

Cours d'introduction

Stage de pré-rentree à Optimal Sup-Spé

Thomas Chen

21 août 2026

Table des matières

1	Logique et raisonnement	1
1.1	Énoncer des mathématiques	1
1.2	Connecteurs logiques	2
1.3	Quantificateurs	5
1.4	Rédaction	7
1.5	Construction de $\mathbb{N}$ et récurrence	9
1.6	Exercices	11
2	Suites réelles	13
2.1	L'ensemble des réels	13
2.2	Limite d'une suite	13
2.3	Théorèmes d'existence de limite	14
2.4	Suites extraites : théorème de Bolzano-Weierstrass	15
3	Continuité	17
3.1	Fonction	17
3.2	Limites, continuité	21
3.3	Continuité : aspect global	24
4	Fonctions usuelles	25
5	Nombres complexes	27
5.1	Préambule : la trigonométrie	28
5.2	Introduction	36
5.3	Forme algébrique	36
5.4	Forme trigonométrique et géométrie	40
5.5	Exercices	49
5.6	Compléments	53
6	Calcul intégral	57
6.1	Primitives	57
6.2	Calculs d'intégrales	59
7	Équations différentielles linéaires	61
7.1	Généralités	61
7.2	Équation différentielle linéaire du premier ordre	63
7.3	Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants	68
8	Sommes	73
8.1	Sommes	73
8.2	Sommes doubles	77

Avant-propos

En première année de Mathématiques Supérieures, il est coutume de commencer par un cours de logique ce que nous faisons ici. Toutefois, ce cours ne sort pas de nulle part et il nécessite un socle, une base mathématiques rigide sur lequel nous nous reposons. Nombre de mathématiciens se sont intéressés à ce domaine : c'est l'axiomatique.

En Mathématiques, nous partons d'axiomes, des énoncés mathématiques dont on ne doute pas la véracité. Ce sont les règles du jeu. A partir de ces règles, que pouvons-nous en déduire ? Plusieurs mathématiciens se sont posés la question : quelle est la « meilleure » axiomatique ? Par exemple, pour Euclide, si on dispose de deux droites parallèles, toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre. C'est un des axiomes d'Euclide. Il l'admet et construit ses *Éléments* sur ses axiomes.

Les mathématiques modernes se reposent sur une axiomatique plus sophistiquée. On peut citer les travaux, initialement négligés par ses pairs, de Georg Cantor tout comme ceux de Kurt Gödel puis la fameuse théorie de Zermelo-Fraenkel.

Vous connaissez déjà quelques axiomes. Par exemple, l'axiome du choix. Cet axiome dit la chose suivante :

Pour tout ensemble E d'ensembles non vide, on peut trouver une fonction f qui à chaque élément A de E associe un élément de A .

Intuitivement, on peut construire un ensemble en répétant une « infinité » un choix, non nécessairement explicité. Je ne peux que vous recommander cette vidéo de Science4All

<https://www.youtube.com/watch?v=Cm0GvResyR4>.

Aborder l'axiomatique n'est pas du tout un attendu du programme. Pour autant, on peut se sentir lésé de se dire que le principe de récurrence est quelque chose qui est du ressort de l'axiomatique. Nous faisons une légère arnaque pour éviter ce problème : c'est ce que le programme appelle « les résultats admis ».

Dans ce cours, et dans la plupart des cours, on admet des résultats que l'on pourrait démontrer à partir de ce que l'on sait. La question légitime serait « Que savons-nous ? ». Pendant ce stage, nous démontrerons des résultats que l'on pouvait admettre comme par exemple, l'existence des entiers naturels.

Mise en garde

Dans ce cours, l'ordre des notions suit les thèmes du stage. Tout livre de mathématiques place une importance dans l'ordre pour deux principales raisons :

1. La théorie mathématique est construite dans un certain ordre. On peut changer cet ordre et en « inventer » un mais il y a un risque d'effet Homonculus.
2. L'ordre des chapitres influe sur la pédagogie.

Ce cours a donc été rédigé principalement pour éviter cet effet Homonculus. Pour cela, certains résultats ont été admis et parfois démontré ultérieurement.

Chapitre 1

Logique et raisonnement

Sommaire

1.1	Énoncer des mathématiques	1
1.2	Connecteurs logiques	2
1.3	Quantificateurs	5
1.4	Rédaction	7
1.4.1	Première règle : introduire les objets	7
1.4.2	Deuxième règle : écrire en français	7
1.5	Construction de $\mathbb{N}$ et récurrence	9
1.6	Exercices	11

1.1 Énoncer des mathématiques

Définition 1.1 (Proposition). On appelle proposition ou assertion tout énoncé mathématique qui est vrai ou faux. On appelle alors valeur de vérité « Vrai » ou « Faux » noté simplement V et F.

Exemple 1.2.

- « $1 + 1 = 2$ » est une proposition.
- « $1 = 0$ » est une proposition.
- « Victor Hugo est le meilleur romancier français » n'est pas une proposition.

Définition 1.3 (Prédicat). On appelle prédicat tout énoncé mathématique dépendant d'au moins une variable de sorte que si l'on fixe cette dite variable, on obtient une proposition.

Exemple 1.4.

- « $x \geq 0$ » est un prédicat.
- « x est plus grand que y » est un prédicat.
- « $1 = 2$ » n'est pas un prédicat.

Remarque 1.5. Soit P une proposition. Alors dire « P est vraie » est une proposition, au même titre que dire simplement « P ». Lorsque l'on écrit une proposition P , P devient sa valeur de vérité.

Définition 1.6 (Equivalence). Deux propositions sont équivalentes lorsqu'elles ont la même valeur de vérité. On note, localement, $P = Q$. On change la notation d'ici peu.

1.2 Connecteurs logiques

Définition 1.7 (OU). Soit P, Q deux propositions. Alors P OU Q est vraie lorsque P est vraie ou (inclusif) Q est vraie, fausse sinon.

On illustre ce connecteur via une table de vérité.

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Parfois, on note $P \vee Q$ à la place.

Remarque 1.8. Pour différencier le OU mathématique et le « ou » français, on modifie les tailles. En pratique, on ne le fera plus.

Remarque 1.9. Le « ou » français peut être inclusif ou exclusif. Par exemple, dans la phrase « on monte ou on descend », le « ou » est exclusif. On ne peut pas monter et descendre en même temps. En mathématiques, le OU est inclusif.

Définition 1.10 (ET). Soit P, Q deux propositions. Alors P ET Q est vraie lorsque P est vraie et Q est vraie, fausse sinon. On illustre ce connecteur via une table de vérité.

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Parfois, on note $P \wedge Q$ à la place.

Définition 1.11 (NON). Soit P une proposition. Alors NON P est vraie lorsque P est fausse. On illustre ce connecteur via une table de vérité.

P	NON P
V	F
F	V

Parfois, on note $\neg P$ à la place.

Proposition 1.12. Soit P, Q, R trois propositions.

1. $\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$.
2. $\neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$.

3. $\neg(\neg P) = P$.
4. $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
5. $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Remarque 1.13. Attention au parenthésage.

Démonstration. Il suffit d'écrire les tables de vérité. □

Définition 1.14 (Implication). Soit P, Q deux propositions. On définit $P \implies Q$ (lire « P implique Q ») par

$$P \implies Q = \neg(P \wedge \neg Q).$$

On illustre ce connecteur via une table de vérité.

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Définition 1.15 (Réciproque). Soit P, Q deux propositions. La réciproque de l'implication $P \implies Q$ est $Q \implies P$.

Remarque 1.16. Si $P \implies Q$, la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Définition 1.17 (Contraposée). Soit P, Q deux propositions. La contraposée de l'implication $P \implies Q$ est $(\neg Q) \implies (\neg P)$.

Remarque 1.18. On définit une implication par ce qu'elle n'est pas. Lorsqu'on a P mais pourtant Q est fausse, alors on ne peut décemment pas dire que si P est vraie, Q est vraie. Pour autant, il faut faire attention. En français, la phrase « si P est vraie, alors Q est vraie » présuppose que P doit être vraie pour lire la suite de la phrase. Ce n'est pas ce que l'énoncé mathématique veut dire. Il ne faut pas confondre la valeur de vérité de Q et la valeur de vérité de $P \implies Q$. Ici, on voit que « le faux implique le vrai » est un énoncé vrai. Par exemple, $(1 = 2) \implies (0 = 1)$ est vraie.

Remarque 1.19. ATTENTION! « $\implies$ » n'est pas un « DONC »!

Méthode 1.20. Pour montrer que $P \implies Q$, on suppose que P est vraie et on essaye de montrer que Q est vraie.

Proposition 1.21 (Transitivité de l'implication). Soit P, Q, R trois propositions.

$$((P \implies Q) \wedge (Q \implies R)) \implies (P \implies R)$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 1.22. Soit P, Q deux propositions. Les propositions $P = Q$ et $((P \implies Q) \wedge (Q \implies P))$ sont équivalents.

Démonstration. Exercice. □

Définition 1.23. On note dorénavant $P \iff Q$ pour signifier que deux propositions P et Q sont équivalentes. On illustre ce connecteur via une table de vérité.

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 1.24.

- Soit x un réel. $3x = 7 \iff x = \frac{7}{3}$.
- $(1 = 0) \iff (2 = 3)$.
- Soit x un réel. $x = 5 \implies x^2 = 25$ mais ce n'est pas une équivalence.

Remarque 1.25. Attention. L'équivalence ne concerne que des valeurs de vérités. Il n'est donc pas à transposer à la locution « si, et seulement si ». Par exemple,

$$1 + 1 = 2 \iff \text{Théorème de Pythagore}$$

est une proposition vraie. Pour autant, écrire que $1 + 1 = 2$ si, et seulement si, le théorème de Pythagore est vraie est à proscrire.

Méthode 1.26. Pour montrer que $P \iff Q$, on montre souvent que $P \implies Q$ puis $Q \implies P$. On dit qu'on raisonne par double implication.

Proposition 1.27. Soit P, Q, R trois propositions.

1. On a $((Q \implies P) \text{ et } (\neg Q \implies P)) \implies P$.
2. On a $(P \implies Q) \iff ((\neg Q) \implies (\neg P))$.
3. On a $((\neg P) \implies \text{FAUX}) \implies P$.

Définition 1.28. Lorsqu'on utilise cette proposition, on dit que l'on raisonne

1. par disjonction de cas.
2. par contraposée.
3. par l'absurde.

Démonstration. Exercice. □

Exemple 1.29.

1. Tout entier a la parité de son carré. En effet, soit n un entier.
 - Supposons que n soit pair. Alors n s'écrit $2k$ et $n^2 = 4k^2$ est pair.
 - Supposons que n soit impair. Alors n s'écrit $2k + 1$ et $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.
 Par disjonction de cas, on la résultat voulu.

2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a + b \notin \mathbb{Q}$, alors $a \notin \mathbb{Q}$ ou $b \notin \mathbb{Q}$. En effet, raisonnons par contraposée. Supposons que la proposition « $a \notin \mathbb{Q}$ ou $b \notin \mathbb{Q}$ » soit fausse. Cela signifie que ni a n'est pas dans $\mathbb{Q}$ ni b n'est pas dans $\mathbb{Q}$ donc a et b sont dans $\mathbb{Q}$. Alors $a + b \in \mathbb{Q}$: la somme de rationnels est rationnel. Ainsi, « $a + b \notin \mathbb{Q}$ » est fausse. Par contraposée, on en déduit que si $a + b \notin \mathbb{Q}$, alors $a \notin \mathbb{Q}$ ou $b \notin \mathbb{Q}$.

La réciproque est :

Si a n'est pas dans $\mathbb{Q}$ ou b n'est pas dans $\mathbb{Q}$, alors $a + b$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$.

Cette proposition est fausse. Pour le montrer, on prend un irrationnel x et $-x$ qui est aussi irrationnel. En les sommant on obtient $0 \in \mathbb{Q}$ ce qui montre bien que la proposition est fausse.

3. On montrera ci-après que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.3 Quantificateurs

Définition 1.30 ($\forall$). On appelle quantificateur universel, le symbole $\forall$, dit « pour tout ».

Exemple 1.31. La phrase $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ se lit « pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, x^2 est positif ».

Remarque 1.32. ATTENTION! $\forall \neq$ « pour tout »! La phrase « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2$ est positif » est à proscrire!

Méthode 1.33. Pour montrer que $\forall x \in E, P(x)$ est vraie, on fixe un $x \in E$ et on montre que $P(x)$ est vraie.

Application 1.34. Si on sait que $\forall x \in E, P(x)$ est vraie, pour l'exploiter, on prend un x dans E quelconque. On sait alors immédiatement que $P(x)$ est vraie.

Définition 1.35 ($\exists$). On appelle quantificateur existentiel, le symbole $\exists$, dit « il existe ».

Exemple 1.36. La phrase $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ se lit « il existe x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x^2 est positif ».

Remarque 1.37. ATTENTION! $\exists \neq$ « il existe »! La phrase « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2$ est positif » est à proscrire!

Méthode 1.38. Pour montrer que $\exists x \in E, P(x)$ est vraie, on cherche à trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie. Cette recherche peut mener à exhiber l'objet x (par exemple, il existe x tel que $3x = 7$) ou à prouver mathématiquement qu'un objet existe, par exemple en supposant par l'absurde qu'il n'existe pas.

Remarque 1.39. Dans certaines théories mathématiques, ce genre de construction est banni. Dans le cadre de la CPGE, ce n'est pas le cas.

Application 1.40. Si on sait que $\forall x \in E, P(x)$ est vraie, pour l'exploiter, on sait que $P(x)$ va être vraie pour ce x particulier. On ne sait pas plus de chose.

Remarque 1.41. Les résultats d'existence sont durs à démontrer. Par exemple, la preuve du théorème des valeurs intermédiaires est corsée.

Remarque 1.42. Attention! Dans les énoncés $\exists x \in E, P(x)$ et $\forall x \in E, P(x)$, ces énoncés ne sont pas des prédicats! Ils ne dépendent certainement pas de x ! x est ce qu'on appelle une variable muette!

Proposition 1.43. Soit $P(x)$ un prédicat sur $x \in E$. Alors

$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, \neg P(x).$$

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \neg P(x).$$

Démonstration. Exercice. □

On peut superposer les quantificateurs. Nous allons voir par exemple qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$ est continue sur I lorsque

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Exemple 1.44. La négation de la continuité de f sur I est

$$\exists a \in I, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in I, (|x - a| \leq \delta) \wedge (|f(x) - f(a)| > \varepsilon).$$

Remarque 1.45. Attention! On ne peut pas permuter un symbole $\forall$... et un symbole $\exists$ Par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$ est vraie et n'a rien à voir avec $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$ ce qui est d'ailleurs faux.

Remarque 1.46. Par contre, on peut parfois, et assez facilement, permuter deux $\forall$ et deux $\exists$ pourvu qu'ils ne dépendent pas l'un de l'autre. Par exemple, on ne peut pas permuter dans la proposition suivante les $\forall$: $\forall a > 0, \forall b \in [a, +\infty[, \ln(b) > \ln(a)$.

1.4 Rédaction

A travers ce cours, nous avons vu déjà quelques écueils à éviter pour faire une bonne rédaction.

1.4.1 Première règle : introduire les objets

On ne peut parler d'un objet sans l'avoir introduit. Il ne sera pas accepté de dire f est croissante sans avoir introduit qui est f !

Pour introduire un objet, le plus naturel est d'utiliser « soit ». Par exemple, soit x un réel. Avec ceci, on fixe un réel x qui nous servira dans l'ensemble du paragraphe (souvent une seule question). Si l'on sait qu'on ne va pas se servir longtemps de ce x , on peut tout simplement dire : « pour tout x réel, $x^2 \geq 0$ ». Dans cette phrase, après le « . », x n'existe plus (mais on peut faire une certaine entorse. Préférez « soit » tout de même).

Certains objets mathématiques introduit d'eux-mêmes les objets. Par exemple, soit a, b deux réels. Dans

$$\int_a^b f(t)dt,$$

je n'ai pas introduit la variable t . Elle est introduite par l'intégrale. Par contre, après de « dt », t n'existe plus ! Il est hors de question d'écrire

$$\int_a^b f(t)dt + \underbrace{t^2}_{\text{qui est } t?}$$

par exemple.

Remarque 1.47. Cela tient aussi aux quantificateurs.

- On ne peut pas écrire « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$. Ainsi, $x^2 + 2 \geq 0$. » Qui est x ? x n'est définie qu'entre la virgule qui sur « $\mathbb{R}$ » et le « $.$ » suivant le 0 !
- On ne peut pas écrire « $\exists n \in \mathbb{N}, n|6$. Ainsi, $n|12$. » Qui est n ?

On peut aussi donner des noms aux objets. Pour cela, on utilise souvent « on pose ». Par exemple, on pose $I = \int_0^1 t^2 dt$. Dans le feu de l'action, il se peut qu'il ne soit pas pertinent d'écrire une telle phrase. On peut donc écrire

$$\underbrace{\int_0^1 t^2 dt}_{=:I} = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

et on a $I = \frac{1}{3}$. Cette notation « $:=$ » est très pratique.

Remarque 1.48. Il ne suffit pas de dire « Soit x vérifiant une propriété » pour savoir que x existe ! Si j'écris « soit $x \in \emptyset$ », je pourrai démontrer n'importe quoi. Outre l'introduction des objets, assurez-vous de l'existence de cet objet. Ce ne sera pas toujours « soit $x \in \mathbb{R}$ ».

1.4.2 Deuxième règle : écrire en français

Une phrase, mathématique ou non, commence par une majuscule et se termine par un point. Il est grandement apprécié une grammaire et une orthographe correcte. Une rédaction mathématique en français utilise naturellement cette langue.

Cela paraît anodin mais le langage mathématique prend souvent le dessus. De fait de sa simplicité et de sa concision, il permet au néophyte d'écrire vite. Mais regardons trois exemples.

On va montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration. Numéro 1.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} \in \mathbb{Q} &\implies \exists p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{l} \text{pgcd}(p, q) = 1 \\ \frac{p}{q} = \sqrt{2} \end{array} \right. \\
&\implies \exists p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{l} \text{pgcd}(p, q) = 1 \\ p^2 = 2q^2 \end{array} \right. \\
&\implies \exists p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{l} \text{pgcd}(p, q) = 1 \\ p^2 = 2q^2 \\ 2|p \end{array} \right. \\
&\implies \exists p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{Z}, \left\{ \begin{array}{l} \text{pgcd}(p, q) = 1 \\ p^2 = 2q^2 \\ p = 2k \end{array} \right. \\
&\implies \exists p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{Z}, \left\{ \begin{array}{l} \text{pgcd}(p, q) = 1 \\ 2k^2 = q^2 \\ p = 2k \end{array} \right. \\
&\implies \exists p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \exists (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2, \left\{ \begin{array}{l} \text{pgcd}(p, q) = 1 \\ 2k^2 = q^2 \\ p = 2k, q = 2\ell \end{array} \right. \\
&\implies \exists p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{l} \text{pgcd}(p, q) = 1 \\ (2|p) \wedge (2|q) \end{array} \right. \\
&\implies \exists p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{l} \text{pgcd}(p, q) = 1 \\ 2|\text{pgcd}(p, q) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Par l'absurde, on a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Démonstration. Numéro 2.

