

ORSAY

N° D'ORDRE :

<p>UNIVERSITE DE PARIS-SUD U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY</p>
--

THESE
présentée
pour obtenir

**Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY**

PAR
M. Frédéric MENOUS

SUJET :

**LES BONNES MOYENNES UNIFORMISANTES ET LEURS
APPLICATIONS A LA RESOMMATION REELLE**

Soutenue le 6 décembre 1996 devant le jury composé de :

Mr Bahman SAFFARI	Président
Mme Anne DUVAL	Rapporteur
Mme Gertrud IMMINK	Rapporteur
Mme Francine DIENER	
Mr Jean ECALLE	Directeur

Remerciements.

Je remercie Bahman Saffari d'avoir accepté de prendre la présidence de ma thèse.

Je remercie aussi Francine Diener d'avoir bien voulu participer à mon jury de thèse.

Je remercie Gertrud Immink et Anne Duval d'avoir accepté de consacrer de leur temps à rapporter ma thèse. Au cours des discussions que nous avons eu, j'ai beaucoup apprécié leur gentillesse et bien sûr leurs conseils et remarques.

Je remercie Jean Ecalte qui, avec patience et gentillesse, m'a permis de beaucoup apprendre sur la resommation et de progresser dans mes travaux de recherche.

Je remercie Christian Even, Pierre Lochak, David Sauzin et Bruno Vallet pour leur soutien et pour toutes les discussions que nous avons pu avoir lors de notre groupe de travail.

Les bonnes moyennes uniformisantes et leurs applications à la resommation réelle.

Résumé : L'objet de cette thèse est l'étude de moyennes uniformisantes, utiles dans l'étude des séries divergentes réelles. Ces moyennes, qui opèrent sur les transformées de Borel (ou éventuellement les "accélérées") des séries divergentes, *uniformisent* les fonctions analytiques ramifiées au-dessus de l'axe réel positif. De plus, elles doivent concilier trois propriétés essentielles, mais souvent antagonistes : préserver la réalité des séries (pour que leurs resommées soient réelles), respecter le produit de convolution (dans le plan de Borel) et, ce qui est peut-être l'essentiel, préserver la croissance latérale des transformées de Borel (pour pouvoir resommer les séries).

On étudie ainsi les moyennes de Catalan et la moyenne brownienne, introduites par J. Ecalle, qui respectent ces trois impératifs et vérifient de nombreuses identités combinatoires et intégrales.

Ces moyennes font partie d'un ensemble plus vaste de moyennes uniformisantes : les moyennes induites par diffusion, elles aussi introduites par J. Ecalle. Pour ces dernières, la préservation de la croissance latérale est obtenue par un procédé "d'erborification".

Toutes ces moyennes uniformisantes ont un large domaine d'application dans l'étude des séries divergentes associées à certains "objets analytiques locaux" (champs de vecteurs, équations différentielles, difféomorphismes). Leurs trois propriétés sont parfaitement adaptées aux situations mêlant réalité, non-linéarité et divergence. Une bonne illustration en est la resommation des "fleuves" analytiques réels.

Abstract : The aim of this thesis is the study of uniformising averages, useful in the study of divergent series. These averages, which operate on the Borel transformed of divergent series, uniformize the analytic functions that are ramified over the positive axis. Moreover, they must associate three essential, but often antithetic, properties : they must respect the realness of series (so that their sums should be real), respect the convolution product (in the Borel plane) and, which may be the most important, respect the lateral growth of the Borel transformed (so as to resum the series).

Likewise, we study the Catalan averages and the Brownian average, presented by J. Ecalle ; they respect these three requirements and verify numerous combinatoric and integral identities.

These averages belong to a bigger set of uniformizing averages : the averages induced by a diffusion, presented by J. Ecalle as well. For the latter, the preservation of lateral growth is obtained by a process of "erborification".

All these uniformizing averages have a broad field of application in the study of divergent series as-

sociated to “local analytic objects” (Vector fields, differential equations, diffeomorphisms). Their three properties are totally fit to situations mixing realness, non-linearity, divergence. A good illustration of this point is the resummation of real analytic “fleuves” (“rivers”).

Introduction générale.

Le point de départ de ce sujet est l'étude de la resommation *réelle* : on cherche à assigner une somme réelle $\varphi(z)$ à une série divergente réelle $\tilde{\varphi}(z)$. On est en général amené à considérer un schéma de resommation du type suivant :

$$(0.0.1) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\varphi}(z) & \xrightarrow{\quad} & \varphi(z) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \hat{\varphi}(\zeta) & \end{array}$$

$\tilde{\varphi}(z)$ est généralement une série divergente réelle d'origine "naturelle", par exemple, une solution formelle d'un problème analytique local (renormalisation de champs de vecteurs réels, etc...). On soumet alors $\tilde{\varphi}(z)$ à une transformation de Borel formelle (pour obtenir $\hat{\varphi}(\zeta)$) qui, par exemple, transforme chaque monôme $z^{-\sigma}$ en $\zeta^{\sigma-1}/\Gamma(\sigma)$. Pour obtenir $\varphi(z)$, on opère alors une transformation de Laplace sur \mathbf{R}^+ :

$$(0.0.2) \quad \hat{\varphi}(\zeta) \longrightarrow \varphi(z) = \int_0^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{\varphi}(\zeta) d\zeta$$

Bien sûr, ce schéma est le plus simple possible : dans le cas général, il peut être nécessaire d'appliquer un nombre fini d'"accélération", ce qui implique autant d'intégrations sur \mathbf{R}^+ .

L'application d'un tel schéma, bien qu'elle semble aisée, fait apparaître certaines difficultés lors de la dernière transformation $\hat{\varphi}(\zeta) \rightarrow \varphi(z)$. La fonction $\hat{\varphi}(\zeta)$, d'abord définie comme un germe en 0, doit être analytiquement prolongée sur \mathbf{R}^+ (pour qu'on puisse lui appliquer la transformation de Laplace). En raison de l'origine "naturelle" de $\tilde{\varphi}(z)$, le prolongement analytique est généralement possible et même indéfiniment : on ne rencontre en général pas de coupures, mais seulement des singularités isolées. Or, parmi celles-ci, il peut y en avoir (en nombre fini ou infini) au-dessus de \mathbf{R}^+ . Dans ce cas, le prolongement analytique de $\hat{\varphi}(\zeta)$ (noté encore $\hat{\varphi}(\zeta)$) est une fonction *multiforme* sur \mathbf{R}^+ et, afin de pouvoir appliquer la transformation de Laplace, on doit, par un "procédé approprié", remplacer $\hat{\varphi}(\zeta)$ par une fonction $(\mathbf{m}\hat{\varphi})(\zeta)$ *uniforme*.

C'est là que se fait sentir le besoin de *moyennes uniformisantes* \mathbf{m} "appropriées". Une telle moyenne \mathbf{m} sera qualifiée de "bonne" (i.e. appropriée) lorsqu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

P1 : Il est indispensable que la moyenne \mathbf{m} transforme la convolution des fonctions ramifiées en la convolution des fonctions uniformes. En effet, si la série formelle $\tilde{\varphi}(z)$ est solution formelle d'une équation ou d'un système *non linéaire*, c'est seulement à cette condition que la resommée $\varphi(z)$ sera solution effective du même problème.

P2 : La moyenne \mathbf{m} doit aussi respecter la réalité. Cette propriété est évidemment souhaitable lorsque la série $\tilde{\varphi}(z)$ a des coefficients réels et doit se voir attribuer une somme réelle $\varphi(z)$, comme c'est le cas dans l'étude d'objets provenant de la physique ou de la géométrie réelle.

P3 : La moyenne \mathbf{m} doit *respecter la croissance latérale*. Plus précisément, il s'agit de prendre en compte la tendance qu'ont presque toutes les fonctions résurgentes $\hat{\varphi}(\zeta)$ d'origine naturelle à *croître sur-exponentiellement sur les chemins qui traversent \mathbf{R}^+ une infinité de fois, même quand, sur les chemins latéraux (droit et gauche) elles présentent une croissance exponentielle régulière*. Or les moyennes uniformisantes \mathbf{m} , surtout celles qui vérifient les propriétés P1 et P2, font nécessairement intervenir les déterminations de $\hat{\varphi}(\zeta)$ sur ces chemins à forte croissance. D'où la nécessité impérieuse de choisir une moyenne \mathbf{m} qui "préserve la croissance latérale", i.e. telle que l'*uniformisée* $(\mathbf{m}\hat{\varphi})(\zeta)$ soit à croissance exponentielle, et donc capable de subir la transformation de Laplace.

Les propriétés P1, P2 et P3, décrites ici de manière "qualitative", sont bien sûr susceptibles d'une définition précise.

Avec cette description sommaire des difficultés liées à la resommation réelle et des solutions que lui apportent les "bonnes" moyennes, nous sommes de plein pied dans la problématique de cette thèse. Celle-ci est entièrement consacrée à l'étude de "bonnes moyennes" (i.e. qui vérifient P1, P2, P3).

Chapitre 1 : La moyenne de Catalan man et la moyenne brownienne mown.

Ce chapitre est consacré à l'étude des moyennes **man** et **mown** et à la preuve de leur "bonté" : P1, P2, P3.

En préambule à ce travail, nous rappelons la définition de l'espace $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ des fonctions ramifiées (analytiques ou non) et nous décrivons sommairement la convolution des fonctions *localement intégrables* de $RAMIF(\mathbf{R}^+)$, i.e. sur l'espace $RAMIF(\mathbf{R}^+, int.)$ (Chap. 1 section 1 et Annexe B). Nous rappelons alors la définition de l'espace $AVER$ des moyennes uniformisantes (qui sont des applications linéaires de l'algèbre $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ dans l'algèbre $UNIF(\mathbf{R}^+)$ des fonctions *uniformes* sur \mathbf{R}^+). On se donne une moyenne \mathbf{m} de $AVER$ en se donnant les poids $\mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$:

$$(0.0.3) \quad \mathbf{m} \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{m}^{\varpi} = \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} ; s \in \mathbf{N} ; \omega_i \in \mathbf{R}^{+*} ; \varepsilon_i = \pm ; \mathbf{m}^{\varpi} \in \mathbf{C} \}$$

sujets à certaines relations d'autocohérence.

Après avoir explicité l'action de $AVER$ sur les fonctions de $RAMIF(\mathbf{R}^+)$, nous rappelons la définition de l'algèbre $ALIEN$ des *opérateurs étrangers stationnaires*. Ceux-ci sont des opérateurs internes sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ et leur action peut être déterminée par une action "adjointe" de $ALIEN$ sur $AVER$.

Comme pour les moyennes, on se donne un opérateur **op** de $ALIEN$ par le biais de ses poids $\mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$:

$$(0.0.4) \quad \mathbf{op} \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{op}^{\varpi} = \mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} ; s \in \mathbf{N} ; \omega_i \in \mathbf{R}^{+*} ; \varepsilon_i = \pm ; \mathbf{op}^{\varpi} \in \mathbf{C} \}$$

sujets certaines relations d'autocohérence.

Parmi ces opérateurs, on peut distinguer les *dérivations* et les *automorphismes de convolution* sur $RAMIF(\mathbf{R}^+, int.)$. D’autre part, c’est à cette algèbre qu’appartiennent les “automorphismes de passage” $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$ qui permettent de “relier” deux moyennes \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 de $AVER$:

$$(0.0.5) \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$$

La description de $RAMIF(\mathbf{R}^+)$, $AVER$ et $ALIEN$ permet de définir rigoureusement les propriétés P1, P2 et P3. En particulier, pour la propriété P3, on définit sur $ALIEN$ la relation d’ordre partielle “moins analytique que”. Alors une moyenne \mathbf{m} est dite vérifier la propriété P3 si, par exemple, $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$ est “moins analytique que” $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$, où \mathbf{mul} et \mathbf{mur} sont les moyennes latérales (gauche et droite) qui possèdent trivialement les propriétés P1 et P3.

La construction des différents espaces, ainsi que la définition des propriétés P1, P2 et P3 et celle de toutes les moyennes uniformisantes étudiées dans cette thèse, est due à Jean Ecalle. On en trouvera un exposé complet dans l’appendice A, introduction de l’article “Well-behaved uniformizing averages and their applications to real resummation” (J. Ecalle).

On définit alors la moyenne de Catalan \mathbf{man} pour des fonctions ramifiées au-dessus de \mathbf{N} . En particulier, on peut se restreindre à la donnée des poids d’incrément entiers $\mathbf{man}^{n_1, \varepsilon_1, \dots, n_s, \varepsilon_s}$ et même, grâce aux relations d’autocohérence, à la donnée des poids d’incrément unité :

$$(0.0.6) \quad \mathbf{man}^{1, \varepsilon_1, \dots, 1, \varepsilon_s} \stackrel{def}{=} \frac{1}{4^s} ca_{n_1} \dots ca_{n_{r-1}} ca_{n_r} (1 + n_r)$$

si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) = (\pm)^{n_1} (\mp)^{n_2} \dots (\varepsilon_s)^{n_r}$ et $ca_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

On associe à \mathbf{man} une moyenne apparentée, \mathbf{mown} , dite *moyenne brownienne*, qui agit d’emblée sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ (incrément quelconques) et non seulement sur $RAMIF(\mathbf{R}^+/\mathbf{N})$ (incrément entiers). Pour définir ses poids, on a le choix entre des formules intégrales directes (voir ci-dessous) et l’identité suivante (“homogénéisation de \mathbf{man} ”) :

$$(0.0.7) \quad \mathbf{mown}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \stackrel{def}{=} \lim_{n_i \rightarrow +\infty} \mathbf{man}^{n_1, \varepsilon_1, \dots, n_s, \varepsilon_s}$$

avec $\omega_i \in \mathbf{R}^{+*}$, $n_i \in \mathbf{N}^*$ et avec n_i/n_j tendant vers ω_i/ω_j ($\forall i, j$).

L’essentiel du Chapitre 1 est alors consacré à la démonstration du théorème suivant :

Théorème : *Les moyennes \mathbf{man} et \mathbf{mown} sont des “bonnes” moyennes uniformisantes (elles vérifient les propriétés P1, P2 et P3).*

Il est immédiat de vérifier que \mathbf{man} et \mathbf{mown} préservent la réalité (P2) et point trop compliqué de montrer qu’elles préservent aussi la convolution (P1). Notre tâche est donc essentiellement d’établir qu’elles préservent la croissance latérale (P3). La preuve se décompose en cinq étapes :

Etape 1 : On immerge la moyenne \mathbf{man} dans une famille de moyennes $\mathbf{ma}_{(\alpha, \beta)}$ ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$,

$\alpha + \beta = 1$ et $\mathbf{man} = \mathbf{ma}_{(1/2,1/2)}$) et on associe à celle-ci une famille de dérivations étrangères $\mathbf{da}_{(\alpha,\beta)}$, caractérisées par :

$$(0.0.8) \quad (\partial/\partial\alpha)\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} = -(\partial/\partial\beta)\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} = \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \mathbf{da}_{(\alpha,\beta)} \quad (\alpha + \beta = 1)$$

puis on pose $\mathbf{dan} \stackrel{def}{=} \mathbf{da}_{1/2,1/2}$.

Etape 2 : On montre que \mathbf{dan} est “moins analytique que” $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$.

Etape 3 : On montre, inversement, que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$ sont “moins analytiques que” \mathbf{dan} .

Etape 4 : On montre que \mathbf{dan} est “moins analytique que” $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{man} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{man} \end{pmatrix}$.

Etape 5 : Par transitivité de la relation “moins analytique que”, on montre alors que \mathbf{man} préserve la croissance latérale et, par *homogénéisation*, on prouve que \mathbf{mown} possède aussi la propriété P3.

Les arguments utilisés à chaque étape reposent essentiellement sur des identités intégrales et combinatoires remarquables. L'étape 4 est la plus délicate car elle fait intervenir la *dérivée* de l'application de *ALIEN* dans *ALIEN* qui à $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ (ou $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$) associe \mathbf{dan} .

Quant à la définition *directe* de la moyenne \mathbf{mown} , par des formules intégrales, c'est le premier exemple de moyenne *induite par une diffusion*. L'étude de cette classe de moyennes est l'objet du Chapitre 2.

Chapitre 2 : Les moyennes induites par diffusion.

Soit un semigroupe de convolution sur \mathbf{R}^+ , c'est-à-dire une famille de fonctions $f_\omega(x)$ intégrables ($x \in \mathbf{R}$ et $\omega \in \mathbf{R}^+$), telles que :

$$(0.0.9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega(x) dx = 1 \quad (\forall \omega \in \mathbf{R}^+)$$

$$(0.0.10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega_1}(x_1) f_{\omega_2}(x - x_1) dx_1 = f_{\omega_1 + \omega_2}(x) \quad (\forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}^+)$$

Ces $(f_\omega)_{\omega \in \mathbf{R}^+}$ peuvent être considérées comme “les distributions aux instants ω ” d'une “diffusion linéaire généralisée” (*généralisée*, car on ne suppose pas $f_\omega \geq 0$). A une telle diffusion, J. Ecalle associe une moyenne \mathbf{moen} sur $\mathbf{RAMIF}(\mathbf{R}^+)$, dite “induite par cette diffusion” et dont les poids valent :

$$(0.0.11) \quad \mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} = \int f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_r}(x_r) \sigma_{\varepsilon_1}(x_1) \sigma_{\varepsilon_2}(x_1 + x_2) \dots \sigma_{\varepsilon_r}(x_1 + \dots + x_r) dx_1 \dots dx_r$$

avec

$$(0.0.12) \quad \sigma_\pm(x) \equiv 1 \text{ (resp. } 0) \text{ si } \pm x > 0 \text{ (resp. } \pm x \leq 0)$$

Ce chapitre est essentiellement consacré à l'exposé du résultat suivant :

Théorème (J. Ecalle) : *Soit une diffusion $(f_\omega)_{\omega \in \mathbf{R}^+}$ symétrique (i.e les fonctions f_ω sont paires), alors la moyenne **moen** induite par cette diffusion est une “bonne” moyenne.*

Encore une fois, le point vraiment délicat est la preuve de la préservation de la croissance latérale et elle fait intervenir le procédé d'*erborification* (ou arborification symétrique) d'Ecalle.

On étudie aussi les moyennes induites par des diffusions discrètes (qui n'agissent que sur les fonctions ramifiées au-dessus de \mathbf{N}^* et qui vérifient P1 et P3 mais *jamais* P2). Bien sûr, lorsque la diffusion n'est définie que sur un semi-groupe discret Ω ($(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$), la moyenne construite est encore une “bonne” moyenne mais elle n'agit que sur les fonctions ramifiées au-dessus de Ω .

On étudie en outre la famille des “bonnes” moyennes “homogènes” τ **moun** (qui, parmi les moyennes induites par diffusion, sont les seules à posséder la propriété d'invariance d'échelle) ainsi que les moyennes “limites” : la moyenne organique **mon** ($\tau \rightarrow 0$) (P1, P2, P3) et la moyenne **mun** ($\tau \rightarrow +\infty$) (P1, P2, mais pas P3).

Grâce aux propriétés des transformations de Fourier et de Hilbert, on définit, à partir d'une diffusion donnée, et sous certaines conditions de régularité, les familles de “bonnes” moyennes induites par “décélération” de la diffusion initiale.

Bien que les divers procédés qu'on vient d'indiquer permettent tous de fabriquer, et en grand nombre, de “bonnes” moyennes uniformisantes, la section 6 présente quelques arguments qui montrent que ces “bonnes” moyennes sont en fait très “rares” dans l'espace des moyennes P1, P2.

Certains calculs numériques ont été à l'origine de l'étude de la moyenne de Catalan. En effet, ceux-ci tendent à “démontrer” la propriété de préservation de la croissance latérale. C'est à ce titre que nous donnons dans l'appendice A quelques tables numériques.

Toutes ces bonnes moyennes, intéressantes en tant que telles, ont un domaine naturel d'application qui couvre peu ou prou toutes les situations mêlant (1) non-linéarité, (2) divergence, (3) réalité. C'est pourquoi nous reprenons en annexe l'intégralité de l'article “Well-behaved convolution averages and the non-accumulation theorem for limit-cycles” (J. Ecalle et F. Menous) dans lequel sont esquissées trois applications typiques : l'iteration unitaire des difféomorphismes unitaires, la normalisation réelle des champs de vecteurs réels et la simplification de la preuve du théorème de non-accumulation des cycles-limites.

Enfin, on trouvera en appendice, à titre de document, l'introduction et la conclusion de l'article “Well-behaved convolution averages and their applications to real resummation” (J. Ecalle) qui précisent le cadre de la présente étude et donnent un panorama des acquis récents en théorie de la resommation réelle.

Table des matières

1	Propriétés algébriques et analytiques de l'uniformisation de Catalan et de l'uniformisation brownienne.	17
1.1	Introduction.	17
1.1.1	Les espaces $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ et $RAMIF(\mathbf{R}^+/\mathbf{N}^*)$.	17
1.1.2	L'espace $AVER$ des moyennes sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$.	19
1.1.3	Opérateurs étrangers stationnaires sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$.	20
1.1.4	Les propriétés souhaitables des moyennes uniformisantes.	22
1.1.5	Les moyennes latérales mul et mur .	25
1.2	Les nombres et les polynômes de Catalan.	26
1.3	La famille des opérateurs de Catalan.	29
1.3.1	Les moyennes de Catalan.	29
1.3.2	Les opérateurs infinitésimaux de Catalan.	31
1.3.3	Les opérateurs de passage de Catalan.	35
1.3.4	Expression des opérateurs de passage dans une même famille de Catalan.	37
1.3.5	Propriétés des opérateurs et des moyennes de Catalan.	40
1.4	Equianalyticité de tous les opérateurs de Catalan.	41
1.4.1	Dérivations et automorphismes appariés.	41
1.4.2	Opérateurs de Catalan appariés.	43
1.4.3	Equianalyticité des opérateurs de Catalan.	45
1.5	Les moyennes de Catalan préservent la croissance latérale.	46
1.5.1	Moules de passage des dérivations de Catalan.	46
1.5.2	daam est moins analytique que \mathcal{U} et son inverse.	49
1.5.3	Application tangente de l'application $\mathcal{U} \mapsto \mathbf{daam}$.	49
1.5.4	Relation implicite entre daam et les dérivations appariées à \mathcal{U} et son inverse.	54
1.5.5	Les moyennes de Catalan préservent la croissance latérale.	54
1.6	La moyenne de Catalan continue et la diffusion sous-jacente.	57
1.6.1	Extension à des incréments entiers quelconques.	57
1.6.2	Diffusion discrète sous-jacente.	58
1.6.3	Moyenne de Catalan continue et préservation de la croissance latérale.	61
1.7	La moyenne brownienne.	61
1.7.1	Définition de mown par la diffusion sous-jacente.	62
1.7.2	Définition de mown par homogénéisation de man .	62
1.7.3	Conséquences du passage de la moyenne de Catalan à la moyenne brownienne.	63

1.7.4	Relation implicite entre down et door	66
1.7.5	La moyenne brownienne préserve la croissance latérale.	69
1.8	Conclusion.	71
A	Démonstration directe du fait que dam est une dérivation.	71
B	La convolution sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$	83
C	L'action de <i>AVER</i> sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ et l'action de <i>ALIEN</i> sur <i>AVER</i> et $RAMIF(\mathbf{R}^+)$	88
2	Moyennes de convolution induites par une diffusion.	91
2.1	Introduction.	91
2.2	Diffusions discrètes ou continues et moyennes associées. Préservation de la croissance latérale.	91
2.2.1	Diffusions discrètes ou continues.	91
2.2.2	Moyenne moen induite par une diffusion.	93
2.2.3	Dérivation doen induite par une diffusion.	95
2.2.4	Moyennes paramétrées \mathbf{moe}_t et dérivations paramétrées \mathbf{doe}_t	95
2.2.5	Représentations des Diracs ramifiés et des pseudovariabes induites par une diffusion continue.	96
2.2.6	Diffusions continues et transformation de Fourier.	99
2.2.7	Automorphismes de passage et moules de passage pour la moyenne moen	105
2.2.8	Moules de passage pour la dérivation doen	111
2.2.9	Erborification et préservation de la croissance latérale.	111
2.3	Diffusions homogènes et moyennes associées.	116
2.3.1	Les diffusions homogènes $(\tau \mathit{fou}_\omega)_{\omega \in \mathbf{R}^{+*}}$	116
2.3.2	La diffusion de Cauchy et la diffusion brownienne.	117
2.3.3	Limite de $\tau \mathbf{moun}$ lorsque τ tend vers l'infini.	118
2.3.4	Limite de $\tau \mathbf{moun}$ lorsque τ tend vers 0.	118
2.4	Moyennes induites par les décélérées d'une diffusion.	120
2.4.1	Complément sur la représentation $\delta^\varpi \rightarrow g^\varpi(y)$	120
2.4.2	Les décélérées d'une diffusion et les moyennes induites.	122
2.4.3	Limite des moyennes induites par les décélérées d'une diffusion.	124
2.5	La moyenne organique.	132
2.5.1	Définition.	132
2.5.2	Les moyennes $\mathbf{mo}_{\alpha,\beta}$ préservent la convolution.	132
2.5.3	Les moyennes $\mathbf{mo}_{\alpha,\beta}$ préservent la croissance latérale.	135
2.6	Rareté des moyennes préservant la croissance latérale.	136
2.6.1	Rappel sur les moules $R\mathbf{m}^\bullet$ et $L\mathbf{m}^\bullet$	136
2.6.2	La moyenne mun ne préserve pas la croissance latérale.	137
2.6.3	L'hybridation des moyennes.	137
2.6.4	Procédé général pour fabriquer une moyenne P1, P2 à partir d'un moule symétral M^\bullet	138

A	Tables numériques.	141
A.1	La transformation dam \rightarrow \mathcal{U} .	141
A.2	La transformation $\mathcal{U} \rightarrow$ dam .	142
A.3	Exemples numériques de réduction.	143
A.4	Les coefficients $Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s}$.	145
B	“Well-behaved convolution averages and the non-accumulation theorem for limit-cycles” (J. Ecalle and F. Menous).	147
B.1	Some heuristics. The need for well-behaved, convolution-preserving averages.	148
B.2	Examples of convolution-respecting averages.	158
B.3	More examples. The Catalan and Brownian averages.	162
B.4	First application : unitary iteration of unitary diffeomorphisms.	165
B.5	Second application : real normalization of real vector fields.	166
B.6	Third application : simplifying the proof of the non-accumulation theorem for limit-cycles.	166
B.7	Conclusion. Looking ahead .	170
C	Introduction de l’article “Well-behaved uniformizing averages and their applications to real resummation”.	175
D	Conclusion de l’article “Well-behaved uniformizing averages and their applications to real resummation”.	229

Chapitre 1

Propriétés algébriques et analytiques de l'uniformisation de Catalan et de l'uniformisation brownienne.

