Problème de Plateau et Régularité des films de savon

Guy David, Université Paris Saclay

Académie des Sciences, le 4/11/2025

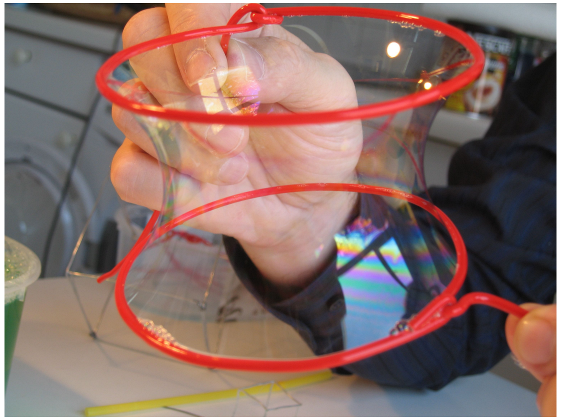
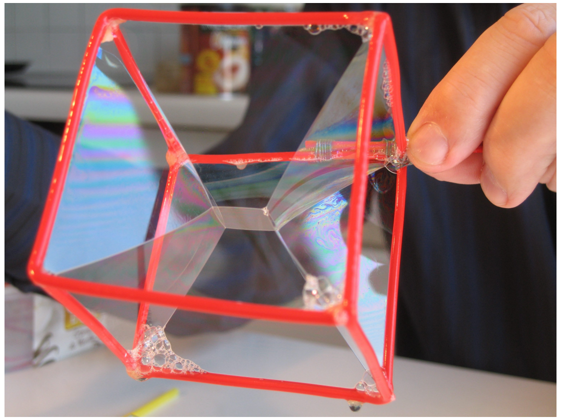
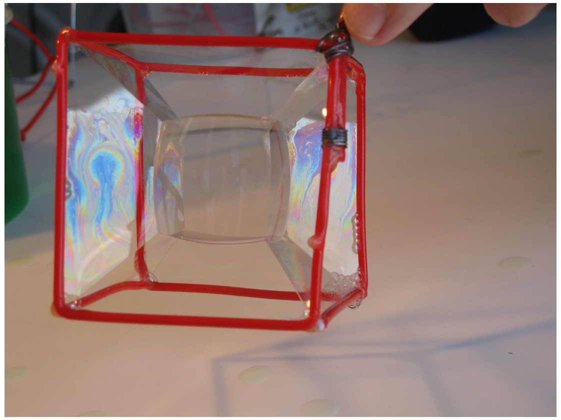
Joseph Plateau (1801-1883)

Films et Bulles

Comment modéliser Films et bulles de savon?
A quoi ressemblent-ils? D'ailleurs, existent-ils?
Modélisation simple très efficace: minimiser l'aire d'un ensemble E, sous une contrainte donnée par le bord, contrainte à bien préciser.

Les bulles: un terme d'énergie supplémentaire, venant de la différence de pression. D'autres termes sont possibles.
Les bulles sont plutôt des ensembles "presque minimaux" (et on voudrait presque la même description pour eux).

Lagrange (1736-1813), Plateau (1801-1883), Lamarle (1806-1875), Radó, Douglas, Besicovitch, De Giorgi, Federer, ...