Um durch einen Widerspruch zu zeigen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, nehmen wir das Gegenteil an, nämlich dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist. Das bedeutet, dass $\sqrt{2}$ als Bruch zweier ganzer Zahlen a und b dargestellt werden kann, wobei a und b teilerfremd sind (das heißt, sie haben keinen gemeinsamen Teiler außer 1). Man kann also schreiben :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Quadratisieren wir beide Seiten dieser Gleichung, erhalten wir :

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit b^2 , so erhalten wir :

$$a^2 = 2b^2$$

Dies bedeutet, dass a^2 eine gerade Zahl ist (da sie gleich $2b^2$ ist, was offensichtlich eine gerade Zahl ist). Wenn a^2 gerade ist, muss auch a gerade sein (denn das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade). Daher können wir a als $a = 2k$ für eine ganze Zahl k schreiben.

Setzen wir $a = 2k$ in die Gleichung $a^2 = 2b^2$ ein :

$$(2k)^2 = 2b^2$$

$$4k^2 = 2b^2$$

Durch Vereinfachung erhalten wir :

$$2k^2 = b^2$$

Dies bedeutet, dass auch b^2 gerade ist, was bedeutet, dass b ebenfalls gerade ist.

Wir haben somit gezeigt, dass sowohl a als auch b gerade sind. Dies steht jedoch im Widerspruch zu unserer ursprünglichen Annahme, dass a und b teilerfremd sind (denn sie hätten mindestens den gemeinsamen Teiler 2).

Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere ursprüngliche Annahme falsch war. Daher kann $\sqrt{2}$ nicht rational sein ; folglich ist $\sqrt{2}$ irrational. □

Démonstration. Numéro 3.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe alors $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

On en déduit que $p^2 = 2q^2$.

p^2 est donc pair mais tout entier a la parité de son carré donc comme un entier est pair ou impair, p est pair : il s'écrit donc $2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, on a $4k^2 = 2q^2$ donc q^2 est pair. De même, q est pair donc p et q sont divisibles par 2 : leur pgcd l'est donc aussi donc $2|1$. Absurde.

Ainsi, $\sqrt{2}$ est irrationnel. □

1.5 Construction de $\mathbb{N}$ et récurrence

Définition 1.49. Soit E un ensemble. Une relation binaire sur E est une application de $E \times E$ dans $\{V, P\}$ qui à $(x, y) \in E^2$ associe $\mathcal{R}(x, y)$ qui est une proposition. On note $x\mathcal{R}y$ au lieu de $\mathcal{R}(x, y)$.

Définition 1.50. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E . On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre lorsque

- pour tout $x \in E$, on a $x\mathcal{R}x$ (propriété de réflexivité).
- pour tout $x, y, z \in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ entraîne $x\mathcal{R}z$ (propriété de transitivité).
- pour tout $x, y \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$ (propriété d'antisymétrie).

On dit alors que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble ordonné.

Exemple 1.51. Ces exemples ne sont qu'illustratifs des propriétés. Puisqu'on n'a pas construit $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$, cela n'a pas de sens.

- $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ par exemple.
- $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ mais pas sur $\mathbb{Z}$.

Dans ce cours, on admet l'existence d'un ensemble E non vide tel que

1. $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné.
2. Toute partie A non vide de E admet un plus petit élément *i.e.* $\exists x \in A, \forall y \in A, x \leq y$.
3. E n'est pas majoré.
4. Toute partie non vide majorée de E admet un plus grand élément.

On a automatiquement le fait que $\leq$ est totale, ce qui signifie que pour tout $x, y \in E$, soit $x \leq y$, soit $y \leq x$.

Définition 1.52. On note 0 le plus petit élément de E .

Proposition 1.53. Soit $k \in E$. Alors $A(k) = \{n \in E : k \leq n, n \neq k\}$ admet un plus petit élément.

Démonstration. Soit $k \in E$. Puisque E n'est pas majoré, il existe un élément $N \in E$ différent de k tel que $k \leq N$. Ainsi, $N \in A(k)$ donc $A(k)$ est non vide. $A(k)$ admet donc un plus petit élément. $\square$

Définition 1.54. Soit $k \in E$. On appelle successeur de k , noté $s(k)$ le plus petit élément de $A(k)$ défini précédemment.

Proposition 1.55. s est croissante.

Démonstration. Soit $k, \ell \in E$. On suppose que $k \leq \ell$. Alors $A(k) \subset A(\ell)$. En particulier, $s(\ell) \in A(k)$ donc $s(k) \leq s(\ell)$. $\square$

Définition 1.56. On appelle 1, le successeur de 0, etc.

Proposition 1.57. Soit $k \in E, k \neq 0$. Alors $B(k) = \{n \in E : n \leq k, n \neq k\}$ admet un plus grand élément.

Démonstration. Soit $k \in E, k \neq 0$. Alors $B(k)$ est non vide car il contient 0. Il est aussi majoré par k . Ainsi, $B(k)$ admet bien un plus grand élément. $\square$

Définition 1.58. Soit $k \in E, k \neq 0$. On appelle prédécesseur de k , noté $p(k)$, le plus grand élément de $B(k)$ défini précédemment.

Proposition 1.59. On a $s \circ p = \text{Id}_{E \setminus \{0\}}$ et $p \circ s = \text{Id}_E$.

Démonstration. Soit $k \in E, k \neq 0$. Par définition, $p(k) \leq k$ et $p(k) \neq k$. Ainsi, $k \in A(p(k))$ donc par définition de $s(p(k))$, on a $s(p(k)) \leq k$. Si $s(p(k)) \neq k$, alors $s(p(k)) \in A(k)$ donc $s(k) \leq s(p(k))$ mais s est croissante. Ainsi, $k \leq p(k)$. Absurde. Ainsi, $s(p(k)) = k$. Finalement, on a bien $s \circ p = \text{Id}_{E \setminus \{0\}}$.

On fait de même pour $p \circ s$. $\square$

On peut alors montrer que E est l'ensemble $\mathbb{N}$ tel que l'on connaît, c'est-à-dire qu'on peut définir l'addition d'entiers. Pour l'instant, contentons-nous de démontrer la récurrence.

Théorème 1.60. Soit A une partie de E telle que $0 \in A$ et $\forall k \in E, (k \in A) \implies (s(k) \in A)$. Alors $A = E$.

Démonstration. Soit une telle partie A . Soit $B = E \setminus A$. Supposons par l'absurde que B est non vide. B admet donc un plus petit élément noté n_0 .

Puisque $0 \in A$, $0 \notin B$ donc $n_0 \neq 0$. Considérons donc $N_0 = p(n_0) \in E$. Alors par minimalité de n_0 , $N_0 \notin B$ donc $N_0 \in A$ puisque $N_0 \in E$. Par hypothèse sur A , on a donc $s(N_0) \in A$. Or, $s(N_0) = s(p(n_0)) = n_0$ donc $n_0 \in A$. Absurde.

Ainsi, B est vide. Puisque $A \subset E$, on a donc $A = E$. $\square$

Dans la suite de ce cours, sauf mention explicite, on notera $\mathbb{N}$ au lieu de E . On admet alors que $\mathbb{N}$ est bien construit.

1.6 Exercices

Exercice 1.1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \leq 1 + \frac{n}{k} + \frac{n^2}{k^2}.$$

Exercice 1.2. Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$. On suppose que

- $1 \in A$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \implies 2n \in A$.
- $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, n \in A \implies n - 1 \in A$.

Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.

Exercice 1.3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis écrire leurs négations :

1. la fonction f s'annule.
2. la fonction f est constante.
3. la fonction f n'est pas constante.
4. la fonction f ne peut prendre que deux valeurs.
5. la fonction f peut prendre toutes les valeurs réelles.
6. la fonction f s'annule une et une seule fois.
7. la fonction f ne peut que s'annuler une seule fois.

Exercice 1.4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \implies a = 0$.

Exercice 1.5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2 \mid n(n^2 + 1).$$

Exercice 1.6. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par $u_0 = \pi$ et $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n.$$

Calculer u_{2n} et u_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.7. Soit $p, q \in \mathbb{N}$. On suppose que $I_{p+1,q} = \frac{-(p+1)}{q+1} I_{p,q+1}$. Calculer $I_{n,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de $I_{0,p+q} =: \alpha$.

Chapitre 2

Suites réelles

Sommaire

2.1	L'ensemble des réels	13
2.2	Limite d'une suite	13
2.3	Théorèmes d'existence de limite	14
2.4	Suites extraites : théorème de Bolzano-Weierstrass	15

2.1 L'ensemble des réels

Définition 2.1. Soit E un ensemble ordonné et A une partie de E . On appelle, sous réserve d'existence, borne supérieure de A le plus petit des majorants de A . On le note $\sup(A)$ dit supremum de A . On appelle, sous réserve d'existence, borne inférieure de A le plus grand des minorants de A . On le note $\inf(A)$ dit infimum de A .

On admet que $\mathbb{R}$ est construit et est muni de l'axiome de la borne supérieure :

Toute partie A de $\mathbb{R}$ majorée admet une borne supérieure.

Proposition 2.2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors $a = \sup(A)$ si, et seulement si,

1. $\forall x \in A, x \leq a$
2. $\forall b < a, \exists x \in A, b < x$.

Démonstration. Trivial. □

Par convention, le supremum d'une partie non vide non majorée est $+\infty$ et celui d'une partie vide est $-\infty$. Pour l'infimum, c'est l'inverse.

2.2 Limite d'une suite

Dans la suite, u désigne une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 2.3. On dit que u converge vers un réel ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit que u converge vers $+\infty$ lorsque

$$\forall M \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M.$$

Proposition 2.4. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Exercice. ☐

Proposition 2.5. Si u converge vers $\ell > 0$, alors u est positive à partir d'un certain rang.

Démonstration. Exercice. ☐

Proposition 2.6. Si u, v sont deux suites convergentes, et que $u \leq v$ à partir d'un certain rang, alors $\lim u \leq \lim v$.

Démonstration. Exercice. ☐

Remarque 2.7. ATTENTION! CE RÉSULTAT PRÉSUPPOSE L'EXISTENCE DE LA LIMITE!!

Exercice 2.1. Montrer que le produit d'une suite bornée avec une suite tendant vers 0 donne une suite qui tend vers 0. Montrer aussi que la limite d'un produit de suites convergentes est le produit des limites.

2.3 Théorèmes d'existence de limite

On en expose 3.

Théorème 2.8 (Théorème d'encadrement). Soit u, v, w trois suites réelles. On suppose que v et w convergent toutes les deux, et ce, vers la même limite ℓ , et que $v \leq u \leq w$ à partir d'un certain rang. Alors u converge, et ce, vers ℓ .

Démonstration. Exercice. ☐

Théorème 2.9 (Limite monotone). Toute suite croissante tend vers son supremum.

Remarque 2.10. On retrouve le théorème de Terminale. Une suite croissante majorée converge. Si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.

Démonstration. Exercice. ☐

Définition 2.11. Soit u, v deux suites réelles. On dit que u et v sont adjacentes lorsque

1. u est croissante.
2. v est décroissante.
3. $u - v$ tend vers 0.

Théorème 2.12 (Théorème des suites adjacentes). Deux suites u, v adjacentes convergent, et ce, vers la même limite, disons ℓ . De plus, on a $u \leq \ell \leq v$.

Démonstration. Exercice. ☐

2.4 Suites extraites : théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 2.13. Une suite v est appelée suite extraite de u lorsqu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Une telle application φ est appelée extraction ou extractrice.

Théorème 2.14 (Segments emboîtés). Soit I_n une suite de segments notés $I_n = [a_n, b_n]$ tels que $(I_n)_n$ soit décroissantes pour l'inclusion et que la longueur de I_n définit une suite tendant vers 0. Alors

$$\left(\bigcap_{n=1}^N I_n \right)_n$$

a pour limite un singleton.

Démonstration. Exercice. □

Théorème 2.15 (Bolzano-Weierstrass). Soit u une suite réelle bornée. Alors u admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Exercice. □

2.5 Exercices

Exercice 2.2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que cette suite converge. Montrer qu'elle est stationnaire i.e.

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}, u_n = u_N.$$

Exercice 2.3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .

1. On suppose que $\ell < 1$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, un réel $A \in \mathbb{R}$ et un réel $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, u_n \leq A^k n.$$

2. Calculer la limite, si elle existe, de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $\ell > 1$.

Exercice 2.4. Soit a, b deux réels positifs avec $a \geq b$. On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = a, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; v_0 = b, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Démontrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$$

puis montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite (on pourra calculer u_1, u_2 et v_1, v_2).

Exercice 2.5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique croissante. On suppose que sa limite est $\ell \in \mathbb{R}$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la quantité

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

En déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Exercice 2.6. Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = (1 + a)(1 + a^2) \cdots (1 + a^n).$$

1. On suppose que $a \geq 1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
2. On suppose que $a < 1$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ et en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Chapitre 3

Continuité

Sommaire

3.1 Fonction	17
3.1.1 Généralités	17
3.1.2 Injection, surjection, bijection	19
3.1.3 Image directe, image réciproque	20
3.2 Limites, continuité	21
3.2.1 Limite d'une fonction	21
3.3 Continuité : aspect global	24

Dans la suite, sauf mention contraire, E et F désignent des ensembles.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu la définition de la continuité pour une fonction réelle à valeurs réelles. Pour $a \in I$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

signifie qu'une fonction f est continue en a .

3.1 Fonction

3.1.1 Généralités

Définition 3.1 (Correspondance). Soit E, F deux ensembles. Soit $\Gamma \subset E \times F$. On appelle correspondance le triplet (E, F, Γ) . Γ est appelé graphe de la correspondance. On appelle E ensemble de départ et F ensemble d'arrivée.

Exemple 3.2.

1. $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}, \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$.
2. $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}, \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

L'idée d'une correspondance est la suivante : on se donne deux ensembles E et F . On considère alors une partie produit cartésien $E \times F$ et on fait correspondre une abscisse avec une ordonnée mais sans unicité.

Définition 3.3 (Fonction/Application). Soit E, F deux ensembles et $\Gamma \subset E \times F$. La correspondance (E, F, Γ) est appelée fonction lorsque pour tout $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Gamma$, on a $x_1 = x_2 \implies y_1 = y_2$. Autrement dit, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{y \in F : (x, y) \in \Gamma\}$ est de cardinal au plus 1. Si ce cardinal est 1, on définit alors la fonction f par : pour tout x dans E , $f(x)$ est l'unique élément tel que $(x, f(x)) \in \Gamma$. On note alors au lieu de (E, F, Γ)

$$\begin{array}{ccc} f : & E & \rightarrow & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

ou plus simplement f . Si l'ensemble $\{y \in F : (x, y) \in \Gamma\}$ est de cardinal 1 pour tout $x \in E$, on dit que (E, F, Γ) est une application. Autrement dit, c'est lorsque l'ensemble de départ et de définition est le même.

Remarque 3.4. Faire cette distinction est explicitement hors-programme. Dans la suite, toute fonction est une application.

Remarque 3.5. Une égalité de fonctions est alors une égalité d'ensemble de départ, d'arrivée et de graphe !

Exemple 3.6. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2} \in \mathbb{R}^+$ n'est pas égale à la fonction $g : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x^2} \in \mathbb{R}^+$. Par contre, $h : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x^2} \in \mathbb{R}^+$ est égale à g puisqu'ils ont même ensemble de départ, d'arrivée et que

$$\forall x \geq 0, \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2}.$$

Définition 3.7. L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E .

Définition 3.8. Soit E, F, G trois ensembles et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$, deux fonctions. On appelle $g \circ f$ (lire « g rond f ») la composée de g par f définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\rightarrow G \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}.$$

Définition 3.9. On appelle identité de E l'application de E dans E qui à $x \in E$ associe $x \in E$.

Proposition 3.10. Soit E, F, G, H 4 ensembles. Soit $f \in F^E, g \in G^F, h \in H^G$. Alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Démonstration. $g \circ f \in G^E$ donc $h \circ (g \circ f)$ est bien défini et est dans H^E . On a aussi $h \circ g \in H^F$ donc $(h \circ g) \circ f$ est bien défini et est dans H^E . Il suffit donc de montrer que

$$\forall x \in E, h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x).$$

Soit $x \in E$. On a

$$h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g) \circ f(x).$$

□

Proposition 3.11. Soit $f \in F^E$. Alors

$$\text{Id}_F \circ f = f \circ \text{Id}_E = f.$$

Démonstration. Exercice.

□

3.1.2 Injection, surjection, bijection

Définition 3.12. On dit que $f : E \rightarrow F$ est injective lorsque

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Remarque 3.13. Cela signifie que dans l'équation $f(x) = y$ pour $(x, y) \in E \times F$, il y a **au plus** une solution.

Définition 3.14. On dit que $f : E \rightarrow F$ est surjective lorsque

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

Remarque 3.15. Cela signifie que dans l'équation $f(x) = y$ pour $(x, y) \in E \times F$, il y a **au moins** une solution.

Définition 3.16. On dit que $f : E \rightarrow F$ est bijective lorsque

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y.$$

Remarque 3.17. Cela signifie que dans l'équation $f(x) = y$ pour $(x, y) \in E \times F$, il y a **exactement** une solution.

Proposition 3.18. Soit $f \in F^E$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est bijective.
2. f est injective et surjective.
3. Il existe $g \in E^F$ tel que $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$.

Démonstration. On procède par implications circulaires.

- (1) $\implies$ (2) Soit $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y) =: Y$. Par bijectivité, il existe un unique $z \in E$ tel que $Y = f(z)$. Par unicité, $z = x = y$ donc f est injective. f est surjective puisqu'une fonction bijective est une fonction surjective avec de l'unicité.
- (2) $\implies$ (3) Construisons g . Soit $y \in F$. Il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On définit alors $g(y) = x$. Alors g est bien une fonction puisque le x tel que $f(x) = y$ est unique. Montrons donc que $f \circ g = \text{Id}_F$ (l'autre égalité est du même tonneau). Déjà, $f \circ g \in F^F$. Soit donc $y \in F$. Alors $g(y)$ est par construction l'élément de E tel que $f(g(y)) = y$. Ainsi, $f \circ g(y) = \text{Id}(y)$ et ce, pour tout $y \in F$.
- (3) $\implies$ (1) Soit $y \in F$. Notons $x = g(y)$. Alors $f(x) = y$ donc il existe bien un $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Montrons que ce x est unique. Soit x' tel que $f(x') = y$. Alors $x' = g(f(x')) = g(y)$ donc $x' = x$.

□

Définition 3.19. Dans la proposition précédente, on appelle alors g la bijection réciproque de f et on note $g = f^{-1}$.

Remarque 3.20. Avant d'écrire f^{-1} , il faut vérifier que f est bel et bien bijective!

Remarque 3.21. Il ne faut pas confondre la réciproque et l'inverse bien que ce soit la même notation. En pratique, cette confusion n'arrive pas.

Exercice 3.1. On considère la fonction $f : x \in E \mapsto x^2 \in F$. Etudier l'injectivité, surjectivité, bijectivité lorsque

1. $E = F = \mathbb{R}$
2. $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}^+$
3. $E = \mathbb{R}^+, F = \mathbb{R}$
4. $E = F = \mathbb{R}^+$.

Proposition 3.22. Soit E, F, G trois ensembles et $f \in F^E, g \in G^F$.

1. Si f et g sont injectives, $g \circ f$ l'est.
2. Si f et g sont surjectives, $g \circ f$ l'est.
3. Si $g \circ f$ est injective, alors f l'est.
4. Si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est.
5. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ l'est et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. Exercice. □

Exercice 3.2. Etablir des contre-exemples dans les cas manquants.

3.1.3 Image directe, image réciproque

Définition 3.23 (Image directe). Soit $f \in F^E$. Soit $A \subset E$. On appelle image directe de A par f l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Définition 3.24 (Image réciproque). Soit $f \in F^E$. Soit $B \subset F$. On appelle image réciproque de B par f l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

Exercice 3.3. Quelle est l'image directe de $E = \mathbb{R}$ par $\sin$? Et si $E = \mathbb{R}^+$? Si $E = [0, \pi]$? Si $E = [0, 1]$? Faire de même avec $\cos$. Faire de même avec les images réciproques.

