_{1,1}S^{-1}$. On a

$$S^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}$$

donc par produit matriciel,

$$\boxed{\Lambda = SE_{1,1}S^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}}.$$

III. Normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; rayon spectral

11.
- $\|\cdot\|_\infty$ est bien une <u>application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}^+$</u>.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$\|\lambda A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |\lambda [A]_{i,j}| = \max_{1\leq i\leq n} \underbrace{|\lambda|}_{\geq 0} \sum_{j=1}^n |[A]_{i,j}| = |\lambda| \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |[A]_{i,j}| = |\lambda| \|A\|_\infty.$$

On a <u>l'homogénéité de la norme</u>.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\|A\|_\infty = 0$. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^n \underbrace{|[A]_{i,j}|}_{\geq 0} = 0$ donc

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], |[A]_{i,j}| = 0$$

donc

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], [A]_{i,j} = 0.$$

On a la <u>séparation de la norme</u>.
- Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^n |[A+B]_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |[A]_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |[B]_{i,j}| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |[A]_{i,j}| + \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |[B]_{i,j}| = \|A\|_\infty + \|B\|_\infty.$$

Comme ceci tient pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a donc

$$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |[A+B]_{i,j}| \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$$

i.e.

$$\|A+B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty.$$

On a <u>l'inégalité triangulaire.</u>
- Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]$,

$$|[AB]_{i,j}| = \left|\sum_{k=1}^n [A]_{i,k} B_{k,j}\right|$$

donc

$$\sum_{j=1}^n |[AB]_{i,j}| = \sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n [A]_{i,k}[B]_{k,j}\right|.$$

Soit i tel que la quantité $\sum_{j=1}^n |[AB]_{i,j}|$ soit maximale. Alors

$$\|AB\|_\infty = \sum_{j=1}^n |[AB]_{i,j}| = \sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n [A]_{i,k}[B]_{k,j}\right|.$$

Or par inégalité triangulaire,

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,j}\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|[A]_{i,k}[B]_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n}|[A]_{i,k}|\underbrace{\sum_{j=1}^{n}|[B]_{k,j}|}_{\leq\|B\|_\infty} \leq \|B\|_\infty \underbrace{\sum_{k=1}^{n}|[A]_{i,k}|}_{\leq\|A\|_\infty} \leq \|A\|_\infty\|B\|_\infty.$$

Ainsi,

$$\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty\|B\|_\infty$$

donv $\|\cdot\|_\infty$ est bien sous-multiplicative.

Finalement, $\boxed{\|\cdot\|_\infty \text{ est bien une norme sous-multiplicative}}$.

12. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j}, B = (b_{i,j})_{i,j}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors

$$\|AB\|_2^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\right)^2 \underset{\star}{\leq} \sum_{1\leq i,j\leq n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2 = \|A\|_2^2\|B\|_2^2.$$

$(\star)$ vient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz de la question 2. En passant à la racine carrée, on a

$$\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$$

donc $\boxed{\|\cdot\|_2 \text{ est sous-multiplicative}}$.

13.
- ν est bien une application à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$\nu(\lambda A) = N(S^{-1}\lambda AS) = |\lambda|N(S^{-1}AS) = |\lambda|\nu(A).$$

  On a l'homogénéité de la norme.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\nu(A) = 0$. Alors

$$\nu(A) = 0 \iff N(S^{-1}AS) = 0 \iff S^{-1}AS = 0 \iff A = 0.$$

  On a la séparation de la norme.
- Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\nu(A+B) = N(S^{-1}(A+B)S) = N(S^{-1}AS + S^{-1}BS) \leq N(S^{-1}AS) + N(S^{-1}BS) = \nu(A) + \nu(B).$$

  On a l'inégalité triangulaire.
- Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\nu(AB) = N(S^{-1}ABS) = N(S^{-1}ASS^{-1}BS) \ \leq N(S^{-1}AS)N(S^{-1}BS) = \nu(A)\nu(B)$$

  donc ν est bien sous-multiplicative.

Finalement, $\boxed{\nu \text{ est bien une norme sous-multiplicative}}$.