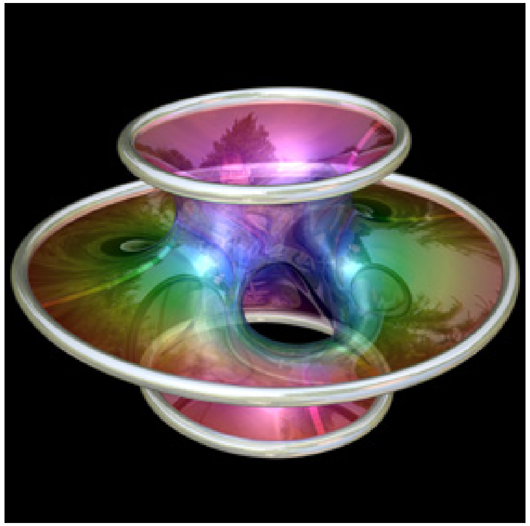




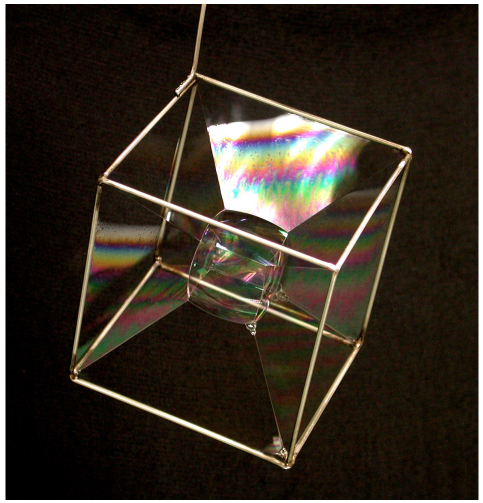
Régularité locale 1

Quand la surface lisse E minimise l'aire localement, sa courbure moyenne est nulle, E vérifie une équation “elliptique”, et c'est une surface minimale régulière (C^∞, voire analytique).

Domaine des maths très étudié (surface de Costa à gauche).

Mais E peut aussi avoir des singularités, comme suggéré dans les exemples de droite. Peut-on les décrire?



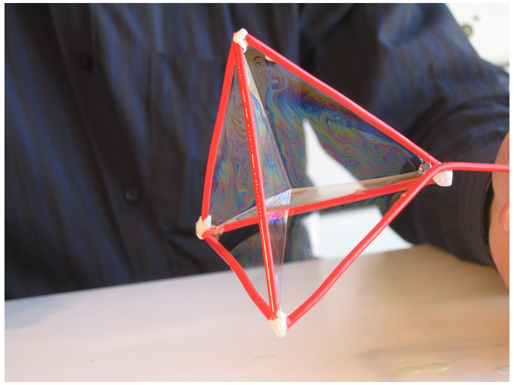


Régularité locale 2

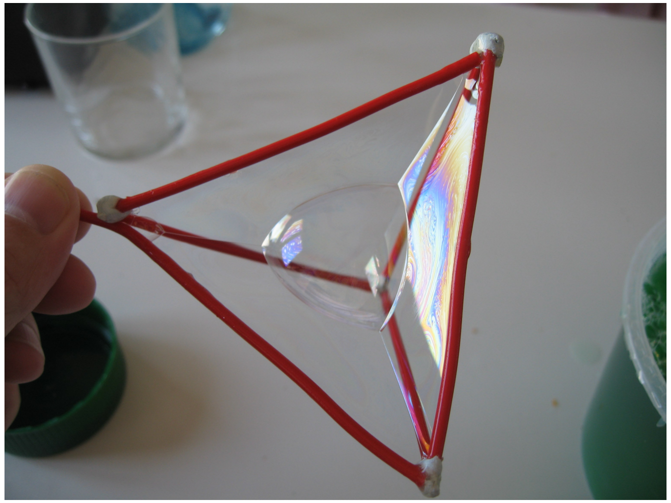
Oui. Suggéré par Plateau, Lamarle, Heppes. Démonstration finale par Jean Taylor 1972: pour un ensemble presque minimal $E \subset \mathbb{R}^3$ (de dimension 2), E est localement une version lisse d'un des cônes minimaux: plan, $\mathbb{Y}$, ou $\mathbb{T}$. Rien d'autre!

Mais on n'a pas la liste des cônes minimaux en dimensions plus grandes, ni forcément le théorème de régularité.

1. Le cône $\mathbb{Y}$



2. Le cône $\mathbb{T}$



3. On voit des $\mathbb{Y}$ et 4 points $\mathbb{T}$

Beaucoup de problèmes de Plateau

Mais comment modéliser la contrainte au bord? On se donne une courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$: comment dire que "$E$ est bordée par Γ" ?

• Par un paramétrage $F : \mathbb{D} \to E$ par un disque (Radó, Douglas). L'aire est calculé par par $\int_{\mathbb{D}} |Det(DF(x))| dx$.

• Par une condition Homologique (Reifenberg): ajouter E à Γ doit annuler (une partie de) son homologie. L'aire est la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^2(E)$.

• Par d'autres conditions topologiques (Harrison, De Lellis, De Rosa, De Philippis, Ghiraldin, Maggi). Aussi avec $\mathcal{H}^2(E)$.

• Par géométrie différentielle (Federer, Fleming, De Giorgi, Almgren, Allard): E est un courant, et la généralisation de l'intégration par parties (Stokes) donne le bord Γ. L'aire est une norme d'opérateur (masse ou taille).

