# Critère de nilpotence par la trace

Thomas CHEN

On présente ici un exercice classique : un critère de nilpotence par la trace.

**Exercice 1.** Soit $A$, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A$ est nilpotente si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{tr}(A^n) = 0$. (On pourra redémontrer pourquoi une matrice $A$ est semblable à une matrice triangulaire stricte).

Corrigé : Il existe plusieurs preuves qui montrent qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire stricte. Par exemple, notons $\chi_A$ le polynôme caractéristique de $A$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\chi_A(\lambda) = 0$. Alors $\lambda$ est valeur propre donc en notant $k$ l'indice de nilpotence de $A$, on a $0 = A^k X = \lambda^k X$ où $X \in \mathcal{E}_\lambda(A)$ donc $\lambda = 0$ et $\chi_A = X^n$. $A$ est donc trigonalisable et sa diagonale n'est composé que de 0 donc elle est semblable à une matrice triangulaire stricte.

Ainsi, les traces tombent d'elles-même.

Réciproquement, soit $A$ une matrice triangulaire telles que $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathrm{tr}(A^k) = 0$. $A$ est trigonalisable par d'Alembert-Gauss : soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de $A$ de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r$. $A$ est alors semblable à une matrice triangulaire de diagonale $(0, \cdots, 0, \lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_r, \cdots, \lambda_r)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ – a priori, il se peut qu'il n'y ait pas de 0 –. Alors $A^k$ est semblable à une matrice triangulaire de diagonale $(0, \cdots, 0, \lambda_1^k, \cdots, \lambda_1^k, \cdots, \lambda_r^k, \cdots, \lambda_r^k)$. Par hypothèse, on a donc

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i = 0 \ ; \ \cdots \ ; \ \mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k \ ; \ \cdots .$$

Cela se traduit en le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 m_1 & + & \lambda_2 m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r m_r & = & 0 \\ \lambda_1^2 m_1 & + & \lambda_2^2 m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r^2 m_r & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & & + & \vdots & = & \vdots \\ \lambda_1^r m_1 & + & \lambda_2^r m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r^r m_r & = & 0 \end{cases}$$

et matriciellement en

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0$$

Tous les $\lambda_i, 1 \leq i \leq r$ sont non nuls donc

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} = V(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \prod_{i=1}^{r} \lambda_i = \prod_{1 \leq p < q \leq r} (\lambda_q - \lambda_p) \prod_{i=1}^{r} \lambda_i \neq 0.$$

Ainsi, on a $(m_1, \cdots, m_r) = 0$ ce qui n'est pas. Ainsi, si ce n'est 0, $A$ n'a pas de valeur propre. Donc $A$ est semblable à une matrice triangulaire stricte : $A$ est nilpotente.