1.1 Introduction.

Nous allons rappeler la définition de l'algèbre de convolution $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ des fonctions ramifiées sur \mathbf{R}^+ ainsi que celle de la sous-algèbre $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*)$ des fonctions ramifiées avec points de ramification au-dessus de \mathbf{N}^* . Agissent sur ces algèbres, outre la convolution, des opérateurs internes, dits “étrangers”, dont les plus intéressants sont des “dérivations étrangères”, irréductibles aux dérivations usuelles. On a aussi des *moyennes uniformisantes*, qui projettent $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ sur l'algèbre $UNIF(\mathbf{R}^+)$ des fonctions *uniformes* sur \mathbf{R}^+ . Nous dégagerons, pour ces moyennes, un certain nombre de propriétés “souhaitables”, propriétés que s'avèreront posséder les deux principales moyennes objets de cette étude – la *moyenne de Catalan* (définie dans un premier temps sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*)$ seulement) et la *moyenne brownienne* (définie d'emblée sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ tout entier). Ces moyennes et tous les opérateurs associés ont été introduits par J. Ecalle. Notre travail ici consistera à en étudier certains aspects.

1.1.1 Les espaces $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ et $RAMIF(\cdot\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*)$.

A chaque semi-groupe additif discret de \mathbf{R}^+ :

$$(1.1.1) \quad \Omega = \{0 < \eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < \dots\} \subset \mathbf{R}^+$$

on associe l'algèbre $RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega)$ des fonctions à valeurs complexes $\hat{\varphi}(\zeta)$ définies sur l'ensemble $\mathbf{R}^+//\Omega$ constitué d'une branche au-dessus de l'intervalle $]0, \eta_1[$, deux branches au-dessus de l'intervalle $] \eta_1, \eta_2[$, ..., et 2^r branches au-dessus de $] \eta_r, \eta_{r+1}[$. Chaque branche au-dessus de $] \eta_r, \eta_{r+1}[$ est caractérisée par son “adresse” $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ constituée de r signes $\varepsilon_i = \pm$. Si $\varepsilon_r = +$ (resp. $-$), la branche au-dessus de $] \eta_r, \eta_{r+1}[$ ayant pour adresse $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ est vue comme la continuation par la droite (resp. la gauche) de la branche au-dessus de $] \eta_{r-1}, \eta_r[$ ayant pour adresse $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$. Ainsi chaque point de $\mathbf{R}^+//\Omega$ peut être caractérisé par le point ζ au-dessus duquel il se situe et par l'adresse $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ de la branche

sur laquelle il est. Si, pour i dans \mathbf{N}^* , $\omega_i = \eta_i - \eta_{i-1}$ ($\omega_1 = \eta_1$), nous noterons $\zeta^\varpi = \zeta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$ le point de $\mathbf{R}^+ // \Omega$ qui se projette en ζ sur \mathbf{R}^+ ($\eta_r \leq \zeta < \eta_{r+1}$) et qui se situe sur la branche d'adresse $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$. On notera aussi cette adresse $(\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s)$.

On a ainsi la figure :

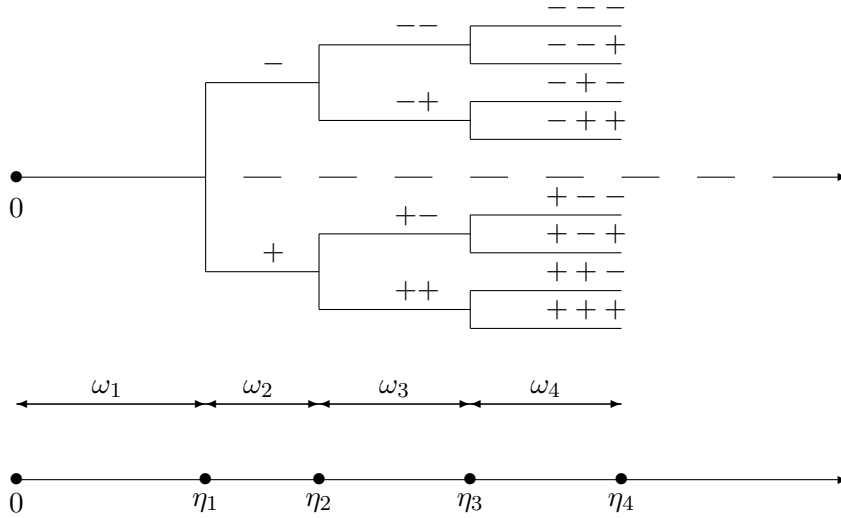


figure 1

Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$, il existe une injection triviale de $RAMIF(\mathbf{R}^+ // \Omega_1)$ dans $RAMIF(\mathbf{R}^+ // \Omega_2)$. Ceci permet de définir $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ comme la limite inductive de tous les espaces $RAMIF(\mathbf{R}^+ // \Omega)$ relativement à l'inclusion des ensembles Ω :

$$(1.1.2) \quad RAMIF(\mathbf{R}^+) \stackrel{def}{=} \lim_{ind} \Omega RAMIF(\mathbf{R}^+ // \Omega)$$

Bien sûr, $RAMIF(\mathbf{R}^+ // \mathbf{N}^*)$ est l'espace correspondant à $\Omega = \mathbf{N}^*$.

Sur la sous-algèbre $RAMIF(\mathbf{R}^+, int.)$ de $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ constituée des fonctions localement intégrable, on peut aussi définir un produit global et unique de convolution $*$ qui étend la convolution naturelle $*$ définie sur l'espace des germes localement intégrables en $+0$ dont tous les prolongements analytiques sont localement intégrables :

$$(1.1.3) \quad \hat{\varphi}_3(\zeta) = (\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2)(\zeta) = \int_0^\zeta \hat{\varphi}_1(\zeta_1) \hat{\varphi}_2(\zeta - \zeta_1) d\zeta_1 \quad (0 < \zeta \ll 1)$$

et qui, en cas d'analyticité de $\hat{\varphi}_1$ et $\hat{\varphi}_2$ (et donc de $\hat{\varphi}_3$), est compatible avec le prolongement analytique. On trouvera dans l'annexe B à cet article un complément d'information sur la construction d'une telle convolution. De plus, on pourra se reporter à [3],   A.2 et A.4, pour plus de détails.

Nous allons maintenant définir ce que nous appellerons un moyenne sur l'espace $RAMIF(\mathbf{R}^+)$.

1.1.2 L'espace *AVER* des moyennes sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$.

Les *moyennes uniformisantes* sont des applications linéaires de $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ dans $UNIF(\mathbf{R}^+)$ qui inversent l'injection naturelle *embed* de $UNIF(\mathbf{R}^+)$ dans $RAMIF(\mathbf{R}^+)$. Plus précisément, nous définirons une moyenne \mathbf{m} de *AVER* par ses "poids" $\mathbf{m}^\varpi = \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$:

$$(1.1.4) \quad \mathbf{m} \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{m}^\varpi = \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} ; s \in \mathbf{N} ; \omega_i \in \mathbf{R}^{+*} ; \varepsilon_i = \pm ; \mathbf{m}^\varpi \in \mathbf{C} \}$$

qui doivent vérifier les relations d'*autocohérence* :

$$(1.1.5) \quad \sum_{\varepsilon_i = \pm} \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_i, \varepsilon_i, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, (\omega_i + \omega_{i+1}), \varepsilon_{i+1}, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \quad (i < s)$$

$$\sum_{\varepsilon_s = \pm} \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}} \quad (resp. \mathbf{m}^\emptyset = 1) \quad si \ s > 1 \ (resp. \ s = 1)$$

pour tout entier $s \in \mathbf{N}$, tous réels $\omega_i \in \mathbf{R}^{+*}$ et tous signes $\varepsilon_i = \pm$.

Une telle moyenne \mathbf{m} agit sur une fonction ramifiée donnée :

$$(1.1.6) \quad \hat{\varphi} \in RAMIF(\mathbf{R}^+ // \Omega)$$

avec $\Omega = \{ \eta_0 = 0 ; \eta_1 = \omega_1 ; \eta_2 = \omega_1 + \omega_2 ; \eta_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 ; \dots \}$

selon la règle suivante :

$$(1.1.7) \quad (\mathbf{m}\hat{\varphi})(\zeta) \stackrel{def}{=} \sum_{\varepsilon_1 = \pm; \dots; \varepsilon_s = \pm} \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \hat{\varphi}(\zeta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}) \quad (si \ \eta_s < \zeta < \eta_{s+1})$$

Grâce aux relations d'autocohérence (1.1.5), on vérifie que l'action des \mathbf{m} de *AVER* est compatible avec l'injection canonique de $RAMIF(\mathbf{R}^+ // \Omega_1)$ dans $RAMIF(\mathbf{R}^+ // \Omega_2)$ pour $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Elle induit donc une action de *AVER* sur l'espace limite $RAMIF(\mathbf{R}^+)$, que les \mathbf{m} projettent sur $UNIF(\mathbf{R}^+)$.

Cette définition appelle quelques remarques :

- Etant donnée une fonction $\hat{\varphi}$ de $RAMIF(\mathbf{R}^+)$, il est clair que si celle-ci est localement intégrable, alors la fonction $\mathbf{m}\hat{\varphi}$ de $UNIF(\mathbf{R}^+)$ l'est aussi.
- Du fait des relations d'autocohérence, si une fonction $\hat{\varphi}$ n'est pas ramifiée, il est clair que :

$$\mathbf{m}\hat{\varphi} = \hat{\varphi}$$

- Il est immédiat que, pour une fonction $\hat{\varphi}$ de $RAMIF(\mathbf{R}^+)$:

$$\mathbf{m}(\zeta\hat{\varphi}) = \zeta(\mathbf{m}\hat{\varphi})$$

- Toute fonction $\hat{\varphi}$ de $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ est entièrement déterminée par l'ensemble de ses uniformisées $\mathbf{m}\hat{\varphi}$. En effet, on peut sans difficulté construire des moyennes qui ne chargent qu'une seule branche parmi celles où est définie $\hat{\varphi}$.

Cette dernière remarque va nous permettre de caractériser commodément l'action d'un opérateur étranger stationnaire sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$.

1.1.3 Opérateurs étrangers stationnaires sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$.

Il existe tout un ensemble d'opérateurs qui envoient $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ dans lui-même. Hormis la dérivation naturelle :

$$(1.1.8) \quad \hat{\partial}\hat{\varphi}(\zeta) \stackrel{def}{=} -\dot{\zeta}\hat{\varphi}(\zeta) \quad (\dot{\zeta} \text{ projection de } \zeta \text{ sur } \mathbf{R}^+)$$

et la conjugaison complexe (qui échange les branches conjuguées), nous allons définir les *opérateurs étrangers stationnaires*, qui forment une algèbre *ALIEN* et qui commutent avec la dérivation naturelle. Tout opérateur \mathbf{op} de *ALIEN* est défini par ses poids $\mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$:

$$(1.1.9) \quad \mathbf{op} \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{op}^{\varpi} = \mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} ; s \in \mathbf{N} ; \omega_i \in \mathbf{R}^{+*} ; \varepsilon_i = \pm ; \mathbf{op}^{\varpi} \in \mathbf{C} \}$$

qui doivent vérifier les relations d'*autocohérence* :

$$(1.1.10) \quad \sum_{\varepsilon_i = \pm} \mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_i, \varepsilon_i, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, (\omega_i + \omega_{i+1}), \varepsilon_{i+1}, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \quad (i < s)$$

$$\sum_{\varepsilon_s = \pm} \mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = 0$$

pour tout entier $s \in \mathbf{N}^*$, tous réels $\omega_i \in \mathbf{R}^{+*}$ et tous signes $\varepsilon_i = \pm$.

Nous n'allons pas définir l'action d'un opérateur \mathbf{op} de *ALIEN* sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ directement, mais "dualement", grâce à l'action "adjointe" de \mathbf{op} sur *AVER*. Plus précisément, comme toute fonction $\hat{\varphi}$ est connue dès que l'on connaît toutes ses uniformisées $\mathbf{m}\hat{\varphi}$, on peut, pour un opérateur \mathbf{op} de *ALIEN*, caractériser la fonction $(\mathbf{op}\hat{\varphi})$ par l'action de *AVER* sur celle-ci. Cette action sera définie comme suit :

$$(1.1.11) \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{AVER}, \quad \mathbf{m}(\mathbf{op}\hat{\varphi}) \stackrel{def}{=} (\mathbf{m}\mathbf{op})\hat{\varphi}$$

où $\mathbf{m}\mathbf{op}$ est une application linéaire de $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ dans $UNIF(\mathbf{R}^+)$ qui, comme les éléments de *AVER*, est définie par ses poids :

$$(1.1.12) \quad (\mathbf{m}\mathbf{op})^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \sum_{i=0}^s \mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_i, \varepsilon_i} \mathbf{m}^{\omega_{i+1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$$

et agit sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ comme une moyenne (voir (1.1.7)).

Cette action est compatible avec la définition inductive de $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ car les opérateurs $(\mathbf{m}\mathbf{op})$ vérifient les relations d'autocohérence (1.1.5) à l'exception de la condition "masse totale=1". En effet, on a maintenant :

$$\forall \omega_1 \in \mathbf{R}^{+*}, \quad \sum_{\varepsilon_1 = \pm} (\mathbf{m}\mathbf{op})^{\omega_1, \varepsilon_1} = (\mathbf{m}\mathbf{op})^\emptyset = \mathbf{op}^\emptyset \mathbf{m}^\emptyset$$

Or \mathbf{op}^\emptyset peut prendre n'importe quelle valeur, si bien que la "masse totale" $(\mathbf{m}\mathbf{op})^\emptyset$ peut être différente de 1. Mais cela n'empêche pas $\mathbf{m}\mathbf{op}$ d'agir sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ selon la formule (1.1.7). Nous tenons donc là une *caractérisation indirecte* de l'action de *ALIEN*. Pour la *définition directe* de l'action de *ALIEN* sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$, on pourra se référer à l'annexe C ou à l'article [3].

On déduit directement des équations (1.1.11) et (1.1.12) la règle de calcul pour les poids de $(\mathbf{op}_1 \mathbf{op}_2) \in ALIEN$, produit de deux opérateurs \mathbf{op}_1 et \mathbf{op}_2 de $ALIEN$. Pour tout entier $s \in \mathbf{N}^*$, tous réels $\omega_i \in \mathbf{R}^{+*}$ et tous signes $\varepsilon_i = \pm$, ces poids valent :

$$(1.1.13) \quad (\mathbf{op}_1 \mathbf{op}_2)^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \sum_{i=0}^s \mathbf{op}_2^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_i, \varepsilon_i} \mathbf{op}_1^{\omega_{i+1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$$

et vérifient les relations d'autocoherence (1.1.10). Mais attention à l'inversion de l'ordre !

A chaque opérateur \mathbf{op} de $ALIEN$, on peut associer ses *composantes homogènes* \mathbf{op}_η ($\eta > 0$). Pour tout η , l'opérateur \mathbf{op}_η est un élément de l'algèbre graduée $ALIEN$ défini par les poids suivants :

$$(1.1.14) \quad \mathbf{op}_\eta^{\varpi} = \mathbf{op}^{\varpi} \text{ (resp. } 0 \text{) si } \|\varpi\| = \eta \text{ (resp. } \|\varpi\| \neq \eta)$$

avec, si $\varpi = (\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s)$, $\|\varpi\| = \sum_{i=1}^s \omega_i$. Cette équation définit bien un opérateur de $ALIEN$ car les poids de \mathbf{op}_η vérifient les relations d'autocoherence (1.1.10).

Parmi les opérateurs de $ALIEN$, il en existe deux types qui nous intéresseront plus particulièrement. Ce sont d'une part les *dérivations*, c'est-à-dire les \mathbf{op} tels que :

$$(1.1.15) \quad \forall \hat{\varphi}, \hat{\psi} \in RAMIF(\mathbf{R}^+) \quad , \quad \mathbf{op}(\hat{\varphi} * \hat{\psi}) = (\mathbf{op}\hat{\varphi}) * \hat{\psi} + \hat{\varphi} * (\mathbf{op}\hat{\psi})$$

ce qui se traduit sur les composantes homogènes par :

$$\forall \hat{\varphi}, \hat{\psi} \in RAMIF(\mathbf{R}^+) \quad , \quad \mathbf{op}_\eta(\hat{\varphi} * \hat{\psi}) = (\mathbf{op}_\eta \hat{\varphi}) * \hat{\psi} + \hat{\varphi} * (\mathbf{op}_\eta \hat{\psi})$$

et d'autre part les *automorphismes de convolution*, c'est-à-dire les \mathbf{op} tels que :

$$(1.1.16) \quad \forall \hat{\varphi}, \hat{\psi} \in RAMIF(\mathbf{R}^+) \quad , \quad \mathbf{op}(\hat{\varphi} * \hat{\psi}) = (\mathbf{op}\hat{\varphi}) * (\mathbf{op}\hat{\psi})$$

ce qui se traduit sur les composantes homogènes par :

$$\forall \hat{\varphi}, \hat{\psi} \in RAMIF(\mathbf{R}^+) \quad , \quad \mathbf{op}_\eta(\hat{\varphi} * \hat{\psi}) = \sum_{\eta_1 + \eta_2 = \eta} (\mathbf{op}_{\eta_1} \hat{\varphi}) * (\mathbf{op}_{\eta_2} \hat{\psi})$$

Ces propriétés – être une dérivation ou un automorphisme – sont décelables sur les poids $\mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$ (voir [3], §A.2). Mais dans la suite, pour établir qu'un opérateur étranger est une dérivation ou un automorphisme, nous raisonnerons plutôt sur les “moules de passage” d'un opérateur à un autre. Précisons cette notion : pour toute paire d'opérateurs \mathbf{op} et \mathbf{op}' (dérivations, automorphismes ou autre ...), si \mathbf{op}' peut s'exprimer en fonction des composantes homogènes de \mathbf{op} , alors cette expression est nécessairement unique et les coefficients $\langle \mathbf{op}', \mathbf{op} \rangle^\bullet$ qu'elle comporte constituent le “moule de passage” de \mathbf{op} à \mathbf{op}' :

$$(1.1.17) \quad \mathbf{op}' = \sum_{\omega_i > 0} \langle \mathbf{op}', \mathbf{op} \rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} \mathbf{op}_{\omega_s} \dots \mathbf{op}_{\omega_1}$$

La “composition des passages” se traduit par la composition usuelle des moules (voir [3], §A.6) :

$$(1.1.18) \quad \langle \mathbf{op}'', \mathbf{op} \rangle^\bullet = \langle \mathbf{op}'', \mathbf{op}' \rangle^\bullet \circ \langle \mathbf{op}', \mathbf{op} \rangle^\bullet$$

On peut maintenant caractériser les moules de passage dans les quatre cas intéressants où les deux opérateurs sont des dérivations ou des automorphismes. Si \mathbf{op} est une dérivation, alors \mathbf{op}' en est une

si et seulement si le moule $\langle \mathbf{op}', \mathbf{op} \rangle^\bullet$ est *alternel* : un moule M^\bullet est alternel si et seulement si pour toutes séquences ω' et ω'' , on a :

$$(1.1.19) \quad \sum_{\omega \in sh(\omega', \omega'')} M^\omega = 0$$

où la somme est étendue à toutes les séquences ω obtenues par “battage” (shuffle) des séquences ω' et ω'' . On a, par exemple, pour des séquences ω_1 et ω_2, ω_3 :

$$M^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_1, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_3, \omega_1} = 0$$

De même si \mathbf{op} est une dérivation, alors \mathbf{op}' est un automorphisme de convolution si et seulement si le moule $\langle \mathbf{op}', \mathbf{op} \rangle^\bullet$ est *symétral* : un moule M^\bullet est symétral si et seulement si pour toutes séquences ω' et ω'' , on a :

$$(1.1.20) \quad \sum_{\omega \in sh(\omega', \omega'')} M^\omega = M^{\omega'} M^{\omega''}$$

avec une somme sur les mêmes séquences que pour (1.1.19). Par exemple :

$$M^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_1, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_3, \omega_1} = M^{\omega_1} M^{\omega_2, \omega_3}$$

Maintenant, si \mathbf{op} est un automorphisme de convolution, alors \mathbf{op}' est une dérivation si et seulement si le moule $\langle \mathbf{op}', \mathbf{op} \rangle^\bullet$ est *alternel* : un moule M^\bullet est alternel si et seulement si pour toutes séquences ω' et ω'' , on a :

$$(1.1.21) \quad \sum_{\omega \in ctsh(\omega', \omega'')} M^\omega = 0$$

où la somme est étendue à toute les séquences ω obtenues par battage des séquences ω' et ω'' suivi, éventuellement, de la contraction de composantes adjacentes de ω' et ω'' . On a, par exemple, pour des séquences ω_1 et ω_2, ω_3 :

$$M^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_1, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_3, \omega_1} + M^{\omega_1 + \omega_2, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_1 + \omega_3} = 0$$

De même si \mathbf{op} est un automorphisme de convolution, alors \mathbf{op}' est un automorphisme si et seulement si le moule $\langle \mathbf{op}', \mathbf{op} \rangle^\bullet$ est *symétral* : un moule M^\bullet est symétral si et seulement si pour toutes séquences ω' et ω'' , on a :

$$(1.1.22) \quad \sum_{\omega \in ctsh(\omega', \omega'')} M^\omega = M^{\omega'} M^{\omega''}$$

où la somme est étendue aux mêmes séquences que dans (1.1.21). On a, par exemple, pour des séquences ω_1 et ω_2, ω_3 :

$$M^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_1, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_3, \omega_1} + M^{\omega_1 + \omega_2, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_1 + \omega_3} = M^{\omega_1} M^{\omega_2, \omega_3}$$

1.1.4 Les propriétés souhaitables des moyennes uniformisantes.

Afin d'utiliser une moyenne \mathbf{m} dans l'étude de problèmes de resommation réelle (voir [3], §E), nous aurons besoin que celle-ci soit une “bonne” moyenne. Cela signifie que \mathbf{m} doit vérifier les trois propriétés suivantes :

P1 : respecter la convolution.

P2 : respecter la réalité.

P3 : préserver la croissance latérale.

Propriété P1 : respecter la convolution.

Cela signifie que l'application \mathbf{m} est un homomorphisme d'algèbres :

$$(1.1.23) \quad \mathbf{m}(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2) = (\mathbf{m}\hat{\varphi}_1) * (\mathbf{m}\hat{\varphi}_2) \quad \forall \hat{\varphi}_i \in RAMIF(\mathbf{R}^+; int.)$$

où la première (resp. la seconde) étoile $*$ dénote la convolution globale sur $RAMIF(\mathbf{R}^+; int.)$ (resp. sur $UNIF(\mathbf{R}^+; int.)$). Pour plus de détails, on se reportera à [6] ou [3], §A.2.

Propriété P2 : respecter la réalité.

Cela signifie que $\mathbf{m}\hat{\varphi}$ doit être réelle quand $\hat{\varphi}$ l'est. Pour une fonction intégrable $\hat{\varphi}$, être réelle veut dire avoir des valeurs complexes conjuguées sur des branches conjuguées. Donc une moyenne respecte la réalité si et seulement si ses poids vérifient :

$$(1.1.24) \quad \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \overline{\mathbf{m}}^{\omega_1, \bar{\varepsilon}_1, \dots, \omega_s, \bar{\varepsilon}_s} \quad (\forall \omega_i \in \mathbf{R}^+; \forall \varepsilon_i \in \{+, -\})$$

où bien sûr $\bar{\varepsilon}$ est le signe opposé à ε .

Propriété P3 : préserver la croissance latérale.