• La condition glissante ci-dessous (paramétrage par E_0 et $\mathcal{H}^2(E)$).

Résultats variables (certains spectaculaires) suivant les modèles. Mais pour les plus réalistes, pas de résultat d'existence en général!

Plateau glissant

Ma modélisation préféré: le problème de Plateau glissant.

On se donne le bord Γ et un ensemble initial E_0.

Et on minimise $\mathcal{H}^2(E)$ parmi les “déformations glissantes” de E_0. C.-à-d. parmi les ensembles $E = \varphi_1(E_0)$, où $(x,t) \mapsto \varphi_t(x)$ est une application continue de $E_0 \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\varphi_t(x) \in \Gamma \quad \text{pour } x \in \Gamma \text{ et } 0 \leq t \leq 1.$$

(Condition de rideau de douche: les points de $\Gamma \cap E_0$ peuvent bouger, mais ceux qui sont sur le bord Γ doivent rester sur Γ.)

Définition j'espère logique mais à ce jour pas de résultat d'existence général, et des résultats de régularité limités.

Comment faire? Régularité des ens. minimaux glissants?

Donc on ne sait pas encore, même pour les ensembles E de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$, si pour toute courbe lisse Γ (et tout choix initial de E_0) il existe un compétiteur glissant de E_0 minimal.

Essai logique: décrire comme il faut les ensemble minimaux glissants, et en particulier au voisinage de Γ.

Curieusement, on sait produire, par suites minimisantes et limites de suites extraites, des ensembles minimaux glissants (E minimise $\mathcal{H}^2$ parmi les déformations de E), mais on ne sait pas s'ils sont encore des déformations de E_0. C.-à-d., E est seulement une limite de déformations!

Un bon théorème de régularité pour E, comme celui de J. Taylor mais pour le comportement au bord, permettrait de conclure: on trouverait une rétraction locale sur E qui permet de dire que E est une déformation de E_0). Mais il manque des bouts.
Et d'ailleurs, ...

Qui sont les Cônes minimaux glissants le long d'une droite?

Pour cause de monotonie de densité, la première étape pour la régularité au bord serait d'identifier la liste des cônes minimaux glissants X bordés par une droite L.

Pour J. Taylor (sans bord), c'était $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$, et $\mathbb{T}$. Mais avec le bord L?

Ici, on en connait certains, et sans doute bientôt la liste complète, par Camillo De Lellis et Federico Glaudo [Vérifiations calculatoires à finir].

On sait que $X \cap \partial B(0,1)$ doit être composé d'arcs de grand cercles (géodésiques) qui ne se rencontrent qu'en groupes de 3 avec des angles de 120°, et qui peuvent aussi terminer aux deux pôles (les points de $L \cap \partial B(0,1)$), seuls ou par paquets de 2 avec des angles $\geq 120^\circ$.
Beaucoup de possibilités. Quelques exemples ci-dessous.

Exemples connus vérifiés

D'abord, $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$, et $\mathbb{T}$, même transverses, qui sont déjà minimaux sans la condition glissante.