Proposition 3.25. Soit $f \in F^E$ et $A \subset E, B \subset F$.

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Démonstration.

1. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$ par définition. Par définition, on a donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
2. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors on dispose de $x \in f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$. Or $x \in f^{-1}(B)$ donc $f(x) \in B$. Ainsi, $y \in B$.

□

Exercice 3.4. Etablir des contre-exemples aux réciproques. On pourra considérer la fonction carrée et bien choisir les ensembles A et B .

Exercice 3.5. Montrer que la réciproque de la 1 (resp. 2) est vraie si, et seulement si, f est injective (resp. surjective).

3.2 Limites, continuité

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. C'est la droite réelle achevée ou lu « R barre ». Rappelons la définition suivante :

Définition 3.26 (Intervalle). Soit I un ensemble non vide. On dit que I est un intervalle lorsque pour tout $x, y \in I$, on a $[x, y] \subset I$.

Pour manipuler les limites, on utilise à tout va le résultat suivant.

Lemme 3.27. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|x| \leq \varepsilon$, alors $x = 0$.

Démonstration. On raisonne par contraposée. On veut montrer que si $x \neq 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x| > \varepsilon$. Soit donc $x \neq 0$. Soit $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$. Alors comme $|x| \neq 0$, on a $|x| > \varepsilon$. Par contraposée, on a le résultat souhaité. □

Remarque 3.28. Si on remplace $|x| \leq \varepsilon$ par $|x| \leq \alpha\varepsilon$ où α est une constante réelle indépendante de ε , on a encore $x = 0$.

3.2.1 Limite d'une fonction

Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

Définition 3.29. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit a un élément de I ou une extrémité de I et ℓ un réel.

- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a lorsque

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies f(x) \geq M.$$

On note alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Remarque 3.30. Très souvent, on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. Cette notation a le bon goût d'être flexible et de forcer l'étude de la convergence avant de parler de limite. Une fois n'est pas coutume, on vérifie

l'existence de l'objet avant de l'écrire.

Remarque 3.31. Dans le cas précédent, $f(a)$ n'existe donc pas puisque f tend vers $+\infty$ en a . En toute rigueur, I ne contient donc pas a . Pour le signaler, on note

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) = +\infty.$$

On parle de limite époincée.

Remarque 3.32. De manière générale, si on considère un autre ensemble J que celui de départ, on peut l'indiquer comme ceci

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in J}.$$

Lorsque $J = I \cap]-\infty, a[$, on parle de limite à gauche et on note alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \text{ ou alors } \lim_{x \rightarrow a, x < a}.$$

Si $J = I \cap]a, +\infty[$, on parle de limite à droite et on note alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \text{ ou alors } \lim_{x \rightarrow a, x > a}.$$

Définition 3.33. Supposons I non majorée. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \geq 0, \forall x \in I, x \geq m \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall M > 0, \exists m \geq 0, \forall x \in I, x \geq m \implies f(x) \geq M.$$

On note alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Exercice 3.6. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et a un élément de I ou une extrémité de I . On suppose que les limites suivantes existent. Écrire avec des quantificateurs chaque limite.

a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Définition 3.34. Soit x un réel. On dit qu'un prédicat $P(a)$ est vraie au voisinage de x lorsque $P(a)$ est vraie sur tout un intervalle ouvert contenant x . On dit qu'un prédicat $P(a)$ est vraie au voisinage de $+\infty$ lorsque $P(a)$ est vraie sur un intervalle de la forme $]b, +\infty[$.

Proposition 3.35. Si f converge vers un réel en a avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$, alors f est bornée au voisinage de a .

Démonstration. Soit ℓ la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow a$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]a - \eta, a + \eta[, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi, $\forall x \in]a - \eta, a + \eta[, -\varepsilon \leq f(x) - \ell \leq \varepsilon$. On en déduit que

$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[, |f(x)| \leq \max(\ell + \varepsilon, \ell - \varepsilon)$$

donc f est bornée au voisinage de a . □

Proposition 3.36. Si f converge vers un réel en a avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$, alors ce réel est unique.

Démonstration. Soit ℓ, ℓ' tel que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell ; \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell'.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\eta, \eta' > 0$ tel que

- $\forall x \in]a - \eta, a + \eta[, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
- $\forall x \in]a - \eta', a + \eta'[, |f(x) - \ell'| \leq \varepsilon$.

Soit $\delta = \min(\eta, \eta')$. Alors $]a - \delta, a + \delta[$ est inclus dans $]a - \eta, a + \eta[$ et $]a - \eta', a + \eta'[,$ donc

$$\forall x \in]a - \delta, a + \delta[, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \text{ et } |f(x) - \ell'| \leq \varepsilon.$$

Ainsi,

$$|\ell - \ell'| \leq |\ell - f(x) + f(x) - \ell'| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

On en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, |\ell - \ell'| \leq 2\varepsilon$$

ce qui entraîne que $\ell = \ell'$. □

Définition 3.37. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue en $a \in I$ lorsque

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Théorème 3.38. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors pour toute suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, alors

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Démonstration. Exercice. □

Théorème 3.39 (Caractérisation séquentielle de la limite). La réciproque du théorème précédent est vrai.

Démonstration. Exercice. □

3.3 Continuité : aspect global

Théorème 3.40 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Alors pour tout intervalle $J \subset I$, $f(J)$ est un intervalle.*

Démonstration. Exercice. □

Théorème 3.41 (Théorème des bornes atteintes). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ avec $a < b$ deux réels. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration. Exercice. □

Théorème 3.42 (Théorème de l'injection). *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Alors f est injective si, et seulement si, elle est strictement monotone.*

Démonstration. Admis. □

Théorème 3.43 (Théorème de la bijection). *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I . Alors f définit une bijection de I dans $f(I) =: J$ et la bijection réciproque, notée f^{-1} , est continue sur J .*

Démonstration. Admis. □

Chapitre 4

Fonctions usuelles

A compléter. Métro ?

Chapitre 5

Nombres complexes

Sommaire

5.1	Préambule : la trigonométrie	28
5.1.1	Formules	31
5.1.2	La fonction tangente	32
5.1.3	Équations et inéquations trigonométriques	33
5.2	Introduction	36
5.3	Forme algébrique	36
5.4	Forme trigonométrique et géométrie	40
5.4.1	Introduction	40
5.4.2	Représentation géométrique d'un nombre complexe	40
5.4.3	Module d'un nombre complexe	41
5.4.4	Nombres complexes de module 1	42
5.4.5	Argument d'un nombre complexe	45
5.5	Exercices	49
5.5.1	Entraînement	49
5.5.2	Approfondissement	51
5.6	Compléments	53
5.6.1	Exponentielle complexe	53
5.6.2	Résolution de $az^2 + bz + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$	53
5.6.3	Racine n -ème de l'unité	55

5.1 Préambule : la trigonométrie

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Définition 5.1. On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre 0 et de rayon 1. On le note $\mathcal{C}$ dans la suite.

Proposition 5.2. On a

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note M ce point. Alors on a les équivalences suivantes

$$(x, y) \in \mathcal{C} \iff \|\vec{OM}\| = 1 \iff \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \iff x^2 + y^2 = 1.$$

□

Définition 5.3. Soit M un point du cercle trigonométrique. On note θ l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{OM})$. On définit alors $\cos(\theta)$ comme étant l'abscisse de ce point et $\sin(\theta)$ l'ordonnée de ce point.

Remarque 5.4. On changera de définition dans le cours de Mathématiques Spéciales.

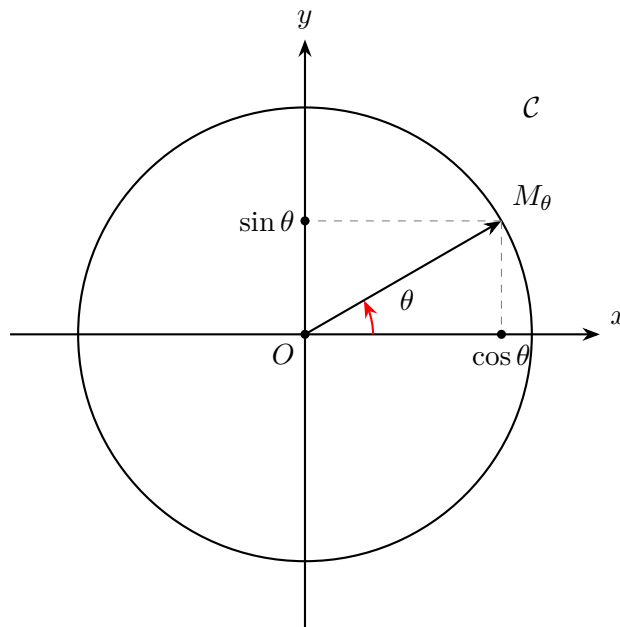


FIGURE 5.1 – Le cercle $\mathcal{C}$: représentation d'un point sur le cercle, cosinus et sinus d'un angle

Proposition 5.5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

Proposition 5.6. $\cos$ et $\sin$ sont deux fonctions 2π -périodiques.

Proposition 5.7. On a le tableau suivant.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Il faut avoir en tête la figure suivante.

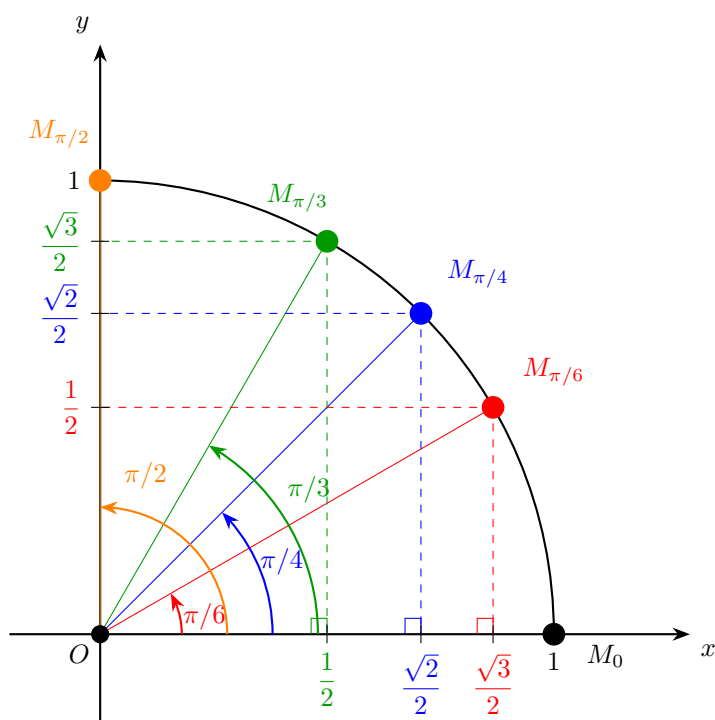


FIGURE 5.2 – Valeurs remarquables des fonctions cos et sin

Proposition 5.8. La fonction $\cos$ est paire, la fonction $\sin$ est impaire. Autrement dit,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(-\theta) = \cos(\theta), \sin(-\theta) = -\sin(\theta).$$

Il faut avoir en tête la figure suivante.

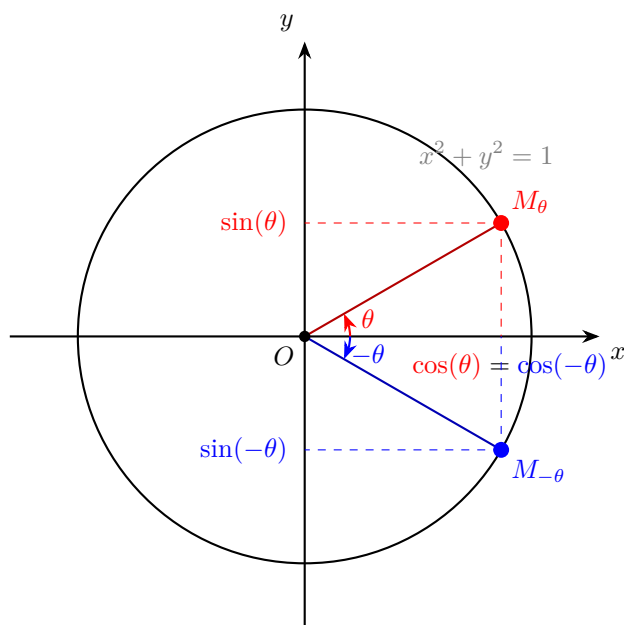


FIGURE 5.3 – Parité de la fonction $\cos$, imparité de la fonction $\sin$

Proposition 5.9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta); \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta); \sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta); \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$$

Il faut avoir en tête la figure suivante.

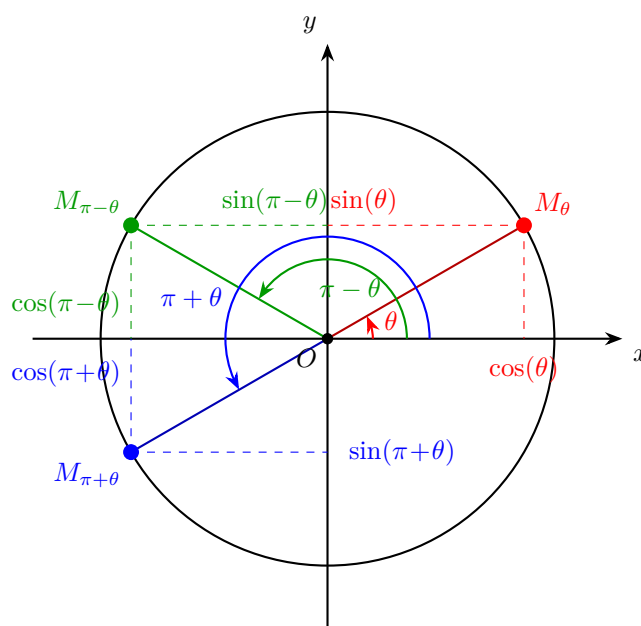


FIGURE 5.4 – Symétries axiales et centrales : conséquences sur les fonctions $\cos$ et $\sin$

Proposition 5.10. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) ; \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta) ; \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta) ; \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$$

Il faut avoir en tête les figures suivantes.

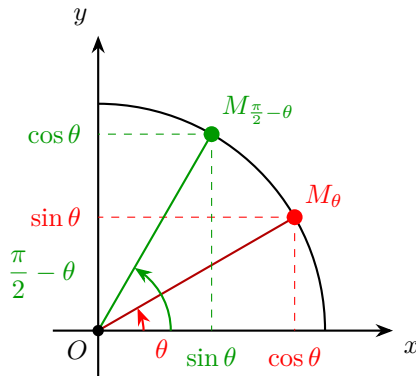


FIGURE 5.5 – Symétrie par rapport à la première bissectrice $y = x$: conséquences sur les fonctions cos et sin

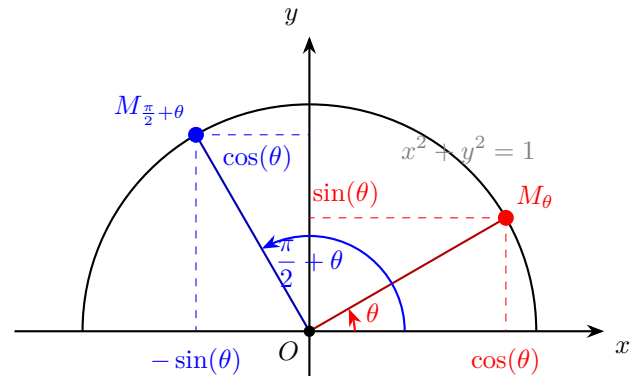


FIGURE 5.6 – Rotation d'angle $\pi/2$: conséquences sur les fonctions cos et sin

5.1.1 Formules

Proposition 5.11 (Formules d'addition). Soit a, b deux réels. Alors

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \\ \sin(a + b) &= \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a) \\ \sin(a - b) &= \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a) \end{aligned}$$

Proposition 5.12 (Formule de duplication). Soit θ un réel. Alors

$$\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$$

et

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= 2 \cos^2(\theta) - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Proposition 5.13 (Formules de multiplication). Soit a, b deux réels. Alors

$$\begin{aligned} \cos(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b)) \\ \sin(a) \sin(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)) \\ \sin(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b)) \end{aligned}$$

Proposition 5.14 (Formules de Simpson). Soit p, q deux réels. Alors

$$\begin{aligned}\cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) - \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\end{aligned}$$

Proposition 5.15 (Formule de l'arc moitié). Soit θ un réel et $t = \tan(\theta/2)$ ^a. Alors

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} ; \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$$

^a. On définit la fonction tangente juste après

5.1.2 La fonction tangente

Définition 5.16. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- Si $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{[\pi]}$, alors on définit $\tan(\theta) := \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.
- Si $\theta \not\equiv 0 \pmod{[\pi]}$, alors on définit $\cot(\theta) := \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

Exercice 5.1. Étudier la parité et la périodicité de $\tan$. Calculer $\tan$ en $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ et sa limite en $(\pi/2)^+$ et $(\pi/2)^-$.