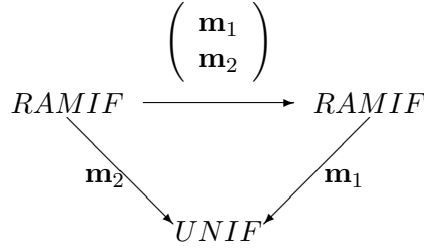
Nous ne nous appesantirons pas sur les motivations pour définir une telle propriété (voir [6] et surtout [3], §A.3) : il s'agit essentiellement de prendre en compte la tendance qu'ont presque toutes les fonctions résurgentes $\hat{\varphi}(\zeta)$ d'origine naturelle à *croître surexponentiellement sur les chemins qui traversent \mathbf{R}^+ une infinité de fois, même quand, sur les chemins latéraux (droit et gauche) elles présentent un croissance exponentielle régulière*. Or les moyennes uniformisantes \mathbf{m} , surtout celles qui préservent la convolution (P1) et la réalité (P2), font nécessairement intervenir les valeurs de $\hat{\varphi}(\zeta)$ sur ces chemins à forte croissance. Pour obtenir, malgré cela, une moyenne uniforme $\mathbf{m}\hat{\varphi}(\zeta)$ à *croissance exponentielle* (– ce qui est nécessaire si on vise une resommation exacte –) il faut s'entourer de précautions bien particulières. Concrètement, il faut imposer à la moyenne \mathbf{m} la condition technique que voici :

Une moyenne \mathbf{m} est dite “préserver la croissance latérale” si l'opérateur étranger $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ (ou $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$) est *moins analytique* que l'opérateur $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$ (ou $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$).

Explications :

Deux moyennes \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 sont reliées (voir [3], §A.2) par un opérateur bien défini $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$ de *ALIEN* :

$$(1.1.25) \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$$



et si \mathbf{m}_1 respecte la convolution et $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$ est un automorphisme de convolution alors \mathbf{m}_2 respecte aussi la convolution. Par conséquent, définir une moyenne de convolution \mathbf{m} équivaut à définir l'automorphisme de convolution $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$ (ou $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$) qui relie \mathbf{m} aux moyennes latérales \mathbf{mul} et \mathbf{mur} (voir plus bas).

Nous allons maintenant préciser la notion de “moins analytique que”. Une réduction red de l'algèbre graduée ALIEN est, par définition, un homomorphisme d'algèbres graduées de ALIEN dans une algèbre $Endo(\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]])$ avec préservation de toute la structure (graduation, coproduit). Une réduction est définie lorsque l'on connaît les images des dérivations étrangères :

$$(1.1.26) \quad \Delta_\omega \mapsto red(\Delta_\omega) \equiv x_1^{n_1(\omega)} \dots x_\nu^{n_\nu(\omega)} \sum_{1 \leq i \leq \nu} A_\omega^i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (A_\omega^i \in \mathbf{C})$$

où les Δ_ω sont les composantes homogènes d'une dérivation Δ et engendrent toute ALIEN (tout opérateur de ALIEN peut s'exprimer en fonction des Δ_ω).

Le respect de la graduation fait que la plupart des $red(\Delta_\omega)$ sont nuls. Plus précisément, la réduction la plus générale est de la forme suivante :

$$(1.1.27) \quad \begin{aligned} \Delta_\omega \mapsto red(\Delta_\omega) &= 0 \quad \text{si } \omega \notin \Omega \\ \Delta_\omega \mapsto red(\Delta_\omega) &= \sum_{n_1 \lambda_1 + \dots + n_\nu \lambda_\nu = \omega} x_1^{n_1} \dots x_\nu^{n_\nu} \sum_{i=1}^{\nu} A_{n_1, \dots, n_\nu}^i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &\quad \text{si } \omega \in \Omega \text{ avec } A_{n_1, \dots, n_\nu}^i \in \mathbf{C} \end{aligned}$$

pour des complexes A_{n_1, \dots, n_ν}^i fixés et un semi-groupe $\Omega = \lambda_1 \mathbf{N} + \dots + \lambda_\nu \mathbf{N}$ engendré par des réels $\lambda_i > 0$ fixés.

Finalement, pour une paire d'opérateurs étrangers \mathbf{op} et \mathbf{op}' , \mathbf{op} est moins analytique que \mathbf{op}' quand, pour toute réduction red , si $red(\mathbf{op})$ est analytique (i.e. appartient à $Endo(\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\})$), alors $red(\mathbf{op}')$ l'est aussi. Par exemple, pour une réduction quelconque, $red\left(\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}\right)$ et $red\left(\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}\right)$ sont soit tous les deux des opérateurs analytiques, soit aucun des deux ne l'est, car ce sont des automorphismes de substitution réciproques de $\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]]$ (comme réductions d'automorphismes de convolution réciproques). Ainsi, $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ sont équianalytiques.

Nous allons maintenant donner l'exemple des moyennes latérales \mathbf{mul} et \mathbf{mur} .

1.1.5 Les moyennes latérales **mul** et **mur**.

On peut montrer que ce sont les seules moyennes de convolution qui ne dépendent que d'une seule détermination sur chaque intervalle. On a :

$$(1.1.28) \quad \mathbf{mul}^{\omega_1,-,\omega_2,-,\dots,\omega_s,-} = 1 \quad (\text{et tous les autres poids sont nuls})$$

$$(1.1.29) \quad \mathbf{mur}^{\omega_1,+,\omega_2,+,\dots,\omega_s,+} = 1 \quad (\text{et tous les autres poids sont nuls})$$

Ces deux moyennes vérifient P1 et P3 mais ne préservent pas la réalité. Elles permettent de générer toutes les moyennes préservant la convolution par postcomposition avec les automorphismes de convolution de $RAMIF(\mathbf{R}^+)$. On peut d'ailleurs remarquer que, pour montrer qu'une moyenne \mathbf{m} préserve la convolution, il suffit de montrer que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$ (ou $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$) est un automorphisme de convolution.

On remarquera finalement que :

$$(1.1.30) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}^{\omega_1,+\omega_2,+,\dots,\omega_{s-1},+,\omega_s,+} &= 1 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}^{\omega_1,+\omega_2,+,\dots,\omega_{s-1},+,\omega_s,-} &= -1 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}^{\omega_1,\varepsilon_1,\dots,\omega_s,\varepsilon_s} &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

et

$$(1.1.31) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}^{\omega_1,-\omega_2,-,\dots,\omega_{s-1},-,\omega_s,-} &= 1 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}^{\omega_1,-\omega_2,-,\dots,\omega_{s-1},-,\omega_s,+} &= -1 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}^{\omega_1,\varepsilon_1,\dots,\omega_s,\varepsilon_s} &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

Quittant ces exemples triviaux, nous allons maintenant introduire la *moyenne de Catalan* (sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*)$) et la *moyenne brownienne* (sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$) et montrer qu'elles respectent chacune la convolution, la réalité, et la croissance latérale.

Mais avant de définir les moyennes paramétrées de Catalan et les opérateurs étrangers qui leur sont associés, on peut remarquer que nous demanderons à ces objets d'agir seulement sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*)$ (ou $RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega)$ avec Ω sous semigroupe de \mathbf{N}). Dans ces conditions, il suffit de connaître les poids de ces objets pour des incréments ω_i entiers. On se restreindra même à la connaissance des poids d'adresses $(1, \varepsilon_1, \dots, 1, \varepsilon_s) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ car alors, pour des incréments entiers quelconques, les poids s'en déduisent grâce aux relations d'autocoherence (1.1.5) et (1.1.10) et les seules relations à vérifier sont, d'une part, pour une moyenne \mathbf{m} :

$$\mathbf{m}^\emptyset = 1$$

$$(1.1.32) \quad \sum_{\varepsilon_s = \pm} \mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s} = \mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{s-1}} \quad (s > 1, \forall \varepsilon_i = \pm)$$

d'autre part, pour un opérateur **op** de *ALIEN* :

$$(1.1.33) \quad \sum_{\varepsilon_s = \pm} \mathbf{op}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s} = 0 \quad (\forall \varepsilon_i = \pm)$$

1.2 Les nombres et les polynômes de Catalan.

Afin de pouvoir définir les différentes moyennes de Catalan, nous allons introduire les nombres de Catalan ainsi que des polynômes que nous appellerons par abus les “polynômes de Catalan”.

Soient, pour tout entier n :

$$(1.2.1) \quad ca_n \stackrel{def}{=} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \quad ka_n \stackrel{def}{=} \frac{(2n)!}{n!n!}$$

On a par exemple :

n	0	1	2	3	4	5	6
ca_n	1	1	2	5	14	42	132
ka_n	1	2	6	20	70	252	924

Au décalage près de l'indice, les entiers ca_n sont les classiques nombres de Catalan. Ils interviennent dans le problème du même nom (cf [1]) :

Soient n variables X_1, \dots, X_n et leurs produits non commutatifs et non associatifs. Il s'agit de compter le nombre de parenthésages possibles dans le produit $P = X_1 X_2 \dots X_n$ pour le calculer par multiplications successives opérant toujours sur deux facteurs adjacents. Ce nombre n'est autre que ca_{n-1} (cf [1]). Ainsi, pour $n = 4$, on a les 5 parenthésages suivants :

$$(1.2.2) \quad \begin{array}{l} (X_1 X_2)(X_3 X_4) \quad [X_1(X_2 X_3)]X_4 \quad [(X_1 X_2)X_3]X_4 \\ X_1[(X_2 X_3)X_4] \quad X_1[X_2(X_3 X_4)] \end{array}$$

Nous rappelons aussi, qu'en termes de fonctions génératrices, on a :

$$(1.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} ca_n t^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t} \stackrel{def}{=} cag(t) \\ \sum_{n=0}^{\infty} ka_n t^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 4t}} \stackrel{def}{=} kag(t) \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant définir les “polynômes de Catalan” $qa_n(x)$ et énoncer leurs propriétés :

Proposition - Définition 1.1 Soient les deux définitions suivantes :

$$(1.2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} qa_0(x) = 1 \\ qa_{n+1}(x) = -(1 + x^{-1})ca_n + (x + 2 + x^{-1})qa_n(x) \quad \text{pour } n \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(1.2.5) \quad \begin{cases} \widetilde{qa}_0(x) = 1 \\ \widetilde{qa}_{n+1}(x) = (x^{1/2} + x^{-1/2})Pos\{(x^{1/2} + x^{-1/2})\widetilde{qa}_n(x)\} \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$

où Pos est linéaire et $Pos(x^\sigma) = x^\sigma$ (resp. 0) si $0 \leq \sigma$ (resp. $\sigma < 0$).

Alors ces deux définitions sont cohérentes (elles n'engendrent pas de puissances négatives de x) et équivalentes. En effet :

$$\forall n \geq 0 \quad qa_n(x) = \widetilde{qa}_n(x)$$

et $qa_n(x)$ est un polynôme de degré n , divisible par $(1+x)$ et :

$$(1.2.6) \quad \begin{cases} qa_n(0) = ca_n \\ qa_n(1) = ka_n \end{cases}$$

On a aussi :

$$(1.2.7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} t^n qa_n(x) = \frac{1}{1 - (1+x) \left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2} \right)} = qag(x, t)$$

Démonstration :

Il n'est pas difficile de voir que (1.2.5) définit sans ambiguïté des polynômes de degré n . Pour (1.2.4), on a, a priori, des polynômes $qa_n(x)$ en x et $1/x$, de degré au plus n (en x et en $1/x$). Pour l'instant, nous allons calculer :

$$(1.2.8) \quad f(x, t) = \sum_{n \geq 0} t^n qa_n(x)$$

Le résultat (voir (1.2.7)) nous permettra de conclure quant à la nature des $qa_n(x)$. De plus, l'étude de $f(x, t)$ montrera que les $qa_n(x)$ vérifient (1.2.5) et donc $qa_n(x) = \widetilde{qa}_n(x)$. Finalement, nous vérifierons immédiatement sur $f(x, t)$ les égalités (1.2.6).

Etant donné (1.2.3) et (1.2.4), $f(x, t)$ vérifie :

$$\frac{f(x, t) - 1}{t} = -(1 + 1/x) \left(\frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t} \right) + (x + 2 + 1/x)f(x, t)$$

soit

$$f(x, t) = \frac{1 - (1 + 1/x) \left(\frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2} \right)}{1 - t(x + 2 + 1/x)}$$

En posant :

$$u(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2} \quad (u^2 = u - t)$$

et

$$a = 1 + 1/x ; \quad b = 1 + x \quad (a + b = ab)$$

on a :

$$f(x, t) = \frac{1 - au}{1 - tab} = \frac{1 - au}{1 - (u - u^2)ab} = \frac{1 - au}{1 - u(a + b) + abu^2} = \frac{1}{1 - ub}$$

d'où

$$f(x, t) = \frac{1}{1 - (1+x) \left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2} \right)}$$

Comme $\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2} = t + o(t)$, les $qa_n(x)$ sont effectivement des polynômes de degré n . De plus, on a bien :

$$f(0, t) = cag(t)$$

et

$$f(1, t) = kag(t)$$

ce qui prouve les égalités (1.2.6). Pour $n \geq 1$, on lit directement sur $f(x, t)$ que $qa_n(x)$ est divisible par $(1+x)$.

Il ne reste plus qu'à montrer que (1.2.5) définit les mêmes polynômes. Or (1.2.5) se traduit sur la fonction génératrice $\tilde{f}(x, t) = \sum_{n \geq 0} t^n \tilde{q}a_n(x)$ par la relation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}(x, 0) = 1 \\ \frac{\tilde{f}(x, t) - 1}{t} = (x^{1/2} + x^{-1/2}) Pos \left\{ (x^{1/2} + x^{-1/2}) \tilde{f}(x, t) \right\} \end{array} \right.$$

On peut aisément voir que $f(x, t)$ vérifie ces relations et donc :

$$f(x, t) = \sum_{n \geq 0} t^n qa_n(x) = \sum_{n \geq 0} t^n \tilde{q}a_n(x) = \frac{1}{1 - (1+x) \left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2} \right)}$$

Ceci achève la démonstration.

◁

On trouve ainsi les premiers polynômes :

$$(1.2.9) \quad \begin{array}{l} qa_0(x) = 1 \\ qa_1(x) = (1+x) \\ qa_2(x) = (1+x)(2+x) \\ qa_3(x) = (1+x)(5+4x+x^2) \\ qa_4(x) = (1+x)(14+14x+6x^2+x^3) \\ qa_5(x) = (1+x)(42+48x+25x^2+8x^3+x^4) \end{array}$$

On peut aussi facilement relier les $qa_n(x)$ à des fonctions génératrices voisines figurant dans un article de H.M. FINUCAN (cf [10]) et en tirer l'expression directe :

$$(1.2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} qa_n(x) = \sum_{k=0}^n (2k+1) \frac{(2n)!}{(n+k+1)!(n-k)!} x^k \\ \frac{qa_n(x)}{(1+x)} = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+2) \frac{(2n-1)!}{(n+k+1)!(n-k-1)!} x^k \end{array} \right.$$

Pour achever cette section, nous allons introduire quelques notations. Soit n un entier plus grand que 1 et ε une séquence de signes + ou - : $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$. Si $\varepsilon = (\pm)^{n_1}(\mp)^{n_2} \dots (\varepsilon_n)^{n_s}$, alors on pose :

$$(1.2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} ca^\varepsilon = ca_{n_1} \dots ca_{n_s} \\ ca^{\varepsilon*} = ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} ka_{n_s} \\ ca^{*\varepsilon} = ka_{n_1} ca_{n_2} \dots ca_{n_s} \\ ca^{*\varepsilon*} = ka_{n_1} ca_{n_2} \dots ca_{n_{s-1}} ka_{n_s} \end{array} \right.$$

Grâce à ceci, nous allons pouvoir, dans la section suivante, introduire les moyennes de Catalan.

1.3 La famille des opérateurs de Catalan.

Nous allons définir sur $RAMIF(\mathbf{R}/\mathbf{N}^*)$ différents opérateurs donnés par leurs “poids” (fonctions de la séquence ε) puis nous allons établir quelques unes de leurs propriétés et préciser leur nature (moyennes, dérivations, automorphismes) et leurs liens mutuels. Mais auparavant, nous allons introduire quelques notations.

Soit \mathbf{op} un opérateur donné par ses poids $\mathbf{op}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}$. On notera $\nabla \mathbf{op}$ l’opérateur de poids $\nabla \mathbf{op}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}$. De même, pour un nombre t , on notera $t^\nabla \mathbf{op}$ l’opérateur de poids $t^\nabla \mathbf{op}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}$. De plus si l’opérateur est paramétré par (α, β) (α, β réels), c’est à dire $\mathbf{op}_{(\alpha, \beta)}$, alors on notera :

$$(1.3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{opr} = \mathbf{op}_{(1,0)} \\ \mathbf{opl} = \mathbf{op}_{(0,1)} \\ \mathbf{opn} = \mathbf{op}_{(1/2,1/2)} \\ \mathbf{opm} = \mathbf{op}_{(1,1)} \end{array} \right.$$

1.3.1 Les moyennes de Catalan.

Nous allons définir trois familles de moyennes de Catalan sur $RAMIF(\mathbf{R}/\mathbf{N}^*)$: $\mathbf{ma}_{(\alpha, \beta)}$, $\mathbf{mra}_{(\alpha, \beta)}$ (\mathbf{r} pour right), $\mathbf{mla}_{(\alpha, \beta)}$ (\mathbf{l} pour left). Celles-ci sont paramétrées par (α, β) où α et β sont réels positifs et $\alpha + \beta = 1$. Après avoir défini leurs poids (pour des incréments tous égaux à 1), nous montrerons que ces objets sont des moyennes.

Définition 1.1 *Quels que soient les réels α et β positifs ($\alpha + \beta = 1$), quelle que soit la séquence $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = (\pm)^{n_1}(\mp)^{n_2} \dots (\varepsilon_n)^{n_s}$, on pose :*

$$(1.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon \stackrel{def}{=} (\alpha\beta)^n ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} qa_{n_s} (\alpha^{\varepsilon_n} / \beta^{\varepsilon_n}) \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon \stackrel{def}{=} \frac{1}{\alpha} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{+\varepsilon} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon \stackrel{def}{=} \frac{1}{\beta} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{-\varepsilon} \end{array} \right.$$

avec $\alpha^+/\beta^+ = \alpha/\beta$ et $\alpha^-/\beta^- = \beta/\alpha$.

Si on maintient un facteur trivial $(\alpha + \beta)$ dans $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon$, alors $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon$, $\mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon$ et $\mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon$ sont des polynômes homogènes de degré $2l(\varepsilon)$ (avec $l(\varepsilon) = n$ si $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$).

Afin de pouvoir qualifier de moyennes les objets définis par (1.3.2), il faut que ceux-ci vérifient, pour leurs poids discrétisés (i.e. relatifs à des incréments tous égaux à 1), la propriété suivante (qui relaie les relations d'autocohérence (1.1.5)) : \mathbf{m} est une moyenne si et seulement si :

$$\mathbf{m}^\emptyset = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{\varepsilon_n = \pm} \mathbf{m}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} = \mathbf{m}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}}$$

Or nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition 1.1 *On a :*

$$(1.3.3) \quad \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^\emptyset = \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)}^\emptyset = \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)}^\emptyset = 1$$

et, pour $n \geq 1$,

$$(1.3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\varepsilon_n = \pm} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} = \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}} \\ \sum_{\varepsilon_n = \pm} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} = \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}} \quad \forall n \geq 1 \\ \sum_{\varepsilon_n = \pm} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} = \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}} \end{array} \right.$$

Démonstration :

Les égalités (1.3.3) sont vraies par définition. Nous allons montrer (1.3.4) pour $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$, la démonstration reposant sur le même principe pour $\mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)}$ et $\mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)}$. Posons $x = \alpha/\beta$, donc :

$$\alpha = \frac{x}{1+x} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{1+x}$$

On a alors pour $n \geq 1$:

$$(1.3.5) \quad \sum_{\varepsilon_n = \pm} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} = \frac{x^n}{(1+x)^{2n}} ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} (qa_{n_s}(x^{\varepsilon_{n-1}}) + ca_{n_s-1} qa_1(x^{\bar{\varepsilon}_{n-1}}))$$

si $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} = (\pm)^{n_1} \dots (\varepsilon_{n-1})^{n_{s-1}}$ et si $x^{\varepsilon_{n-1}}$ vaut x (resp. $1/x$) si $\varepsilon_{n-1} = +$ (resp. $\varepsilon_{n-1} = -$). Or l'équation (1.2.4) montre que :

$$qa_{n_s}(x^{\varepsilon_{n-1}}) = -ca_{n_s-1} qa_1(x^{\bar{\varepsilon}_{n-1}}) + \frac{(1+x)^2}{x} qa_{n_s-1}(x^{\varepsilon_{n-1}})$$

On conclut alors en remarquant que $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}} = \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{2n-2}} ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} qa_{n_s-1}(x^{\varepsilon_{n-1}})$. Et la démonstration est la même pour $\mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)}$ et $\mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)}$.

◁

On a donc trois familles de moyennes et il n'est pas difficile de voir que :

$$(1.3.6) \quad \begin{cases} \mathbf{mar} = \mathbf{mrar} = \mathbf{mlar} = \mathbf{mur} & (\text{pour } (\alpha, \beta) = (1, 0)) \\ \mathbf{mal} = \mathbf{mral} = \mathbf{mlal} = \mathbf{mul} & (\text{pour } (\alpha, \beta) = (0, 1)) \end{cases}$$

et pour tout ε on a :

$$(1.3.7) \quad \begin{cases} \mathbf{man}^\varepsilon = \frac{1}{4^{l(\varepsilon)}} ca^{\varepsilon*} \\ \mathbf{mran}^\varepsilon = \frac{1}{4^{l(\varepsilon)}} \frac{1}{2} ca^{+\varepsilon*} \\ \mathbf{mlan}^\varepsilon = \frac{1}{4^{l(\varepsilon)}} \frac{1}{2} ca^{-\varepsilon*} \end{cases}$$

Les trois familles de moyennes étant paramétrées par α ou β , on peut les dériver (et $\partial_\alpha = -\partial_\beta$ car $\alpha + \beta = 1$). Ces dérivations font apparaître des opérateurs infinitésimaux qui sont l'objet de la section suivante.

1.3.2 Les opérateurs infinitésimaux de Catalan.

Les dérivations par rapport à α (ou β) des moyennes de Catalan font apparaître des opérateurs \mathbf{op} internes sur $RAMIF(\mathbf{R}/\mathbf{N}^*)$, donnés par leurs poids \mathbf{op}^ε (avec $\mathbf{op}^\emptyset = 0$).

La postcomposition d'une moyenne \mathbf{m} par un tel opérateur \mathbf{op} se traduit, en termes de poids, par :

$$(1.3.8) \quad \forall \varepsilon \quad (\mathbf{m.op})^\varepsilon = \sum_{\varepsilon^1 \varepsilon^2 = \varepsilon} \mathbf{op}^{\varepsilon^1} \mathbf{m}^{\varepsilon^2}$$

où ε^1 et ε^2 peuvent être vides (ici on aura $\mathbf{op}^\emptyset = 0$). On a alors, en notant ∂_α la dérivation par rapport à α , les relations suivantes :

Proposition 1.2

$$(1.3.9) \quad \begin{aligned} \partial_\alpha \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} &= \frac{1}{\alpha\beta} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)} \\ \partial_\alpha \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} &= \frac{2}{\alpha} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \mathbf{draa}_{(\alpha,\beta)} \\ \partial_\beta \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} &= \frac{2}{\beta} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \mathbf{dlaa}_{(\alpha,\beta)} \end{aligned}$$

où

$$(1.3.10) \quad \begin{cases} \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)} = (2\nabla - 1)\mathbf{da}_{(\alpha,\beta)} = (2\nabla - 1)(\alpha\beta)^\nabla \mathbf{dam} \\ \mathbf{draa}_{(\alpha,\beta)} = (2\nabla + 2)\mathbf{dra}_{(\alpha,\beta)} = (2\nabla + 2)(\alpha\beta)^\nabla \mathbf{dram} \\ \mathbf{dlaa}_{(\alpha,\beta)} = (2\nabla + 2)\mathbf{dla}_{(\alpha,\beta)} = (2\nabla + 2)(\alpha\beta)^\nabla \mathbf{dlam} \end{cases}$$

avec, si $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$, les poids suivants :

$$(1.3.11) \quad \begin{cases} \mathbf{dam}^\varepsilon = \varepsilon_n c a^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}} \\ \mathbf{dram}^\varepsilon = \frac{1}{4} \varepsilon_n c a^{+\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} -} \\ \mathbf{dlam}^\varepsilon = \frac{1}{4} \varepsilon_n c a^{-\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} +} \end{cases}$$

Démonstration :

Nous allons nous intéresser au cas de $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$. Les démonstrations pour $\mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)}$ et $\mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)}$ sont similaires. Il s'agit donc de montrer que, pour toute séquence ε donnée, on a :

$$(1.3.12) \quad \partial_\alpha \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon = \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{\varepsilon^1 \varepsilon^2 = \varepsilon} \mathbf{daa}^{\varepsilon^1} \mathbf{ma}^{\varepsilon^2}$$

Après avoir remarqué que l'on peut se restreindre aux séquences de signes qui finissent par +, nous transformerons chacun des membres de l'égalité précédente pour prouver qu'ils sont identiques.