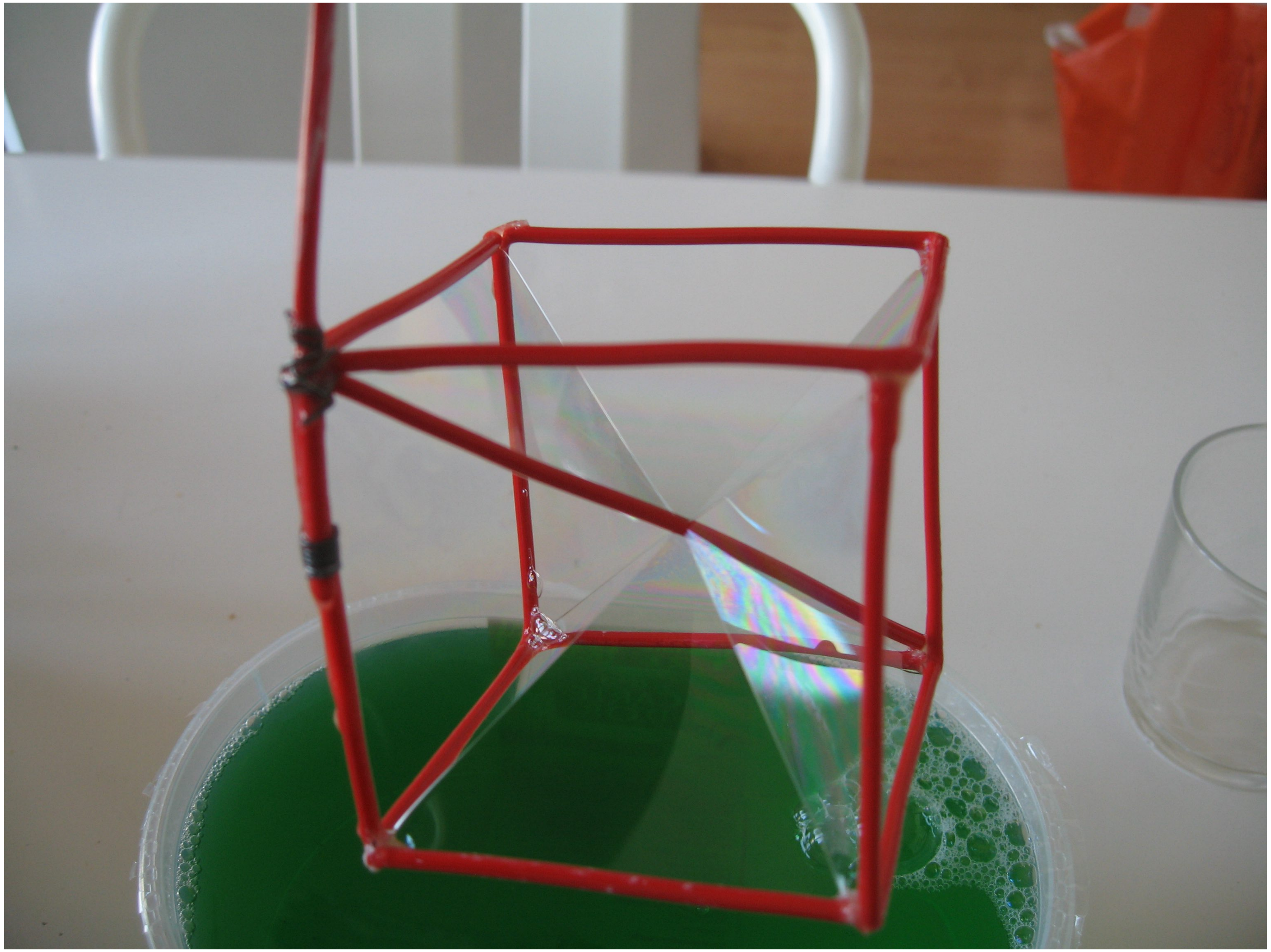
Puis un demi-plan bordé par L.

Puis un ensemble $\mathbb{V}$ composé de deux demi-plans qui font un angle $\geq 120°$ le long de L.