14. Les matrices A et $S^{-1}AS$ sont semblables donc elles ont le même spectre. Ainsi,

$$\boxed{\rho(A) = \rho(S^{-1}AS)}.$$

15.
- Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, χ_A est scindé par le théorème de d'Alembert-Gauss. Ainsi, $\boxed{A \text{ est trigonalisable}}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme A est trigonalisable, il existe $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ tel que A et T soit semblable. Le spectre de A se lit sur la diagonale de T.
  Soit λ vérifiant $|\lambda| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \left|[T]_{i,i}\right|$. Alors $\rho(A) = |\lambda|$ donc $\rho(A)^k = |\lambda|^k$.
  Par ailleurs, A^k est semblable à T^k donc $\rho(A^k) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \left|[T]_{i,i}^k\right| = \left(\max\limits_{1\leq i\leq n} \left|[T]_{i,i}\right|\right)^k$ par croissance de $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^k \in \mathbb{R}^+$.
  Ainsi,
  $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \rho(A)^k = \rho(A^k)}.$$
- Comme αA est semblable à $\alpha T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$, on a
  $$\rho(\alpha A) = \max_{1\leq i\leq n} \left|[\alpha T]_{i,i}\right| = |\alpha| \max_{1\leq i\leq n} \left|[T]_{i,i}\right| = |\alpha|\rho(A).$$
  Ainsi,
  $$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{C}, \rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A)}.$$

16. Soit N une norme sous-multiplicative.
Suivons l'indication. Soit λ une valeur propre de A. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre non nul de A pour la valeur propre λ. Alors
$$AXX^T = \lambda XX^T.$$
Notons $H = XX^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\boxed{AH = \lambda H}$. Montrons que H est non nulle. Pour tout $i \in [\![1,n]\!], [H]_{i,i} = x_i^2$. Comme X est non nulle, x_{i_0} est non nul pour un certain $i_0 \in [\![1,n]\!]$ donc $[H]_{i_0,i_0} \neq 0$: $\boxed{H \text{ est non nulle}}$.
Concluons. On a
$$N(AH) \leq N(A)N(H)$$
i.e.
$$|\lambda| N(H) \leq N(A)N(H).$$
Comme H est non nulle, $N(H) \neq 0$ donc $\lambda \leq N(A)$. Cela est vrai pour toute valeur propre de A donc par passage au maximum,
$$\boxed{\rho(A) \leq N(A)}.$$

17. On rappelle que si une matrice M s'écrit en colonne $M = (C_1 \mid C_2 \mid \cdots \mid C_n)$, et qu'on a une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(d_1, \cdots, d_n)$, alors
$$MD = (d_1C_1 \mid d_2C_2 \mid \cdots \mid d_nC_n).$$
Si M s'écrit en ligne $\begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix}$ alors
$$DM = \begin{pmatrix} d_1L_1 \\ \hline d_2L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline d_nL_n \end{pmatrix}$$
.
Ainsi,
$$\boxed{D_\tau^{-1} T D_\tau = \operatorname{diag}(1, \tau^{-1}, \cdots, \tau^{1-n}) T \operatorname{diag}(1, \tau, \cdots, \tau^{n-1}) = \left(\tau^{j-i}[T]_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}}.$$

18. $\boxed{\textbf{Il y a une coquille dans l'énoncé : on ne peut pas définir } D_\tau \textbf{ lorsque } \tau = 0\,\textbf{!}}$
Soit donc $\tau \neq 0$. On a

$$\|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|\tau|^{j-i}\underbrace{|[T]_{i,j}|}_{=0 \text{ si } i>j} = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=i}^{n}|\tau|^{j-i}\,|[T]_{i,j}| = \max_{1\leq i\leq n}\left(|[T]_{i,i}| + |\tau|\sum_{j=i+1}^{n}|\tau|^{j-i-1}\,|[T]_{i,j}|\right).$$

On a écrit le maximum de deux quantités positives donc

$$\|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n}|[T]_{i,i}| + \underbrace{|\tau|\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=i+1}^{n}|\tau|^{j-i-1}\,|[T]_{i,j}|\right)}_{=O_{\tau\to 0}(1)}.$$

Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall 0 < |\tau| \leq \delta, |\tau|\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=i+1}^{n}|\tau|^{j-i-1}\,|[T]_{i,j}|\right) \leq \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\boxed{\exists \delta > 0, \forall \tau \in]-\delta,\delta[\setminus\{0\}, \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T)+\varepsilon}.$$