Soit donc une séquence ε finissant par un +. Nous noterons $\bar{\varepsilon}$ la séquence composée des signes opposés à ceux de ε . On a alors :

$$\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon = \mathbf{ma}_{(\beta,\alpha)}^{\bar{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon = -\mathbf{daa}_{(\beta,\alpha)}^{\bar{\varepsilon}}$$

Supposons qu'on ait l'identité :

$$\partial_\alpha \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon = \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{\varepsilon^1 \varepsilon^2 = \varepsilon} \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon^1} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon^2}$$

alors, étant donné les identités précédentes et vu que :

$$\partial_\alpha \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon = \partial_\alpha \mathbf{ma}_{(\beta,\alpha)}^{\bar{\varepsilon}} = -\partial_\beta \mathbf{ma}_{(\beta,\alpha)}^{\bar{\varepsilon}}$$

on obtient :

$$-\partial_\beta \mathbf{ma}_{(\beta,\alpha)}^{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{\varepsilon^1 \varepsilon^2 = \varepsilon} \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon^1} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon^2} = \frac{1}{\beta\alpha} \sum_{\varepsilon^1 \varepsilon^2 = \varepsilon} -\mathbf{daa}_{(\beta,\alpha)}^{\bar{\varepsilon}^1} \mathbf{ma}_{(\beta,\alpha)}^{\bar{\varepsilon}^2}$$

Si donc on prouve l'égalité (1.3.12) pour toute séquence finissant par un + et pour tout couple (α, β) , on récupère, par la remarque précédente, le résultat pour toute séquence finissant par un -.

Soit une séquence $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} +$. Décomposons-la en paquets de signes identiques :

$$\varepsilon = (\pm)^{n_1} \dots (+)^{n_s}$$

avec $n_1 + \dots + n_s = n$ et notons $\check{n}_i = n_1 + \dots + n_i$. Nous allons d'abord nous intéresser au second membre de l'équation (1.3.12). Etant donné les expressions de $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ et de $\mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}$, en décomposant la somme sur $\varepsilon^1 \varepsilon^2$ suivant le paquet de signes avec lequel finit ε^1 , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{\varepsilon^1 \varepsilon^2 = \varepsilon} \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon^1} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon^2} &= (\alpha\beta)^{n-1} \times \\ &\left\{ \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{(s-i)} ca_{n_1} \dots ca_{n_{i-1}} \left(\sum_{k=1}^{n_i} (2\check{n}_{i-1} + 2k - 1) ca_{k-1} ca_{n_i-k} \right) ca_{n_{i+1}} \dots qa_{n_s}(\alpha/\beta) \right. \\ &\left. + ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} \sum_{k=1}^{n_s} (2\check{n}_{s-1} + 2k - 1) ca_{k-1} qa_{n_s-k}(\alpha/\beta) \right\} \end{aligned}$$

Or, on peut montrer facilement, grâce aux fonctions génératrices, que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_i} ca_{k-1} ca_{n_i-k} &= ca_{n_i} \\ &\text{et} \\ \sum_{k=1}^{n_i} 2k ca_{k-1} ca_{n_i-k} &= (n_i + 1) ca_{n_i} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{(s-i)} ca_{n_1} \dots ca_{n_{i-1}} \left(\sum_{k=1}^{n_i} (2\check{n}_{i-1} + 2k - 1) ca_{k-1} ca_{n_i-k} \right) ca_{n_{i+1}} \dots qa_{n_s}(\alpha/\beta) \\ &= \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{(s-i)} (2\check{n}_{i-1} + n_i) ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} qa_{n_s}(\alpha/\beta) \\ &= -\check{n}_{s-1} ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} qa_{n_s}(\alpha/\beta) \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{\varepsilon^1 \varepsilon^2 = \varepsilon} \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon^1} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon^2} &= (\alpha\beta)^{n-1} \times \\ &\left\{ -\check{n}_{s-1} ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} qa_{n_s}(\alpha/\beta) \right. \\ &\left. + ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} \sum_{k=1}^{n_s} (2\check{n}_{s-1} + 2k - 1) ca_{k-1} qa_{n_s-k}(\alpha/\beta) \right\} \end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer que le premier membre de (1.3.12) redonne cette expression. Il n'est pas difficile de voir que :

$$\partial_\alpha \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon = (\alpha\beta)^{n-1} ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} \left(n(\beta - \alpha) qa_{n_s}(\alpha/\beta) + \frac{\alpha}{\beta} qa'_{n_s}(\alpha/\beta) \right)$$

Nous allons de nouveau utiliser les fonctions génératrices. Si on pose $x = \alpha/\beta$, la partie entre parenthèses ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} D_{n_s}(x) &= (\check{n}_{s-1} + n_s) \left(\frac{1-x}{1+x} \right) qa_{n_s}(x) + xqa'_{n_s}(x) \\ &= (2\check{n}_{s-1} - 1) \frac{qa_{n_s}(x)}{1+x} - \check{n}_{s-1}qa_{n_s}(x) + xqa'_{n_s}(x) + \frac{1}{1+x}qa_{n_s}(x) + n_s \left(\frac{1-x}{1+x} \right) qa_{n_s}(x) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{n_s=1}^{\infty} D_{n_s}(x)t^{n_s} &= \\ &= (2\check{n}_{s-1} - 1) \frac{qag(x,t) - 1}{x+1} - \check{n}_{s-1}(qag(x,t) - 1) \\ &+ \left(\frac{1}{1+x}(qag(x,t) - 1) + \left(\frac{1-x}{1+x} \right) t\partial_t qag(x,t) + x\partial_x qag(x,t) \right) \end{aligned}$$

Le premier terme peut s'écrire $(2\check{n}_{s-1} - 1)tcag(t)qag(x,t)$. Le deuxième terme reste inchangé et un calcul simple montre que le troisième terme est égal à $2tkag(t)qag(x,t)$. Si on redéveloppe, on trouve :

$$\begin{aligned} D_{n_s}(x) &= \\ &= (2\check{n}_{s-1} - 1) \sum_{k=1}^{n_s} ca_{k-1}qa_{n_s-k}(x) - \check{n}_{s-1}qa_{n_s}(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{n_s} 2kca_{k-1}qa_{n_s-k}(x) \end{aligned}$$

et donc, en remplaçant x par α/β , on trouve :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon &= (\alpha\beta)^{n-1} \times \\ &\left\{ -\check{n}_{s-1}ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}}qa_{n_s}(\alpha/\beta) \right. \\ &\left. + ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} \sum_{k=1}^{n_s} (2\check{n}_{s-1} + 2k - 1)ca_{k-1}qa_{n_s-k}(\alpha/\beta) \right\} \end{aligned}$$

Finalement, on a bien :

$$\partial_\alpha \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon = \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{\varepsilon^1 \varepsilon^2 = \varepsilon} \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon^1} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon^2}$$

Ce type de calcul s'applique aussi à $\mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)}$ et $\mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)}$.

◁

De la même façon, nous allons maintenant examiner les opérateurs de passage d'une des moyennes de Catalan à une autre (à (α, β) fixés).

1.3.3 Les opérateurs de passage de Catalan.

Pour deux moyennes \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 , nous noterons comme d'habitude $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$ l'opérateur de passage de \mathbf{m}_1 à \mathbf{m}_2 :

$$(1.3.13) \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$$

Encore une fois, les opérateurs de passage entre les différentes moyennes de Catalan seront donnés par leurs poids $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}^\varepsilon$ ($\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}^\emptyset = 1$).

Bien sûr, la règle de composition des opérateurs est la même que dans l'équation (1.3.8).

A (α, β) fixés, les opérateurs de passage entre deux moyennes de Catalan ont, comme les opérateurs infinitésimaux, des poids remarquables explicités par la proposition suivante :

Proposition 1.3 *A (α, β) fixés, on a six opérateurs de passage dont la dépendance en (α, β) est triviale et qui sont donnés par les identités suivantes :*

$$(1.3.14) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} = (\alpha\beta)^\nabla \begin{pmatrix} \mathbf{mam} \\ \mathbf{mram} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} = (\alpha\beta)^\nabla \begin{pmatrix} \mathbf{mam} \\ \mathbf{mlam} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} = (\alpha\beta)^\nabla \begin{pmatrix} \mathbf{mram} \\ \mathbf{mam} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} = (\alpha\beta)^\nabla \begin{pmatrix} \mathbf{mram} \\ \mathbf{mlam} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} = (\alpha\beta)^\nabla \begin{pmatrix} \mathbf{mlam} \\ \mathbf{mam} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} = (\alpha\beta)^\nabla \begin{pmatrix} \mathbf{mlam} \\ \mathbf{mram} \end{pmatrix}$$

avec, pour toute séquence $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$, les poids ci-dessous, indépendants de (α, β) :

$$(1.3.15) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mam} \\ \mathbf{mram} \end{pmatrix}^\varepsilon = \varepsilon_n c a^{+\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mam} \\ \mathbf{mlam} \end{pmatrix}^\varepsilon = -\varepsilon_n c a^{-\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{mram} \\ \mathbf{mam} \end{pmatrix}^\varepsilon = -\varepsilon_n c a^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}-} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mram} \\ \mathbf{mlam} \end{pmatrix}^\varepsilon = -\varepsilon_n c a^{-\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}-}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{mlam} \\ \mathbf{mam} \end{pmatrix}^\varepsilon = \varepsilon_n c a^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}+} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mlam} \\ \mathbf{mram} \end{pmatrix}^\varepsilon = \varepsilon_n c a^{+\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}+}$$

Démonstration :

Comme précédemment, nous nous bornerons au cas de l'opérateur de passage $\begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$, les calculs étant similaires pour les autres cas. Il s'agit, pour une séquence ε fixée, de montrer que :

$$\mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)}^\varepsilon = \sum_{\varepsilon^1 \varepsilon^2 = \varepsilon} \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}^{\varepsilon^1} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon^2}$$

Supposons, par exemple, que la séquence ε de longueur n ait un premier paquet constitué de signes $+$. Alors ε s'écrit $(+)^{n_1} \dots (\varepsilon_n)^{n_s}$. En particulierisant le paquet par lequel finit la séquence ε^1 , l'égalité précédente devient :

$$\begin{aligned} & \alpha^n \beta^{n+1} ca_{n_1+1} ca_{n_2} \dots ca_{n_{s-1}} qa_{n_s} (\alpha^{\varepsilon_n} / \beta^{\varepsilon_n}) = \\ & (\alpha\beta)^n \left(\sum_{k=0}^{n_1} ca_k ca_{n_1-k} \right) ca_{n_2} \dots ca_{n_{s-1}} qa_{n_s} (\alpha^{\varepsilon_n} / \beta^{\varepsilon_n}) \\ & + (\alpha\beta)^n \sum_{i=2}^{s-1} (-1)^{i+1} ca_{n_1+1} \dots \left(\sum_{k=1}^{n_i} ca_{k-1} ca_{n_i-k} \right) ca_{n_{i+1}} \dots qa_{n_s} (\alpha^{\varepsilon_n} / \beta^{\varepsilon_n}) \\ & + (\alpha\beta)^n (-1)^{s+1} ca_{n_1+1} \dots ca_{n_{s-1}} \left(\sum_{k=1}^{n_s} ca_{k-1} qa_{n_s-k} (\alpha^{\varepsilon_n} / \beta^{\varepsilon_n}) \right) \end{aligned}$$

Or on peut encore une fois montrer, grâce aux fonctions génératrices, que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_i} ca_{k-1} ca_{n_i-k} &= ca_{n_i} \\ & \text{et} \\ \sum_{k=0}^{n_1} ca_k ca_{n_1-k} &= ca_{n_1+1} \end{aligned}$$

et de même :

$$\sum_{k=1}^{n_s} ca_{k-1} qa_{n_s-k}(x) = \frac{1}{1+x} qa_{n_s}(x)$$

Grâce à ces trois identités, l'identité à démontrer devient :

$$\begin{aligned} & \alpha^n \beta^{n+1} ca_{n_1+1} ca_{n_2} \dots ca_{n_{s-1}} qa_{n_s} (\alpha^{\varepsilon_n} / \beta^{\varepsilon_n}) = \\ & \left(\sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{i+1} + (-1)^{s+1} \frac{1}{1 + \alpha^{\varepsilon_n} / \beta^{\varepsilon_n}} \right) (\alpha\beta)^n ca_{n_1+1} ca_{n_2} \dots ca_{n_{s-1}} qa_{n_s} (\alpha^{\varepsilon_n} / \beta^{\varepsilon_n}) \end{aligned}$$

ce qui se prouve facilement :

Si s est pair ($\varepsilon_n = -$), alors :

$$\sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{i+1} + (-1)^{s+1} \frac{1}{1 + \alpha^{\varepsilon_n} / \beta^{\varepsilon_n}} = 1 - \frac{1}{1 + \beta/\alpha} = \beta$$

et dans le cas où s est impair ($\varepsilon_n = +$) :

$$\sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{i+1} + (-1)^{s+1} \frac{1}{1 + \alpha^{\varepsilon_n} / \beta^{\varepsilon_n}} = + \frac{1}{1 + \alpha/\beta} = \beta$$

On peut faire le même type de calcul pour les séquences ε commençant par un $-$. Ce raisonnement s'étend aussi aux autres opérateurs de passage.

On peut s'intéresser de la même façon aux opérateurs de passage d'une moyenne de paramètres (α, β) à celle de paramètres (α', β') dans une même famille de moyennes. Notre objectif ici ne sera pas de donner leurs poids, mais plutôt les moules permettant de passer de tels opérateurs aux opérateurs infinitésimaux.

1.3.4 Expression des opérateurs de passage dans une même famille de Catalan.

Pour chacune des familles de Catalan, nous allons exprimer l'opérateur de passage $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_{(\alpha, \beta)} \\ \mathbf{m}_{(\alpha', \beta')} \end{pmatrix}$ grâce aux opérateurs infinitésimaux définis à la section 1.3.2. Plus précisément, pour chaque opérateur **op**, on isole ses composantes homogènes \mathbf{op}_n (voir (1.1.14)), puis on examine l'expression des composantes homogènes d'un opérateur de passage en fonction des composantes homogènes d'un opérateur infinitésimal apparenté. On est ainsi conduit à l'énoncé :

Proposition 1.4 *Les opérateurs de passage :*

$$(1.3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha, \beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha', \beta')} \end{pmatrix}_n = 1 + \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha, \beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha', \beta')} \end{pmatrix}_n \\ \begin{pmatrix} \mathbf{mra}_{(\alpha, \beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha', \beta')} \end{pmatrix}_n = 1 + \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} \mathbf{mra}_{(\alpha, \beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha', \beta')} \end{pmatrix}_n \\ \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha, \beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha', \beta')} \end{pmatrix}_n = 1 + \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha, \beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha', \beta')} \end{pmatrix}_n \end{array} \right.$$

possèdent des composantes homogènes qui vérifient :

$$(1.3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha, \beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha', \beta')} \end{pmatrix}_n = \sum_{s \geq 1} \sum_{n_1 + \dots + n_s = n} \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha, \beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha', \beta')} \end{pmatrix}, \mathbf{daam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} \mathbf{daam}_{n_s} \dots \mathbf{daam}_{n_1} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{mra}_{(\alpha, \beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha', \beta')} \end{pmatrix}_n = \sum_{s \geq 1} \sum_{n_1 + \dots + n_s = n} \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mra}_{(\alpha, \beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha', \beta')} \end{pmatrix}, \mathbf{draam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} \mathbf{draam}_{n_s} \dots \mathbf{draam}_{n_1} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha, \beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha', \beta')} \end{pmatrix}_n = \sum_{s \geq 1} \sum_{n_1 + \dots + n_s = n} \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha, \beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha', \beta')} \end{pmatrix}, \mathbf{dlaam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} \mathbf{dlaam}_{n_s} \dots \mathbf{dlaam}_{n_1} \end{array} \right.$$

avec, pour $\alpha < \alpha'$:

$$(1.3.18) \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \left(\begin{array}{l} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha',\beta')} \end{array} \right), \mathbf{daam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} = \int_{\alpha < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < \alpha'} (\alpha_1 \beta_1)^{n_1-1} \dots (\alpha_s \beta_s)^{n_s-1} d\alpha_1 \dots d\alpha_s \\ \left\langle \left(\begin{array}{l} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha',\beta')} \end{array} \right), \mathbf{draam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} = \int_{\alpha < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < \alpha'} (2\alpha_1^{n_1-1} \beta_1^{n_1}) \dots (2\alpha_s^{n_s-1} \beta_s^{n_s}) d\alpha_1 \dots d\alpha_s \\ \left\langle \left(\begin{array}{l} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha',\beta')} \end{array} \right), \mathbf{dlaam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} = \int_{\alpha < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < \alpha'} (2\alpha_1^{n_1} \beta_1^{n_1-1}) \dots (2\alpha_s^{n_s} \beta_s^{n_s-1}) d\alpha_1 \dots d\alpha_s \end{array} \right.$$

Démonstration :

Les trois cas étant similaires, nous allons nous intéresser, par exemple, au moule $\left\langle \left(\begin{array}{l} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha',\beta')} \end{array} \right), \mathbf{draam} \right\rangle^\bullet$.

On a (cf proposition 1.2) :

$$\partial_\alpha \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} = \frac{2}{\alpha} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \mathbf{draa}_{(\alpha,\beta)}$$

Si on intègre cette identité de α à α' , on obtient :

$$\mathbf{mra}_{(\alpha',\beta')} - \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} = \int_{\alpha < \alpha_0 < \alpha'} \mathbf{mra}_{(\alpha_0,\beta_0)} \left(\frac{2}{\alpha_0} \mathbf{draa}_{(\alpha_0,\beta_0)} \right) d\alpha_0$$

et en intégrant par parties le second terme, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{mra}_{(\alpha',\beta')} - \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} &= \\ & \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \left(\int_{\alpha < \alpha_1 < \alpha'} \frac{2}{\alpha_1} \mathbf{draa}_{(\alpha_1,\beta_1)} d\alpha_1 \right) \\ & + \int_{\alpha < \alpha_0 < \alpha'} (\partial_{\alpha_0} \mathbf{mra}_{(\alpha_0,\beta_0)}) \left(\int_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha'} \frac{2}{\alpha_1} \mathbf{draa}_{(\alpha_1,\beta_1)} d\alpha_1 \right) d\alpha_0 \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \mathbf{mra}_{(\alpha',\beta')} - \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} &= \\ & \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \left(\int_{\alpha < \alpha_1 < \alpha'} \frac{2}{\alpha_1} \mathbf{draa}_{(\alpha_1,\beta_1)} d\alpha_1 \right) \\ & + \int_{\alpha < \alpha_0 < \alpha'} \mathbf{mra}_{(\alpha_0,\beta_0)} \left(\frac{2}{\alpha_0} \mathbf{draa}_{(\alpha_0,\beta_0)} \right) \left(\int_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha'} \frac{2}{\alpha_1} \mathbf{draa}_{(\alpha_1,\beta_1)} d\alpha_1 \right) d\alpha_0 \end{aligned}$$

Et en intégrant de nouveau par parties, on a :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{mra}_{(\alpha',\beta')} - \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} = \\
& \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \left(\int_{\alpha < \alpha_1 < \alpha'} \frac{2}{\alpha_1} \mathbf{draa}_{(\alpha_1,\beta_1)} d\alpha_1 \right) \\
& + \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \left(\int_{\alpha < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha'} \frac{2}{\alpha_2} \mathbf{draa}_{(\alpha_2,\beta_2)} \frac{2}{\alpha_1} \mathbf{draa}_{(\alpha_1,\beta_1)} d\alpha_1 d\alpha_2 \right) \\
& + \int_{\alpha < \alpha_0 < \alpha'} (\partial_{\alpha_0} \mathbf{mra}_{(\alpha_0,\beta_0)}) \left(\int_{\alpha_0 < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha'} \frac{2}{\alpha_2} \mathbf{draa}_{(\alpha_2,\beta_2)} \frac{2}{\alpha_1} \mathbf{draa}_{(\alpha_1,\beta_1)} d\alpha_1 d\alpha_2 \right) d\alpha_0
\end{aligned}$$

En itérant le procédé, il est aisé de voir que, effectivement :

$$(1.3.19) \quad \mathbf{mra}_{(\alpha',\beta')} = \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \int_{\alpha < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < \alpha'} \frac{2}{\alpha_s} \mathbf{draa}_{(\alpha_s,\beta_s)} \dots \frac{2}{\alpha_1} \mathbf{draa}_{(\alpha_1,\beta_1)} d\alpha_1 \dots d\alpha_s \right)$$

donc :

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha',\beta')} \end{array} \right) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \int_{\alpha < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < \alpha'} \frac{2}{\alpha_s} \mathbf{draa}_{(\alpha_s,\beta_s)} \dots \frac{2}{\alpha_1} \mathbf{draa}_{(\alpha_1,\beta_1)} d\alpha_1 \dots d\alpha_s$$

or :

$$\mathbf{draa}_{(\alpha,\beta)} = \sum_{n \geq 1} (\alpha\beta)^n \mathbf{draam}_n$$

et donc :

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{c} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha',\beta')} \end{array} \right) = \\
& 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1, \dots, n_s} \left(\int_{\alpha < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < \alpha'} (2\alpha_1^{n_1-1} \beta_1^{n_1}) \dots (2\alpha_s^{n_s-1} \beta_s^{n_s}) d\alpha_1 \dots d\alpha_s \right) \mathbf{draam}_{n_s} \dots \mathbf{draam}_{n_1}
\end{aligned}$$

En identifiant les composantes homogènes, on obtient bien :

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha',\beta')} \end{array} \right), \mathbf{draam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} = \int_{\alpha < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < \alpha'} (2\alpha_1^{n_1-1} \beta_1^{n_1}) \dots (2\alpha_s^{n_s-1} \beta_s^{n_s}) d\alpha_1 \dots d\alpha_s$$

La démonstration est similaire pour $\left(\begin{array}{c} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha',\beta')} \end{array} \right)$ et $\left(\begin{array}{c} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha',\beta')} \end{array} \right)$.

◁

Ces moules (1.3.18) vont nous être très utiles car, en particulierisant judicieusement (α, β) et (α', β') , nous en tirerons les propriétés remarquables de tous les opérateurs définis précédemment, ainsi que celles des différentes familles de moyennes de Catalan.

1.3.5 Propriétés des opérateurs et des moyennes de Catalan.

Nous allons d'abord examiner les opérateurs infinitésimaux en appliquant la proposition 1.4 aux paramètres $(0, 1)$ et $(1, 0)$:

Proposition 1.5 *Les opérateurs \mathbf{daam} , \mathbf{draam} , \mathbf{dlaam} sont des dérivations de $\text{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, \text{int.})$. Il en est naturellement de même pour $\mathbf{da}_{\alpha,\beta}$, $\mathbf{dra}_{\alpha,\beta}$, $\mathbf{dla}_{\alpha,\beta}$, $\mathbf{daa}_{\alpha,\beta}$, $\mathbf{dlaa}_{\alpha,\beta}$, $\mathbf{draa}_{\alpha,\beta}$, \mathbf{dam} , \mathbf{dram} et \mathbf{dlam} .*

Démonstration :

Prenons le cas de \mathbf{daam} , les autres cas étant similaires. Il est évident que si \mathbf{daam} est une dérivation, alors $\mathbf{da}_{\alpha,\beta}$, $\mathbf{daa}_{\alpha,\beta}$ et \mathbf{dam} le sont aussi. Appliquons la proposition 1.4 aux couples $(0, 1)$ et $(1, 0)$. On remarque alors (voir (1.3.6)) que :

$$\begin{aligned} \mathbf{ma}_{(0,1)} &= \mathbf{mul} \\ &\text{et} \\ \mathbf{ma}_{(1,0)} &= \mathbf{mur} \end{aligned}$$

On a donc :

$$(1.3.20) \quad \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right) = 1 + \sum \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right), \mathbf{daam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} \mathbf{daam}_{n_s} \dots \mathbf{daam}_{n_1}$$

avec

$$(1.3.21) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right), \mathbf{daam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} = \int_{0 < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < 1} (\alpha_1 \beta_1)^{n_1-1} \dots (\alpha_s \beta_s)^{n_s-1} d\alpha_1 \dots d\alpha_s$$

Or ce moule, vu la nature de l'intégrande et du chemin d'intégration, est symétral (voir l'introduction) et, comme $\left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right)$ est un automorphisme de convolution, \mathbf{daam} est nécessairement une dérivation. La démonstration est la même dans les autres cas.