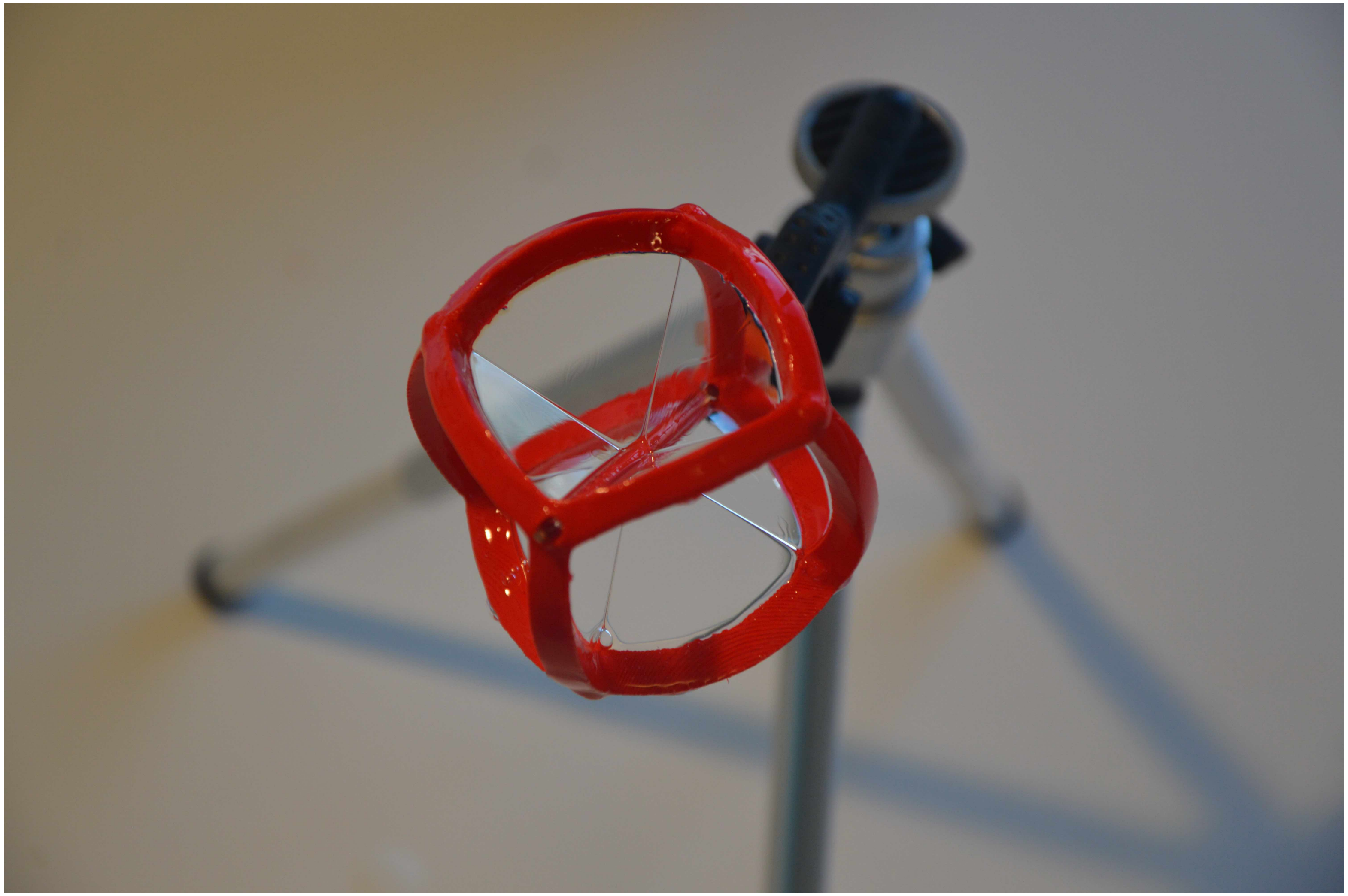
Le $\mathbb{Y}$ aligné sur L joue un rôle spécial (malheureusent, pas encore de théorème de régularité pour E proche de ce cône).

Le cône sur les arêtes d'un cube

Connu au moins de Xiangyu Liang vers 2011.
Probablement minimal, mais on ne sait pas le démontrer.