19. Soit P tel que $A = PTP^{-1}$ où $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$. Par la question 13, $M \mapsto \|(PD_\delta)^{-1}M(PD_\delta)\|_\infty$ est une norme sous-multiplicative, qu'on appelle N_δ (δ dépend de A). Alors par la question précédente,

$$N_\delta(A) = \|D_\delta^{-1}P^{-1}APD_\delta\|_\infty = \|D_\delta^{-1}TD_\delta\|_\infty \leq \rho(T)+\varepsilon = \rho(P^{-1}AP)+\varepsilon = \rho(A)+\varepsilon$$

donc $\boxed{N_\delta(A) \leq \rho(A)+\varepsilon}$.

20. - $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $(A^k)_k$ converge vers la matrice nulle. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et X un vecteur propre de A pour la valeur propre λ. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, A^kX = \lambda^kX.$$

Comme $(A^k)_k$ tend vers 0, nécessairement, $(\lambda^kX)_k$ tend vers 0. Comme X est non nul, la suite $(\lambda^k)_k$ tend vers 0 donc $\boxed{|\lambda| < 1}$.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\rho(A) < 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\varepsilon > 0$ de sorte que $\rho(A)+\varepsilon < 1$: par exemple, on prend $\varepsilon = \dfrac{1-\rho(A)}{2}$. On aura alors $\rho(A)+\varepsilon = \dfrac{1+\rho(A)}{2} < 1$.
Soit N_A une norme sous-multiplicative telle que $N_A(A) \leq \rho(A)+\varepsilon$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, N_A(A^k) \leq (N_A(A))^k = (\rho(A)+\varepsilon)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $(N_A(A^k))_k$ tend vers 0 donc comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie,

$$\boxed{A^k \text{ tend vers 0 pour n'importe quelle norme}}.$$

IV. Théorème de Perron-Frobenius pour une classe de matrices symétriques positives

21. Vu que A est une matrice symétrique réelle, par le $\boxed{\text{théorème spectral}}$, $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$ et en base orthonormée. En particulier, $\boxed{\text{les espaces propres de } A \text{ sont deux à deux orthogonaux}}$.
22. Si $r = 0$, alors toutes les valeurs propres de A sont nulles. Comme A est diagonalisable, A serait semblable à la matrice nulle donc A serait nulle. Comme A n'est pas nulle, par contraposée, $r \neq 0$ donc $\boxed{r > 0}$.

23. Soit $\mu_1, \cdots, \mu_n$ les valeurs propres de A triés dans l'ordre croissant (possible car ce sont des réels par le théorème spectral). Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associées aux valeurs propres respectives de A. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur unitaire. Alors X s'écrit

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

donc

$$X^T AX = (X \mid AX) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j(e_i \mid Ae_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j\mu_j \underbrace{(e_i \mid e_j)}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\lambda_i^2 \leq \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Or

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = X^T X = \|X\|_2^2 = 1$$

car X est choisit unitaire donc

$$\boxed{X^T AX \leq \mu}.$$

24. Si X est un vecteur propre associée à la valeur propre μ, alors $\boxed{X^T AX = \mu X^T X = \mu}$ car $X^T X = 1$.

Si $X^T AX = \mu$, alors l'inégalité obtenue à la question précédente

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i\lambda_i^2 \leq \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

est une égalité donc

$$\sum_{i=1}^{n} (\mu - \mu_i)\lambda_i^2 = 0.$$

Comme μ est la plus grande valeur propre, on a une somme de termes positifs donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], (\mu - \mu_i)\lambda_i^2 = 0.$$

Soit $I = \{i \in [\![1, n]\!] : \mu_i < \mu\}$. Alors I est une partie non vide de $\mathbb{N}$ majorée donc elle a un plus grand élément i_0. Ainsi, $\forall i \leq i_0, \mu_i \leq \mu_{i_0} < \mu$ donc

$$\forall i \in [\![1, i_0]\!], \lambda_i = 0 \ ; \ \forall i \in [\![i_0 + 1, n]\!], \mu_i \geq \mu.$$

Dans l'assertion précédente, l'inégalité est une égalité par maximalité de μ. Or, puisque $\forall i \in [\![i_0 + 1, n]\!], \mu_i = \mu$, $e_{i_0+1}, \cdots, e_n$ sont des vecteurs propres de A pour la valeur propre μ donc

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=i_0+1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Vect}\,(e_{i_0+1}, \cdots, e_n) \in \mathcal{E}_\mu(A)$$

donc $\boxed{X \text{ est un vecteur propre de } A \text{ pour la valeur propre } \mu}$. On a l'équivalence souhaitée.