◁

En appliquant maintenant la proposition 1.4 aux paramètres $(0, 1)$ et (α, β) , on trouve le résultat suivant :

Proposition 1.6 *Pour toutes valeurs du paramètre (α, β) ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$), les moyennes $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$, $\mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)}$ et $\mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)}$ préservent la convolution.*

Démonstration :

Prenons encore une fois le cas de $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$, les autres cas étant similaires. De même que dans la démonstration précédente, comme $\mathbf{ma}_{(0,1)} = \mathbf{mul}$, on a :

$$(1.3.22) \quad \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{array} \right) = 1 + \sum \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{array} \right), \mathbf{daam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} \mathbf{daam}_{n_s} \dots \mathbf{daam}_{n_1}$$

avec

$$(1.3.23) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{array} \right), \mathbf{daam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} = \int_{0 < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < \alpha} (\alpha_1 \beta_1)^{n_1-1} \dots (\alpha_s \beta_s)^{n_s-1} d\alpha_1 \dots d\alpha_s$$

Ici encore, ce moule, de part la forme de son chemin d'intégration, est symétral. Or on vient de voir que **daam** est une dérivation : c'est donc que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$ est un automorphisme de convolution. Mais comme :

$$\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} = \mathbf{mul} \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$$

et que **mul** préserve la convolution, il est maintenant clair que la moyenne $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ préserve aussi la convolution. Il en va évidemment de même pour **mra**_(α,β) et **mla**_(α,β).

◁

Nous terminerons en remarquant que la proposition 1.6 assure que tous les opérateurs de passages rencontrés précédemment sont automatiquement des automorphismes de convolution.

Nous allons maintenant étudier les relations d'analgité entre les différents opérateurs de Catalan que nous venons de définir. Nous verrons ainsi qu'ils sont tous équianalytiques.

1.4 Equianalgité de tous les opérateurs de Catalan.

Nous commencerons par introduire, pour un couple automorphisme-dérivation, la notion d'*appariement* et nous verrons que l'appariement implique l'équianalgité. Nous montrerons ensuite comment sont "appariés" les divers automorphismes et dérivations de Catalan, puis nous en déduirons que tous ces opérateurs étrangers sont équianalytiques. Nous travaillerons ici sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ et les opérateurs appartiendront à *ALIEN*.

1.4.1 Dérivations et automorphismes appariés.

Nous rappelons la définition suivante :

Définition 1.2 Soient D une dérivation et P et Q un automorphisme et son inverse. D et P sont dits appariés si :

$$(1.4.1) \quad D = P^{-1}(\nabla P) = Q(\nabla Q^{-1})$$

avec bien sûr :

$$(\nabla P)^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} = n P^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \quad ((\nabla P)^\emptyset = 0)$$

Il n'est pas difficile de voir que l'on a :

$$(1.4.2) \quad D_n = nP_n + \sum_{n_1+n_2=n} n_1 Q_{n_2} P_{n_1}$$

avec $D = \sum D_n$; $P = 1 + \sum P_n$; $Q = 1 + \sum Q_n$.

On calcule aisément les moules de passage correspondants :

$$(1.4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle D, P \rangle^{n_1, \dots, n_s} = (-1)^{s+1} n_1 \\ \langle D, Q \rangle^{n_1, \dots, n_s} = (-1)^s n_s \\ \langle P, D \rangle^{n_1, \dots, n_s} = \frac{1}{\hat{n}_1 \dots \hat{n}_s} \\ \langle Q, D \rangle^{n_1, \dots, n_s} = \frac{(-1)^s}{\check{n}_1 \dots \check{n}_s} \end{array} \right.$$

avec, bien sûr, $\hat{n}_i = n_i + \dots + n_s$ et $\check{n}_i = n_1 + \dots + n_i$.

Des identités (1.4.2) et (1.4.3) on déduit facilement :

Proposition 1.7 *Si D et $P=Q^{-1}$ sont appariés, alors D, P et Q sont équi-analytiques.*

Démonstration :

Soit red une réduction de ALIEN dans $Endo(\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]])$. Nous savons déjà que pour toute réduction, $red(P)$ et $red(Q)$, en tant qu'automorphismes de substitution réciproques de $\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]]$, sont automatiquement simultanément analytiques ou non-analytiques. Il ne reste donc qu'à montrer l'équi-analyticité avec D . Supposons que $red(D)$ préserve les germes analytiques. On a alors :

$$(1.4.4) \quad \|red(D_{n_s}) \dots red(D_{n_1})\|_{V, V'} < C_{V, V'}^n s!$$

avec des normes relatives à deux voisinages bornés $V' \subset V$ de 0 dans \mathbf{C}^ν :

$$(1.4.5) \quad \|\varphi\|_V \stackrel{def}{=} \sup_{x \in V} |\varphi(x)| \quad (\varphi \in \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\})$$

$$(1.4.6) \quad \|red(D_{n_s}) \dots red(D_{n_1})\|_{V, V'} \stackrel{def}{=} \sup_{\varphi} \|red(D_{n_s}) \dots red(D_{n_1}) \cdot \varphi\|_{V'} \quad \text{pour } \|\varphi\|_V \leq 1$$

De plus, pour tout $\rho > 0$, on peut choisir V, V' tels que $C_{V, V'} \leq \rho$.

L'opérateur $red(P_n)$ est analytique et les égalités (1.4.3) donnent :

$$|\langle P, D \rangle^{n_1, \dots, n_s}| \leq \frac{1}{s!}$$

et donc

$$\begin{aligned} \|red(P_n)\|_{V, V'} &\leq \sum_{s \geq 1} \sum_{n_1 + \dots + n_s = n} C_{V, V'}^n \\ \|red(P_n)\|_{V, V'} &\leq \sum_{s=1}^n C_{n-1}^{s-1} C_{V, V'}^n \\ \|red(P_n)\|_{V, V'} &\leq (2C_{V, V'})^n \end{aligned}$$

En choisissant V, V' tels que $C_{V,V'} \leq \rho < 1/2$, on obtient :

$$\|red(P)\|_{V,V'} \leq \frac{1}{1-2\rho}$$

Ce qui prouve que $red(P)$ laisse $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$ stable et donc que D est moins analytique que P . Inversement, supposons que $red(P)$ (et donc $red(Q)$) est analytique. On a de la même façon, voir (1.4.4) :

$$\|red(Q_{n_2})red(P_{n_1})\|_{V,V'} \leq 2C_{V,V'}^n$$

Alors, par l'équation (1.4.2), $red(D_n).\varphi$ est une fonction analytique et :

$$\begin{aligned} \|red(D_n)\|_{V,V'} &\leq n\|red(P_n)\|_{V,V'} + \sum_{n_1+n_2=n} n_1 C_{V,V'}^n \\ \|red(D_n)\|_{V,V'} &\leq C_{V,V'}^n \left(n + 2 \sum_{n_1=1}^{n-1} C_{V,V'}^n \right) \\ \|red(P_n)\|_{V,V'} &\leq n^2 C_{V,V'}^n \end{aligned}$$

En choisissant correctement les voisinages V, V' , on montre bien que $red(D)$ laisse $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$ stable, ce qui achève la démonstration.

◁

Nous allons maintenant appliquer cette propriété aux opérateurs de Catalan.

1.4.2 Opérateurs de Catalan appariés.

Donnons d'emblée la liste des appariements :

Proposition 1.8 *Les dérivations et automorphismes de Catalan sont liés par :*

$$(1.4.7) \quad \begin{cases} \mathbf{d}aa_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}a_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{m}la_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} \mathbf{m}la_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{m}a_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \\ -\mathbf{d}aa_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}a_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{m}ra_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} \mathbf{m}ra_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{m}a_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(1.4.8) \quad \begin{cases} \mathbf{d}raa_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}ra_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{m}a_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} \mathbf{m}a_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{m}ra_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \\ -\mathbf{d}laa_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}la_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{m}a_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} \mathbf{m}a_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{m}la_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(1.4.9) \quad \begin{cases} 2\text{draa}_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \\ -2\text{dlaa}_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Démonstration :

Encore une fois, les démonstrations de ces différentes identités sont toutes similaires. On va, par exemple, démontrer que :

$$\text{daa}_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$$

ce qui revient à prouver :

$$(1.4.10) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \text{daa}_{(\alpha,\beta)} = \nabla \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$$

Pour toute séquence $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$, grâce aux équations (1.3.10),(1.3.11),(1.3.14) et (1.3.15), il faut montrer que :

$$\varepsilon_n(2n-1)ca^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_n \varepsilon_i (2i-1)ca^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{i-1}} ca^{\varepsilon_{i+1} \dots \varepsilon_{n-1}} = n\varepsilon_n ca^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}}$$

Or, en utilisant le même procédé que dans les démonstrations des propositions 1.3 et 1.4, on obtient aisément le résultat attendu. Les autres identités à prouver s'obtiennent de façon similaire.

◁

Par simple composition des différents opérateurs de passage, on trouve des formules de conjugaison entre les différentes dérivations de Catalan :

Proposition 1.9 *On a :*

$$(1.4.11) \quad \begin{cases} \text{dlaa}_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \text{daa}_{(\alpha,\beta)} \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \\ \text{draa}_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \text{daa}_{(\alpha,\beta)} \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \\ \text{dlaa}_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \text{draa}_{(\alpha,\beta)} \begin{pmatrix} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Démonstration :

Prenons, par exemple, la première identité. On sait, d'après la proposition précédente que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)} = \nabla \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$$

Soit encore :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)} \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} = \left(\nabla \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} = 1 \quad \text{et} \quad \nabla 1 = 0$$

Mais ∇ est une dérivation extérieure agissant sur les opérateurs de ALIEN car si $P = 1 + \sum_{n \geq 1} P_n$ et $Q = 1 + \sum_{n \geq 1} Q_n$ sont deux opérateurs de ALIEN, alors :

$$\nabla(P_n Q_m) = (n+m)P_n Q_m = (nP_n)Q_m + P_n(mQ_m) = (\nabla P_n)Q_m + P_n(\nabla Q_m) \quad (\forall n, m \geq 0)$$

et donc

$$\nabla(PQ) = (\nabla P)Q + P(\nabla Q)$$

On obtient alors

$$\left(\nabla \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} = \mathbf{dlaa}_{(\alpha,\beta)}$$

ce qui montre la première identité. Il en va de même pour les autres.

◁

On peut remarquer que l'on retrouve les mêmes conjugaisons en remplaçant par exemple $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ par :

$$\mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$$

et en utilisant les deux premières identités de la proposition 2.

On va maintenant pouvoir, grâce aux identités (1.4.7), (1.4.8) et (1.4.9), appliquer la proposition 1.7.

1.4.3 Equianalyticité des opérateurs de Catalan.

Proposition 1.10 *Les dérivations $\mathbf{da}_{(\alpha,\beta)}$, $\mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}$, $\mathbf{dla}_{(\alpha,\beta)}$, $\mathbf{dlaa}_{(\alpha,\beta)}$, $\mathbf{dra}_{(\alpha,\beta)}$, $\mathbf{draa}_{(\alpha,\beta)}$ ainsi que les automorphismes de convolution $\begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$ sont tous équi-analytiques.*

La démonstration est une simple application de la proposition 1.7 et du fait que la relation “moins analytique que” est transitive.

Ce qui nous intéresse maintenant est de savoir si ces objets préservent la croissance latérale. Pour cela nous allons “comparer” (au sens de “moins analytique que”) les automorphismes $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$ (qui sont équi-analytiques) à la dérivation **daam** (qui est moins analytique que les moyennes $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$, $\mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)}$ et $\mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)}$).

1.5 Les moyennes de Catalan préservent la croissance latérale.

Afin de montrer que la moyenne de Catalan préserve la croissance latérale, nous allons d’abord étudier les moules de passage de **dam** ou **daam** à $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$ et leurs inverses. Nous en déduirons que **dam** ou **daam** (et avec eux tous les opérateurs de Catalan) est moins analytique que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$. Puis, en étudiant l’application tangente associée à la correspondance définie précédemment, nous montrerons que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$ sont moins analytiques que **dam** ou **daam** (et que tous les opérateurs de Catalan).

1.5.1 Moules de passage des dérivations de Catalan.

Afin d’alléger les notations, nous noterons :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$$

En appliquant directement la proposition 1.4 aux paramètres $(0, 1)$ et $(1, 0)$, on obtient les moules suivants :

$$(1.5.1) \quad \begin{array}{l} \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_1, \dots, n_s} = \int_{0 < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < 1} (\alpha_1 \beta_1)^{n_1-1} \dots (\alpha_s \beta_s)^{n_s-1} d\alpha_1 \dots d\alpha_s \\ \langle \mathcal{U}^{-1}, \mathbf{daam} \rangle^{n_1, \dots, n_s} = (-1)^s \int_{0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_s < 1} (\alpha_1 \beta_1)^{n_1-1} \dots (\alpha_s \beta_s)^{n_s-1} d\alpha_1 \dots d\alpha_s \end{array}$$

Ces moules sont, étant donné l’intégrande et le chemin d’intégration, symétraux. D’autre part, les moules réciproques ont aussi des expressions intégrales :

Proposition 1.11 *On a :*

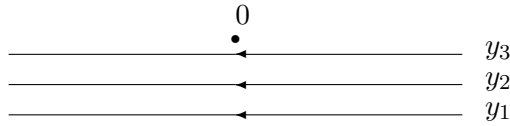
$$(1.5.2) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s} &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^s \int_{\mathbf{R}_{-, -, \dots, -}^s} \frac{4^{n_1}}{(1+y_1^2)^{n_1}} \cdots \frac{4^{n_s}}{(1+y_s^2)^{n_s}} \frac{dy_1 \dots dy_s}{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) \dots (y_{s-1} - y_s)} \\ \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U}^{-1} \rangle^{n_1, \dots, n_s} &= \frac{1}{2i} \left(\frac{-1}{2i\pi} \right)^s \int_{\mathbf{R}_{+, +, \dots, +}^s} \frac{4^{n_1}}{(1+y_1^2)^{n_1}} \cdots \frac{4^{n_s}}{(1+y_s^2)^{n_s}} \frac{dy_1 \dots dy_s}{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) \dots (y_{s-1} - y_s)} \end{aligned}$$

où, de façon plus générale, $\mathbf{R}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s}^s$ est le chemin d'intégration symbolisé par $\{y_1/y_2\}^{\varepsilon_1} \dots \{y_{s-1}/y_s\}^{\varepsilon_{s-1}} \{y_s\}^{\varepsilon_s}$ avec les y_i parcourant \mathbf{R} de $+\infty$ à $-\infty$ mais avec la convention que $\arg\{y_i/y_{i+1}\}^{\varepsilon_i}$ fait un saut de $+\varepsilon_i\pi$, i.e. passe de la valeur θ_0 à la valeur $\theta_0 + \varepsilon_i\pi$ (règle de contournement).

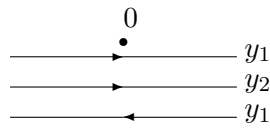
Remarques :

Concernant le chemin d'intégration $\mathbf{R}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s}^s$, on peut donner quelques exemples :

-On peut voir $\mathbf{R}_{-, -, -}^3$ comme le chemin suivant :



-On peut aussi remarquer que les moules définis par (1.5.2) sont alternels du fait de leur chemin d'intégration. Par exemple, si on forme $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, n_2} + \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_2, n_1}$, après avoir interverti les variables dans la deuxième intégrale et changé le sens de parcours de y_1 , on voit que cette somme revient à intégrer $\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^2 \frac{4^{n_1}}{(1+y_1^2)^{n_1}} \frac{4^{n_2}}{(1+y_2^2)^{n_2}} \frac{1}{y_1 - y_2}$ sur le chemin suivant :



En intégrant sur y_1 et en appliquant la formule des résidus, on obtient alors sans difficultés que :

$$\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, n_2} + \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_2, n_1} = - \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1 + n_2}$$

Démonstration de la proposition 1.11 :

Nous allons nous intéresser à $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$, la démonstration pour l'autre moule étant similaire. L'étude directe du moule $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$ (voir annexe A) montre que si :

$$(1.5.3) \quad G^{x_1, \dots, x_s} = \sum_{n_i \geq 1} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s} x_1^{n_1-1} \dots x_s^{n_s-1}$$

alors G^{x_1, \dots, x_s} est donné par la récurrence :

$$(1.5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} G^{x_1} = \frac{1}{\sqrt{1-4x_1}} \\ \text{et} \\ G^{x_1, \dots, x_s} = G^{x_1} \left(\frac{\sqrt{1-4x_2} - \sqrt{1-4x_1}}{2(x_1 - x_2)} \right) G^{x_2, \dots, x_s} \\ \quad - \frac{G^{x_1, x_3, \dots, x_s} - G^{x_2, x_3, \dots, x_s}}{x_1 - x_2} \end{array} \right.$$

On peut aussi former des fonctions génératrices $\tilde{G}^{x_1, \dots, x_s}$ avec l'expression donnée par l'équation (1.5.2). Il reste alors à montrer que G et \tilde{G} coïncident. Or on a :

$$\tilde{G}^{x_1} = \frac{1}{2i} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{R}_-^1} \frac{4}{1-4x_1+y_1^2} dy_1$$

et pour x_1 réel et petit, en appliquant la formule des résidus au pôle $-i\sqrt{1-4x_1}$, on obtient bien :

$$\tilde{G}^{x_1} = \frac{1}{\sqrt{1-4x_1}}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que les $\tilde{G}^{x_1, \dots, x_s}$ vérifient la même récurrence (1.5.4). Pour cela nous allons intégrer en y_1 (pôle en $-i\sqrt{1-4x_1}$) puis en y_2 (pôles en $-i\sqrt{1-4x_1}$ et $-i\sqrt{1-4x_2}$) l'expression de $\tilde{G}^{x_1, \dots, x_s}$. Après avoir réindexé les variables d'intégration, on a à intégrer sur $\mathbf{R}_{-, -, \dots, -}^{s-2}$ l'expression :

$$\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^{s-2} A(x_1, x_2, y_1) \frac{4}{1-4x_3+y_1^2} \cdots \frac{4}{1-4x_s+y_{s-2}^2} \frac{1}{(y_1-y_2) \cdots (y_{s-3}-y_{s-2})}$$

avec

$$A(x_1, x_2, y_1) = \frac{-2}{i\sqrt{1-4x_1}} \frac{2}{i\sqrt{1-4x_2}} \frac{1}{i\sqrt{1-4x_2} - i\sqrt{1-4x_1}} \frac{1}{i\sqrt{1-4x_2} + y_1} \\ - \frac{2}{i\sqrt{1-4x_1}} \frac{1}{x_1 - x_2} \frac{1}{i\sqrt{1-4x_1} + y_1}$$

De la même façon, en intégrant en la première variable, on montre que $-\frac{\tilde{G}^{x_1, x_3, \dots, x_s} - \tilde{G}^{x_2, x_3, \dots, x_s}}{x_1 - x_2}$ est égal à l'intégrale sur $\mathbf{R}_{-, -, \dots, -}^{s-2}$ de :

$$\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^{s-2} B(x_1, x_2, y_1) \frac{4}{1-4x_3+y_1^2} \cdots \frac{4}{1-4x_s+y_{s-2}^2} \frac{1}{(y_1-y_2) \cdots (y_{s-3}-y_{s-2})}$$

avec

$$B(x_1, x_2, y_1) = \frac{-1}{x_1 - x_2} \left(\frac{2}{i\sqrt{1-4x_1}} \frac{1}{i\sqrt{1-4x_1} + y_1} - \frac{2}{i\sqrt{1-4x_2}} \frac{1}{i\sqrt{1-4x_2} + y_1} \right)$$

On vérifie aussi que $\tilde{G}^{x_1} \left(\frac{\sqrt{1-4x_2} - \sqrt{1-4x_1}}{2(x_1 - x_2)} \right) \tilde{G}^{x_2, \dots, x_s}$ est égal à l'intégrale sur $\mathbf{R}_{-, \dots, -}^{s-2}$ de :

$$\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^{s-2} C(x_1, x_2, y_1) \frac{4}{1-4x_3+y_1^2} \cdots \frac{4}{1-4x_s+y_{s-2}^2} \frac{1}{(y_1-y_2) \cdots (y_{s-3}-y_{s-2})}$$

avec

$$C(x_1, x_2, y_1) = \frac{1}{\sqrt{1-4x_1}} \left(\frac{\sqrt{1-4x_2} - \sqrt{1-4x_1}}{2(x_1 - x_2)} \right) \frac{2}{i\sqrt{1-4x_2}} \frac{1}{i\sqrt{1-4x_2} + y_1}$$

Enfin, on vérifie que :

$$A(x_1, x_2, y_1) = B(x_1, x_2, y_1) + C(x_1, x_2, y_1)$$

ce qui montre, après intégration, que les $\tilde{G}^{x_1, \dots, x_s}$ vérifient bien la récurrence (1.5.4). Ceci achève donc la démonstration. ◁

Les identités (1.5.1) vont nous permettre de montrer que **daam** (et avec lui tous les opérateurs de Catalan) est moins analytique que \mathcal{U} et \mathcal{U}^{-1} . Pour montrer l'inverse, nous aurons encore à travailler sur les formules (1.5.2).

1.5.2 daam est moins analytique que \mathcal{U} et son inverse.

Il n'est pas difficile de déduire des formules (1.5.1) que :

$$(1.5.5) \quad \begin{aligned} |\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_1, \dots, n_s}| &\leq \frac{1}{s!} \\ &\text{et} \\ |\langle \mathcal{U}^{-1}, \mathbf{daam} \rangle^{n_1, \dots, n_s}| &\leq \frac{1}{s!} \end{aligned}$$

En utilisant une démonstration similaire à celle de la proposition 1.7, on montre que si une réduction *red* associe à **daam** une image *red*(**daam**) analytique, alors elle associe aussi à \mathcal{U} et son inverse des images analytiques. Donc :

Proposition 1.12 **daam** (et avec lui tous les opérateurs de Catalan) est moins analytique que \mathcal{U} et \mathcal{U}^{-1} .

Nous allons maintenant montrer la réciproque et pour cela, nous allons nous intéresser à l'application tangente de l'application $\mathcal{U} \rightarrow \mathbf{daam}$.

1.5.3 Application tangente de l'application $\mathcal{U} \mapsto \mathbf{daam}$.

Nous allons considérer dans ce qui suit que \mathcal{U} est un automorphisme quelconque et à chaque fois, on peut, grâce au moule $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$, lui associer une dérivation $\mathbf{dam} = \mathbf{dam}(\mathcal{U})$.

Toute variation $\delta\mathcal{U}$ de \mathcal{U} induit une variation $\delta\mathbf{dam}$ de \mathbf{dam} :

$$(1.5.6) \quad \delta\mathbf{dam} = \sum_{s \geq 1} \sum_{n_i \geq 1} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s} \left(\sum_{k=1}^s \mathcal{U}_{n_s} \dots \delta\mathcal{U}_{n_k} \dots \mathcal{U}_{n_1} \right)$$

avec bien sûr :

$$\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s} = \frac{1}{2\check{n}_s - 1} \langle \mathbf{daam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s}$$

On peut exprimer $\delta\mathcal{U}$ en fonction de $\delta^*\mathcal{U} \stackrel{def}{=} (\delta\mathcal{U})\mathcal{U}^{-1}$ qui est une dérivation car :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2) &= (\mathcal{U}\hat{\varphi}_1) * (\mathcal{U}\hat{\varphi}_2) \quad \text{donc} \\ \delta\mathcal{U}(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2) &= (\delta\mathcal{U}\hat{\varphi}_1) * (\mathcal{U}\hat{\varphi}_2) + (\mathcal{U}\hat{\varphi}_1) * (\delta\mathcal{U}\hat{\varphi}_2) \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \delta^*\mathcal{U}(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2) &= \delta\mathcal{U}(\mathcal{U}^{-1}\hat{\varphi}_1) * (\mathcal{U}^{-1}\hat{\varphi}_2) \\ &= (\delta\mathcal{U}\mathcal{U}^{-1}\hat{\varphi}_1) * (\hat{\varphi}_2) + (\hat{\varphi}_1) * (\delta\mathcal{U}\mathcal{U}^{-1}\hat{\varphi}_2) \end{aligned}$$

Si on remplace chaque composante homogène de \mathcal{U} par son expression en fonction de \mathbf{dam} , on obtient, grâce aux crochets de Lie, la formule suivante :

$$(1.5.7) \quad \delta\mathbf{dam} = \sum_{n_i \geq 1} CaaC_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} [\mathbf{dam}_{n_s} \dots [\mathbf{dam}_{n_1}, \delta^*\mathcal{U}_{n_0}] \dots]$$

avec

$$(1.5.8) \quad CaaC_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} = \sum_{\mathbf{n}^1 \dots \mathbf{n}^t = n_1, \dots, n_s} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_0, \|\mathbf{n}^1\|, \dots, \|\mathbf{n}^t\|} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dam} \rangle^{n^1} \dots \langle \mathcal{U}, \mathbf{dam} \rangle^{n^t}$$

On peut aussi écrire :

$$(1.5.9) \quad \delta\mathbf{dam} = \sum CaaC_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} [\mathbf{daam}_{n_s} \dots [\mathbf{daam}_{n_1}, \delta^*\mathcal{U}_{n_0}] \dots]$$

avec

$$(1.5.10) \quad CaaC_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} = \sum_{\mathbf{n}^1 \dots \mathbf{n}^t = n_1, \dots, n_s} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_0, \|\mathbf{n}^1\|, \dots, \|\mathbf{n}^t\|} \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n^1} \dots \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n^t}$$

On peut remarquer que :

$$CaaC_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} = \frac{CaaC_{n_0}^{n_1, \dots, n_s}}{(2n_1 - 1) \dots (2n_s - 1)}$$

mais, après calcul, $CaaC_{n_0}^{n_1, \dots, n_s}$ s'avère un peu plus simple et admet une expression remarquable :

Proposition 1.13 *Pour tous entiers positifs n_0, n_1, \dots, n_s , on a :*

$$(1.5.11) \quad \begin{array}{c} Cac_{n_0}^\emptyset = ka_{n_0-1} \\ \\ Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} = \sum_{p_0+p_1+\dots+p_s=n_0-1} ka_{p_0}ka_{p_1}\dots ka_{p_s} Sa^{p_1+n_1, p_2+n_2, \dots, p_s+n_s} \\ \\ \text{avec} \\ \\ Sa^{m_1, \dots, m_s} = \frac{(-1)^s}{\tilde{m}_1\tilde{m}_2\dots\tilde{m}_s} \end{array}$$

Démonstration :

Nous aurons besoin des formules suivantes .