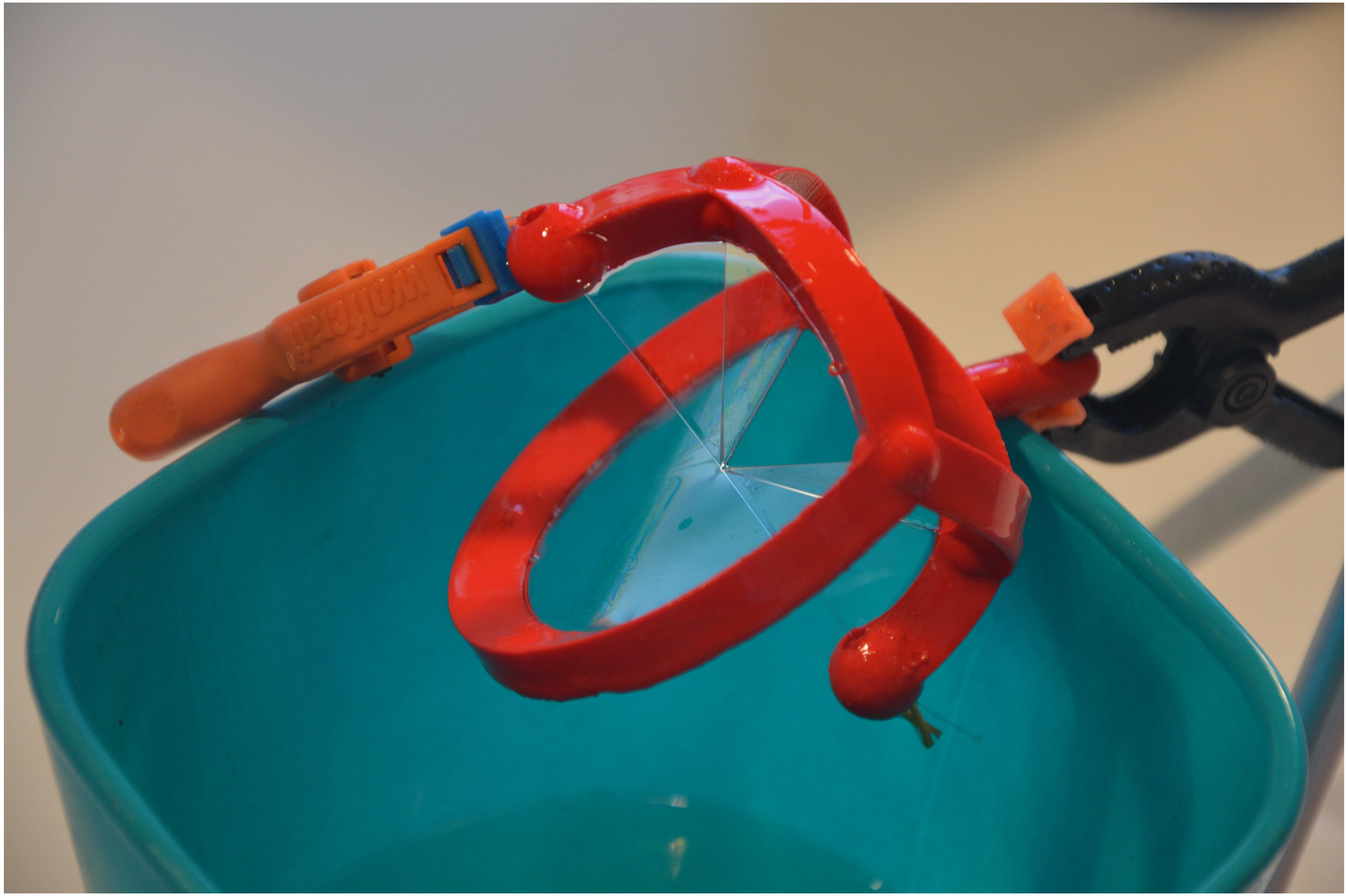


Le cône sur les arêtes d'un cube 2: autre design



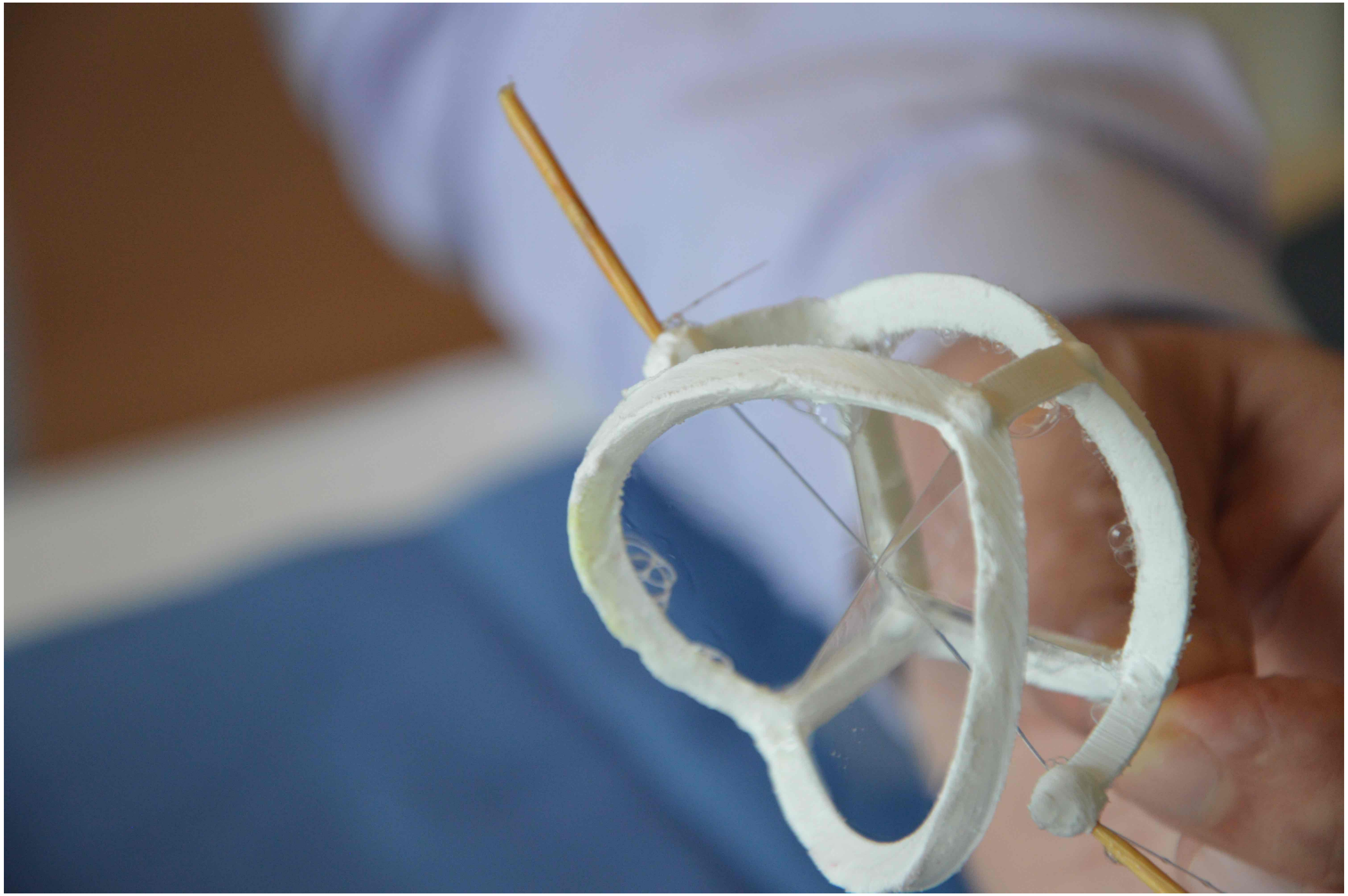
Le Poisson Fin de Camillo De Lellis

Récent, probablement minimal, mais on ne sait pas le démontrer.
1 paramètre (prolonger-rétracter les arcs qui mènent aux pôles).



