

Feuille d'exercices n° 2 : Fonction d'une variable aléatoire

Exercice 1. On reprend l'exercice 1 de la feuille précédente. On rappelle la fonction de masse de X :

$$\mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{30}, \quad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{20}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{12}, \quad \mathbb{P}(X = 5) = \frac{2}{3}.$$

1. Montrer que $Y = -2X + 1$ est une v.a. discrète et déterminer sa fonction de masse.
2. Même question pour $Z = Y^2$.

Exercice 2. On reprend l'exercice 4 de la feuille précédente. On rappelle la fonction de répartition de X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{4} & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{4} & \text{si } 1 \leq x < 3, \\ \frac{3x-7}{8} & \text{si } 3 \leq x < 5, \\ 1 & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$$

1. Justifier que la variable aléatoire $Y = 1/X$ est bien définie.
2. Montrer que Y est à densité et calculer sa densité.

Exercice 3. Soit f_X la densité d'une variable aléatoire réelle X telle que $\mathbb{P}(X \geq 0) > 0$. On pose

$$f_Y(t) = af_X(|t|), \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Calculer a (en fonction de f_X) pour que f_Y soit la densité d'une variable aléatoire Y .
2. Montrer que Y et $-Y$ ont même loi.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de densité f continue et de fonction de répartition F .

1. Soit $Z = 2X\mathbb{1}_{X < 0} + 3X\mathbb{1}_{X \geq 0}$. Donner la fonction de répartition de Z en fonction de F , puis sa densité en fonction de f .
2. Soit $Y = X^2$. Donner la fonction de répartition de Y en fonction de F , puis sa densité en fonction de f .

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F , et soit $A =]a, b]$ un intervalle.

1. Soit $Y = \mathbb{1}_A(X)$. Donner la fonction de répartition de Y en fonction de F . (On pourra observer que $Y \sim \text{Ber}(p)$ pour une valeur de p à déterminer).
2. On suppose de plus $a > 0$. Soit $Z = X\mathbb{1}_A(X)$. Donner la fonction de répartition de Z en fonction de F .

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F . Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Exprimer à l'aide de F la fonction de répartition de la variable aléatoire $aX + b$.
2. Sous quelle condition sur le couple (a, b) la fonction $t \mapsto F(at + b)$ est-elle une fonction de répartition ?
Sous cette condition, de quelle variable aléatoire cette fonction est-elle la fonction de répartition ?