Pour $s \geq 2$, on a :

$$(1.5.12) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0}} \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0, n_1, n_2, \dots, n_s} &= - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{ka_k}{n_1+k} \frac{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0-k, n_1+n_2+k, \dots, n_s}}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0-k}} \\ &+ 2 \cdot 4^{n_0-1} \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0+n_1, n_2, \dots, n_s} \\ &+ \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{ka_k}{n_1+k} \frac{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0+n_1, n_2, \dots, n_s}}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0-k}} \end{aligned}$$

et pour $s = 1$:

$$(1.5.13) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0}} \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0, n_1} &= \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{ka_k}{n_1+k} \frac{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0+n_1}}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0-k}} \\ &+ 2 \cdot 4^{n_0-1} \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0+n_1} \end{aligned}$$

Moyennant ces égalités, il est aisé de conclure. En effet, on a facilement :

$$Cac_{n_0}^\emptyset = \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_0} = ka_{n_0-1}$$

On peut aussi calculer directement $Cac_{n_0}^{n_1}$:

$$\begin{aligned} Cac_{n_0}^{n_1} &= \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_0, n_1} \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_1} \\ &= \left(-\frac{1}{2} \frac{(2n_1+2n_0-2)!}{(n_1+n_0-1)!(n_1+n_0-1)!} \right) \left(\frac{(n_1-1)!(n_1-1)!}{(2n_1-1)!} \right) \\ &= -\frac{1}{2} 2^{n_0} \left(\prod_{k=1}^{n_0-1} (2n_1+2k-1) \right) \left(\prod_{j=0}^{n_0-1} \frac{1}{n_1+j} \right) \end{aligned}$$

Or, en décomposant la fraction $\prod_{j=0}^{n_0-1} \frac{1}{n_1+j}$ en éléments simples, on retrouve aisément que :

$$Cac_{n_0}^{n_1} = - \sum_{p_0+p_1=n_0-1} \frac{1}{n_1+p_1} ka_{p_0}ka_{p_1}$$

Maintenant, nous allons achever la démonstration de la proposition 1.13 pour $s \geq 2$. On peut remarquer que le moule $\langle \mathbf{dam}, \mathbf{daam} \rangle^\bullet$ a une forme très simple :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{dam}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0} &= \frac{1}{2n_0-1} \\ \text{et} \\ \langle \mathbf{dam}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0, \dots, n_s} &= 0 \end{aligned}$$

Or l'équation (1.5.10) montre que :

$$Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} = \frac{1}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0}} \times \sum_{\mathbf{n}^1 \dots \mathbf{n}^t = n_1, \dots, n_s} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_0, \|\mathbf{n}^1\|, \dots, \|\mathbf{n}^t\|} \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0} \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n^1} \dots \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n^s}$$

et la somme se compose alors des termes de $(\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet \circ \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^\bullet)^{n_0, n_1, \dots, n_s} = \langle \mathbf{dam}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0, n_1, \dots, n_s} = 0$ qui, dans $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$, ne contractent pas l'indice n_0 avec les indices suivants. En utilisant le fait que la composition des deux moules précédents est nulle (pour un multiindice de longueur supérieur à 2), on peut remplacer cette somme par l'opposé de la somme des termes qui, dans la composition, contractent n_0 et les indices suivants :

$$Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} = - \frac{1}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0}} \times \sum_{\mathbf{n}^1 \dots \mathbf{n}^t = n_1, \dots, n_s} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_0 + \|\mathbf{n}^1\|, \dots, \|\mathbf{n}^t\|} \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0, n^1} \dots \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n^s}$$

En utilisant alors les égalités (1.5.12) et (1.5.13), on a sans peine :

$$\begin{aligned} Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} &= \\ &\sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{ka_k}{n_1+k} \sum_{\mathbf{n}^1 \dots \mathbf{n}^t = n_1+k, n_2, \dots, n_s} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_0 + \|\mathbf{n}^1\|, \dots, \|\mathbf{n}^t\|} \frac{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0-k, n^1}}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0-k}} \dots \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n^s} \\ &+ 2.4^{n_0-1} \langle \mathbf{dam}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0+n_1, n_2, \dots, n_s} \\ &- \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{ka_k}{n_1+k} \frac{\langle \mathbf{dam}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0+n_1, n_2, \dots, n_s}}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0-k}} \end{aligned}$$

Des deux équations précédentes, on peut déduire :

$$Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} = - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{ka_k}{n_1+k} Cac_{n_0-k}^{n_1+n_2+k, \dots, n_s}$$

et cette récurrence est équivalente à celle des équations (1.5.11). Il ne reste donc plus qu'à démontrer les identités (1.5.12) et (1.5.13). Celles-ci se déduisent de l'identité suivante :

$$(1.5.14) \quad \frac{1}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0}} \int_{\alpha_1}^1 (\alpha_0 \beta_0)^{n_0-1} d\alpha_0 =$$

$$\sum_{k=0}^{n_0-1} ka_k (\beta_1 - \alpha_1) (\alpha_1 \beta_1)^k \frac{1}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0-k}} \int_{\alpha_1}^1 (\alpha_0 \beta_0)^{n_0-k-1} d\alpha_0$$

$$+ 2^4 4^{n_0-1} (\alpha_1 \beta_1)^{n_0}$$

En multipliant chaque terme de cette équation par t^{n_0-1} et en sommant sur $n_0 \geq 1$, on doit alors montrer que :

$$\int_{\alpha_1}^1 \frac{d\alpha_0}{(1-4t\alpha_0\beta_0)\sqrt{1-4t\alpha_0\beta_0}} =$$

$$\frac{\beta_1 - \alpha_1}{\sqrt{1-4t\alpha_1\beta_1}} \int_{\alpha_1}^1 \frac{d\alpha_0}{(1-4t\alpha_0\beta_0)\sqrt{1-4t\alpha_0\beta_0}}$$

$$+ \frac{2\alpha_1\beta_1}{\sqrt{1-4t\alpha_1\beta_1}}$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{2\alpha_1\beta_1}{\sqrt{1-4t\alpha_1\beta_1}(\sqrt{1-4t\alpha_1\beta_1} - (\beta_1 - \alpha_1))} = \int_{\alpha_1}^1 \frac{d\alpha_0}{(1-4t\alpha_0\beta_0)\sqrt{1-4t\alpha_0\beta_0}}$$

Or on a égalité des deux membres pour $\alpha_1 = 1$ et un calcul soigneux montre que les dérivées en α_1 des deux membres sont identiques. Cela montre bien, grâce aux fonctions génératrices, que l'égalité (1.5.14) est vrai. On en déduit très simplement les identités (1.5.12) et (1.5.13) en remarquant que :

$$\frac{1}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0}} \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0, n_1, n_2, \dots, n_s}$$

$$= \frac{1}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0}} \int_{0 < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < \alpha_0 < 1} (\alpha_s \beta_s)^{n_s-1} \dots (\alpha_0 \beta_0)^{n_0-1} d\alpha_0 \dots d\alpha_s$$

$$= \int_{0 < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < 1} (\alpha_s \beta_s)^{n_s-1} \dots (\alpha_1 \beta_1)^{n_1-1} \left(\frac{1}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{n_0}} \int_{\alpha_1}^1 (\alpha_0 \beta_0)^{n_0-1} d\alpha_0 \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_s$$

puis en utilisant (1.5.14) et en intégrant une fois par parties en α_1 . Ceci achève la démonstration de la proposition 1.13.

◁

Cette relation implicite entre $\delta \mathbf{dam}$ et $\delta^* \mathcal{U}$ ne permet pas cependant de conclure. Il existe, par exemple, des correspondances entre champs de vecteurs qui dans un sens préservent l'analycité mais telles que l'application inverse ne la préserve pas malgré l'existence de formules similaires à (1.5.7) et (1.5.9). Pour conclure, nous allons faire intervenir les dérivations appariées à \mathcal{U} et \mathcal{U}^{-1} .

1.5.4 Relation implicite entre \mathbf{daam} et les dérivations appariées à \mathcal{U} et son inverse.

La variation d'un produit de deux opérateurs $\mathbf{op}^1 \mathbf{op}^2$ se décompose selon :

$$\delta(\mathbf{op}^1 \mathbf{op}^2) = (\delta \mathbf{op}^1) \mathbf{op}^2 + \mathbf{op}^1 (\delta \mathbf{op}^2)$$

et on a les mêmes règles pour l'opérateur ∇ :

$$\nabla(\mathbf{op}^1 \mathbf{op}^2) = (\nabla \mathbf{op}^1) \mathbf{op}^2 + \mathbf{op}^1 (\nabla \mathbf{op}^2)$$

De plus, comme $\nabla(\mathcal{U}\mathcal{U}^{-1}) = 0$, $(\nabla \mathcal{U})\mathcal{U}^{-1} = -\mathcal{U}\nabla \mathcal{U}^{-1}$. En notant \mathbf{door} la dérivation appariée à \mathcal{U}^{-1} et en reprenant les conclusions de la section précédente, on trouve :

(1.5.15)

$$\nabla \mathbf{dam} = \sum -Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} [\mathbf{daam}_{n_s} \dots [\mathbf{daam}_{n_1}, \mathbf{door}_{n_0}] \dots]$$

et on peut donc directement énoncer la proposition suivante :

Proposition 1.14 *Pour tout n plus grand que 1 :*

(1.5.16)

$$\frac{n}{2n-1} \mathbf{daam}_n = \sum_{n_0 + \dots + n_s = n} -Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} [\mathbf{daam}_{n_s} \dots [\mathbf{daam}_{n_1}, \mathbf{door}_{n_0}] \dots]$$

avec $Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s}$ défini par la formule (1.5.11).

Nous allons maintenant pouvoir conclure quant au fait que \mathcal{U} est moins analytique que \mathbf{daam} (et que tous les opérateurs de Catalan). Et donc nous en déduisons que les moyennes $\mathbf{ma}_{(\alpha, \beta)}$, $\mathbf{mra}_{(\alpha, \beta)}$ et $\mathbf{mla}_{(\alpha, \beta)}$ préservent la croissance latérale sur $RAMIF(\mathbf{R}^+ // \mathbf{N}^*)$.

1.5.5 Les moyennes de Catalan préservent la croissance latérale.

Nous pouvons tout de suite énoncer :

Proposition 1.15 *\mathbf{daam} (et donc tous les opérateurs de Catalan) et \mathcal{U} sont équi-analytiques.*

Démonstration :

Nous avons déjà vu que \mathbf{daam} est moins analytique que \mathcal{U} . Il ne reste plus qu'à prouver l'inverse. Or la dérivation \mathbf{door} est appariée à \mathcal{U}^{-1} et donc équi-analytique à \mathcal{U} . Nous devons donc montrer que si l'image par une réduction red de \mathbf{door} est analytique, alors l'image de \mathbf{daam} l'est aussi. Pour cela

nous allons utiliser la relation implicite (1.5.16) et certaines majorations de $Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s}$. Commençons par cette majoration. Il n'est pas très dur de voir que pour $n = n_0 + \dots + n_s$:

$$(1.5.17) \quad \left| \frac{2n-1}{n} Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} \right| \leq 8^{n_0} 2^s \frac{1}{\check{n}_1 \dots \check{n}_s}$$

avec, bien sûr, $\check{n}_i = n_1 + \dots + n_i$.

Supposons maintenant qu'une réduction red soit telle que $red(\mathbf{door})$ est analytique (donc laisse stable $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$). Comme \mathbf{door} est une dérivation, la donnée de cette réduction équivaut à la donnée de ν germes de fonctions analytiques v^1, \dots, v^ν dans $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$ telles que :

$$(1.5.18) \quad red(\mathbf{door}) = \sum_{i=1}^{\nu} v^i(x_1, \dots, x_\nu) x_i \partial_{x_i} \quad (v^i(0, \dots, 0) = 0)$$

Pour montrer qu'alors $red(\mathbf{daam})$ est analytique, il s'agit de s'assurer que les fonctions a^1, \dots, a^s associées sont analytiques avec bien sûr :

$$(1.5.19) \quad red(\mathbf{daam}) = \sum_{i=1}^{\nu} a^i(x_1, \dots, x_\nu) x_i \partial_{x_i} \quad (a^i(0, \dots, 0) = 0)$$

On remarquera qu'a priori les a^i sont des séries formelles en x_1, \dots, x_ν . Pour montrer que ces fonctions sont analytiques, nous aurons besoin de quelques notations et propriétés. Soit F une dérivation sur $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$ (ou $\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]]$), alors on a :

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^{\nu} f^i(x_1, \dots, x_\nu) x_i \partial_{x_i} \\ \text{avec} \\ f^i(x_1, \dots, x_\nu) &= \sum_{l_1, \dots, l_\nu} f_{l_1, \dots, l_\nu}^i x_1^{l_1} \dots x_\nu^{l_\nu} \quad (f^i(0, \dots, 0) = 0) \end{aligned}$$

Appelons F_n la composante homogène de degré n de F :

$$F_n = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{l_1 + \dots + l_\nu = n} f_{l_1, \dots, l_\nu}^i x_1^{l_1} \dots x_\nu^{l_\nu} \right) x_i \partial_{x_i}$$

Finalement, nous noterons :

$$|F|_{l_1, \dots, l_\nu} = \sum_{i=1}^{\nu} |f_{l_1, \dots, l_\nu}^i|$$

On remarquera, à ce propos, que $F^{|\cdot|} = \sum_{l_1, \dots, l_\nu} |F|_{l_1, \dots, l_\nu} x_1^{l_1} \dots x_\nu^{l_\nu}$ est analytique si et seulement si les f^i le sont ; donc si et seulement si F préserve l'analyticité. On peut aussi observer que si F et G sont des dérivations sur $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$ (ou $\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]]$), alors $[F_n, G_m]$ est une dérivation homogène de degré $m + n$ et on a :

$$(1.5.20) \quad |[F_n, G_m]|_{l_1, \dots, l_\nu} \leq 2 |n - m| \sum_{\substack{j_i + k_i = l_i \\ j_1 + \dots + j_\nu = n \\ k_1 + \dots + k_\nu = m}} |F|_{j_1, \dots, j_\nu} |G|_{k_1, \dots, k_\nu}$$

Cette dernière propriété résulte d'un calcul simple sur les dérivations et les crochets de Lie. En itérant cette propriété et en utilisant les formules (1.5.16) et (1.5.17), on trouve la majoration suivante :

$$(1.5.21) \quad \begin{aligned} & | \frac{2n-1}{n} \text{Cac}_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} [\text{red}(\mathbf{daam})_{n_s} \dots [\text{red}(\mathbf{daam})_{n_1}, \text{red}(\mathbf{door})_{n_0}] \dots] |_{l_1, \dots, l_\nu} \\ & \leq 8^{n_0} 4^s \frac{|n_0 - n_1|}{n_1} \frac{|n_0 + n_1 - n_2|}{(n_1 + n_2)} \dots \frac{|n_0 + \dots + n_{s-1} - n_s|}{(n_1 + \dots + n_s)} \{ \text{red}(\mathbf{daam})_{n_s}^{|\cdot|} \dots \text{red}(\mathbf{daam})_{n_1}^{|\cdot|} \text{red}(\mathbf{door})_{n_0}^{|\cdot|} \}_{l_1, \dots, l_\nu} \end{aligned}$$

où $\text{red}(\mathbf{daam})_{n_i}^{|\cdot|}$ désigne le polynôme homogène de degré n_i dans $\text{red}(\mathbf{daam})^{|\cdot|}$ et où $\{\dots\}_{l_1, \dots, l_\nu}$ signifie que l'on prend le coefficient de $x_1^{l_1} \dots x_\nu^{l_\nu}$. Maintenant, $\frac{|n_0 - n_1|}{n_1} \frac{|n_0 + n_1 - n_2|}{(n_1 + n_2)} \dots \frac{|n_0 + \dots + n_{s-1} - n_s|}{(n_1 + \dots + n_s)}$ est simplement majoré par $2^{n_0 + s - 1}$ et donc on a :

$$(1.5.22) \quad \text{red}(\mathbf{daam})_n |_{l_1, \dots, l_\nu} \leq \sum_{n_0 + \dots + n_s = n} 16^{n_0} 8^s \{ \text{red}(\mathbf{daam})_{n_s}^{|\cdot|} \dots \text{red}(\mathbf{daam})_{n_1}^{|\cdot|} \text{red}(\mathbf{door})_{n_0}^{|\cdot|} \}_{l_1, \dots, l_\nu}$$

Si on construit les coefficients A_{l_1, \dots, l_ν} par la récurrence :

$$(1.5.23) \quad A_{l_1, \dots, l_\nu} = \sum_{n_0 + \dots + n_s = n} 16^{n_0} 8^s \{ A_{n_s}^{|\cdot|} \dots A_{n_1}^{|\cdot|} \text{red}(\mathbf{door})_{n_0}^{|\cdot|} \}_{l_1, \dots, l_\nu} \quad (n = l_1 + \dots + l_\nu)$$

alors d'une part, A_{l_1, \dots, l_ν} majore $| \text{red}(\mathbf{daam})_n |_{l_1, \dots, l_\nu}$ et d'autre part, si :

$$A(x_1, \dots, x_\nu) = \sum_{l_1, \dots, l_\nu} A_{l_1, \dots, l_\nu} x_1^{l_1} \dots x_\nu^{l_\nu}$$

on a :

$$A(x_1, \dots, x_\nu) = \frac{1}{1 - 8A(x_1, \dots, x_\nu)} \text{red}(\mathbf{door})^{|\cdot|}(16x_1, \dots, 16x_\nu)$$

soit encore ($A(0, 0, \dots, 0) = 0$) :

$$(1.5.24) \quad A(x_1, \dots, x_\nu) = \frac{1 - \sqrt{1 - 32 \text{red}(\mathbf{door})^{|\cdot|}(16x_1, \dots, 16x_\nu)}}{16}$$

On peut maintenant conclure car si $\text{red}(\mathbf{door})$ préserve l'analyticité, alors $\text{red}(\mathbf{door})^{|\cdot|}$ appartient à $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$ et donc $A(x_1, \dots, x_\nu)$ aussi (en effet on a $\text{red}(\mathbf{door})^{|\cdot|}(0, \dots, 0) = 0$). Mais cette série est une série majorante de $\text{red}(\mathbf{daam})^{|\cdot|}$ et donc cette fonction appartient aussi à $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$. Comme on l'a vu précédemment, ceci suffit pour dire que $\text{red}(\mathbf{daam})$ préserve l'analyticité.

◁

On peut maintenant directement passer à la principale proposition de cette section :

Proposition 1.16 *Les moyennes $\mathbf{ma}_{(\alpha, \beta)}$, $\mathbf{mra}_{(\alpha, \beta)}$ et $\mathbf{mla}_{(\alpha, \beta)}$ préservent la croissance latérale sur $\text{RAMIF}(\mathbf{R}^+ // \mathbf{N}^*)$.*

Démonstration : Dire que $\mathbf{ma}_{(\alpha, \beta)}$, $\mathbf{mra}_{(\alpha, \beta)}$ et $\mathbf{mla}_{(\alpha, \beta)}$ préservent la croissance latérale, c'est affirmer que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ est moins analytique que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha, \beta)} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha, \beta)} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha, \beta)} \end{pmatrix}$. Or

$\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ est moins analytique que \mathbf{daam} et donc que \mathbf{draam} et \mathbf{dlaam} . Mais les équations (1.3.18) montrent que :

$$(1.5.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}, \mathbf{daam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} \leq \frac{1}{s!} \\ \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}, \mathbf{draam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} \leq \frac{1}{s!} \\ \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}, \mathbf{dlaam} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} \leq \frac{1}{s!} \end{array} \right.$$

Une démonstration similaire à celle de la proposition 1.7 permet alors de dire que \mathbf{daam} est moins analytique que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$, \mathbf{draam} est moins analytique que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$ et \mathbf{dlaam} est moins analytique que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$. Par transitivité de la relation “moins analytique que”, on conclut bien que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ est moins analytique que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mra}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mla}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$.

◁

Dans la section suivante, nous allons nous intéresser à l’extension de la moyenne $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ au cas d’incrémentes ω_j quelconques. En effet, jusqu’à maintenant, nous avons étudié le cas d’incrémentes tous égaux à 1 (i.e. nous avons envisagé $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ comme moyenne sur $\mathit{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*)$).

1.6 La moyenne de Catalan continue et la diffusion sous-jacente.

On peut directement étendre la moyenne $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ au cas d’incrémentes entiers quelconques grâce aux relations d’autocohérence (1.1.5).

1.6.1 Extension à des incréments entiers quelconques.

Pour préparer l’extension que nous avons en vue, nous allons commencer par *calculer* les poids de $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ pour des incréments entiers quelconques – nous disons bien *calculer*, car ces poids sont complètement déterminés, grâce aux relations (1.1.5), par les poids d’incrémentes unité.

Proposition 1.17 *Pour la séquence $(n_1, \varepsilon_1, \dots, n_s, \varepsilon_s)$, le poids de $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ vaut :*

$$(1.6.1) \quad \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{n_1, \varepsilon_1, \dots, n_s, \varepsilon_s} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\eta_k^i = \pm} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\eta_1^1 \dots \eta_{n_1-1}^1 \varepsilon_1 \eta_1^2 \dots \eta_{n_2-1}^2 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{s-1} \eta_1^s \dots \eta_{n_s-1}^s \varepsilon_s}$$

C’est là une simple conséquence des relations d’autocohérence. De même, les poids $\mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}$ pour des incréments entiers valent :

$$(1.6.2) \quad \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}^{n_1, \varepsilon_1, \dots, n_s, \varepsilon_s} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\eta_k^i = \pm} \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}^{\eta_1^1 \dots \eta_{n_1-1}^1 \varepsilon_1 \eta_1^2 \dots \eta_{n_2-1}^2 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{s-1} \eta_1^s \dots \eta_{n_s-1}^s \varepsilon_s}$$

Pour ces poids, la relation (1.3.9) se lit :

$$(1.6.3) \quad \partial_\alpha \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{\alpha\beta} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}$$

où bien sûr :

$$(1.6.4) \quad (\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)})^{n_1, \varepsilon_1, \dots, n_s, \varepsilon_s} = \sum_{k=1}^s \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}^{n_1, \varepsilon_1, \dots, n_k, \varepsilon_k} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{n_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \dots, n_s, \varepsilon_s}$$

Remarquons toutefois que la moyenne $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ n'a pas la propriété d'invariance d'échelle. Par exemple :

$$\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{1,+,1,+} = \alpha^2(\alpha + 2\beta) \quad \text{et} \quad \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{2,+,2,+} = \alpha^4(\alpha^3 + 7\alpha^2\beta + 18\alpha\beta^2 + 22\beta^3)$$

Ces différents poids sont bien sûr définis par l'équation (1.6.2) mais ils peuvent aussi faire l'objet d'une définition alternative, à partir d'une *diffusion* sous-jacente que nous allons expliciter.

1.6.2 Diffusion discrète sous-jacente.

Nous allons d'abord rappeler succinctement la définition d'une moyenne induite par une diffusion (voir Chapitre 2 ou [6] et [3], chap. C) :

Soit un semigroupe de convolution sur \mathbf{R} , i.e. une famille de fonctions intégrables $f_\omega(x)$ ($x \in \mathbf{R}$ et ω appartenant à un semigroupe Ω de \mathbf{R}^+) telle que :

$$(1.6.5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega(x) dx = 1 \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

$$(1.6.6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega_1}(x_1) f_{\omega_2}(x - x_1) dx_1 = f_{\omega_1 + \omega_2}(x) \quad (\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega)$$

et soit le semigroupe multiplicatif transformé de Fourier du précédent, i.e. une famille de fonctions $g_\omega(y)$ ($y \in \mathbf{R}$ et ω appartenant à un semigroupe Ω de \mathbf{R}^+) telle que :

$$(1.6.7) \quad g_\omega(0) = 1 \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

$$(1.6.8) \quad g_{\omega_1}(y) g_{\omega_2}(y) = g_{\omega_1 + \omega_2}(y) \quad (\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega)$$

avec bien sûr :

$$(1.6.9) \quad f_\omega(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\omega(y) e^{-ixy} dy$$

Ces semigroupes permettent de définir une moyenne sur $\text{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\Omega)$. On a (voir Chapitre 2) :

$$(1.6.10) \quad \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{R}^s} f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_s}(x_s) \sigma_{\varepsilon_1}(\check{x}_1) \sigma_{\varepsilon_2}(\check{x}_2) \dots \sigma_{\varepsilon_s}(\check{x}_s) dx_1 \dots dx_s$$

ou encore, de façon équivalente :

$$(1.6.11) \quad \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s}{(2i\pi)^s} \int_{\mathbf{R}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s}^s} g_{\omega_1}(y_1) \dots g_{\omega_s}(y_s) \frac{dy_1 \dots dy_s}{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) \dots (y_{s-1} - y_s)y_s}$$

où $\sigma_\varepsilon(x)$ vaut 1 (resp. 0) si $\varepsilon x > 0$ (resp. $\varepsilon x \leq 0$). Le chemin $\mathbf{R}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s}^s$ est bien sûr le même que celui défini dans la proposition 1.11.