25. On a

$$|X^T AX| = \left| \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{[A]_{i,j}}_{\geq 0}[X]_i[X]_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}|[X]_i||[X]_j| = |X|^T A|X|.$$

Comme $|X| \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par la question 23, on a $|X|^T A|X| \leq \mu$ donc

$$\boxed{|X^T AX| \leq |X|^T A|X| \leq \mu}.$$

26. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Quitte à le diviser par sa norme, prenons X un vecteur unitaire. Alors $|X^T AX| = |\lambda||X^T X| = |\lambda| \leq \mu$.

    De l'inégalité $\boxed{|\lambda| \leq \mu}$, on passe au maximum pour avoir
$$\boxed{\rho(A) = r \leq \mu}.$$
    L'autre inégalité est claire puisque
$$\mu \leq |\mu| \leq \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\} = \rho(A)$$
    donc
$$\boxed{r = \mu}.$$

27. Soit X un tel vecteur propre. Alors $AX = rX$ donc
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} \underbrace{[A]_{i,j}}_{\geq 0} |[X]_j| = \sum_{j=1}^{n} \left| \underbrace{[A]_{i,j}[X]_j}_{\geq 0} \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}[X]_j \right| = |[AX]_i| = r\,|[X]_i|\,.$$
    Ainsi, $\boxed{A|X| = r|X|}$. Puisque $\|X\|_2 = \||X|\|_2$, $\boxed{|X| \text{ est aussi unitaire}}$. Enfin, par la question 1, comme $A > 0$ et $|X| \geq 0$ avec $|X| \neq 0$, on a $A|X| > 0$ donc $r||X > 0$. Comme $r > 0$, cela donne $\boxed{|X| > 0}$.

28. Supposons que $X \neq |X|$ et $X \neq -|X|$. Cela signifie que X possède une composante positive et négative au moins. Ainsi, $X + |X|$ possède une composante nulle au moins. Or, $X + |X|$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre r donc
$$A(X + |X|) = r(X + |X|).$$
    Or, $X + |X| \neq 0$ et est positif (puisque $\forall x \in \mathbb{R}, x + |x| \geq 0$). On en déduit que $r(X + |X|) > 0$ donc comme $r \neq 0$, toutes les composantes de $X + |X|$ sont strictement positives. Contradiction.

    Ainsi, $\boxed{X = |X| \text{ ou } X = -|X|}$.

29. Supposons que $\dim(\ker(A - rI_n)) \geq 2$. Alors cet espace vectoriel possède une base orthonormée. Soit donc X, Y deux vecteurs propres de A pour la valeur propre r orthonormée. On a $X^T Y = 0$, $AX = rX$ et $AY = rY$. Par la question précédente, il existe $\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ tel que $X = \varepsilon_1|X|$ et $Y = \varepsilon_2|Y|$. On a donc
$$X^T Y = \underbrace{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\neq 0} |X|^T|Y| = 0.$$
    Or
$$|X|^T|Y| = \sum_{i=1}^{n} \left|[X]_i\right|\left|[Y]_i\right|$$
    donc
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \left|[X]_i\right|\left|[Y]_i\right| = 0.$$
    Par la question 27, $|X| > 0$ et $|Y| > 0$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!], \left|[X]_i\right|\left|[Y]_i\right| > 0$. Contradiction.

    Ainsi, $\dim(\ker(A - rI_n)) \leq 1$ donc
$$\boxed{\dim(\ker(A - rI_n)) = 1}.$$

30. *J'imagine qu'on demande la multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.* Comme A est diagonalisable, la multiplicité de r en tant que racine de χ_A coïncide avec la dimension de $\ker(A - rI_n)$ qui se trouve être 1.