5.1.3 Équations et inéquations trigonométriques

Proposition 5.17. On a

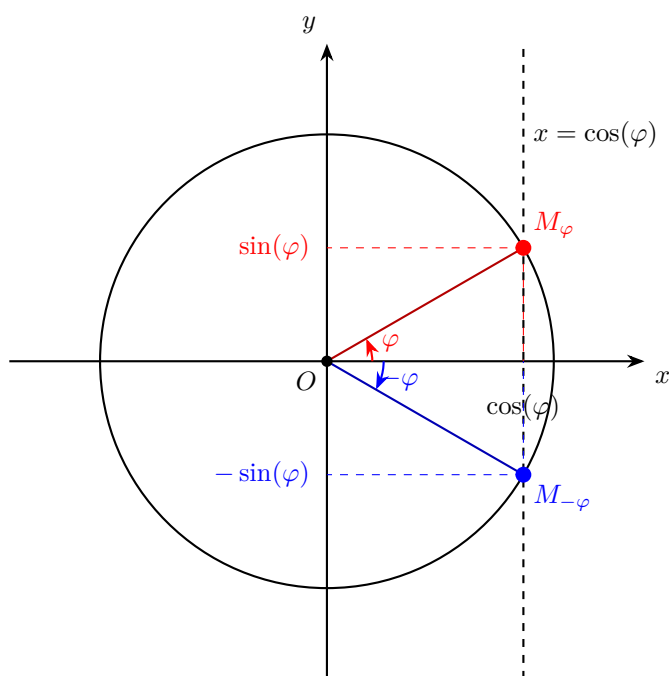
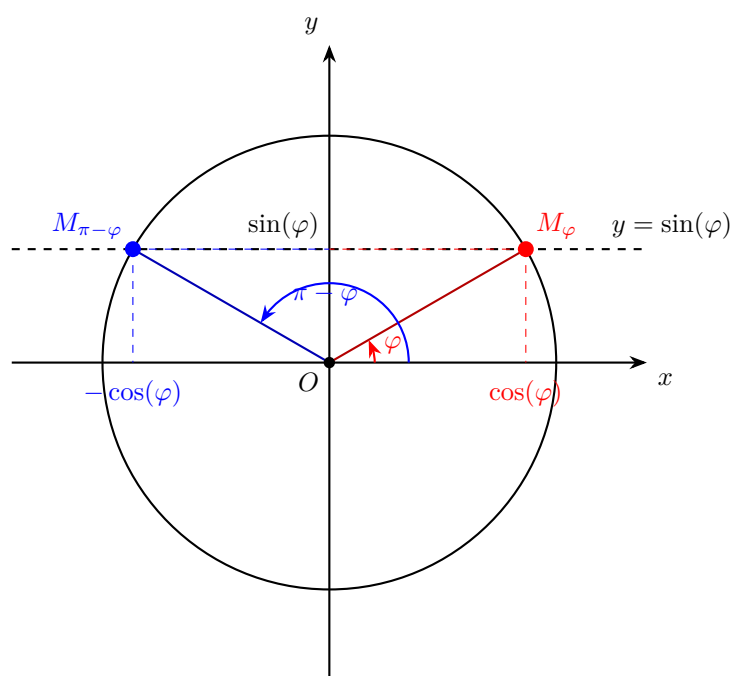
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) \in [-1, 1], \sin(\theta) \in [-1, 1].$$

Proposition 5.18. Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos(\theta) = \cos(\varphi) \iff \theta \equiv \varphi \pmod{2\pi} \text{ ou } \theta \equiv -\varphi \pmod{2\pi}$$

Proposition 5.19. Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sin(\theta) = \sin(\varphi) \iff \theta \equiv \varphi \pmod{2\pi} \text{ ou } \theta \equiv \pi - \varphi \pmod{2\pi}$$

FIGURE 5.7 – Résolution de l'équation $\cos(\theta) = a$.FIGURE 5.8 – Résolution de l'équation $\sin(\theta) = a$

Proposition 5.20. Soit $\theta \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi]$. Alors on a

1. $\cos(\theta) \leq \cos(\varphi) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta + 2k\pi \in [\varphi, 2\pi - \varphi]$
2. $\cos(\theta) \geq \cos(\varphi) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta + 2k\pi \in [-\varphi, \varphi]$
3. $\sin(\theta) \leq \sin(\varphi) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta + 2k\pi \in [0, \varphi] \cup [\pi - \varphi, 2\pi]$
4. $\sin(\theta) \geq \sin(\varphi) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta + 2k\pi \in [\varphi, \pi - \varphi]$

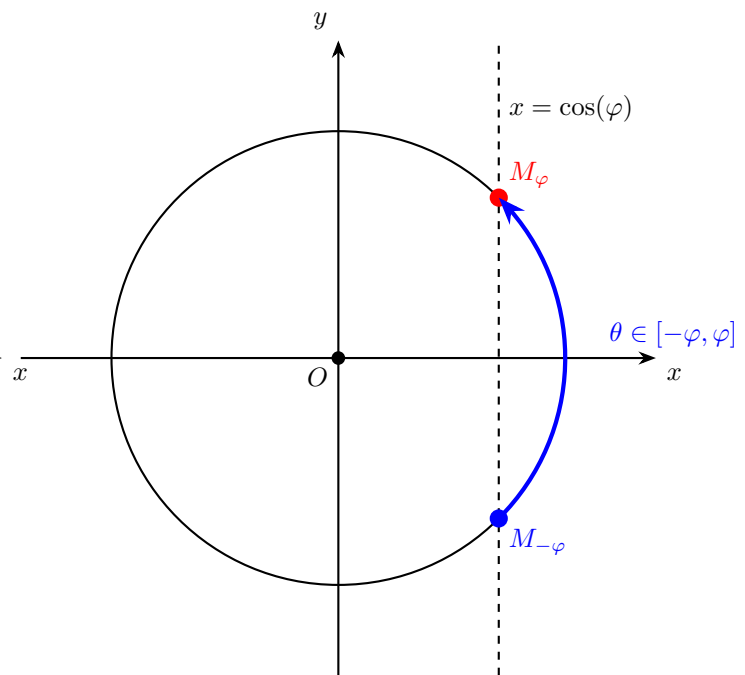
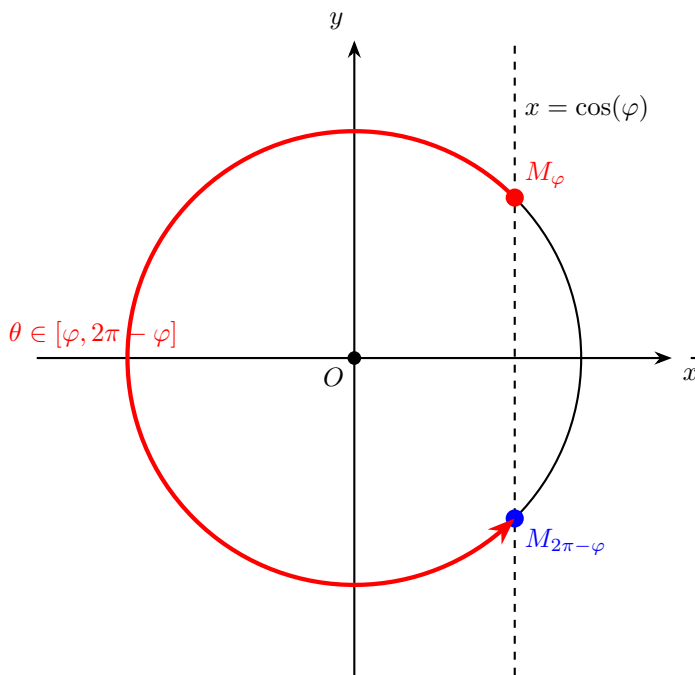


FIGURE 5.9 – Résolution de l'inéquation $\cos(\theta) \leq a$ FIGURE 5.10 – Résolution de l'inéquation $\cos(\theta) \geq a$

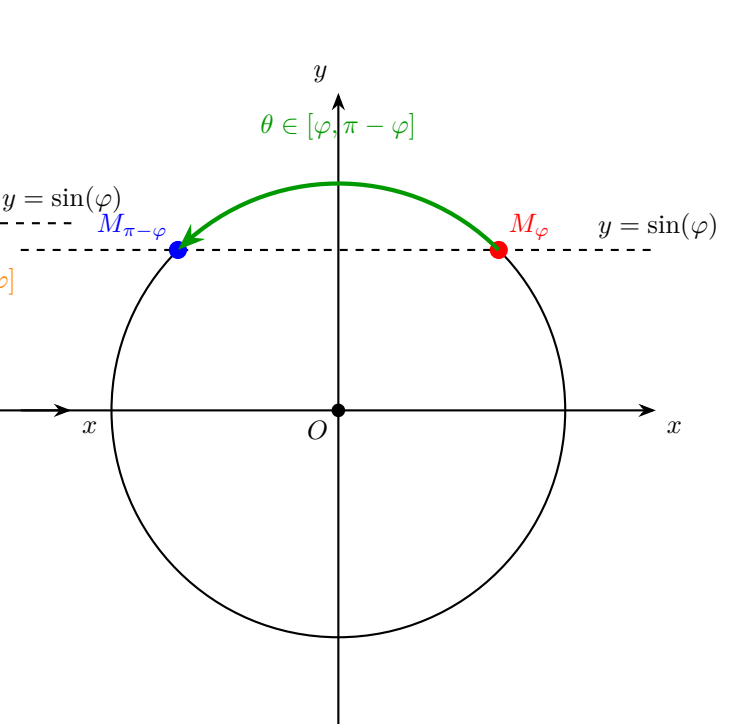
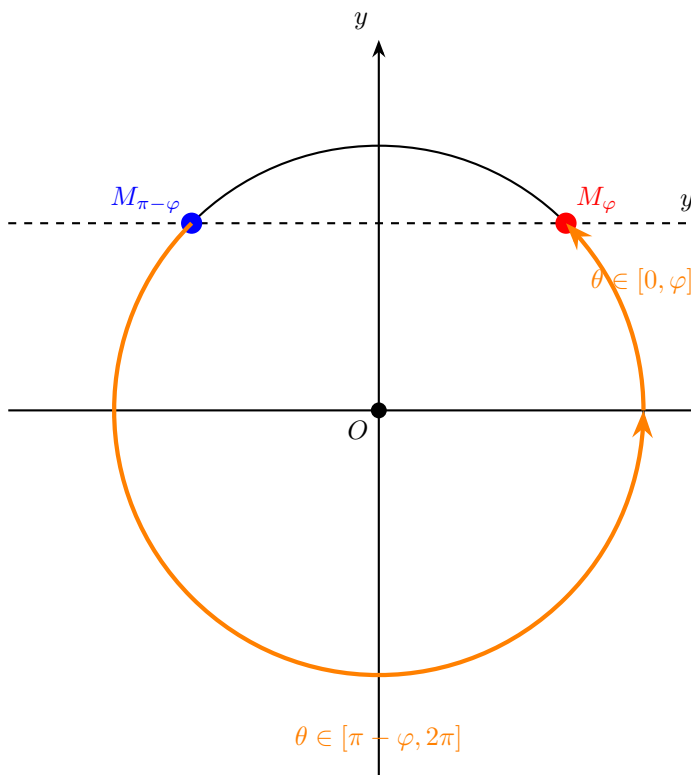


FIGURE 5.12 – Résolution de l'inéquation $\sin(\theta) \geq a$

FIGURE 5.11 – Résolution de l'inéquation $\sin(\theta) \leq a$

Exercices

Exercice 5.2 (Manipulations de formules). Partie 1 : Simplifier

1. $\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - 1$
2. $\sin^2(x) - \sin^4(x)$
3. $(\cos(x) + \sin(x))^2 - (\cos(x) - \sin(x))^2$
4. $\sin^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)$
5. $\cos(x + 2\pi) + \cos(x + \pi) + \cos(\pi - x) + \cos(2\pi - x)$
6. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(x + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Partie 2 : Montrer les égalités suivantes :

1. $\sin^6(x) + 3(\sin^4(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)\sin^2(x)) + \cos^6(x) = 1$
2. $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$
3. $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\sin(x - \pi/4)$
4. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 4\cos(x/2)\cos(x)\sin(5x/2)$
5. $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 4\cos(x/2)\cos(x)\cos(5x/2)$

Exercice 5.3 (Équations trigonométriques). Résoudre les équations suivantes (on donnera les solutions dans $\mathbb{R}$) :

1. $2\cos(x) = \sqrt{3}$
2. $-\sin(x) = \frac{1}{2}$
3. $\cos(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\sin(x) = \sin(2x + \pi/4)$
5. $\sin(x) = \cos(2x)$
6. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
7. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
8. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 5.4 (Inéquations trigonométriques). Résoudre les inéquations suivantes (on donnera les solutions dans $\mathbb{R}$) :

1. $2\sin(x) \geq 1$
2. $2\cos(x) < -2$
3. $\sin(x) < \cos(x)$
4. $\sin^2(x) < \cos^2(x)$
5. $2\cos(4x) - \sqrt{3} \geq 0$

5.2 Introduction

L'objet clef de ce chapitre est le nombre complexe i (normalement noté i). Il vient pour répondre au problème suivant : est-ce que le polynôme $X^2 + 1$ admet une racine dans $\mathbb{R}$?

La réponse est non (en effet, pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$: il ne peut donc pas y avoir de réel vérifiant $x^2 + 1 = 0$). Notons donc i un nombre défini comme étant $i^2 = -1$.

Ce nombre i n'est donc pas réel. On dira que c'est un **nombre complexe**.

Maintenant, on souhaite construire un ensemble raisonnable qui contient $\mathbb{R}$ et ce nombre i . *A priori*, l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{i\}$ convient. Un des problèmes de cet ensemble est qu'il ne permet pas de faire du calcul (addition et multiplication) « comme on l'entend » dans $\mathbb{R}$, ces opérations venant elles de celles de $\mathbb{Q}$, qui viennent de celles de $\mathbb{Z}$, qui viennent de celles de $\mathbb{N}$ dans lequel pour deux entiers k, ℓ dans $\mathbb{N}$,

$$k + \ell = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k \text{ fois}} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\ell \text{ fois}} = k + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\ell \text{ fois}}; \quad k \times \ell = \underbrace{k + \cdots + k}_{\ell \text{ fois}} = \underbrace{\ell + \cdots + \ell}_{k \text{ fois}}.$$

Ainsi, on aimerait pouvoir réaliser $a + i$ pour tout a réel et $i \times b$ pour tout b réel. Autrement dit, on voudrait plutôt considérer l'ensemble

$$\{a + ib : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}.$$

Théorème 5.21. *Il existe un ensemble possédant les propriétés suivantes :*

- Il contient l'ensemble $\mathbb{R}$,
- est muni d'une addition notée $+$ et d'une multiplication notée $\times$ avec lesquelles on calcule comme dans $\mathbb{R}$,
- possède le nombre i vérifiant $i^2 = -1$,
- et tout élément s'écrit $a + i \times b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On admet ce théorème. On peut construire cet ensemble en considérant l'ensemble

$$\{P \% (X^2 + 1) : P \in \mathbb{R}[X]\}$$

où $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $A \% B$ désigne le reste de la division euclidienne des polynômes de A par B .

On peut aussi le faire en considérant

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

□

Définition 5.22. Cet ensemble est noté $\mathbb{C}$. Ses éléments sont appelés **nombres complexes**.

5.3 Forme algébrique

Théorème 5.23. *Soit z un nombre complexe. Il existe donc deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $z = a + ib$. Ces réels sont uniques.*

Démonstration. Soit a, b, c, d quatre réels. On suppose que $a + ib = c + id$. Alors $a - c = i(d - b)$.

- Si $d = b$, alors $a - c = 0$ donc $a = c$ et on a l'unicité.
- Si $d \neq b$, alors $i = \frac{a - c}{d - b} \in \mathbb{R}$ ce qui est absurde, $i \notin \mathbb{R}$.

Ainsi, on a l'unicité souhaitée.

Alternative. Dans $a - c = i(d - b)$, on a $(a - c)^2 = i^2(d - b)^2 = -(d - b)^2$. Ainsi, $(a - c)^2 + (d - b)^2 = 0$. Ainsi, $(a - c)^2 = (d - b)^2 = 0$ donc $a = c$ et $d = b$ et on a l'unicité souhaitée. □

Définition 5.24. Dans le théorème précédent, on dit que a est la partie réelle de z et b est la partie imaginaire de z . On note $\Re(z) = a$, $\Im(z) = b$. On dit que $a + ib$ est l'écriture algébrique ou la forme algébrique de z .

Remarque 5.25. On peut donc identifier partie réelle et partie imaginaire. Par exemple, si un nombre complexe $z = a + ib$ s'écrit aussi $c + id$, alors $a = c$ et $b = d$.

Définition 5.26. Un nombre complexe est dit imaginaire pur s'il s'écrit ib avec $b \in \mathbb{R}$ (autrement dit, de partie réelle nulle).

Proposition 5.27. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z') ; \Im(z + z') = \Im(z) + \Im(z').$$

Démonstration. Immédiat. □

Remarque 5.28. Pour la plupart des nombres complexes, $\Re(zz') \neq \Re(z)\Re(z')$.

Proposition 5.29. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$\Re(zz') = \Re(z)\Re(z') - \Im(z)\Im(z') ; \Im(zz') = \Re(z)\Im(z') + \Re(z')\Im(z).$$

Démonstration. Immédiat. □

Proposition 5.30. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z \neq 0$, alors il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$.

Démonstration. Voir plus tard. □

Définition 5.31. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec a, b deux réels. Le nombre complexe $a - ib$ est appelé le conjugué de z et est noté $\bar{z}$.

Proposition 5.32. Soit z, z' deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}$. Alors

1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.
2. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$.
3. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Démonstration. Immédiat. □

Proposition 5.33. Soit z un nombre complexe. Alors

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} ; \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} ; \bar{\bar{z}} = z.$$

Démonstration. Immédiat. □

Corollaire 5.34. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z} ; z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}.$$

Définition 5.35. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec a, b deux réels. On appelle *module* de z le réel positif $\sqrt{a^2 + b^2}$ noté $|z|$.

Remarque 5.36. Le module d'un nombre réel coïncide donc avec la valeur absolue de ce réel. On conserve donc la même notation.

Remarque 5.37. Il est beaucoup plus agréable de manipuler $|z|^2$ plutôt que $|z|$ (pour s'affranchir de la racine carrée). Par positivité, on a $|z| = |z'| \iff |z|^2 = |z'|^2$.

Proposition 5.38. Soit z, z' deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}$. Alors

1. $z\bar{z} = |z|^2$.
2. $|z| = |\bar{z}|$.
3. $|zz'| = |z||z'|$.
4. $|z^n| = |z|^n$.

Démonstration. 1. On écrit $z = a + ib$ avec a, b deux réels. Alors

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = |z|^2.$$

On écrit $z = a + ib$ et $z' = c + id$ avec a, b, c, d quatre réels. Pour montrer $|zz'| = |z||z'|$, on va donc montrer que

$$|zz'|^2 = |z|^2|z'|^2.$$

On a

$$|zz'|^2 = \Re(zz')^2 + \Im(zz')^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 ; |z|^2|z'|^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Or, en développant, on a

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 ; (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2.$$

Alternative. Puisqu'on sait que $|z|^2 = z\bar{z}$, on a

$$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = z\bar{z}z'\bar{z'} = |z|^2|z'|^2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $|z^n|^2 = z^n\overline{z^n} = z^n\bar{z}^n = (z\bar{z})^n = |z|^2n$ donc $|z^n| = |z|^n$. □

On peut maintenant démontrer facilement la proposition 5.30.

Démonstration. Soit $z \neq 0$. On a donc $z\bar{z} = |z|^2$. Comme $z \neq 0$, $|z| \neq 0$ donc

$$z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

donc on obtient l'existence.

Pour l'unicité, soit z' tel que $zz' = 1$. On va montrer que $z' = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Notons $Z = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Alors

$$zz' = zZ$$

donc $z(z' - Z) = 0$. En multipliant par Z , on a $zZ(z' - Z) = 0$ donc $z' - Z = 0$. On a donc l'unicité souhaitée. □

1. On a bien évidemment accès aux identités remarquables !

2. On remarque qu'on n'utilise pas la structure complexe. Si l'inverse existe, il est unique (dans le cadre associé).

Théorème 5.39. Soit a, b, c trois nombres réels avec $a \neq 0$. Alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours des solutions. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions réelles : ce sont $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation n'a qu'une seule solution réelle : c'est $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées : c'est $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration. L'idée provient de la forme canonique d'un polynôme de degré 2. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} aX^2 + bX + c &= a \left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(X^2 + 2\frac{b}{2a}X + \left[\frac{b}{2a} \right]^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left[X + \frac{b}{2a} \right]^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left[X + \frac{b}{2a} \right]^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right). \end{aligned}$$

- Si $\Delta > 0$, alors pour x réel, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a \left(\left[x + \frac{b}{2a} \right]^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \\ &\iff x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc bien celles annoncées.

- Si $\Delta = 0$, alors

$$aX^2 + bX + c = a \left(X + \frac{b}{2a} \right)^2$$

Ainsi, il n'y a bien qu'une seule solution qui est $-\frac{b}{2a}$.

- Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a toujours $x^2 = a^2 \iff x = \pm a^3$. Si $\Delta < 0$, alors $\Delta = i^2(-\Delta) = (i\sqrt{-\Delta})^2$ donc

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a \left(\left[x + \frac{b}{2a} \right]^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \left(i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \\ &\iff x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ &\iff x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

□

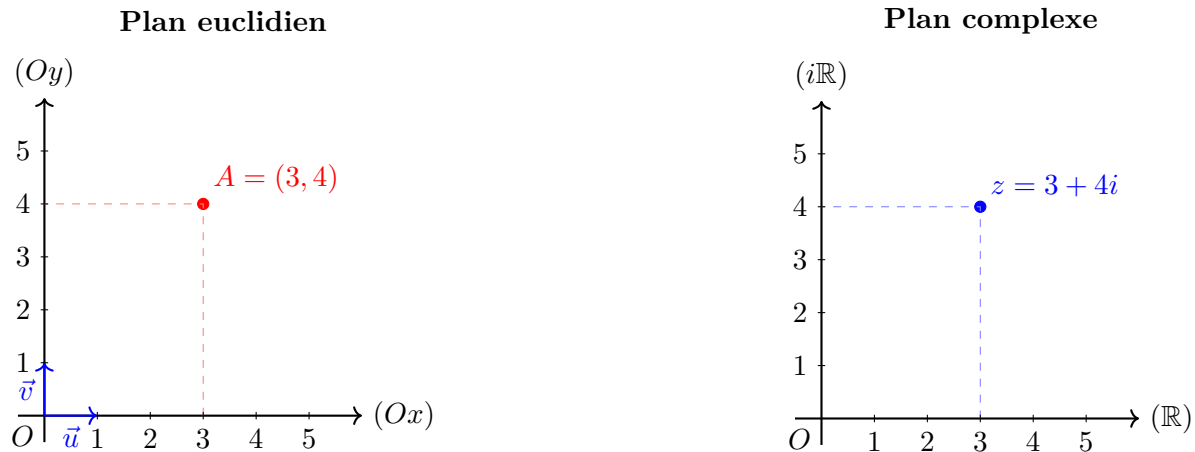
3. En effet, $x^2 = a^2 \iff (x - a)(x + a) = 0$.

5.4 Forme trigonométrique et géométrie

5.4.1 Introduction

On a vu qu'un nombre complexe se décompose de manière unique sous la forme $a + ib$. Autrement dit, se donner un nombre complexe est équivalent à se donner deux réels.

Ces deux réels sont uniques et sont indépendants entre eux, comme les coordonnées d'un vecteur du plan $\mathbb{R}^2$. On pourrait assimiler la partie réelle comme étant l'abscisse et la partie imaginaire comme l'ordonnée. Le nombre complexe $z := 3 + 4i$ serait donc assimilé au vecteur du plan $A(3, 4)$. On aurait les schémas suivants :



A priori, on n'a pas de raison de choisir le repère orthonormé. Ce qui nous intéresse avec celui-ci dans le cas du plan est la notion de produit scalaire. Avec le produit scalaire que l'on connaît du lycée (on rappelle que si $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$), on caractérise le repère en demandant à ce que

- L'axe (Ox) est orthogonal à l'axe (Oy) , caractérisé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ (ce qui est vrai avec notre produit scalaire).
 - Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est direct ce qui signifie que l'axe (Ox) progresse vers l'axe (Oy) dans le sens direct.
- Enfin, grâce à ceci, on peut calculer la norme d'un vecteur puisque si $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2$.

On choisit donc un repère orthogonal et le produit scalaire entre deux nombres complexes z et z' sera $\Re(z\overline{z'})$. Si $z = a + ib$ et $z' = c + id$, on a $\Re(z\overline{z'}) = ac + bd$.

5.4.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Définition 5.40. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec a, b deux réels. On note $M(a, b)$ le point de coordonnées (a, b) . Alors M est appelé point image de z et z est appelé affixe de M . On note aussi $M(z)$. Le vecteur du plan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est appelé vecteur image de z et z est son affixe. C'est le vecteur $\overrightarrow{OM}(z)$.

On sait faire des combinaisons linéaires de vecteurs. Cela se transpose aux complexes.

Proposition 5.41. Soit z, z' deux complexes et λ, μ deux scalaires. Soit v le vecteur image de z et v' de z' . Alors le vecteur $\lambda v + \mu v'$ est le vecteur image de $\lambda z + \mu z'$.

Par ailleurs, si M est l'affixe de z et M' de z' , alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$ (comme pour les coordonnées d'un vecteur : on parle du point d'arrivée vers le point de départ). En particulier, la distance MM' est donné par $|z' - z|$.

Démonstration. Immédiat. □

5.4.3 Module d'un nombre complexe

Remarque 5.42. On peut donc définir le module d'un nombre complexe comme étant la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$. Comme $\overrightarrow{OM(z)}$ est un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \Re(z) \\ \Im(z) \end{pmatrix}$, on a

$$|z| = \|\overrightarrow{OM(z)}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Proposition 5.43 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Alors on a l'inégalité

$$\vec{u} \cdot \vec{v}^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$$

et il y a égalité si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration. Profitons ici du cas de deux dimensions. Le cas général sera traité pendant l'année de Mathématiques Supérieures. On a

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (ac + bd)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd$$

et

$$\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2.$$

Ainsi,

$$\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = (ad - bc)^2 \geq 0.$$

On a donc l'égalité souhaitée. Maintenant, on a

$$0 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (ad - bc)^2 \geq 0$$

si, et seulement si $ad - bc = 0$ ce qui revient à dire que $ad = bc$. On sait alors depuis le lycée que cela signifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (le déterminant est nul). $\square$

Proposition 5.44 (Inégalité triangulaire). Soit $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

et il y a égalité si, et seulement si, l'un des vecteurs est nul ou $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de même direction et sens.

Démonstration. Par positivité, cela revient à montrer que $(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 - \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \geq 0$. On rappelle que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

Le produit scalaire est symétrique donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ et

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

On a donc

$$(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 - \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| - 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Par Cauchy-Schwarz, on a

$$\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

donc en passant à la racine carrée, on a

$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \geq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \geq \vec{u} \cdot \vec{v}$$

ce qui conclut.

Pour le cas d'égalité, on constate que

$$0 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 - \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| - \vec{u} \cdot \vec{v}) \geq 0$$

donc il y a égalité si et seulement si

$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

S'il y a égalité, alors on est aussi dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Maintenant, en notant $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, en injectant dans l'égalité précédente, on obtient $k\|\vec{u}\|^2 = |k|\|\vec{u}\|^2$. Ainsi, soit $\vec{u}$ est le vecteur nul (si c'était $\vec{v}$, comme ils sont colinéaires, c'est tout aussi fini), soit $k = |k|$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même direction et de même sens. $\square$

Fort de ces observations, on peut donc conclure l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les complexes ainsi que l'inégalité triangulaire.

Proposition 5.45. Soit $z = a + ib, z' = c + id$ deux complexes avec a, b, c, d quatre réels. Alors

$$\Re(z\bar{z}') \leq |z||z'|.$$

Démonstration. On l'a déjà fait géométriquement mais avec la structure complexe, c'est évident. En fait,

$$\forall a \in \mathbb{C}, \Re(a) \leq |\Re(a)| = \sqrt{\Re(a)^2} \leq \sqrt{\Re(a)^2 + \Im(a)^2} = |a|.$$

Avec $a = z\bar{z}'$, on a

$$\Re(z\bar{z}') \leq |z\bar{z}'| = |z||\bar{z}'| = |z||z'|.$$

$\square$

Remarque 5.46. On appelle parfois l'inégalité de Cauchy-Schwarz l'inégalité $\Re(a) \leq |a|$ pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Proposition 5.47. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

avec égalité si, et seulement si, $z = 0$ ou il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = kz'$.

Démonstration. Exercice. $\square$

5.4.4 Nombres complexes de module 1

Définition 5.48. L'ensemble $\mathbb{U}$ est défini par

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Proposition 5.49. $\mathbb{U}$ est stable par produit et par inverse.

Démonstration. Soit $z, z' \in \mathbb{U}$. Alors $|zz'| = |z||z'| = 1 \times 1 = 1$ donc $zz' \in \mathbb{U}$. Ensuite, comme $|z| = 1, z \neq 0$ donc $\frac{1}{z}$ existe et $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1$ donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$. $\square$

Définition 5.50. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Le nombre complexe $e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Proposition 5.51.

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $|e^{i\theta}|^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ donc $|e^{i\theta}| = 1$ et $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $|z| = 1$ donc $\Re(z)^2 + \Im(z)^2 = 1$. Ainsi, le point $(\Re(z), \Im(z))$ est un point du cercle de centre 0 et de rayon 1 : il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) = \Re(z)$ et $\sin(\theta) = \Im(z)$ donc $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$. $\square$

Remarque 5.52. Ainsi, la représentation de l'ensemble $\mathbb{U}$ dans le plan complexe est le cercle trigonométrique.

Proposition 5.53. Soit θ, φ deux réels. Alors $e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff \theta \equiv \varphi \pmod{2\pi}$.

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} = e^{i\varphi} &\iff \cos(\theta) + i \sin(\theta) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \\ &\iff \begin{cases} \cos(\theta) = \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) = \sin(\varphi) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \theta \equiv \varphi \pmod{2\pi} \text{ ou } \theta \equiv -\varphi \pmod{2\pi} \\ \theta \equiv \varphi \pmod{2\pi} \text{ ou } \theta \equiv \pi - \varphi \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \theta \equiv \varphi \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 5.54. Soit θ, φ deux réels. Alors

1. $e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$.
2. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

Démonstration. 1. On a

$$\begin{aligned} e^{i\theta} e^{i\varphi} &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \\ &= \cos(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta) \sin(\varphi) + i (\cos(\theta) \sin(\varphi) + \cos(\varphi) \sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) \end{aligned}$$

avec la formule d'addition. Ainsi, $e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$.

$\square$

Remarque 5.55. Vu que la preuve repose sur les formules d'addition, on peut retenir les formules d'addition juste avec la formule $e^{a+b} = e^a e^b$.

Proposition 5.56 (Formule d'Euler). Soit θ un réel. Alors

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} ; \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. On a

$$\cos(\theta) = \Re(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

Dans le même acabit,

$$\sin(\theta) = \Im(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

□

Remarque 5.57 (Technique de l'angle moitié). Soit θ, φ deux réels. On veut calculer le module et l'argument^a de $e^{i\theta} + e^{i\varphi}$. Pour cela, on exhibe l'angle moitié, à savoir $e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}$. On a donc

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}} + e^{i\frac{-\theta+\varphi}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}.$$

Ainsi,

$$|e^{i\theta} + e^{i\varphi}| = 2 \left| \cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) \right|.$$

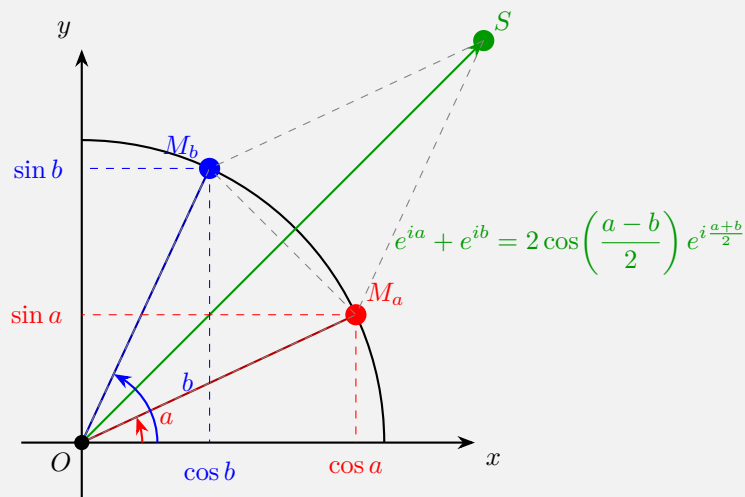


FIGURE 5.13 – Illustration de la technique de l'angle moitié

a. voir après

Exercice 5.5. Retrouver les formules de Simpson.

Proposition 5.58 (Formule de Moivre). Soit θ un réel et n un entier relatif. Alors

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{H}_n : \forall \theta \in \mathbb{R}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

- Initialisation. Pour $n = 0$, on a $\forall \theta \in \mathbb{R}, (e^{i\theta})^0 = 1 = e^{i0\theta}$. Ainsi, $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ soit vraie. Alors

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, (e^{i\theta})^{n+1} = (e^{i\theta})^n e^{i\theta} \stackrel{\mathcal{H}_n}{=} e^{in\theta} e^{i\theta} = e^{i(n+1)\theta}.$$

Ainsi, on a $\mathcal{H}_{n+1}$.

- Conclusion. Par le principe de récurrence, on en déduit que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Alors $-n \in \mathbb{N}$ donc

$$(e^{i\theta})^n = (e^{i\theta})^{-1})^{-n} = (e^{-i\theta})^{-n} = e^{in\theta}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Cela se réécrit en

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

□

Exercice 5.6. Calculer $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2026}$, $(1+i)^{2026}$ et $(1+i\sqrt{3})^{2026}$.

5.4.5 Argument d'un nombre complexe

Proposition 5.59. Soit z un nombre complexe non nul. Il existe alors un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times [0, 2\pi[$ tel que $z = re^{i\theta}$.

Démonstration. Comme $z \neq 0$, $|z| \neq 0$ donc le nombre complexe $\frac{z}{|z|}$ est bien défini et est de module 1. Il est donc dans $\mathbb{U}$ donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}$. Soit $k = \left\lfloor \frac{\varphi}{2\pi} \right\rfloor$. Alors

$$k \leq \frac{\varphi}{2\pi} < k+1$$

donc

$$2k\pi \leq \varphi < 2k\pi + 2\pi.$$

Ainsi, $\theta = \varphi - 2k\pi \in [0, 2\pi[$ et $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$. On a donc

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$$

donc $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z| > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Pour l'unicité, soit $(r, \theta), (r', \theta') \in \mathbb{R}^{+*} \times [0, 2\pi[$ tel que $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$. Alors en prenant le module,

$$|r||e^{i\theta}| = |r'||e^{i\theta'}|$$

donc $r = |r| = |r'| = r'$. Ainsi, $r' = r$ et comme $r \neq 0$, on a donc $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$. Ainsi, $\theta - \theta' \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Or on a

$$0 \leq \theta < 2\pi ; -2\pi < -\theta' \leq 0$$

donc

$$-2\pi < \theta - \theta' < 2\pi.$$

Le seul multiple de 2π dans $] -2\pi, 2\pi[$ est 0 donc $\theta - \theta' = 0$ et $\theta = \theta'$. On a l'unicité voulue. □

Définition 5.60. Soit z un nombre complexe non nul. Il peut donc s'écrire $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On dit alors que $re^{i\theta}$ est une forme exponentielle de z et $r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ est une forme trigonométrique. L'écriture est unique pour r , et unique pour θ à 2π près.

Définition 5.61. Un réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé argument de z . Il est donc défini de manière unique à 2π près. On le note $\arg(z)$.

Remarque 5.62. Soit z un nombre complexe non nul de point image M . L'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ est appelé argument de z et est donc défini modulo 2π .

Remarque 5.63. Très souvent, on fait un abus de notation en écrivant par exemple $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$.

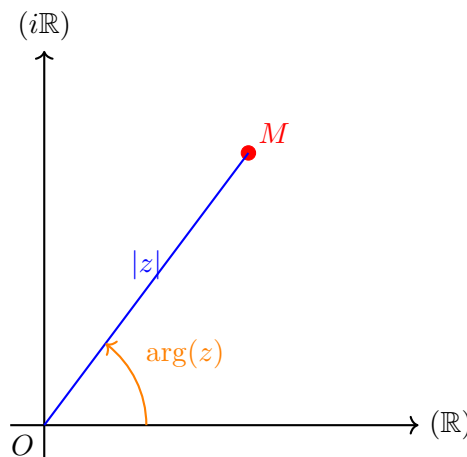


FIGURE 5.14 – Module et argument d'un nombre complexe

Remarque 5.64. Bien que sa définition requiert la précision modulo 2π , on dira par abus que l'argument d'un nombre complexe non nul est un réel. L'argument de 0 n'est pas défini. On peut pourtant l'écrire $0 = 0e^{i\theta}$ avec θ quelconque.

Proposition 5.65. Soit z, z' deux nombres complexes non nuls et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

1. $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$
2. $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
3. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
4. $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \pmod{2\pi}$
5. $z \in \mathbb{R}^* \iff \arg(z) \equiv 0 \pmod{\pi}$
6. $z \in i\mathbb{R}^* \iff \arg(z) \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$

Démonstration. L'idée est d'écrire les différents nombres complexes sous la forme $re^{i\theta}$. On fera attention à bien vérifier que $r > 0$. Soit $z = re^{i\theta}, z' = r'e^{i\theta'}$. On a donc $\arg(z) \equiv \theta \pmod{2\pi}$; $\arg(z') \equiv \theta' \pmod{2\pi}$.

1. On a

$$-z = e^{i\pi}re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$$

donc $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$.

2. On a

$$\bar{z} = re^{-i\theta}$$

donc $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$.

3. On a

$$zz' = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

donc $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{[2\pi]}$.

4. Par la formule de Moivre,

$$z^n = r^n(e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

donc $\arg(z^n) \equiv nz \pmod{[2\pi]}$.

5. On a

$$z \in \mathbb{R}^* \iff \begin{cases} z = ze^{i \times 0} & \text{si } z > 0 \\ z = |z|e^{i\pi} & \text{si } z < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \arg(z) \equiv 0 & \pmod{[2\pi]} \\ \arg(z) \equiv \pi & \pmod{[2\pi]} \end{cases} \iff \arg(z) \equiv 0 \pmod{[\pi]}.$$

6. On a

$$z \in i\mathbb{R}^* \iff iz \in \mathbb{R}^* \iff \underbrace{\arg(iz)}_{=\arg(z)+\pi/2} \equiv 0 \pmod{[\pi]} \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{[2\pi]}.$$

□

Proposition 5.66. Soit A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C, z_D . Alors l'angle orienté

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) \pmod{[2\pi]}.$$

Démonstration. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. On écrit $z_B - z_A$ sous forme exponentielle : $z_B - z_A = r e^{i\theta}$. De même, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour affixe $z_D - z_C$ qu'on va écrire $\rho e^{i\varphi}$.

On sait alors que $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ et $\varphi = (\vec{u}, \overrightarrow{CD})$. On a donc

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = \varphi - \theta.$$

Or,

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{r e^{i\varphi}}{\rho e^{i\theta}} = \frac{r}{\rho} e^{i(\varphi - \theta)}$$

donc

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) \pmod{[2\pi]}.$$

□

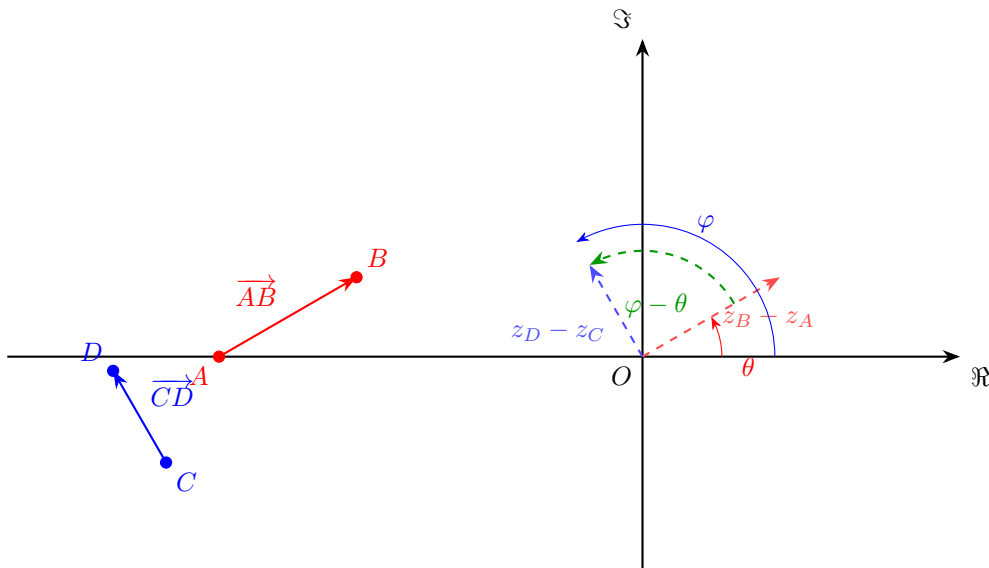


FIGURE 5.15 – Illustration du résultat de la proposition 5.66

Corollaire 5.67. Dans les notations précédentes,

$$(AB) // (CD) \iff \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) \equiv 0 \pmod{[\pi]}$$

et

$$(AB) \perp (CD) \iff \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{[\pi]}.$$

Démonstration. Il suffit de savoir que (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, ce qui est équivalent à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv 0 \pmod{[\pi]}$.