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante :

Proposition 1.18 *Pour des incréments entiers, la moyenne $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ est induite par la diffusion définie par :*

$$(1.6.12) \quad \begin{cases} fa_1(x) &= \alpha\beta (\sigma_+(x)e^{-\beta x} + \sigma_-(x)e^{\alpha x}) \\ ga_1(y) &= \frac{\alpha\beta}{(y-i\beta)(y+i\alpha)} \end{cases}$$

avec bien sûr $ga_n(y) = (ga_1(y))^n$.

Démonstration :

Les définitions (1.6.1),(1.6.10) et (1.6.11) sont totalement équivalentes donc, pour démontrer cette proposition, il suffit de montrer qu'elle est vrai pour des incréments tous égaux à 1, c'est-à-dire que, pour une séquence $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_s$ et $s \geq 1$, a lieu l'identité :

$$\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s} = \int_{\mathbf{R}^s} fa_1(x_1) \dots fa_1(x_s) \sigma_{\varepsilon_1}(\tilde{x}_1) \sigma_{\varepsilon_2}(\tilde{x}_2) \dots \sigma_{\varepsilon_s}(\tilde{x}_s) dx_1 \dots dx_s$$

soit encore :

$$\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s} = \int_{\mathbf{R}} fa^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s}(x) dx$$

où, pour $s > 1$,

$$fa^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s}(x) = (fa^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{s-1}} * fa_1) \sigma_{\varepsilon_s}(x)$$

et

$$fa^{\varepsilon_1}(x) = fa_1(x) \sigma_{\varepsilon_1}(x)$$

Or $fa^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s}$ a une expression simple ; en effet, si $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_s = (\pm)^{n_1} (\mp)^{n_2} \dots (\varepsilon_s)^{n_r}$ alors :

$$(1.6.13) \quad fa^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s}(x) = \begin{cases} (\alpha\beta)^s \sigma_+(x) e^{-\beta x} ca_{n_1} ca_{n_2} \dots ca_{n_{r-1}} qua_{n_r}(x) & \text{si } \varepsilon_s = + \\ (\alpha\beta)^s \sigma_-(x) e^{\alpha x} ca_{n_1} ca_{n_2} \dots ca_{n_{r-1}} qua_{n_r}(-x) & \text{si } \varepsilon_s = - \end{cases}$$

avec des polynômes $qua_n(x)$ de degré $(n-1)$, qui sont définis par :

$$(1.6.14) \quad quag(x, t) = \sum_{n \geq 1} t^n qua_n(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2} e^{\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2}x}$$

Ceci se démontre sans difficulté par récurrence sur s . Pour $s = 1$ le résultat est immédiat. Supposons-le vrai pour s donné ; alors, pour une séquence $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_s = (\pm)^{n_1} (\mp)^{n_2} \dots (+)^{n_r}$, on a :

$$fa^{\varepsilon_1 \dots +}(x) = (\alpha\beta)^s \sigma_+(x) e^{-\beta x} ca_{n_1} ca_{n_2} \dots ca_{n_{r-1}} qua_{n_r}(x)$$

Par suite :

$$fa^{(\pm)^{n_1} (\mp)^{n_2} \dots (+)^{n_r}}(x) = (\alpha\beta)^{s+1} ca_{n_1} ca_{n_2} \dots ca_{n_{r-1}} \times \sigma_-(x) \left(\int_{\mathbf{R}} \sigma_+(x_1) e^{-\beta x_1} qua_{n_r}(x_1) (\sigma_+(x-x_1) e^{-\beta(x-x_1)} + \sigma_-(x-x_1) e^{\alpha(x-x_1)}) dx_1 \right)$$

Or ceci est différent de 0 si x est négatif et alors

$$\int_{\mathbf{R}} \sigma_+(x_1) e^{-\beta x_1} qua_{n_r}(x_1) (\sigma_+(x-x_1) e^{-\beta(x-x_1)} + \sigma_-(x-x_1) e^{\alpha(x-x_1)}) dx_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x_1} qua_{n_r}(x_1) e^{\alpha(x-x_1)} dx_1$$

Mais l'intégrale du second membre vaut :

$$e^{\alpha x} \int_0^{\infty} qua_{n_r}(x_1) e^{-x_1} dx_1$$

et un calcul simple sur $quag(x, t)$ montre que $\int_0^{\infty} qua_{n_r}(x_1) e^{-x_1} dx_1 = ca_{n_r}$. En regroupant tout cela on, voit bien qu'on aboutit à l'expression (1.6.13) pour la séquence $(\pm)^{n_1} (\mp)^{n_2} \dots (+)^{n_r} -$. D'autre part, on a :

$$fa^{(\pm)^{n_1} (\mp)^{n_2} \dots (+)^{n_r+1}}(x) = (\alpha\beta)^{s+1} ca_{n_1} ca_{n_2} \dots ca_{n_{r-1}} \times \sigma_+(x) \left(\int_{\mathbf{R}} \sigma_+(x_1) e^{-\beta x_1} qua_{n_r}(x_1) (\sigma_+(x-x_1) e^{-\beta(x-x_1)} + \sigma_-(x-x_1) e^{\alpha(x-x_1)}) dx_1 \right)$$

Or le second membre est différent de 0 pour x positif et se transforme comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}} \sigma_+(x_1) e^{-\beta x_1} qua_{n_r}(x_1) (\sigma_+(x-x_1) e^{-\beta(x-x_1)} + \sigma_-(x-x_1) e^{\alpha(x-x_1)}) dx_1 \\ &= \int_0^x e^{-\beta x_1} qua_{n_r}(x_1) e^{-\beta(x-x_1)} dx_1 + \int_x^{\infty} e^{-\beta x_1} qua_{n_r}(x_1) e^{\alpha(x-x_1)} dx_1 \\ &= e^{-\beta x} \left(\int_0^x qua_{n_r}(x_1) dx_1 + e^x \int_x^{\infty} qua_{n_r}(x_1) e^{-x_1} dx_1 \right) \end{aligned}$$

Ici encore, un calcul simple sur $quag(x, t)$ montre que :

$$\int_0^x qua_{n_r}(x_1) dx_1 + e^x \int_x^{\infty} qua_{n_r}(x_1) e^{-x_1} dx_1 = qua_{n_r+1}(x)$$

On obtient alors l'expression (1.6.13) pour la séquence $(\pm)^{n_1} (\mp)^{n_2} \dots (+)^{n_r+1}$. La récurrence est du même type pour les séquences de longueur s finissant par un $-$. On a donc bien prouvé l'identité (1.6.13). On peut maintenant conclure en remarquant, grâce à $quag(x, t)$, que :

$$\int_{\mathbf{R}} \sigma_+(x) e^{-\beta x} qua_n(x) dx = qa_n(\alpha/\beta) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} \sigma_-(x) e^{\alpha x} qua_n(-x) dx = qa_n(\beta/\alpha)$$

En effet, en introduisant ces identités en (1.6.13), on a, si $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_s = (\pm)^{n_1} (\mp)^{n_2} \dots (\varepsilon_s)^{n_r}$:

$$\int_{\mathbf{R}} fa^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s}(x) dx = (\alpha\beta)^s ca_{n_1} ca_{n_2} \dots ca_{n_{r-1}} qa_{n_r}(\alpha^{\varepsilon_s} / \beta^{\varepsilon_s}) = \mathbf{ma}_{(\alpha, \beta)}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s}$$

◁

Nous allons étudier de plus près le cas $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Après changement de variable, la diffusion qui induit **man** revêt une forme très simple et nous pouvons l'étendre à des incréments quelconques.

1.6.3 Moyenne de Catalan continue et préservation de la croissance latérale.

Après le changement de variable $x \rightarrow x/2$, $y \rightarrow 2y$, il n'est pas difficile de voir que **man** est induite par la diffusion ayant les lois suivantes (notées avec les mêmes symboles) :

$$fa_1(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

et

$$ga_1(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

On peut tout de suite énoncer :

Proposition 1.19 *Les poids de **man** sont les poids pour des incréments discrets de la moyenne continue (i.e. sur tout RAMIF(\mathbf{R}^+)) (que nous appellerons encore **man**) induite par :*

$$(1.6.15) \quad \begin{aligned} ga_1(y) &= \frac{1}{1+y^2} & \text{et} & & fa_1(x) &= \frac{1}{2}e^{-|x|} \\ ga_\omega(y) &= \frac{1}{(1+y^2)^\omega} & \text{et} & & fa_\omega(x) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\omega(y)e^{-ixy} dy \end{aligned}$$

pour tout ω réel positif, avec par définition les relations (1.6.10) et (1.6.11) pour des incréments réels positifs quelconques.

La démonstration est une conséquence immédiate de la proposition précédente. On remarquera que la définition de fa_ω est abusive car ga_ω n'est pas toujours intégrable. Cependant on peut montrer qu'il existe une fonction intégrable fa_ω dont la transformée de Fourier est bien ga_ω (voir [3]).

On peut encore affirmer le résultat suivant :

Proposition 1.20 *Sur RAMIF(\mathbf{R}^+), c'est-à-dire pour des incréments quelconques, la moyenne de Catalan préserve la croissance latérale.*

C'est la conséquence immédiate d'un résultat plus général sur les moyennes induites par une diffusion : Cette proposition se démontre par "erborification" du moule $\left\langle \left(\begin{matrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{man} \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{matrix} \right) \right\rangle_{\omega_1, \dots, \omega_s}$ (voir Chapitre 2 et [3], §C.3).

◁

Grâce à cette proposition, on a obtenu une moyenne continue qui préserve la croissance latérale. Mais les résultats sur la moyenne de Catalan discrète **man** vont permettre de montrer, par passage à la limite, que la moyenne brownienne **mown**, que nous allons définir, préserve aussi la croissance latérale.

1.7 La moyenne brownienne.

Dans cette section nous allons définir la moyenne brownienne **mown** de deux manières : grâce à la diffusion qui l'induit, mais aussi par homogénéisation de la moyenne de Catalan **man** discrète. Ce dernier procédé nous permettra d'obtenir des formules analogues à celles de la section 1.5 et donc de montrer, sans recours à l'erborification, que **mown** préserve la croissance latérale.

1.7.1 Définition de **mown** par la diffusion sous-jacente.

Donnons d'emblée la :

Définition 1.3 *La moyenne continue **mown** est la moyenne induite par la diffusion brownienne ayant pour lois :*

$$(1.7.1) \quad \begin{cases} gow_{\omega}(y) &= e^{-\omega y^2} \\ & \text{et} \\ fow_{\omega}(x) &= (1/2)(\omega\pi)^{-1/2}e^{-\frac{x^2}{4\omega}} \end{cases}$$

avec ω réel positif.

Nous rappelons simplement la formule que nous utiliserons le plus (cf 1.6.11) :

$$(1.7.2) \quad \mathbf{mown}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \frac{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s}{(2i\pi)^s} \int_{\mathbf{R}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s}^s} \frac{e^{-\omega_1 y_1^2} \dots e^{-\omega_s y_s^2} dy_1 \dots dy_s}{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) \dots (y_{s-1} - y_s)y_s}$$

où les ω_i sont des réels positifs.

On peut aussi associer à cette diffusion une dérivation (voir Chapitre 2) :

Définition 1.4 *On a une dérivation **down** associée à **mown**. Celle-ci est donnée par les poids :*

$$(1.7.3) \quad \mathbf{down}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i} \frac{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s}{(2i\pi)^s} \int_{\mathbf{R}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s}^s} \frac{e^{-\omega_1 y_1^2} \dots e^{-\omega_s y_s^2} dy_1 \dots dy_s}{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) \dots (y_{s-1} - y_s)}$$

ou encore par le moule de passage de $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ à **down** :

$$(1.7.4) \quad \langle \mathbf{down}, \mathcal{U} \rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \frac{1}{2i} \frac{1}{(2i\pi)^s} \int_{\mathbf{R}_{-, \dots, -}^s} \frac{e^{-\omega_1 y_1^2} \dots e^{-\omega_s y_s^2} dy_1 \dots dy_s}{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) \dots (y_{s-1} - y_s)}$$

On se reportera au Chapitre 2 pour montrer que **down** est effectivement une dérivation et que l'on a bien l'expression (1.7.4). On peut aussi définir **mown** par homogénéisation de la moyenne discrète **man**.

1.7.2 Définition de **mown** par homogénéisation de **man**.

On peut tout de suite énoncer, en notant $E(x)$ la partie entière de x :

Proposition - Définition 1.2 *Les poids de **mown** vérifient la relation :*

$$(1.7.5) \quad \mathbf{mown}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{man}^{E(l\omega_1), \varepsilon_1, \dots, E(l\omega_s), \varepsilon_s}$$

qui peut tenir lieu de seconde définition.

Démonstration :

On rappelle que :

$$\mathbf{man}^{E(l\omega_1), \varepsilon_1, \dots, E(l\omega_s), \varepsilon_s} = \frac{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s}{(2i\pi)^s} \int_{\mathbf{R}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s}^s} \frac{(1 + y_1^2)^{-E(l\omega_1)} \dots (1 + y_s^2)^{-E(l\omega_s)} dy_1 \dots dy_s}{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) \dots (y_{s-1} - y_s)y_s}$$

En effectuant les changements de variables $y_i \rightarrow y_i/\sqrt{l}$, on obtient :

$$\mathbf{man}^{E(l\omega_1), \varepsilon_1, \dots, E(l\omega_s), \varepsilon_s} = \frac{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s}{(2i\pi)^s} \int_{\mathbf{R}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s}^s} \frac{(1 + \frac{y_1^2}{l})^{-E(l\omega_1)} \dots (1 + \frac{y_s^2}{l})^{-E(l\omega_s)} dy_1 \dots dy_s}{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) \dots (y_{s-1} - y_s)y_s}$$

Or $(1 + \frac{y_i^2}{l})^{-E(l\omega_i)}$ converge, quand l tend vers $+\infty$, uniformément sur tout compact, vers $e^{-\omega_i y_i^2}$. Il est alors aisé de voir que l'on obtient, grâce à (1.7.2), l'identité (1.7.5).

◁

Cette seconde définition va nous permettre, par homogénéisation, de retrouver, pour **mown** et **down**, certaines des identités démontrées pour **man**.

1.7.3 Conséquences du passage de la moyenne de Catalan à la moyenne brownienne.

Un certain nombre de moules relatifs à **man** induisent des moules analogues, par homogénéisation, pour la moyenne **mown**. En voici quelques exemples :

Proposition 1.21 *On a, pour des incréments quelconques $\omega_1, \dots, \omega_s$:*

$$(1.7.6) \quad \langle \mathbf{down}, \mathcal{U} \rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt{l} \langle \mathbf{dan}, \mathcal{U} \rangle^{E(l\omega_1), \dots, E(l\omega_s)}$$

$$(1.7.7) \quad \begin{aligned} \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} &= \lim_{l \rightarrow \infty} (\sqrt{l})^{-s} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dan} \rangle^{E(l\omega_1), \dots, E(l\omega_s)} \\ &= 4^s (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_s) \int_{-\infty < t_s < \dots < t_1 < +\infty} e^{-\omega_1 t_1^2} \dots e^{-\omega_s t_s^2} dt_1 \dots dt_s \end{aligned}$$

$$(1.7.8) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mown} \end{array} \right), \mathcal{U} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{man} \end{array} \right), \mathcal{U} \right\rangle^{E(l\omega_1), \dots, E(l\omega_s)}$$

$$(1.7.9) \quad \begin{aligned} \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mown} \end{array} \right), \mathbf{down} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} &= \lim_{l \rightarrow \infty} (\sqrt{l})^{-s} \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{man} \end{array} \right), \mathbf{dan} \right\rangle^{E(l\omega_1), \dots, E(l\omega_s)} \\ &= 4^s (\omega_1 \dots \omega_s) \int_{-\infty < t_s < \dots < t_1 < 0} e^{-\omega_1 t_1^2} \dots e^{-\omega_s t_s^2} dt_1 \dots dt_s \end{aligned}$$

Démonstration :

Pour l'identité (1.7.6), il suffit de rappeler (voir (1.5.2)) que :

$$\langle \mathbf{dan}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^s \int_{\mathbf{R}_{-, -, \dots, -}^s} \frac{1}{(1+y_1^2)^{n_1}} \cdots \frac{1}{(1+y_s^2)^{n_s}} \frac{dy_1 \dots dy_s}{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) \dots (y_{s-1} - y_s)}$$

En utilisant le même argument que dans la proposition définition 1.2, on aboutit à l'identité (1.7.6).

Pour (1.7.8), on remarque que (voir Chapitre 2) :

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{man} \end{array} \right), \mathcal{U} \right\rangle^{n_1, \dots, n_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{man}^{n_1, -, n_2, -, \dots, n_{s-1}, -, n_s, +}$$

et

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mown} \end{array} \right), \mathcal{U} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{mown}^{\omega_1, -, \omega_2, -, \dots, \omega_{s-1}, -, \omega_s, +}$$

Par homogénéisation, ceci livre l'identité (1.7.8).

On rappelle, pour (1.7.7), que (voir (1.5.1)) :

$$l^{-s/2} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dan} \rangle^{E(l\omega_1), \dots, E(l\omega_s)} = 4^s \int_{0 < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < 1} \prod_{i=1}^s \frac{2E(l\omega_i) - 1}{\sqrt{l}} (4\alpha_i \beta_i)^{E(l\omega_i) - 1} d\alpha_1 \dots d\alpha_s$$

Faisant alors le changement de variable $t_i = \sqrt{l}(2\alpha_i - 1)$, on obtient :

$$l^{-s/2} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dan} \rangle^{E(l\omega_1), \dots, E(l\omega_s)} = 4^s \int_{-\sqrt{l} < t_s < \dots < t_1 < \sqrt{l}} \prod_{i=1}^s \frac{2E(l\omega_i) - 1}{2l} \left(1 - \frac{t_i^2}{l}\right)^{E(l\omega_i) - 1} dt_1 \dots dt_s$$

Or $(1 - \frac{t_i^2}{l})^{E(l\omega_i) - 1}$ tend vers $e^{-\omega_i t_i^2}$ et on peut passer à la limite dans l'intégrale :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} l^{-s/2} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dan} \rangle^{E(l\omega_1), \dots, E(l\omega_s)} = 4^s (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_s) \int_{-\infty < t_s < \dots < t_1 < +\infty} e^{-\omega_1 t_1^2} \dots e^{-\omega_s t_s^2} dt_1 \dots dt_s$$

Il reste à montrer la première partie de (1.7.7). Si on appelle M^\bullet le moule défini par l'expression intégrale précédente, il faut prouver que $M^\bullet = \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^\bullet$ est encore l'inverse de composition de $\langle \mathbf{down}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$. Mais la prise de la réciproque d'un moule est une opération algébrique qui "passe" sans difficulté à la limite. Par exemple :

$$\langle \mathbf{dan}, \mathcal{U} \rangle^{E(l\omega_1)} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dan} \rangle^{E(l\omega_1)} = 1 = \sqrt{l} \langle \mathbf{dan}, \mathcal{U} \rangle^{E(l\omega_1)} \frac{1}{\sqrt{l}} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dan} \rangle^{E(l\omega_1)}$$

Donc, en passant à la limite :

$$\langle \mathbf{down}, \mathcal{U} \rangle^{\omega_1} M^{\omega_1} = 1$$

et

$$M^{\omega_1} = \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_1}$$

De même :

$$\begin{aligned} & \sqrt{l} \langle \mathbf{dan}, \mathcal{U} \rangle^{E(l\omega_1), E(l\omega_2)} \frac{1}{\sqrt{l}} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dan} \rangle^{E(l\omega_1)} \frac{1}{\sqrt{l}} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dan} \rangle^{E(l\omega_2)} \\ & + \sqrt{l} \langle \mathbf{dan}, \mathcal{U} \rangle^{E(l\omega_1)+E(l\omega_2)} \frac{1}{l} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dan} \rangle^{E(l\omega_1), E(l\omega_2)} = 0 \end{aligned}$$

et, en passant à la limite :

$$\langle \mathbf{down}, \mathcal{U} \rangle^{\omega_1, \omega_2} M^{\omega_1} M^{\omega_2} + \langle \mathbf{down}, \mathcal{U} \rangle^{\omega_1 + \omega_2} M^{\omega_1, \omega_2} = 0$$

soit

$$M^{\omega_1, \omega_2} = \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_1, \omega_2}$$

Ceci reste vrai pour des séquences $\omega_1, \dots, \omega_s$ de longueur quelconque et montre bien que $M^\bullet = \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^\bullet$.

La démonstration de (1.7.9) est similaire. Puisque la composition des moules est une opération algébrique, on a :

$$\begin{aligned} & \lim_{l \rightarrow \infty} (l)^{-s/2} \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{man} \end{array} \right), \mathbf{dan} \right\rangle^{E(l\omega_1), \dots, E(l\omega_s)} \\ & = \lim_{l \rightarrow \infty} (l)^{-s/2} \left(\left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{man} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right) \right\rangle^\bullet \circ \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right), \mathbf{dan} \right\rangle^\bullet \right)^{E(l\omega_1), \dots, E(l\omega_s)} \\ & = \left(\left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mown} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right) \right\rangle^\bullet \circ \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right), \mathbf{down} \right\rangle^\bullet \right)^{\omega_1, \dots, \omega_s} \\ & = \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mown} \end{array} \right), \mathbf{down} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} \end{aligned}$$

et les expressions intégrales associées sont obtenues par une démonstration analogue à celle de (1.7.7), mais en utilisant cette fois l'équation (1.3.23).

◁

On peut montrer qu'il existe des constantes C et K telles que :

$$(1.7.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right), \mathbf{down} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} \right| \leq C^s K^{\omega_1 + \dots + \omega_s} \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \dots (\omega_1 + \dots + \omega_s)} \\ \left| \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mown} \end{array} \right), \mathbf{down} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} \right| \leq C^s K^{\omega_1 + \dots + \omega_s} \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \dots (\omega_1 + \dots + \omega_s)} \end{array} \right.$$

Grâce à une démonstration analogue à celle de la proposition 1.7, on peut directement énoncer :

Proposition 1.22 *down est moins analytique que* $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mown} \end{pmatrix}$.

Nous allons donc maintenant, grâce à ces propriétés d'homogénéisation, montrer pour **down** l'analogie des relations (1.5.15) et (1.5.16), ce qui nous permettra de conclure que **mown** préserve la croissance latérale.