    Si $-r$ est une valeur propre de A, alors il existe un vecteur X unitaire tel que $AX = -rX$. Soit $Y > 0$ unitaire tel que $AY = rY$. On a
$$|AX| = |-rX| = r|X|$$

et

$$\forall i \in [\![1,n]\!], [|AX|]_i = \left|\sum_{i=1}^{n}[A]_{i,j}[X]_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}|[X]_i| = [A|X|]_i \qquad (1)$$

donc $r|X| = |AX| \leq A|X|$. Ainsi,

$$\forall i \in [\![1,n]\!], [Y]_i[r|X|]_i \leq [Y]_i[A|X|]_i$$

donc en sommant,

$$rY^T|X| \leq Y^TA|X| \underset{A^T=A}{=} (AY)^T|X| = rY^T|X|.$$

On a donc

$$rY^T|X| = Y^TA|X|$$

i.e.

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \underbrace{[Y]_i}_{>0}[r|X| - A|X|]_i = 0$$

i.e.

$$\forall i \in [\![1,n]\!], [r|X| - A|X|]_i = 0.$$

Ainsi, $A|X| = r|X|$.
On présente dans la suite deux preuves.

(a) Ainsi, comme $AX = -rX$, on a $A(|X| - X) = r(|X| + X)$.
Supposons que $|X| \neq X$. Alors $|X| - X \neq 0$. Par la question 1, comme $A > 0$ et $|X| - X \geq 0$, on a $A(|X| - X) > 0$ donc $r(X + |X|) > 0$. Ainsi, $|X| + X > 0$ donc $X = |X|$. C'est absurde !
On en déduit que $|X| = X$ donc d'un côté

$$-rX \underset{X=|X|}{=} -r|X| \underset{A|X|=r|X|}{=} -A|X|$$

et de l'autre,

$$-rX = AX \underset{X=|X|}{=} A|X| = r|X|$$

donc $r|X| = -r|X|$ et $r|X| = 0$. C'est absurde car $r > 0$ et $|X| \neq 0$.

(b) En particulier, dans (1), les inégalités sont des égalités donc par la question 4,

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \exists \theta_i \in \mathbb{R}, \forall j \in [\![1,n]\!], [A]_{i,j}[X]_j = e^{i\theta_i}|[A]_{i,j}[X]_j| = e^{i\theta_i}[A]_{i,j}|[X]_j|.$$

Nécessairement, $e^{i\theta_i} \in \mathbb{R}$ donc vaut 1 ou -1. On a de plus

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], \underbrace{[A]_{i,j}}_{>0}\left([X]_j - e^{i\theta_i}|[X]_j|\right) = 0$$

donc

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], [X]_j - e^{i\theta_i}|[X]_j| = 0$$

donc $X = |X|$ ou $X = -|X|$. Notons $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $X = \varepsilon|X|$. On a alors

$$-rX \underset{X=\varepsilon|X|}{=} -r\varepsilon|X| \underset{A|X|=r|X|}{=} -\varepsilon A|X|$$

et $X = \varepsilon|X|$ donc $AX = \varepsilon A|X|$ donc

$$-rX = AX \underset{X=\varepsilon|X|}{=} \varepsilon A|X| = \varepsilon r|X|.$$

Ainsi, $r\varepsilon|X| = -r\varepsilon|X|$ donc $r\varepsilon|X| = 0$ ce qui est absurde car $\varepsilon r \neq 0$ et $|X| \neq 0$.

Ainsi, $\boxed{-r \text{ n'est pas valeur propre de } A}$.

31. La matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
a pour polynôme caractéristique $X^2 - 1$ donc ses valeurs propres sont 1 et -1. C'est un contre-exemple du résultat précédent dans le cadre des matrices positives.