Il suffit aussi de savoir que (AB) et (CD) sont perpendiculaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, ce qui est équivalent à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{[\pi]}$. □

5.5 Exercices

5.5.1 Entraînement

Exercice 5.7 (Forme algébrique). On rappelle que la forme algébrique d'un nombre complexe z est son écriture sous la forme $\Re(z) + i\Im(z)$. Mettre les complexes suivants sous leur forme algébrique :

1. $\frac{-2}{1 - i\sqrt{3}}$
2. $\frac{1}{(1 + i)(3 - i)}$
3. $\frac{1 + 2i}{(1 - 2i)}$
4. $\frac{5 + i\sqrt{2}}{1 - 2i}$
5. $\overline{(5 + i)(4i - 2)}$
6. $\frac{1}{(1 + 2i)(2 - i)} \times \frac{\overline{1 + i}}{(1 - 2i)}$

Exercice 5.8 (Forme trigonométrique). Calculer le module et l'argument dans $[0, 2\pi[$ des complexes ci-dessous.

1. $1 + i\sqrt{3}$
2. $1 - i\sqrt{3}$
3. $(1 - i)$
4. $(1 - i)(1 - i\sqrt{3})$
5. $(1 - i\sqrt{3})^5$

Exercice 5.9 (Forme exponentielle). Donner la forme exponentielle des complexes ci-dessous.

1. 20
2. -7
3. $7i$
4. $(\sqrt{3} + i)^5$
5. $\frac{4}{1 + i}$

Exercice 5.10 (Équations complexes : degré 1). Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera aussi le module des solutions.

1. $iz + 1 + i = 0$
2. $(3 + 2i)z = 1 + 4i$
3. $(1 - 9i)\bar{z} = 3 + 2i$
4. $(z + 1 - i)(\bar{z} + 3 + 4i)$
5. $5z + 2i = (1 + i)z - 3$
6. $\frac{2 + i}{iz + 1} = 3 + iz$

- Exercice 5.11** (Quelques cosinus/sinus particuliers). 1. Soit $z_1 = -1 - i, z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. Donner la forme algébrique et exponentielle de z_1/z_2 puis donner les valeurs de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.
2. Soit $z = \sqrt{\sqrt{2} + 2} + i\sqrt{-\sqrt{2} + 2}$. Donner la forme trigonométrique de z^2 . En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
3. Soit $z_1 = 1 - i, z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$. Donner la forme exponentielle de $z_1 z_2, z_1/z_2$ puis donner la forme algébrique de z_1/z_2 . En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4. Soit $Z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$. Donner la forme algébrique et trigonométrique de Z . En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
5. Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = 1 - i, Z = \frac{z_1}{z_2}$. Donner la forme algébrique de Z , puis la forme trigonométrique de z_1, z_2 et Z . En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 5.12 (Équations complexes : degré 2). Résoudre les équations suivantes.

1. $x^2 + 2 = 0$.
2. $x^2 + x + 1 = 0$.
3. $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$.
4. $x^2 - 2x + 2 = 0$.
5. $x^2 - 4x + 5 = 0$.
6. $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Exercice 5.13 (Un peu de géométrie). Dans la suite, on placera dans le plan complexe l'ensemble des points. On remarquera surtout que deux complexes conjugués sont sur la même droite verticale. On note A en majuscule pour un point, a pour l'affixe.

1. Soit $A = (2 - i), B = (3 + 2i), C = (-1 + 4i), D = (-2 + i)$. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Soit $A = (-i\sqrt{3}), B = (3 + 2i\sqrt{3}), C = (-3 + 2i\sqrt{3})$. Que dire de ABC ?
3. Soit $A = (-2 + 2i), B = (4 + 2i), C = (-2 - 4i)$. Que dire de ABC ?
4. Soit $A = (-2), B = (2), C = (-1 + i), D = (1 - 3i)$. Que dire de BCD et ACD ? Que dire de ces 4 points?
5. Soit $A = (-2), B = \left(\frac{-1 - 3i}{5}\right), C = \left(\frac{-1 + 3i}{5}\right), D = (1 + i)$. Montrer qu'il existe un cercle de centre O et de rayon R tel que A, B, C sont sur ce cercle. On déterminera O et R . Donner ensuite la forme algébrique de $\frac{a - c}{d - c}$. Qu'en déduire?

5.5.2 Approfondissement

Exercice 5.14 (Forme algébrique : Approfondissement). Soit z un imaginaire pur, et $u \neq 1$. Montrer que :

$$\Im\left(\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}\right) = 0 \Leftrightarrow |u| = 1.$$

Exercice 5.15 (Equations complexes de degré 2). On cherche à résoudre l'équation complexe :

$$\frac{1}{z^2 + 4z + 4} + (46 - 6i)z + 31 = 0.$$

1. Montrer que :

$$\frac{1}{z^2 + 4z + 4} + (46 - 6i)z + 31 = X^2 - 6x + 13, \text{ aoverrightarrowrightarrow } X = \frac{z - 3i}{z + 2}.$$

2. Déterminer a, b tel que $X^2 - 6x + 13 = (X - a)^2 + b$.

3. En déduire les solutions de $X^2 - 6x + 13$.

4. Conclure.

Exercice 5.16 (Lieu géométrique). Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie (on pourra faire un dessin) :

1. $z + \bar{z} = |z|^2$
2. $|2\bar{z} + 1| = 1$
3. $|iz - 3| = 1$
4. $|3iz + 6| = 3|z - 1 + i|$
5. $|z - 1 - i| = |2 + i|$
6. $|z + i - 2i| \leq \sqrt{5}$
7. $|z - 1| \leq |z + 1 - 2i|$
8. $\left|\frac{2iz}{z + 2}\right| = 2$
9. $|\bar{z} - 2 + i| = 1$
10. $\arg(z) = \pi/2[\pi]$
11. $\arg(\bar{z}) = \pi/4[\pi]$
12. $\arg\left(\frac{z + 1 - i}{z - 3 - i}\right) = 0[\pi]$
13. $\Re\left(\frac{z + 1}{z - 2i}\right)$
14. $\Im\left(\frac{z + 1}{z - 2i}\right)$

Exercice 5.17 (Etude d'une fonction trigonométrique). On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x) + \sin^2(x)$. Etudier la périodicité, la parité, les variations de f . Admet-elle une tangente en $\pi/2$? La donner dans le cas positif. (En déduire l'allure de la courbe).

Exercice 5.18 (Manipulation de lourdes expressions). Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. On suppose que $|z_1| = |z_2| = 1$, que $z_1 z_2 \neq -1$. On pose :

$$Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}.$$

Montrer que Z est réel et exprimer Z en fonction de l'argument de z_1 et z_2 . On pourra les nommer θ_1, θ_2 .

Exercice 5.19 (Triangle et concours). Soit A, B, C , trois points du plan complexe formant un triangle direct, c'est-à-dire que si l'on considère la droite (AB) , C se trouve au-dessus de (AB) . On construit A', B', C' d'affixes respectives a', b', c' de sorte que BAC', CBA', ACB' soit équilatéraux directs.

1. Faire une figure soignée.
2. Montrer que

$$a' = -jc - j^2b, b' = -ja - j^2c, c' = -jb - j^2a.$$

3. Montrer que $a + b + c = a' + b' + c'$. Cela montre que ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.
4. Montrer que $[AA'] = [BB'] = [CC'] \neq 0$. Calculer les angles entre eux.
5. On note $D = a + j^2b + jc$. Montrer que si H d'affixe h est un point de $(AA'), (BB')$ et (CC') , alors

$$h = \frac{(a + b + c)\overline{D} - (\overline{a} + \overline{b}j^2 + \overline{c}j)D}{3\overline{D}}.$$

Exercice 5.20 (Une formule magique hors-programme). Soit $z \in \mathbb{R}^-$. Calculer $\text{Arg}(z)$.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Je note $\theta = \text{Arg}(z)$, r , son module. Autrement dit, $z = re^{i\theta}$. On suppose dans un premier temps que $r = 1$. Montrer que :

$$\tan(\theta/2) = \frac{\cos(\theta)}{1 + \sin(\theta)}$$

Montrer que $\tan$ est bien définie sur $] -\pi/2, \pi/2[$. Montrer que pour tout réel α , l'équation $\tan(x) = \alpha$ admet une unique solution réelle. (Utiliser le TVI).

5.6 Compléments

5.6.1 Exponentielle complexe

Définition 5.68. Soit z un nombre complexe. Alors on définit e^z comme étant le nombre complexe

$$e^z = e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)}.$$

Remarque 5.69. L'exponentielle complexe prolonge la fonction exponentielle réelle que l'on connaissait. En effet, si x est un réel, alors $e^x = e^{x+i \times 0} = e^x e^{i \times 0}$.

Remarque 5.70. L'exponentielle complexe est compatible avec la quantité $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. En effet, si θ est un réel, alors $e^{i\theta} = e^{0+i\theta} = e^0 e^{i\theta}$.

Proposition 5.71. C'est compatible avec le fait que

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

comme dans le cas réel.

Démonstration. On a

$$e^{z+z'} = e^{\Re(z+z') + i\Im(z+z')} = e^{\Re(z)+\Re(z')} e^{i(\Im(z)+\Im(z'))} = e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)} e^{\Re(z')} e^{i\Im(z')} = e^z e^{z'}.$$

□

Remarque 5.72. Ainsi, il est naturel de définir e^z comme ci-dessus puisque

$$e^z = e^{\Re(z) + i\Im(z)} = e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)}$$

en appliquant la proposition précédente à $\Re(z)$ et $i\Im(z)$.

Exercice 5.21. 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer $|e^z|$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que e^z est non nul et calculer $(e^z)^{-1}$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer $e^{\bar{z}}$.

4. Soit a un nombre complexe non nul. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = a$. Y a-t-il unicité ?

5. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Établir une condition nécessaire et suffisante pour que $e^z = e^{z'}$.

5.6.2 Résolution de $az^2 + bz + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$

Définition 5.73. Soit $z \in \mathbb{C}$. Tout complexe $Z \in \mathbb{C}$ vérifiant $Z^2 = z$ est appelée racine carrée de z .

Remarque 5.74. Si Z est une racine carrée de z , alors $-Z$ aussi et ce sont les deux seules.

Proposition 5.75. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $Z \in \mathbb{C}$ tel que $Z^2 = z$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $Z \in \mathbb{C}$. On écrit $z = a + ib$ et $Z = \alpha + i\beta$ leurs formes algébriques. Si $b = 0$, alors on prend $Z = \sqrt{a}$ si $a \geq 0$ et $Z = i\sqrt{-a}$ si $a < 0$. Considérons donc $b \neq 0$.

Alors

$$Z^2 = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + i(2\alpha\beta).$$

Supposons maintenant que $Z^2 = z$. Alors en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire, on en déduit que

$$\alpha^2 - \beta^2 = a ; 2\alpha\beta = b.$$

Par ailleurs, comme $Z^2 = z$, on a $|Z|^2 = |z| =: r$ donc $\alpha^2 + \beta^2 = r$. On a donc

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ \alpha^2 + \beta^2 = r \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}.$$

On en déduit que $2\alpha^2 = a + r$ donc $\alpha^2 = \frac{a+r}{2}$. Puisque $r = |z| \geq \Re(z) = a$, $a+r \geq 0$. On a donc $\alpha = \pm \sqrt{\frac{a+r}{2}}$.

De même, on en déduit que $\beta^2 = \frac{r-a}{2}$. Comme $r - a \geq 0$, on a donc $\beta = \pm \sqrt{\frac{r-a}{2}}$.

Maintenant, la condition $2\alpha\beta = b$ impose que $\alpha\beta$ soit du signe de b : si $b \geq 0$, alors α et β sont de même signe. Sinon, ils sont opposés. Ainsi, si $b > 0$, on a

$$Z = \sqrt{\frac{a+r}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}} \text{ ou } Z = -\sqrt{\frac{a+r}{2}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2}}.$$

Si $b < 0$, on a

$$Z = \sqrt{\frac{a+r}{2}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2}} \text{ ou } Z = -\sqrt{\frac{a+r}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}}.$$

En notant $\varepsilon = \frac{b}{|b|}$ (vaut 1 si $b > 0$ et -1 si $b < 0$), on a

$$Z = \sqrt{\frac{a+r}{2}} + i\varepsilon\sqrt{\frac{r-a}{2}} \text{ ou } Z = -\sqrt{\frac{a+r}{2}} - i\varepsilon\sqrt{\frac{r-a}{2}}.$$

Il suffit de vérifier qu'une de ces solutions conviennent. Pour cela, on calcule

$$\left(\sqrt{\frac{a+r}{2}} + i\varepsilon\sqrt{\frac{r-a}{2}} \right)^2 = \frac{a+r}{2} - \frac{r-a}{2} + 2i\varepsilon\sqrt{\frac{a+r}{2}\frac{r-a}{2}} = a + 2i\varepsilon\frac{1}{2}\sqrt{r^2 - a^2} = a + i\varepsilon|b|.$$

Or $\varepsilon = \frac{b}{|b|}$ donc on a bien $a + ib$ à la fin.

Alternative. Si $z = 0$, alors $Z = 0$ convient. Sinon, on écrit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors le nombre $Z = r^{1/2}e^{i\theta/2}$ convient puisque

$$Z^2 = \left(r^{1/2}e^{i\theta/2} \right)^2 = re^{i\theta} = z.$$

□

Remarque 5.76. Il ne faut pas connaître par cœur le résultat : il faut savoir le retrouver.

Exercice 5.22. Déterminer une racine carrée de $1 + i$ avec les deux méthodes. Déterminer une racine carrée de $3 + 4i$.

Exercice 5.23. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Déterminer les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. On exhibera $\Delta = b^2 - 4ac$ et on distinguera les cas selon la valeur de Δ .

5.6.3 Racine n -ème de l'unité

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 5.77. Une solution de l'équation $z^n = 1$ est appelée racine n -ème de l'unité. Si $a \in \mathbb{C}$, une solution de l'équation $z^n = a$ est appelé racine n -ème de a .

Définition 5.78. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ème de l'unité.

Exercice 5.24. 1. Montrer que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

2. Montrer que $e^{\frac{2ik\pi}{n}} \in \mathbb{U}_n$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

3. Soit $z \in \mathbb{U}_n$.

(a) Montrer que $|z| = 1$. En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

(b) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 2k\pi$.

4. En déduire que $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. Montrer qu'en fait

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} : k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

et en déduire que $\text{Card}(\mathbb{U}_n) = n$.

6. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $b^n = a$.

7. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = a$.

8. Application. Résoudre l'équation $z^n = 1 + i$.

Chapitre 6

Calcul intégral

Sommaire

6.1	Primitives	57
6.2	Calculs d'intégrales	59

Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Sauf mention du contraire, toute fonction est défini sur I et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Primitives

Définition 6.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.

Proposition 6.2. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Démonstration. Trivial. □

Remarque 6.3. On n'insistera jamais assez : on travaille sur des intervalles. $\mathbb{R}^*$ n'en est pas un !

On trouve ici le formulaire à connaître des primitives usuelles. Certains sont d'une importance capitale : ils seront marqué d'une étoile ★. On juge utile de les connaître, notamment ceux marqués par un pique ♠. On donne alors f , une primitive de f à une constante près, et l'intervalle I correspondant. Par souci de lisibilité, on se permettra à souhait de noter $f(x)$, la fonction f , plutôt que simplement f .

Fonction	Primitive	Intervalle(s)
★ $(x-a)^n : \begin{matrix} a \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{matrix}$	$\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N} \implies x \in \mathbb{R}$ sinon : $x \in]-\infty, a[$ ou $x \in]a, +\infty[$
★ $(x-a)^\alpha : \begin{matrix} a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{matrix}$	$\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]a, +\infty[$
♠ $(x-z)^\alpha : \begin{matrix} z \in \mathbb{C} \\ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \end{matrix}$	$\frac{(x-z)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$
★ $\frac{1}{x-a} : a \in \mathbb{R}$	$\ln x-a $	$] -\infty, a[,]a, +\infty[$
★ $\ln$	$x \ln(x) - x$	$]0, +\infty[$
★ $\exp(ax), a \in \mathbb{C}^*$	$\frac{1}{a} \exp(ax)$	$\mathbb{R}$
★ $\sin$	$-\cos$	$\mathbb{R}$
★ $\cos$	$\sin$	$\mathbb{R}$
★ $\tan$	$-\ln \cos(x) $	$\forall k \in \mathbb{Z}, \left] \frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$
♠ $\cotan$	$\ln \sin(x) $	$\forall k \in \mathbb{Z},]k\pi, (k+1)\pi[$
★ $\sinh$	$\cosh$	$\mathbb{R}$
★ $\cosh$	$\sinh$	$\mathbb{R}$
★ $\tanh$	$\ln(\cosh(x))$	$\mathbb{R}$
♠ $\coth$	$\ln \sinh(x) $	$\mathbb{R}$
♠ $\sin^2$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$	$\mathbb{R}$
♠ $\cos^2$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$	$\mathbb{R}$
♠ $\tan^2$	$\tan(x) - x$	$\forall k \in \mathbb{Z}, \left] \frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$
♠ $\frac{1}{\sin}$	$\ln \left \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right $	$\forall k \in \mathbb{Z},]k\pi, (k+1)\pi[$
♠ $\frac{1}{\cos}$	$\ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $	$\forall k \in \mathbb{Z}, \left] \frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$
★ $\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan$	$\mathbb{R}$
♠ $\frac{1}{a^2+x^2} : a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right)$	$\mathbb{R}$
★ $\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right $	tout intervalle ne contenant pas ± 1
♠ $\frac{1}{a^2-x^2} : a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right $	tout intervalle ne contenant pas $\pm a $
★ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$] -1, 1[$
♠ $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin(x/a)$	$] - a , a [$
★ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$] -1, 1[$

Tout le cours de calcul d'intégral repose sur un théorème fondamental.

Théorème 6.4 (Théorème fondamental de l'analyse). *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f admet une primitive sur I . Par ailleurs, pour tout $a \in I$,*

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f . C'est l'unique primitive s'annulant en a .

Démonstration. La démonstration de ce théorème est assez discutée. On démontrera rigoureusement ce théorème en reconstruisant l'intégrale, dite de Riemann. $\square$

Corollaire 6.5. Soit f une fonction dérivable de dérivée continue sur I et $a, b \in I$. On a

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

Démonstration. Trivial. $\square$

Définition 6.6. L'ensemble des fonctions dérivables de dérivée continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

6.2 Calculs d'intégrales

Le calcul d'intégrale permet de trouver une primitive. En effet, soit f une fonction continue sur I et $a, b \in I$. S'il existe $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ tel que

$$\int_a^b f(t) dt = [g(t)]_a^b = g(b) - g(a)$$

alors g est une primitive de f .

Théorème 6.7 (Intégration par parties). *Soit u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . On a*

$$\forall (a, b) \in I^2, \int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Démonstration. De la formule $(uv)' = u'v + v'u$, en intégrant, on a la relation voulue. $\square$

Remarque 6.8. Parfois, il est utile de choisir $u + C$ avec C constante plutôt que u .

Exercice 6.1. Déterminer une primitive de $\ln$ et de $\arctan$.

Exercice 6.2. Calculer $\int_0^1 \sin(x)e^x dx$.

