On rappelle le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On considère E un espace préhilbertien réel.

Entrée : on considère une famille libre $(e_1, \cdots, e_n)$.

Sortie : on obtient une famille orthonormale $(g_1, \cdots, g_n)$ vérifiant $\forall 1 \leq i \leq n, \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_i) = \mathrm{Vect}(g_1, \cdots, g_i)$.

Considérons donc une famille libre $(e_1, \cdots, e_n)$ dans E. On montre par récurrence finie sur $k \in [\![1, n]\!]$ l'existence d'une telle famille.

- Pour $k = 1$, on dispose de e_1 qui est non nul. Ainsi, en considérant $g_1 = \dfrac{1}{\|e_1\|} e_1$, on a $\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(g_1)$ et $\|g_1\| = 1$.
- Faisons le cas $k = 2$ pour la forme. Pour $k = 2$, on réalise deux étapes.
  1. On considère $f_2 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ de sorte que f_2 soit orthogonal à g_1.
  2. On normalise f_2 et on le note g_2.

  Pour la première étape, l'idée est de considérer $f_2 = e_2 - (e_2, g_1) g_1$. Alors $f_2 \in \mathrm{Vect}(e_2, g_1) = \mathrm{Vect}(e_2, e_1)$ et $(f_2, g_1) = (e_2, g_1) - (e_2, g_1)(g_1, g_1) = 0$ car $(g_1, g_1) = \|g_1\|^2 = 1$. *On retire la composante selon g_1 du vecteur e_2.*

  Pour la seconde étape, il suffit de vérifier que $f_2 \neq 0$. C'est le cas car la famille (e_2, g_1) est libre puisque (e_2, e_1) l'est. Ainsi, on peut considérer $g_2 = \dfrac{1}{\|f_2\|} f_2$.

  Il est primordial de savoir faire un dessin.

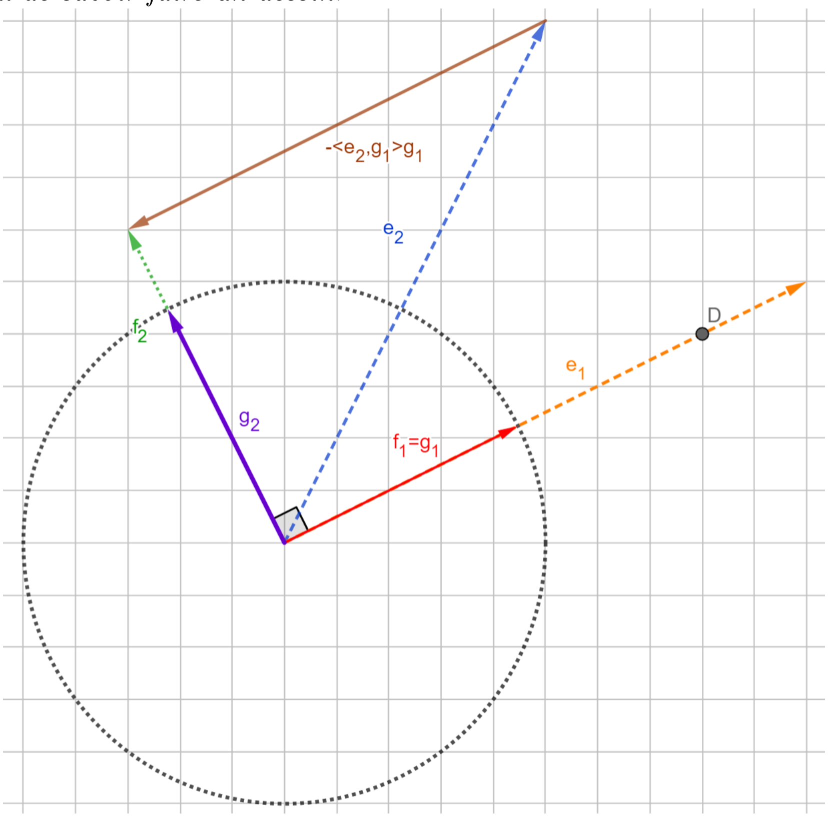

FIGURE 1 – Procédé de Gram-Schmidt sur deux vecteurs

  On considère le vecteur e_1 et le vecteur e_2 qui forment une famille libre. On normalise le vecteur e_1 que l'on note g_1. Ensuite, on retire la composante de e_2 selon g_1 pour obtenir le vecteur f_2 que l'on normalise pour obtenir le vecteur g_2.

  La famille (g_1, g_2) est donc bien orthonormée et vérifie $\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(g_1), \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(g_1, g_2)$.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et supposons construit $g_1, \cdots, g_k$ de sorte que $(g_1, \cdots, g_k)$ soit orthogonale et

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_i) = \mathrm{Vect}(g_1, \cdots, g_i).$$

Soit $f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(e_{k+1}, g_i)g_i$. Alors

$$\forall j \in [\![1, k]\!], (f_{k+1}, g_j) = (e_{k+1}, g_j) - \sum_{i=1}^{k}(e_{k+1}, g_i)\underbrace{(g_i, g_j)}_{=\delta_{i,j}} = (e_{k+1}, g_j) - (e_{k+1}, g_j) = 0.$$

De plus, $\sum_{i=1}^{k}(e_{k+1}, g_i)g_i \in \mathrm{Vect}(g_1, \cdots, g_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ donc $f_{k+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$. Par liberté des $(e_1, \cdots, e_{k+1})$, comme le coefficient devant e_{k+1} est non nul et que la somme n'est pas dans $\mathrm{Vect}(e_{k+1})$, alors $f_{k+1} \neq 0$.

On peut donc considérer $g_{k+1} = \frac{1}{\|f_{k+1}\|} f_{k+1}$ et g_{k+1} est de norme 1 et orthogonaux aux autres $(g_i)_{1\leq i\leq k}$, aussi dans $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$ donc $\mathrm{Vect}(g_1, \cdots, g_{k+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$.

- Par le principe de récurrence, on a construit une telle famille.

Remarquons que l'on a $(g_k, e_k) = \frac{1}{\|f_k\|} > 0$.