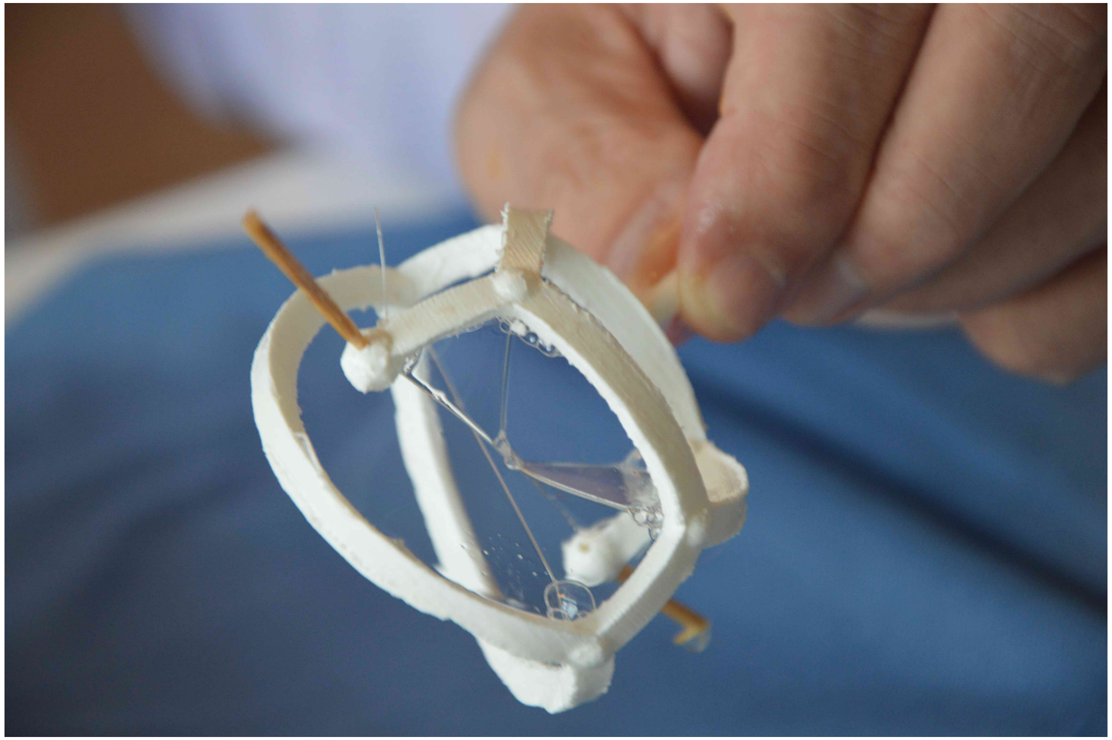
Le Poisson épais de Camillo De Lellis

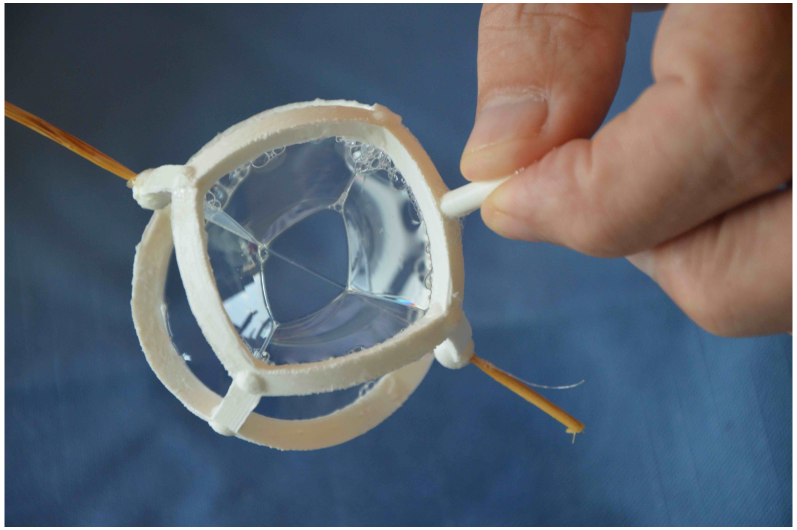
Récent aussi, probablement non minimal. 2 paramètres (faire pivoter le triangle au premier plan).



Le Poisson Epais de Camillo De Lellis 2

Le même, après déformation (en bas, vu de dessus)

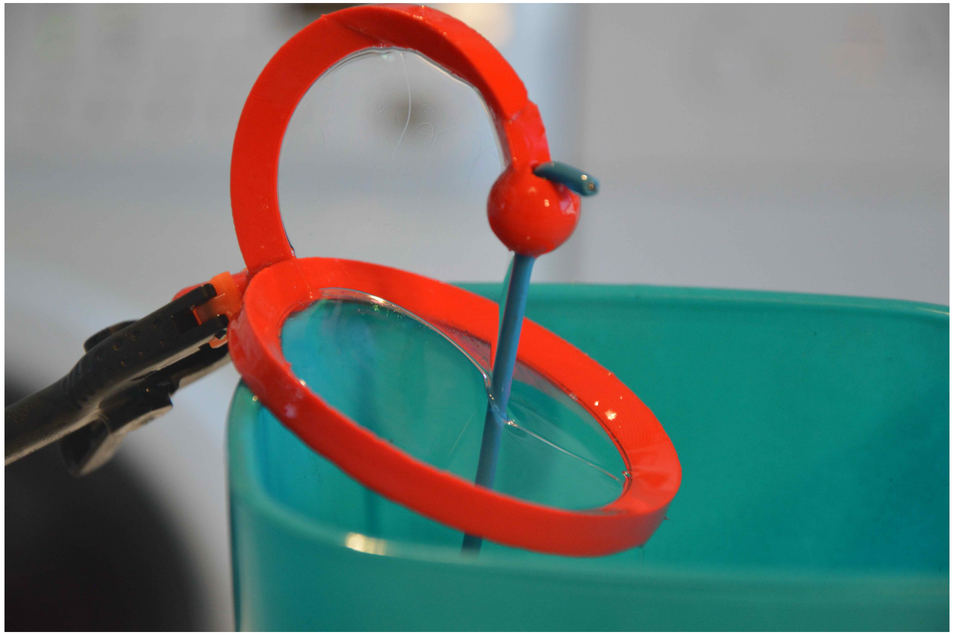




2 photos de Camillo (Poisson Epais et un autre au hasard)

Encore une question

A quoi ressemblent les dessins suivants quand le diamètre du tube tend vers 0?
[A gauche, image de D. Sullivan]
Difficile de deviner avec du savon (capillarité).



Merci

Merci pour votre attention!

[Le théorème de Jean Taylor à l'oeuvre]