Théorème 6.9 (Changement de variables). *Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vide. Soit*

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi : J \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\forall (\alpha, \beta) \in J^2, \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt.$$

Démonstration. De la formule $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'$ avec F une primitive de f , en intégrant, on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(t)dt = [F(\varphi(t))]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = [F(t)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt.$$

□

Exemple 6.10. Pour réaliser un changement de variable, il faut être très précis. Calculons l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

L'idée du changement de variable est de changer x en une fonction d'une autre variable, par exemple, $\cos(t)$. On rédige alors comme suit.

- Réalisons le changement de variable $x = \cos(t)$ qui est $\mathcal{C}^1$ bijectif de $[0, \pi/2]$ dans $[0, 1]$.
- Regardons les bornes. Si $x = 0$, alors $\cos(t) = 0$ si, et seulement si $t = \pi/2$ puisque $t \in [0, \pi/2]$. Si $x = 1$, alors $\cos(t) = 1$ si, et seulement si, $t = 0$.
- Si $x = \cos(t)$, alors on note $dx = -\sin(t)dt$ (*).
- Enfin (mais ce n'est pas toujours utile), on a $x = \cos(t)$ si, et seulement si, $t = \arccos(x)$.
- Ainsi, par le théorème de changement de variables, on a

$$\int_0^1 (1-x^2)dx = \int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2(t))(-\sin(t))dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)dt.$$

Or, $\forall t \in \mathbb{R}, \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$ donc

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t - \sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

On pouvait s'y attendre. Cette intégrale est l'aire d'un quart de disque de rayon 1.

Exercice 6.3. Déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t+1}}$ sur $[1, +\infty[$.

Chapitre 7

Équations différentielles linéaires

Sommaire

7.1	Généralités	61
7.2	Équation différentielle linéaire du premier ordre	63
7.2.1	Solution homogène	63
7.2.2	Solution particulière	64
7.2.3	Le circuit RC	67
7.3	Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants	68
7.3.1	Cas homogène	68
7.3.2	Avec un second membre particulier	69
7.3.3	Cas général ?	69
7.3.4	Le circuit RLC série	70

Sauf mention du contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide et les fonctions sont réelles à valeurs dans $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On admet le théorème suivant, loin d'être facile à démontrer :

Théorème 7.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est constante si, et seulement si, f est dérivable de dérivée nulle.

Démonstration. Admis. □

7.1 Généralités

Définition 7.2. Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une fonction, faisant intervenir les dérivées de cette dernière muni d'un ensemble d'étude, parfois omis.

Exemple 7.3. $y''y'y = 0$; $\mathbb{R}$ est une équation différentielle. C'est la même que $y''(x)y'(x)y(x) = 0$; $x \in \mathbb{R}$.

Définition 7.4. Une équation différentielle linéaire d'ordre n est une équation différentielle de la forme

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)}(t) = b(t) ; t \in I$$

avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a_0, \dots, a_{n-1}, b$ des fonctions continues sur I . Elle est dite homogène lorsque $b = 0$, et à coefficients constants lorsque les $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont constants.

On appelle l'équation différentielle

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)}(t) = 0; t \in I$$

l'équation homogène associée.

Dans ce cours, on ajoutera le qualificatif « non résolue » pour les équations différentielles linéaires d'ordre n où le terme $y^{(n)}$ est multiplié par une fonction continue.

Exemple 7.5.

1. $xy' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 non résolue.
2. $y' + xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Remarque 7.6. Comme dans l'exemple précédent, il est courant de noter la variable pour les coefficients mais pas pour la fonction y à trouver.

Proposition 7.7 (Principe de superposition). Considérons l'équation différentielle

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)}(t) = b_1(t) + b_2(t); t \in I (E).$$

Si f_1 et f_2 sont solutions respectivement de cette équation différentielle où le second membre est b_1 seulement (respectivement b_2), alors $f_1 + f_2$ est solution de E .

Démonstration. Il suffit de l'écrire. Cela vient de la linéarité de la dérivée. □

Théorème 7.8. La différence de deux solutions de

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)}(t) = b(t); t \in I (E).$$

est solution de l'équation homogène associée.

Démonstration. C'est le principe de superposition pour avec $b_1 = b$ et $b_2 = -b$. □

Théorème 7.9 (Théorème de structure). L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n est

$$\{y_h + y_{part} : y_h \in \mathcal{S}_h\}$$

où $\mathcal{S}_h$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée et y_{part} une solution particulière.

Démonstration. Dans toute la preuve, on fixe y_{part} une solution de (E) .

- Si y est une solution de (E) , montrons que $y \in \{y_h + y_{part} : y_h \in \mathcal{S}_h\}$ i.e. il existe $y_h \in \mathcal{S}_h$ tel que $y = y_h + y_{part}$. Pour cela, le théorème précédent montre que $y - y_{part}$ est solution de (E_h) puisque y et y_{part} sont solutions de (E) . Ainsi, il existe $y_h \in \mathcal{S}_h$ tel que $y - y_{part} = y_h$. On a bien $y = y_{part} + y_h$.
- Si y_h est une solution de (E) , alors par principe de superposition (avec $b_1 = b$ et $b_2 = 0$), on a $y_h + y_{part}$ qui est solution de (E) .

Par double inclusion, on a le résultat. □

Définition 7.10. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle problème de Cauchy en $t_0 \in I$, la donnée d'une équation différentielle linéaire d'ordre n

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)}(t) = b(t); t \in I$$

ainsi que des conditions initiales $y^{(k)}(t_0) = y_k$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ avec $y_0, \dots, y_{n-1}$ des réels. Résoudre un problème de Cauchy, c'est résoudre l'équation différentielle respectant les conditions initiales.

Théorème 7.11 (Cauchy-Lipschitz linéaire). *Tout problème de Cauchy admet une et unique solution.*

Démonstration. Admis. □

Exemple 7.12. Il n'existe qu'une seule fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant le problème de Cauchy $y' + 4y = 0, y(0) = 1$: c'est $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-4x}$.

Exemple 7.13. Il n'existe qu'une seule fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\begin{cases} y''(y) + \frac{1}{x^\pi} y'(x) + \exp\left(\sin(x) + \frac{1}{x}\right) y(x) = 0 \\ y(\pi^e) = 0 \\ y'(\pi^e) = 0 \end{cases}$$

Puisque la fonction nulle vérifie ce problème de Cauchy, c'est l'unique solution.

7.2 Équation différentielle linéaire du premier ordre

On souhaite résoudre dans cette section les équations différentielles linéaires du premier ordre :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t); t \in I.$$

En vertu du théorème de structure, il suffit de connaître les solutions de $y'(t) + a(t)y(t), t \in I$ et une solution particulière de l'équation.

7.2.1 Solution homogène

Théorème 7.14. *L'ensemble des solutions de $y'(t) + a(t)y(t) = 0, t \in I$ est*

$$\{t \in I \mapsto Ce^{-A(t)} \in \mathbb{K} : C \in \mathbb{K}\}$$

où A désigne une primitive de a .

Démonstration. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0 &\iff \underbrace{y'(t)e^{A(t)} + a(t)y(t)e^{A(t)}}_{=(y(t)e^{A(t)})'} = 0. \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, y(t)e^{A(t)} = C \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, y(t) = Ce^{-A(t)}. \end{aligned}$$

□

Remarque 7.15. Il s'agit donc de calculer une pauvre primitive d'une fonction continue ! Cela a l'air anodin mais peut s'avérer difficile. Précisons que toute fonction continue admet une primitive en vertu du théorème fondamental de l'analyse. Ici, on pouvait écrire

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(x) dx.$$

7.2.2 Solution particulière

7.2.2.1 EDL à coefficient constants - second membre particulier

Dans la résolution de $y'(t) + ay(t) = b(t)$ avec a réel, si b est d'une forme particulière, on peut chercher une solution de cette équation différentielle avec une forme particulière. Attention : dans certains cours, l'équation différentielle à résoudre est $y'(t) = ay(t) + b(t)$ ce qui est différent.

Il y a trois classes de fonctions qui vont nous intéresser ici : les fonctions polynomiales, les exponentielles, les cosinus et sinus.

Le second membre est de la forme ...	on cherche une solution de la forme ...
un polynôme P de degré n	$y_{part}(t) =$ un polynôme de degré n
$\cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(\omega t + \varphi)$	$y_{part}(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$e^{\alpha t}$ avec $\alpha \neq -a$	$y_{part}(t) = \lambda e^{\alpha t}$
(un polynôme de degré n) $\times$ $\cos(\omega t)$ etc.	$y_{part}(t) = Q(t) \cos(\omega t) + R(t) \sin(\omega t)$ avec Q, R de degré n
(un polynôme de degré n) $\times$ $e^{\alpha t}$ avec $\alpha \neq -a$	$y_{part}(t) = Q(t) e^{\alpha t}$ avec Q de degré n

Que se passe-t-il avec les exponentielles ? Lorsque le second membre est solution de l'équation homogène (ici, lorsque le second membre est de la forme e^{-at}), il y a ce qu'on appelle un phénomène de résonance.

Exercice 7.1. Résoudre $y' + 2y = e^{-2t}, t \in \mathbb{R}$ avec la méthode précédente (comme si on n'avait pas distingué le cas $\alpha = -a$ ou non). Que se passe-t-il ? Et si on prend une solution de la forme $y_{part}(t) = \lambda t e^{-2t}$?

Méthode 7.16. Dans le cas de la résonance, si le second membre est de la forme $P(t)e^{-at}$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $Q(t)e^{-at}$ avec $\deg(Q) = \deg(P) + 1$.

Exemple 7.17. On se place dans $\mathbb{R}$. On va trouver la solution du problème de Cauchy suivant :

$$(P) : \begin{cases} y' + 3y = \cos(2t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Soit (E) l'équation différentielle. Soit (E_H) l'équation homogène associée.

- Les solutions de $(E_H) : y' + 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \in \mathbb{R} \mapsto C e^{-3t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
- Je pose $y_{p,1}(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $y_{p,1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$y'_{p,1}(t) + 3y_{p,1}(t) = -2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t) + 3\lambda \cos(2t) + 3\mu \sin(2t).$$

Ainsi, $y_{p,1}$ est solution de (E_1) si, et seulement si, $\forall t \in \mathbb{R}, (2\mu + 3\lambda) \cos(2t) + (3\mu - 2\lambda) \sin(2t) = \cos(2t)$. Par identification, $y_{p,1}$ est solution de (E_1) si, et seulement si, $\begin{cases} 2\mu + 3\lambda = 1 \\ 3\mu - 2\lambda = 0 \end{cases}$. Matriciellement, on a

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On inverse la matrice 2×2 : cela donne

$$\frac{1}{-13} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $y_{p,1} = \frac{3}{13} \cos(2t) + \frac{2}{13} \sin(2t)$ est solution particulière de (E) .

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{t \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{-3t} + \frac{3}{13} \cos(2t) + \frac{2}{13} \sin(2t) : C \in \mathbb{R}\}.$$

Soit donc y de cette forme. Si $y(0) = 1$, alors

$$C + \frac{3}{13} + 0 = 1$$

donc $C = \frac{10}{13}$. Ainsi, l'unique solution au problème de Cauchy est

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{13} (10e^{-3t} + 3 \cos(2t) + 2 \sin(2t)).$$

7.2.2.2 Cas général - Variation de la constante

Moyennant un calcul d'intégrale, on peut trouver explicitement l'ensemble des solutions de toutes les équations différentielles linéaire d'ordre 1 grâce à la variation de la constante.

Considérons toujours notre équation différentielle

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) : t \in I.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{-A(t)} : C \in \mathbb{K}\}$$

avec A une primitive de a .

Méthode 7.18. Pour trouver une solution particulière, on considère une fonction $y_{part} : t \in I \mapsto C(t)e^{-A(t)}$ avec C une fonction dérivable sur I . (On fait « varier » la constante). Alors y_{part} est solution de E si, et seulement si, C' est égale à une certaine fonction continue. C'est la variation de la constante.

Remarque 7.19. On trouvera toujours $C'(t)e^{-A(t)} = b(t)$.

Exemple 7.20. On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ $y' + \frac{y}{t} = \ln(t)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- L'équation homogène a, pour ensemble de solutions,

$$\{t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto Ce^{-\ln(t)} : C \in \mathbb{R}\}$$

et plus simplement

$$\{t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{C}{t} : C \in \mathbb{R}\}.$$

- Soit C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $y_{part}(t) = \frac{C(t)}{t}$ pour $t > 0$. Alors

$$\forall t > 0, y'_{part}(t) + \frac{y_{part}(t)}{t} = \frac{C'(t)}{t} - \frac{C(t)}{t^2} + \frac{C(t)}{t^2} = \frac{C'(t)}{t}.$$

Ainsi, y_{part} est solution de E si, et seulement si, $\forall t > 0, C'(t) = t \ln(t)$.

Calculons

$$\int_1^t x \ln(x) dx = \left[\frac{x^2 \ln(x)}{2} \right]_1^t - \int_1^t \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_1^t$$

Ainsi, considérons

$$C(t) = \frac{t^2}{4}(2 \ln(t) - 1).$$

Alors $y_{part} : t \mapsto \frac{t}{4}(2 \ln(t) - 1)$ est solution de (E) .

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{C}{t} + \frac{t}{4}(2 \ln(t) - 1) : C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Théorème 7.21 (Formule de Duhamel). *Soit $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ une équation différentielle sur I . Soit $t_0 \in I$. Alors les solutions de (E) sont les*

$$\left\{ t \in I \mapsto C \exp \left(- \int_{t_0}^t a(x) dx \right) + \int_{t_0}^t b(x) \exp \left(\int_t^x a(s) ds \right) dx : C \in \mathbb{K} \right\}$$

Démonstration. On va appliquer la variation de la constante. Soit C une fonction dérivable et $f : t \in I \mapsto C(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t a(x) dx \right)$. Alors f est solution de (E) si, et seulement si, $C'(t) = b(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a(x) dx \right)$.

Prenons alors

$$C(t) = \int_{t_0}^t b(x) \exp \left(\int_{t_0}^x a(s) ds \right) dx.$$

Alors

$$f : t \in I \mapsto \exp \left(- \int_{t_0}^t a(x) dx \right) \int_{t_0}^t b(x) \exp \left(\int_{t_0}^x a(s) ds \right) dx = \int_{t_0}^t b(x) \exp \left(\int_t^x a(s) ds \right) dx$$

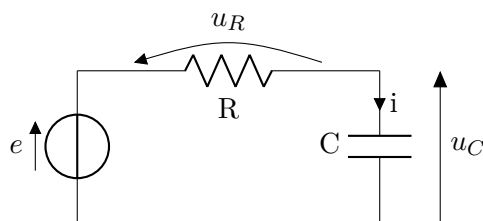
est solution de (E) .

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ t \in I \mapsto C \exp \left(- \int_{t_0}^t a(x) dx \right) + \int_{t_0}^t b(x) \exp \left(\int_t^x a(s) ds \right) dx : C \in \mathbb{K} \right\}$$

□

7.2.3 Le circuit RC



Rappelons que l'intensité qui entre dans un condensateur vérifie $i = C \frac{du_C}{dt}$ où C désigne la capacité électrique du condensateur. Rappelons aussi que la tension au borne d'une résistance est $u_R = Ri$.

La loi des mailles donne donc

$$e = u_R + u_C$$

donc

$$e = Ri + u_C = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

On note $\tau = RC$ appelé temps caractéristique. Ainsi, on a l'équation différentielle

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{e}{\tau}.$$

Les solutions sont donc les

$$\left\{ t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + e : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

En $t = 0$, le condensateur se charge. On a donc par continuité $u_C(0) = 0$ donc $\alpha = -e$. Ainsi,

$$u_C(t) = e \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

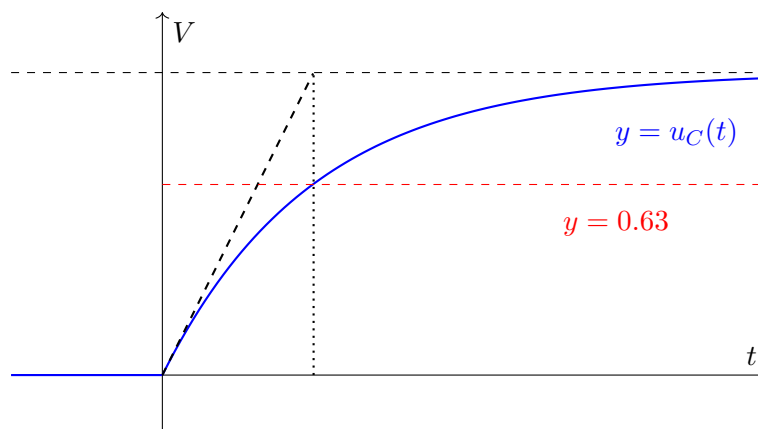


FIGURE 7.1 – Avec les données $e = 1$ V et $\tau = 0.5$ s

7.3 Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

7.3.1 Cas homogène

Soit a, b deux éléments de $\mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 7.22. On appelle polynôme caractéristique de (E) le polynôme $X^2 + aX + b$.

Théorème 7.23 (Cas complexe). *On suppose que a, b sont complexes. On cherche donc les solutions à valeurs complexes de E . Soit P polynôme caractéristique de E .*

- Si P a deux racines distinctes, notées z_1 et z_2 , l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{z_1 t} + \mu e^{z_2 t} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

- Si P a une racine double, noté z , l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda t + \mu) e^{z t} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

Démonstration. Admis. □

Théorème 7.24 (Cas réel). *On suppose que a, b sont réels. On cherche donc les solutions à valeurs réelles de E . Soit P polynôme caractéristique de E .*

- Si P a deux racines réelles distinctes, notées r_1 et r_2 , l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- Si P a une racine double, noté r , l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r t} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- Si P a deux racines complexes conjuguées, notées z_1 et z_2 , alors il existe $(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z_1 = \alpha + i\omega$ et $z_2 = \alpha - i\omega$ et l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)) e^{\alpha t} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Démonstration. Admis. □

7.3.2 Avec un second membre particulier

C'est exactement la même méthode que l'ordre 1. Mais il faut faire attention au phénomène de résonance : ici, il y a deux valeurs de résonance possible ! Ainsi, si la valeur de résonance est de multiplicité 2, il faut montrer de deux degrés le polynôme sous-jacent. Par ailleurs, en ordre 1, seuls des exponentielles apparaissaient : maintenant, on a aussi cosinus et sinus ! Par exemple, $y'' + y = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, il y aura un souci.

Exemple 7.25. On souhaite résoudre $y'' + 3y' + 2y = \cosh(x)$ sur $\mathbb{R}$. On réécrit $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Notons alors (E_H) l'équation homogène associée. Le polynôme caractéristique est $X^2 + 3X + 2 = (X + 1)(X + 2)$ donc les solutions de (E_H) sont les

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

On souhaite obtenir une solution particulière de (E) . Pour cela, utilisons le principe de superposition. Notons (E_{+1}) l'équation $y'' + 3y' + 2y = e^x$ et (E_{-1}) l'équation $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$.

- Pour (E_{+1}) , le second membre est une exponentielle différente de e^{-x} et e^{-2x} (celles des solutions homogènes) donc on cherche une solution de la forme $f : x \mapsto \lambda e^x$. Alors

$$f'' + 3f' + 2f = \lambda e^x + 3\lambda e^x + 2\lambda e^x = 6\lambda e^x.$$

Ainsi, pour $\lambda = \frac{1}{6}$, f est solution particulière de (E_{+1}) .

- Pour (E_{-1}) , le second membre est une exponentielle qui apparait dans les solutions homogènes : c'est un phénomène de résonance. Cette exponentielle dans l'équation homogène est multipliée par une fonction polynomiale de degré 0 donc on cherche une solution de la forme $g : x \mapsto \mu x e^{-x}$ (on a monté d'un degré). Alors

$$g'' + 3g' + 2g = \mu(xe^{-x} - 2e^{-x} + 3e^{-x} - 3xe^{-x} + 2xe^{-x}) = \mu e^{-x}.$$

Ainsi, pour $\mu = 1$, g est solution particulière de (E_{-1}) .

