Lemme d'Olivier

Thomas CHEN

Le but est de démontrer le résultat suivant.

Lemme 1 (Olivier)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante qui converge vers 0. On suppose que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge. Alors $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il existe un cas continu de ce lemme, voir le X. Gourdon, *Les Maths en tête : Analyse*.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$0 \leq 2nu_{2n} \leq 2(u_{2n} + u_{2n-1} + \cdots + u_{n+1}) = 2(S_{2n} - S_n),$$

avec $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles. Puisque $(S_n)_n$ converge, $S_{2n} - S_n$ tend vers 0 donc $2nu_{2n}$ tend aussi vers 0. On a finalement

$$0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq 2nu_{2n+1} + u_{2n+1} \leq 2nu_{2n} + u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc les termes impairs et pairs convergent, et ce vers la même limite, donc $(nu_n)_n$ converge, et ce vers 0. D'où le résultat.

Si on enlève la décroissance, soit $u_n = \dfrac{1}{n}$ si $\exists k, n = 2^k$, 0 sinon. Alors clairement,

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Pourtant, $(nu_n)_n$ n'a pas de limite (oscille entre 1 et 0). C'est normal puisque $(u_n)_n$ ne décroit pas. $\square$