32. Si $X \in \ker(A - rI_n)$, alors $AX = rX$ donc $A^p X = r^p X$. Comme $\rho(A^p) = \rho(A)^p$, par la question 29, $\ker(A^p - r^p I_n)$ est de dimension 1, engendré par un vecteur $Y > 0$ par la question 27. Cet espace contient donc X. On en déduit que
$$\ker(A - rI_n) \subset \ker(A^p - r^p I_n).$$
Comme r est valeur propre de A, on a $\dim(\ker(A - rI_n)) \geq 1$. Mais on a aussi
$$\dim(\ker(A - rI_n)) \leq \dim(\ker(A^p - r^p I_n)) = 1$$
donc $\boxed{\dim(\ker(A - rI_n)) = 1}$ et
$$\ker(A - rI_n) = \ker(A^p - r^p I_n) = \mathrm{Vect}(Y)$$
donc $\boxed{\ker(A - rI_n) \text{ est engendré par } Y > 0}$.

33. Soit deux valeurs propres λ, μ de module égal à r. Alors $\lambda, \mu \in \{-r, r\}$: supposons $\lambda = r, \mu = -r$.
   - Supposons que p soit impair. Alors $\mu^p = -r^p$ est valeur propre de A^p tout comme $r^p = \rho(A^p)$. Cela contredit la question 30.
   - Supposons que p soit pair. Soit X un vecteur propre de A pour la valeur propre $-r$. Alors $A^p X = (-r)^p X$ donc X est un vecteur propre de A^p pour la valeur propre r^p. Or, $\ker(A^p - r^p I_n)$ est engendré par un vecteur strictement positif donc quitte à multiplier par -1, on peut supposer que $X > 0$.

     Ainsi, toutes les composantes de $-rX$ sont donc strictement négatives tandis que AX est un vecteur positif. Ceci est une contradiction.

   Ainsi, $\boxed{r \text{ est la seule valeur propre de } A \text{ de module maximal}}$.

34. Soit λ une valeur propre de A. Soit $X = (x_1, \cdots, x_n)$ un vecteur propre associé. Alors $AX - \lambda X = 0$. Considérons i, l'indice de $[\![1, n]\!]$ pour que $|x_i|$ soit maximal. Alors
$$(AX - \lambda X)_i = 0.$$
De fait,
$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} x_k - \lambda x_i = 0.$$
De fait,
$$(A_{ii} - \lambda) x_i = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} a_{ik} x_k.$$
Ainsi,
$$|A_{ii} - \lambda| = \left| \sum_{k=1, k \neq i}^{n} A_{ik} \frac{x_k}{|x_i|} \right| \leq \sum_{k \neq i} |A_{ik}| \underbrace{\frac{|x_k|}{|x_i|}}_{\leq 1} \leq \sum_{k \neq i} |A_{ik}|.$$
Donc $\lambda \in \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - A_{ii}| \leq \sum_{k \neq i} |A_{ik}| \right\}$ et donc
$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - A_{ii}| \leq \sum_{k \neq i} |A_{ik}| \right\}}.$$
C'est le théorème de Gerschgorin

35. Suivons l'indication. Comme B est strictement positive, il existe $X > 0$ tel que $BX = \rho(B)X$. Soit $D = \mathrm{diag}(X_1, \cdots, X_n)$. Alors chaque coefficient diagonaux de D est non nul donc D est inversible d'inverse $D^{-1} = (X_1^{-1}, \cdots, X_n^{-1})$. Alors

$$D^{-1}AD = \left(\frac{X_j}{X_i} A_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Appliquons la question précédente à $D^{-1}AD$. Alors

$$\mathrm{Sp}(D^{-1}AD) = \mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{X_i}{X_i} A_{ii} \right| \leq \sum_{k \neq i} \left| \frac{X_k}{X_i} A_{ik} \right| \right\}.$$

Or, pour tout $i, k \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{k \neq i} \left| \frac{X_k}{X_i} A_{ik} \right| = \sum_{k \neq i} \frac{X_k}{X_i} |A_{ik}| \leq \sum_{k \neq i} \frac{X_k}{X_i} B_{ik}.$$

Maintenant, comme $BX = \rho(B)X$, on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{k=1}^{n} B_{i,k} X_k = \rho(B) X_i$$

donc

$$\sum_{k \neq i} B_{i,k} X_k = (\rho(B) - B_{i,i}) X_i$$

donc

$$\sum_{k \neq i} \left| \frac{X_k}{X_i} A_{ik} \right| \leq \rho(B) - B_{i,i}$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{X_i}{X_i} A_{ii} \right| \leq \rho(B) - B_{i,i} \right\}}.$$

***

FIN DU SUJET

***