Par principe de superposition,

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2} \left(\frac{e^x}{6} + x e^{-x} \right)$$

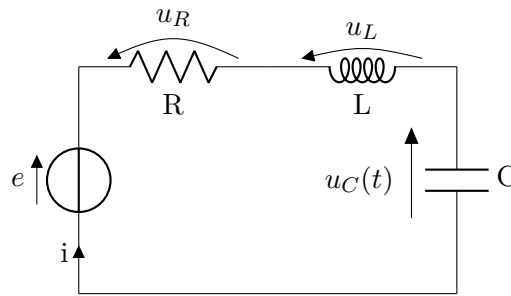
est solution particulière de (E) . Les solutions de (E) sont donc

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} + \frac{1}{12} e^x + \frac{1}{2} x e^{-x} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

7.3.3 Cas général ?

Il existe une variation de la constante, dite vectorielle. Elle n'est au programme que de deuxième année.

7.3.4 Le circuit RLC série



Rappelons que l'intensité qui entre dans un condensateur vérifie $i = C \frac{du_C}{dt}$ où C désigne la capacité électrique du condensateur. Rappelons aussi que la tension aux bornes d'une résistance est $u_R = Ri$. Enfin, rappelons qu'en notant i l'intensité du courant rentrant dans une bobine, on a $u_L = L \frac{di}{dt}$ où L désigne l'inductance de la bobine.

La loi des mailles donne

$$e = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C.$$

Or $i = C \frac{du_C}{dt}$ donc

$$e = RC \frac{du_C}{dt} + L \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C.$$

Ainsi, l'équation différentielle vérifiée par u_C est

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{RC}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{L} u_C = \frac{e}{L}.$$

On appelle forme canonique de l'équation différentielle lorsque cette équation différentielle s'écrit

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + w_0^2 s = w_0^2 s_{eq}$$

ou bien

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{ds}{dt} + w_0^2 s = w_0^2 s_{eq}$$

avec

- ω_0 la pulsation propre du circuit.
- Q le facteur de qualité (sans dimension) – plutôt en physique –.
- ξ le coefficient d'amortissement (sans dimension) – plutôt en SI –.

s_{eq} est la valeur à l'équilibre. On a $\xi = \frac{1}{2Q}$.

Pour le circuit RLC, on a

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} ; \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Trouvons maintenant les solutions de l'équation différentielle. Les solutions sont réelles.

7.3.4.1 Cas homogène - le régime libre

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0.$$

Le polynôme caractéristique de cette équation différentielle est

$$X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2.$$

Le discriminant de ce polynôme est

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right) = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1).$$

Il y a donc trois comportements possibles, trois régimes possibles.

Régime	Δ	Q	ξ	$s(t) =$
Apériodique	$\Delta > 0$	$Q < \frac{1}{2}$	$\xi > 1$	$\lambda_1 e^{r_- t} + \lambda_2 e^{r_+ t}$
Critique	$\Delta = 0$	$Q = \frac{1}{2}$	$\xi = 1$	$(\mu_1 + \mu_2 t) e^{-\omega_0 t}$
Pseudo-périodique	$\Delta < 0$	$Q > \frac{1}{2}$	$\xi < 1$	$(\lambda \cos(\Omega t) + \mu \sin(\Omega t)) e^{-\omega_0 \xi t}$

où l'on note

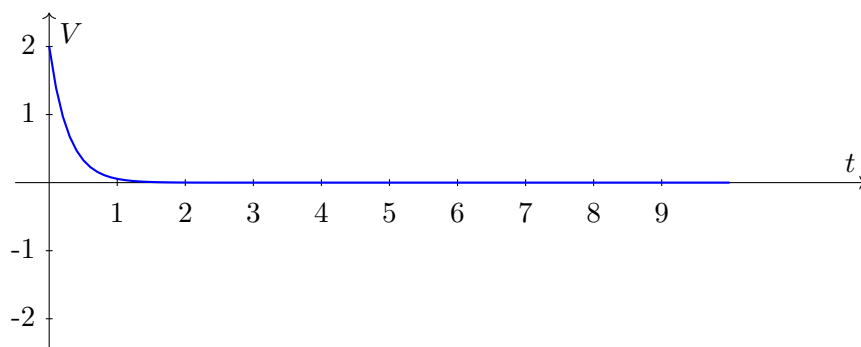
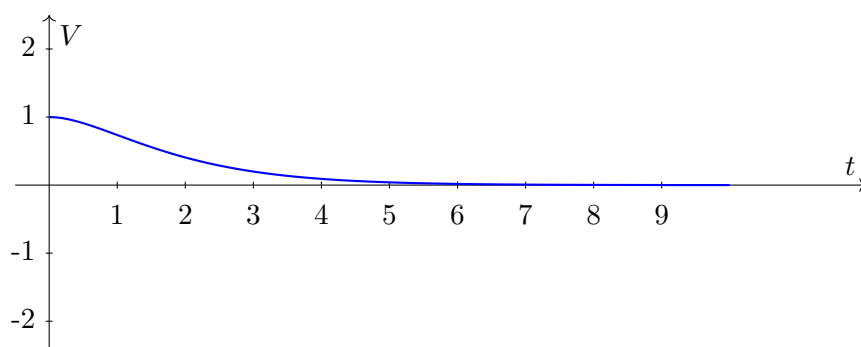
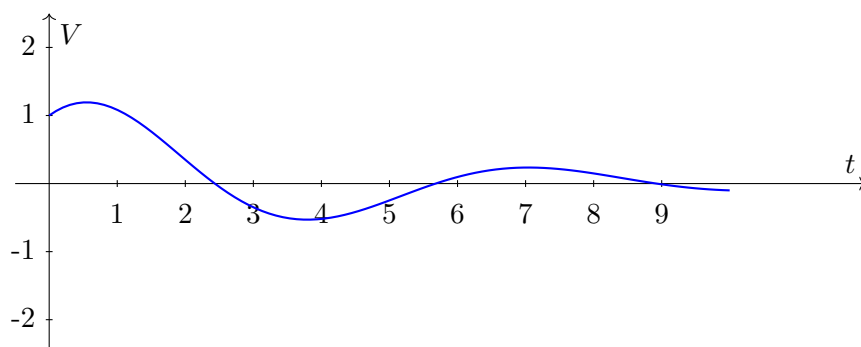
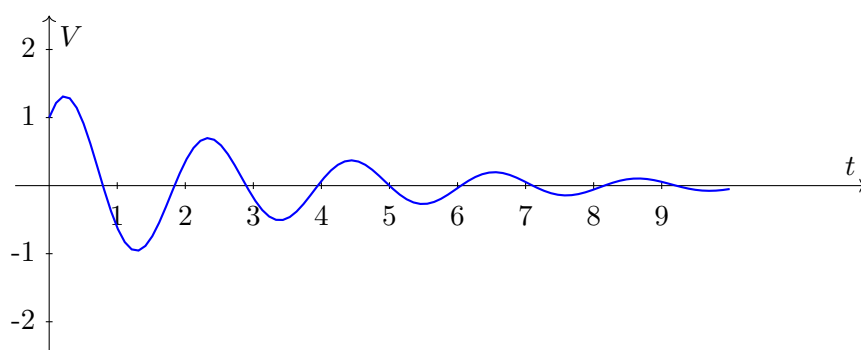
$$r_{\pm} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

et

$$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}.$$

On dessine quelques signaux en annexe.

Annexe

FIGURE 7.2 – Régime apériodique avec les données $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$, $Q = \frac{1}{4}$.FIGURE 7.3 – Régime critique avec les données $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$, $Q = \frac{1}{2}$.FIGURE 7.4 – Régime pseudo-périodique avec les données $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$, $Q = 2$.FIGURE 7.5 – Régime pseudo-périodique avec les données $\omega_0 = 3 \text{ s}^{-1}$, $Q = 5$.

Chapitre 8

Sommes

Sommaire

8.1	Sommes	73
8.2	Sommes doubles	77

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel. Sauf mention du contraire, $(a_n)_n$ désigne une suite réelle. Rappelons que deux suites numériques définies par récurrence sont égales si, et seulement si, elles vérifient la même relation de récurrence et qu'elles coïncident en leur(s) premier(s) terme(s).

8.1 Sommes

Définition 8.1 ($\sum$). Soit $(a_1, \dots, a_n)$ n réels. On définit par récurrence la quantité $(S_n)_{1 \leq k \leq n}$ par :

$$S_1 = a_1 \text{ et } \forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, S_{p+1} = S_p + a_{p+1}.$$

On note alors $\sum_{k=1}^n a_k$ ou $\sum_{1 \leq k \leq n} a_k$ ou encore $\sum_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_k$ la quantité S_n .

En pratique, l'idée à avoir en tête est que

$$S_n = a_1 + \dots + a_n.$$

Remarque 8.2. On peut généraliser. Soit I un ensemble fini d'indices et $(a_i)_{i \in I}$ des réels. La somme

$$\sum_{i \in I} a_i$$

désigne la somme de tous les termes de la famille $(a_i)_{i \in I}$ et on n'impose pas d'ordre de sommation.

Par **convention**, la somme sur l'ensemble vide vaut 0. De même,

$$\sum_{k=p}^n u_k = 0$$

lorsque $p > n$. En pratique, on évite d'écrire ce genre de somme.

Remarque 8.3. Puisque $+$ est commutative, il y a un sens à écrire

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k \in \llbracket p, n \rrbracket} a_k.$$

A gauche, l'ordre compte : on réalise $a_p + \cdots + a_n$. A droite, il ne compte pas.

Exemple 8.4.

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq 7} p = 2 + 3 + 5 + 7 = 17.$$

Remarque 8.5. Attention. Dans le symbole $\sum_{k=1}^n a_k$, k est une variable muette. Autrement dit, elle peut changer : on aurait pu écrire

$$\sum_{\ell=1}^n a_\ell \text{ ou encore } \sum_{\square=1}^n a_\square.$$

Par ailleurs, k n'est défini que dans l'argument de la somme. On a

$$\sum_{k \in I} \boxed{\text{domaine de vie de } k}.$$

Exemple 8.6.

- $\left(\sum_{k=1}^5 k\right) + k$ n'a aucun sens.
- $\left(\sum_{k=1}^5 k\right) = \frac{k(k+1)}{2}$ n'a aucun sens.

Proposition 8.7. Soit a un réel. Soit $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, p \leq n$. Alors

$$\sum_{k=p}^n a = (n - p + 1)a.$$

Démonstration. C'est une récurrence triviale. □

Proposition 8.8. Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ $2n$ termes, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k.$$

Démonstration. C'est une récurrence triviale. □

Définition 8.9. On dit que la somme est linéaire.

Proposition 8.10 (Chasles). Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels, $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$\sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Démonstration. Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels. Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si $p = n$ ou $n - 1$, il n'y a rien à faire. Sinon, soit

$$H_\ell : \sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=p+1}^{p+\ell} a_k = \sum_{k=1}^{p+\ell} a_k \text{ pour } \ell \in \llbracket 0, n-p \rrbracket.$$

- H_0 est triviale.
- Supposons que H_ℓ soit vraie pour un certain $\ell \in \llbracket 0, n-p-1 \rrbracket$. Alors

$$\sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=p+1}^{p+\ell+1} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=p+1}^{p+\ell} a_k}_{(H_\ell)} + a_{p+\ell+1} = \sum_{k=1}^{p+\ell} a_k + a_{p+\ell+1} = \sum_{k=1}^{p+\ell+1} a_k.$$

Ainsi, $H_{\ell+1}$ est vraie.

Le principe de récurrence conclut que H_ℓ est vraie pour tout $\ell \in \llbracket 0, n-p \rrbracket$. H_{n-p} est la proposition à démontrer. $\square$

Remarque 8.11. On peut généraliser. Soit I, J deux ensembles d'indices disjoints. Soit $(a_i)_{i \in I \cup J}$ des réels. Alors

$$\sum_{i \in I \cup J} a_i = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i.$$

Proposition 8.12 (Décalage d'indice). Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^n a_k \stackrel{\text{}}{=} \sum_{\ell=k+r}^{n+r} a_{\ell-r}$$

Démonstration. C'est une récurrence triviale ou alors, lire la preuve de la proposition suivante. $\square$

Méthode 8.13. Pour réaliser un changement d'indice,

- on écrit $\ell = k + r$ donc $k = \ell - r$.
- On remplace les k du **domaine de vie de k**
- Ensuite, dans la somme, k part de 1 à n initialement.
 - Si k vaut 1, ℓ vaut alors $1 + r$.
 - Si k vaut n , ℓ vaut alors $n + r$.

Proposition 8.14 (Retournement). On a

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_{n-k+1}.$$

De manière générale, si I est un ensemble d'indices fini et φ une bijection définie sur I , on a

$$\sum_{k \in I} a_k = \sum_{k \in \varphi^{-1}(I)} a_{\varphi(k)}.$$

Démonstration. Les ensembles $\{a_i : i \in I\}$ et $\{a_{\varphi(i)} : i \in \varphi^{-1}(I)\}$ sont égales. La somme de leurs éléments sont donc les mêmes. $\square$

Une application directe du changement d'indice est le télescopage.

Proposition 8.15 (Télescopage). Soit $p < q$ deux entiers naturels. On a

$$\sum_{k=p}^q (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q (a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=p}^q a_{k+1} - \sum_{k=p}^q a_k \\ &\stackrel{=}{=} \sum_{\ell=k+1}^{q+1} a_\ell - \sum_{k=p}^q a_k \\ &= a_{q+1} + \sum_{\ell=p+1}^q a_\ell - \sum_{k=p}^q a_k \\ &= a_{q+1} + \cancel{\sum_{\ell=p+1}^q a_\ell} - \cancel{\sum_{k=p+1}^q a_k} - a_p \\ &= a_{q+1} - a_p. \end{aligned}$$

□

Exemple 8.16.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Proposition 8.17. On a

1. $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^n a_k + \sum_{k=0, k \text{ impair}}^n a_k.$
2. $\sum_{k=0, k \text{ pair}}^n a_k = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2p}.$
3. $\sum_{k=0, k \text{ impair}}^n a_k = \sum_{p=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2p-1}.$

Remarque 8.18. Dans les deux derniers points, de manière générale, il faut toujours vérifier la cohérence des termes extrémaux.

Démonstration. 1. Par 8.11, on a le résultat voulu.

2. Il suffit de montrer que les termes sont les mêmes. Les éléments pairs de 0 à n sont de la forme $2p$ et on impose $0 \leq 2p \leq n$ donc $0 \leq p \leq \frac{n}{2}$. p étant entier, on impose $p \in \llbracket 0, \lfloor n/2 \rfloor \rrbracket$. La réciproque est triviale. On a en fait

$$\{k \text{ pair} : k \in \llbracket 0, n \rrbracket\} = \{2p : p \in \llbracket 0, \lfloor n/2 \rfloor \rrbracket\}.$$

3. On fait comme dans le cas précédent.

□

Exercice 8.1. Calculer $\sum_{k=0}^n k^p$ avec $p = 2$ et $p = 3$. On pourra considérer

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^{p+1} - k^{p+1}).$$

Proposition 8.19. Soit a un réel et $p \leq n$ un entier. Alors

$$(1-a) \sum_{k=p}^n a^k = a^p - a^{n+1}.$$

Démonstration. C'est un télescopage trivial. □

Remarque 8.20. On en déduit la valeur de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exercice 8.2. Montrer la formule de Bernoulli :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

8.2 Sommes doubles

Dans cette section, on ne présentera pas de preuve. Sauf mention d'contraire, $(a_{i,j})_{i,j}$ désigne une suite de suites numériques.

Commençons par un exemple. Considérons le tableau suivant :

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$=$
$i = 1$	1	2	3	4	10
$i = 2$	2	-1	2	-1	2
$i = 3$	-1	-2	-3	-4	-10
$=$	2	-1	2	-1	2

On note $a_{i,j}$ le coefficient en position (i,j) dans le tableau.

On cherche à calculer

$$S = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket \times \llbracket 1,4 \rrbracket} a_{i,j}.$$

On présente deux manière de calculer S .

- On somme les valeurs de chaque ligne, puis on somme chaque somme trouvée. On a

$$\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^4 a_{i,j} \right) = 10 + 2 - 10 = 2.$$

- On somme les valeurs de chaque colonne, puis on somme chaque somme trouvée. On a

$$\sum_{j=1}^4 \left(\sum_{i=1}^3 a_{i,j} \right) = 2 - 1 + 2 - 1 = 2.$$

Définition 8.21. On appelle ce genre de somme des sommes rectangulaires.

Remarque 8.22. En pratique, on omet les parenthèses.

Généralisons. Pour I, J deux ensembles d'indices, on a

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}.$$

Proposition 8.23. Soit $(b_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}, (c_j)_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ deux familles de réels. On note $a_{i,j} = b_i c_j$. On a alors

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} a_{i,j} = \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \left(\sum_{j=1}^p c_j \right).$$

Démonstration. On a

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p b_i c_j.$$

Fixons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors, comme b_i ne dépend pas de l'indice j dans la somme,

$$\sum_{j=1}^p b_i c_j = b_i \sum_{j=1}^p c_j.$$

Ainsi

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(b_i \sum_{j=1}^p c_j \right).$$

Comme $\sum_{j=1}^p c_j$ ne dépend pas de l'indice i dans la somme,

$$\sum_{i=1}^n \left(b_i \sum_{j=1}^p c_j \right) = \left(\sum_{j=1}^p c_j \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

C'est le résultat voulu. □

Exercice 8.3. Calculer

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2$$

Un type de somme particulier est la somme triangulaire.

Commençons par un exemple. Considérons le tableau suivant :

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$=$
$i = 1$	1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	1
$i = 2$	2	-1	$\emptyset$	$\emptyset$	1
$i = 3$	-1	-2	-3	$\emptyset$	-7
$i = 4$	1	2	-3	-4	-4
$=$	3	-1	-6	-4	-9

On note $a_{i,j}$ le coefficient en position (i, j) dans le tableau.

On cherche à calculer

$$S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} a_{i,j}.$$

On présente deux manières de calculer S .

- On somme les valeurs de chaque ligne, puis on somme chaque somme trouvée. On a

$$\sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=i}^4 a_{i,j} \right) = 2 - 1 + 2 - 1 = -9.$$

- On somme les valeurs de chaque colonne, puis on somme chaque somme trouvée. On a

$$\sum_{j=1}^4 \left(\sum_{i=1}^j a_{i,j} \right) = 1 + 1 - 7 - 4 = -9.$$

Définition 8.24. On appelle ce genre de somme des sommes triangulaires.

On aimerait avoir un résultat similaire aux sommes triangulaires.

Exercice 8.4. On intervertit les symboles.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{j=1}^i \sum_{i=1}^n a_{i,j}.$$

Où est le problème ?

Considérons $A = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq j \leq i \leq n\}$. Alors

$$\begin{aligned} (i, j) \in A &\iff (1 \leq j \leq n) \text{ et } (j \leq i \leq n) \\ &\iff (1 \leq i \leq n) \text{ et } (1 \leq j \leq i). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}.$$

Méthode 8.25. Pour intervertir deux sommes, on repasse par la somme intermédiaire. Ensuite, dans la somme

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j},$$

si l'on souhaite sommer selon les « i » d'abord, i vit dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ puisque dans $1 \leq j \leq i \leq n$, « j » « n'existe pas » et donc « i » n'est pas contraint par « j ».

Ensuite, j vivra dans $\llbracket 1, i \rrbracket$. On a donc

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j}.$$

Exercice 8.5. Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}$.