1.7.4 Relation implicite entre down et door.

En reproduisant le raisonnement des sections 1.4.3 et 1.4.4 sur la correspondance entre \mathcal{U} et **dam**, on peut tout de suite écrire :

$$(1.7.11) \quad \nabla \mathbf{down} = \sum \mathit{Coc}_{\omega_0}^{\omega_1, \dots, \omega_s} [\mathbf{down}_{\omega_s} \dots [\mathbf{down}_{\omega_1}, \mathbf{door}_{\omega_0}] \dots]$$

avec

$$(1.7.12) \quad \mathit{Coc}_{\omega_0}^{\omega_1, \dots, \omega_s} = - \sum_{\omega^1 \dots \omega^t = \omega_1, \dots, \omega_s} \langle \mathbf{down}, \mathcal{U} \rangle^{\omega_0, \|\omega^1\|, \dots, \|\omega^t\|} \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega^1} \dots \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega^t}$$

Mais $\mathit{Coc}_{\omega_0}^{\omega_1, \dots, \omega_s}$ peut encore se simplifier :

Proposition 1.23 *Pour tous incréments positifs* $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_s$, *on a :*

$$(1.7.13) \quad \mathit{Coc}_{\omega_0}^{\omega_1, \dots, \omega_s} = -2^{s-2} (\omega_1 \dots \omega_s) \int_{\substack{u_0 + u_1 + \dots + u_s = \omega_0 \\ u_i \geq 0}} \frac{1}{\sqrt{\pi u_0}} \frac{1}{\sqrt{\pi u_1}} \dots \frac{1}{\sqrt{\pi u_s}} \mathit{Sa}^{u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, \dots, u_s + \omega_s} du_0 \dots du_{s-1}$$

avec

$$\mathit{Sa}^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \frac{(-1)^s}{\check{\omega}_1 \check{\omega}_2 \dots \check{\omega}_s}$$

Démonstration :

Nous aurons besoin de la formule suivante :

Pour $s \geq 2$, on a :

$$(1.7.14) \quad \frac{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s}}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0}} = - \int_{u=0}^{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\pi u}} \frac{2\omega_1\omega_2}{(\omega_1 + u)(\omega_1 + \omega_2 + u)} \frac{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0 - u, \omega_1 + \omega_2 + u, \dots, \omega_s}}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0 - u}} du$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\omega_1}{\omega_0 + \omega_1} \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0 + \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s}$$

$$+ \int_{u=0}^{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\pi u}} \frac{1}{\omega_1 + u} \frac{2\omega_1}{\omega_0 + \omega_1} (\omega_0 - u) \frac{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0 + \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s}}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0}} du$$

et pour $s = 1$:

$$(1.7.15) \quad \frac{1}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0}} \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{\omega_0, \omega_1} = \int_{u=0}^{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\pi u}} \frac{1}{\omega_1 + u} \frac{2\omega_1}{\omega_0 + \omega_1} (\omega_0 - u) \frac{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0 + \omega_1}}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0 - u}} du \\ + \frac{1}{2} \frac{\omega_1}{\omega_0 + \omega_1} \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0 + \omega_1}$$

Une fois acquises ces identités, il n'est pas difficile de conclure. En effet, on a tout de suite :

$$Coc_{\omega_0}^{\emptyset} = -\frac{1}{4\sqrt{\pi\omega_0}} = \langle \mathbf{down}, \mathcal{U} \rangle^{\omega_0}$$

On peut aussi calculer $Coc_{\omega_0}^{\omega_1}$:

$$Coc_{\omega_0}^{\omega_1} = -\langle \mathbf{down}, \mathcal{U} \rangle^{\omega_0, \omega_1} \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_1} \\ = \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{4\sqrt{\pi(\omega_0 + \omega_1)}} \right) (4\sqrt{\pi\omega_1})$$

Or un calcul simple montre que :

$$Coc_{\omega_0}^{\omega_1} = \frac{\omega_1}{2} \int_{u=0}^{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\pi u}} \frac{1}{\sqrt{\pi(\omega_0 - u)}} \frac{1}{\omega_1 + u} du$$

Maintenant, nous allons achever la démonstration de la proposition pour $s \geq 2$. On peut remarquer que le moule $\langle \mathbf{down}, \mathbf{down} \rangle^\bullet$ a une forme extrêmement simple :

$$\langle \mathbf{down}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0} = 1 \\ \text{et} \\ \langle \mathbf{down}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0, \dots, \omega_s} = 0$$

Or l'équation (1.7.12) montre que :

$$Coc_{\omega_0}^{\omega_1, \dots, \omega_s} = -\frac{1}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0}} \times \\ \sum_{\omega^1 \dots \omega^t = \omega_1, \dots, \omega_s} \langle \mathbf{down}, \mathcal{U} \rangle^{\omega_0, \|\omega^1\|, \dots, \|\omega^t\|} \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0} \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega^1} \dots \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega^s}$$

et la somme se compose alors des termes de $(\langle \mathbf{down}, \mathcal{U} \rangle^\bullet \circ \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^\bullet)^{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_s} = \langle \mathbf{down}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_s} = 0$ qui ne contractent pas (dans $\langle \mathbf{down}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$) l'indice ω_0 avec les indices suivants. En utilisant le fait que la composition des deux moules précédents est nulle (pour un multiindice de longueur supérieur

à 2), on peut remplacer cette somme par l'opposé de la somme des termes qui, dans la composition, contractent ω_0 avec les indices suivants :

$$Coc_{\omega_0}^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \frac{1}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0}} \times \sum_{\omega^1 \dots \omega^t = \omega_1, \dots, \omega_s} \langle \mathbf{down}, \mathcal{U} \rangle^{\omega_0 + \|\omega^1\|, \dots, \|\omega^t\|} \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0, \omega^1} \dots \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega^s}$$

En utilisant les égalités (1.7.14) et (1.7.15) (comme dans la propriété 1.13 avec les égalités (1.5.12) et (1.5.13)), on trouve :

$$(1.7.16) \quad Coc_{\omega_0}^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \int_{u=0}^{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\pi u}} \frac{2\omega_1\omega_2}{(\omega_1 + u)(\omega_1 + \omega_2 + u)} Coc_{\omega_0 - u}^{\omega_1 + \omega_2 + u, \dots, \omega_s} du$$

Et cette récurrence est vérifiée par les formules (1.7.13). Il ne reste donc plus qu'à établir les identités (1.7.14) et (1.7.15). Celles-ci se déduisent de la suivante :

$$(1.7.17) \quad \frac{4\omega_0}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0}} \int_{t_1}^{+\infty} e^{-\omega_0 t_0^2} dt_0 = - \int_{u=0}^{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\pi u}} t_1 e^{-ut_1^2} \frac{4(\omega_0 - u)}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0 - u}} \int_{t_1}^{+\infty} e^{-(\omega_0 - u)t_0^2} dt_0 du + \frac{1}{2} e^{-\omega_0 t_1^2}$$

Or on remarque que $\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0} = 4\sqrt{\pi\omega_0}$ et qu'après le changement $t = \sqrt{\omega_0}t_0$ ou $t = \sqrt{\omega_0 - ut_1}$, l'équation précédente est équivalente à :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\omega_0}t_1}^{+\infty} e^{-t^2} dt = - \int_{u=0}^{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\pi u}} t_1 e^{-ut_1^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\omega_0 - ut_1}}^{+\infty} e^{-t^2} dt du + \frac{1}{2} e^{-\omega_0 t_1^2}$$

Mais ces deux membres coïncident pour $\omega_0 = 0$ et leurs dérivées coïncident. D'où l'identité (1.7.17).

On en déduit très simplement les identités (1.7.14) et (1.7.15) en remarquant que :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0}} \langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s} \\
&= \frac{4^{s+1} \omega_0 \omega_1 \dots \omega_s}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0}} \int_{-\infty < t_s < \dots < t_1 < t_0 < +\infty} e^{-\omega_s t_s^2} \dots e^{-\omega_0 t_0^2} dt_0 \dots dt_s \\
&= 4^s (\omega_1 \dots \omega_s) \int_{-\infty < t_s < \dots < t_1 < +\infty} e^{-\omega_s t_s^2} \dots e^{-\omega_1 t_1^2} \left(\frac{4\omega_0}{\langle \mathcal{U}, \mathbf{down} \rangle^{\omega_0}} \int_{t_1}^{+\infty} e^{-\omega_0 t_0^2} dt_0 \right) dt_1 \dots dt_s
\end{aligned}$$

En utilisant (1.7.17) et en intégrant par parties en t_1 (de t_2 à $+\infty$) pour $s \geq 2$ (ou de $-\infty$ à $+\infty$ pour $s = 1$) on aboutit bien aux équations (1.7.14) et (1.7.15). Ceci achève la démonstration. ◁

Ceci va nous permettre de démontrer que \mathcal{U} est moins analytique que **down** et donc que la moyenne **down** préserve la croissance latérale.

1.7.5 La moyenne brownienne préserve la croissance latérale.

Enonçons d'emblée le résultat central de ce chapitre :

Proposition 1.24 *down* et \mathcal{U} sont équianalytiques.

Démonstration :

Nous avons déjà vu que **down** est moins analytique que \mathcal{U} . Il ne reste donc plus qu'à montrer l'inverse. Or la dérivation **door** est appariée à \mathcal{U} ; il suffit donc de montrer que si, pour une réduction, l'image de **door** est analytique, alors l'image de **down** l'est aussi. Comme pour la proposition 1.15, nous allons utiliser la relation (1.7.11) ainsi qu'une majoration de $Coc_{\omega_0}^{\omega_1, \dots, \omega_s}$. Il n'est pas difficile de voir qu'il existe des constantes C et M, indépendantes des ω_i , telles que :

$$(1.7.18) \quad |Coc_{\omega_0}^{\omega_1, \dots, \omega_s}| \leq C^s M^{\omega_0} \frac{\omega_1 \dots \omega_s}{\check{\omega}_1 \check{\omega}_2 \dots \check{\omega}_s}$$

avec comme d'habitude, $\check{\omega}_i = \omega_1 + \dots + \omega_i$. En effet, dans la formule (1.7.13), on majore facilement $Sa^{u_1 + \omega_1, \dots, u_s + \omega_s}$ par $(\check{\omega}_1 \check{\omega}_2 \dots \check{\omega}_s)^{-1}$ et il ne reste plus qu'à évaluer l'intégrale :

$$\int_{\substack{u_0 + u_1 + \dots + u_s = \omega_0 \\ u_i \geq 0}} \frac{1}{\sqrt{\pi u_0}} \frac{1}{\sqrt{\pi u_1}} \dots \frac{1}{\sqrt{\pi u_s}} du_0 \dots du_{s-1}$$

Or en posant, pour i plus petit que s , $u_i = \omega_0 \cos^2(\theta_1) \dots \cos^2(\theta_{i-1}) \sin^2(\theta_i)$ et $u_s = \omega_0 \cos^2(\theta_1) \dots \cos^2(\theta_{s-2}) \cos^2(\theta_{s-1})$ l'intégrale s'écrit :

$$\frac{2^s \omega_0^{\frac{s-1}{2}}}{(\sqrt{\pi})^{s+1}} \int_{0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}} \prod_{i=0}^{s-1} \cos^{s-1-i}(\theta_i) d\theta_0 \dots d\theta_{s-1}$$

On reconnaît ici une intégrale de Wallis et comme :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta \leq C \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

on en tire :

$$\int_{\substack{u_0+u_1+\dots+u_s=\omega_0 \\ u_i \geq 0}} \frac{1}{\sqrt{\pi u_0}} \frac{1}{\sqrt{\pi u_1}} \dots \frac{1}{\sqrt{\pi u_s}} du_0 \dots du_{s-1} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{C}{\sqrt{2}}\right)^s \sqrt{\frac{\omega_0^{s-1}}{(s-1)!}} \leq K_1^s (\sqrt{e})^{\omega_0}$$

On obtient alors sans difficultés la majoration (1.7.18).

Soit une réduction *red* sur $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$. De façon générale, on fixe $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_\nu$ et on pose :

$$\mathit{red}(\mathbf{door}_\omega) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\substack{n_1 \lambda_1 + \dots + n_\nu \lambda_\nu = \omega \\ n_i \geq 0}} v_{n_1, \dots, n_\nu}^i x_1^{n_1} \dots x_\nu^{n_\nu} x_i \partial_{x_i}$$

et si $\mathit{red}(\mathbf{door})$ est analytique, alors, pour tout i , $v^i(x_1, \dots, x_\nu) = \sum v_{n_1, \dots, n_\nu}^i x_1^{n_1} \dots x_\nu^{n_\nu}$ est analytique. L'équation (1.7.11) permet de dire que :

$$\mathit{red}(\mathbf{down}_\omega) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\substack{n_1 \lambda_1 + \dots + n_\nu \lambda_\nu = \omega \\ n_i \geq 0}} w_{n_1, \dots, n_\nu}^i x_1^{n_1} \dots x_\nu^{n_\nu} x_i \partial_{x_i}$$

et pour montrer que $\mathit{red}(\mathbf{down})$ est analytique, il suffit de montrer que les $w^i(x_1, \dots, x_\nu) = \sum w_{n_1, \dots, n_\nu}^i x_1^{n_1} \dots x_\nu^{n_\nu}$ sont analytiques. Mais un argument similaire à celui de la proposition 1.15 montre que si on pose $W_{n_1, \dots, n_\nu} = \sum_{i=1}^{\nu} (n_1 \lambda_1 + \dots + n_\nu \lambda_\nu) |w_{n_1, \dots, n_\nu}^i|$, $V_{n_1, \dots, n_\nu} = \sum_{i=1}^{\nu} |v_{n_1, \dots, n_\nu}^i|$ et $V(x_1, \dots, x_\nu) = \sum V_{n_1, \dots, n_\nu} x_1^{n_1} \dots x_\nu^{n_\nu}$, alors W_{n_1, \dots, n_ν} est majoré par le coefficient en $x_1^{n_1} \dots x_\nu^{n_\nu}$ d'une série $\widetilde{W}(x_1, \dots, x_\nu)$ qui vérifie l'équation :

$$\widetilde{W}(x_1, \dots, x_\nu) = \frac{1}{1 - \left(\frac{4C}{\lambda_1}\right) \widetilde{W}(x_1, \dots, x_\nu)} V(2M^{\lambda_\nu} x_1, \dots, 2M^{\lambda_\nu} x_\nu)$$

et qui par suite vaut :

$$\widetilde{W}(x_1, \dots, x_\nu) = \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{16C}{\lambda_1}\right) V(2M^{\lambda_\nu} x_1, \dots, 2M^{\lambda_\nu} x_\nu)}}{\left(\frac{8C}{\lambda_1}\right)}$$

avec M et C donnés par l'équation (1.7.18). Maintenant, si $\mathit{red}(\mathbf{door})$ préserve l'analyticité, alors $V(x_1, \dots, x_\nu)$ est analytique et donc $\widetilde{W}(x_1, \dots, x_\nu)$ aussi. $W(x_1, \dots, x_\nu)$ est donc analytique, ainsi que les $w^i(x_1, \dots, x_\nu)$ et donc $\mathit{red}(\mathbf{down})$ préserve l'analyticité. En conclusion, \mathbf{door} , et donc aussi \mathcal{U} , est moins analytique que \mathbf{down} .

◁

On peut maintenant conclure :

Proposition 1.25 *La moyenne **mown** préserve la croissance latérale.*

La démonstration est immédiate puisque $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ est moins analytique que **down** (proposition précédente) et **down** est moins analytique que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mown} \end{pmatrix}$ (proposition 1.22). Par transitivité, $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ est moins analytique que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mown} \end{pmatrix}$ ce qui, par définition, signifie que **mown** préserve la croissance latérale.

1.8 Conclusion.

Pour résumer, nous avons bien affaire à deux moyennes (**man** sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*)$ et **mown** sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$) qui ont l'avantage de vérifier les trois propriétés importantes P1, P2 et P3. Contrairement aux moyennes induites par diffusion (voir Chapitre 2), on peut montrer “directement” (i.e. sans erborification) que ces moyennes préservent la croissance latérale (peut-être la propriété la plus importante) et cela est dû en grande partie à la multitude des formules combinatoires et intégrales liées à **man** et **mown**.

L'utilité de telles moyennes est grande (voir [6] et [3]) dans la mesure où leur champ d'application recouvre un grand nombre de situations mêlant non-linéarité, divergence et réalité.

Nous reportons en annexe, ci-après :

- A Une démonstration directe du fait que **dam** est une dérivation. Ce rajout n'est pas gratuit dans la mesure où il est utilisé lors de la démonstration de la proposition 11 (section 5.1).
- B Nous donnons quelques précisions sur la convolution de $RAMIF(\mathbf{R}^+)$, grâce à ce que nous appellerons les *Diracs ramifiés*.
- C Cette annexe précise, via les Diracs ramifiés, l'action *directe* d'un opérateur de *ALIEN* sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$. Nous donnerons par ailleurs quelques justifications quant à la définition directe de l'action de *ALIEN* sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$.

A Démonstration directe du fait que **dam** est une dérivation.

La démonstration qui suit ne fait appel qu'à la seule définition de **dam** en fonction des nombres de Catalan. Ce n'est certes ni la plus rapide ni la plus conceptuelle (voir la démonstration ci-dessus, fondée sur le plongement de **man** dans une famille paramétrée remarquable, et aussi la démonstration du chapitre 2, fondée sur l'existence d'une diffusion sous-jacente à **man**) mais c'est la plus *naturelle*, ou tout au moins *la première qui vienne à l'esprit*, car ni l'existence d'une extension canonique, ni celle d'une diffusion sous-jacente ne sont évidentes a priori. La démonstration proposée a aussi l'avantage d'être bien adaptée à l'étude des propriétés de *sécabilité* de **man** (cf [3], §B.3).

dam est une dérivation.

On rappelle que, pour tout entier n strictement positif, \mathbf{dam}_n est une composante homogène de \mathbf{dam} et ses poids d'incrément unités sont nuls exceptés les suivants :

$$(A.1) \quad \mathbf{dam}_n^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} = \varepsilon_n ca^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}}$$

où

$$ca^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}} = ca_{n_1} \dots ca_{n_s} \text{ si } \varepsilon = (\pm)^{n_1} (\mp)^{n_2} \dots (\varepsilon_{r-1})^{n_s}$$

avec

$$ca_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

Rappelons aussi les notations :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$$

et \mathcal{U}_n a tous ses poids d'incrément unités nul exceptés :

$$\mathcal{U}_n^{+, \dots, +, \varepsilon_n} = \varepsilon_n$$

La démonstration du théorème se déroule en plusieurs étapes. On cherche d'abord à exprimer \mathbf{dam} en fonction de \mathcal{U} :

$$(A.2) \quad \mathbf{dam}_n = \sum_{n_1 + \dots + n_s = n} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s} \mathcal{U}_{n_s} \dots \mathcal{U}_{n_1} = \sum_{n_1 + \dots + n_s = n} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s} \mathcal{U}_{n_1, \dots, n_s}$$

Pour montrer que \mathbf{dam} est une dérivation, comme \mathcal{U} est un automorphisme, il s'agit de montrer que le moule $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$ est alternel. Pour cela, on va introduire les fonctions génératrices :

$$(A.3) \quad \mathcal{M}^{x_1, \dots, x_s} = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_s \\ n_i \geq 1}} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s} x_1^{n_1-1} \dots x_s^{n_s-1}$$

et, des propriétés du moule \mathcal{M}^\bullet ainsi défini, on déduira l'alternéité de $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$.

Le moule $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$

Afin d'exprimer \mathbf{dam} en fonction de \mathcal{U} , on rappelle les propriétés suivantes : Soit, pour des entiers positifs (n_1, \dots, n_s) , l'opérateur de *ALIEN* $\mathcal{D}_{n_1, \dots, n_s}$ dont tous les poids d'incrément unités sont nuls exceptés :

$$\mathcal{D}_{n_1, \dots, n_s}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n} = \varepsilon_n \text{ si } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, -) = \varepsilon^s \dots \varepsilon^1 \text{ et } \varepsilon^i = \underbrace{(+ \dots +)}_{n_i-1}$$

On a alors, en notations mouliennes :

$$(A.4) \quad \begin{cases} \mathcal{U}_\bullet + \mathcal{D}_\bullet \circ J^\bullet = 0 \\ \mathcal{D}_\bullet + \mathcal{U}_\bullet \circ J^\bullet = 0 \end{cases} \text{ avec } J^\emptyset = 0 \quad J^{n_1, \dots, n_s} = -1$$

Par exemple :

$$\mathcal{D}_{n_1, n_2} - \mathcal{U}_{n_1+n_2} + \mathcal{U}_{n_1, n_2} = 0$$

On peut alors facilement exprimer **dam** en fonction de \mathcal{D}_\bullet :

Proposition 1.1 *Pour tout $n \geq 1$, il vient :*

$$(A.5) \quad \mathbf{dam}_n = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_s = n} T^{\alpha_1, \dots, \alpha_s} \mathcal{D}_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}$$

avec

$$(A.6) \quad \begin{cases} T^{1^{(r)}} = ca_{r-1} \\ T^{1^{(\gamma_1)}, \gamma_2, \dots, \gamma_{2k}, 1^{(\gamma_{2k+1})}} = ca_{\gamma_1} ca_{\gamma_2-1} ca_{\gamma_3+1} \dots ca_{\gamma_{2k}-1} ca_{\gamma_{2k+1}} \\ \text{avec } (k \geq 1, \gamma_{2i+1} \geq 0, \gamma_{2i} \geq 2) \end{cases}$$

Ce moule T^\bullet apparaît naturellement lorsque l'on exprime les poids de **dam** en fonction des poids des \mathcal{D}_\bullet . En effet :

$$(A.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{dam}^{(+)^{n_1} \dots (-)^{n_{2s}}, \varepsilon} &= ca_{n_1} \dots ca_{n_{2s}} \mathcal{D}_{1^{(n_{2s})}, n_{2s-1}+1, \dots, 1^{(n_2-1)}, n_1+1}^{(+)^{n_1} \dots (-)^{n_{2s}}, \varepsilon} \\ \mathbf{dam}^{(+)^{n_1} \dots (+)^{n_{2s+1}}, \varepsilon} &= ca_{n_1} \dots ca_{n_{2s+1}} \mathcal{D}_{n_{2s+1}+1, 1^{(n_{2s}-1)}, n_{2s-1}+1, \dots, 1^{(n_2-1)}, n_1+1}^{(+)^{n_1} \dots (+)^{n_{2s+1}}, \varepsilon} \\ \mathbf{dam}^{(-)^{n_1} \dots (+)^{n_{2s}}, \varepsilon} &= ca_{n_1} \dots ca_{n_{2s}} \mathcal{D}_{n_{2s}+1, 1^{(n_{2s}-1)}, \dots, n_2+1, 1^{(n_1)}}^{(-)^{n_1} \dots (+)^{n_{2s}}, \varepsilon} \\ \mathbf{dam}^{(-)^{n_1} \dots (-)^{n_{2s+1}}, \varepsilon} &= ca_{n_1} \dots ca_{n_{2s+1}} \mathcal{D}_{1^{(n_{2s+1})}, n_{2s}+1, 1^{(n_{2s}-1)}, \dots, n_2+1, 1^{(n_1)}}^{(-)^{n_1} \dots (-)^{n_{2s+1}}, \varepsilon} \end{aligned}$$

En utilisant ces égalités dans la définition de \mathbf{dam}_r , on obtient, après réindexation, la proposition 1. De plus, en utilisant la relation entre \mathcal{D}_\bullet et \mathcal{U}_\bullet , on obtient :

Proposition 1.2 *Pour tout $n \geq 1$:*

$$(A.8) \quad \mathbf{dam}_n = \sum_{n_1 + \dots + n_s = n} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s} \mathcal{U}_{n_1, \dots, n_s}$$

avec

$$(A.9) \quad \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s} = (-1)^{s+1} \sum_{\substack{\omega^1, \dots, \omega^s \\ \|\omega^i\| = n_i}} T^{\omega^1, \dots, \omega^s}$$

où ω^i représente une séquence finie d'entiers et $\|\omega^i\|$ représente la somme des éléments de cette séquence.

On pourra remarquer que :

$$(A.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\|\omega\|=n} T^\omega = nca_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \\ \sum_{\substack{\|\omega\|=n \\ \omega_1 \geq 2, \omega_t \geq 2}} T^\omega = (n-1)ca_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } \omega_t \text{ dernier terme de } \omega \end{array} \right.$$

Introduisons maintenant le moule \mathcal{M}^\bullet .

Le moule associé \mathcal{M}^\bullet

Afin d'obtenir une expression "simple" de \mathcal{M}^\bullet , on a besoin de plusieurs définitions :

$$(A.11) \quad \begin{aligned} R(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)ca_r x^r \\ P(x) &= \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x}) = \sum_{r=0}^{\infty} ca_r x^r \\ Q(x) &= \frac{1}{2}(1 + R(x)) \end{aligned}$$

On introduit aussi les notations suivantes :

Pour une fonction F on pose

$$\begin{aligned} F^{x_1} &= F(x_1) \\ F^{x_1 \oplus x_2} &= \frac{1}{x_1 - x_2} (F^{x_1} - F^{x_2}) \\ F^{x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_s} &= \frac{1}{x_s - x_{s-1}} (F^{x_1 \oplus \dots \oplus x_{s-2} \oplus x_s} - F^{x_1 \oplus \dots \oplus x_{s-2} \oplus x_{s-1}}) \end{aligned}$$

et les fonctions obtenues sont symétriques (au sens usuel) en x_1, \dots, x_s . De plus, si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x^{n-1}$, alors :

$$(A.12) \quad f^{x_1 \oplus \dots \oplus x_s} = \sum_{n_1 \geq 1 \dots n_s \geq 1} \gamma_{n_1 + \dots + n_s} x_1^{n_1-1} \dots x_s^{n_s-1}$$

Une fois ces notations fixées, on peut énoncer :

Proposition 1.3 *Le moule \mathcal{M}^\bullet a pour expression :*

$$(A.13) \quad \mathcal{M}^{x_1, \dots, x_s} = (-1)^{s+1} \sum_{1=i_1 < \dots < i_q = s} P^{x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_2}} \dots P^{x_{i_{q-1}} \oplus \dots \oplus x_{i_q}} Q^{x_{i_1}} x_{i_2} R^{x_{i_2}} \dots x_{i_{q-1}} R^{x_{i_{q-1}}} Q^{x_{i_s}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{x_1} &= R(x_1) \\
\mathcal{M}^{x_1, x_2} &= -Q(x_1) \left[\frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2} \right] Q(x_2) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{R(x_1) - R(x_2)}{x_1 - x_2}
\end{aligned}
\tag{A.14}$$

Démonstration :

On rappelle que :

$$\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s} = (-1)^{s+1} \sum_{\substack{\omega^1, \dots, \omega^s \\ \|\omega^i\| = n_i}} T^{\omega^1, \dots, \omega^s}$$

Pour chaque ω^i :

-Soit $\omega^i = 1^{(n_i)}$

-Soit $\omega^i = 1^{(l_i)} \tilde{\omega}^i 1^{(k_i)}$ avec $0 \leq k_i + l_i \leq n_i - 2$, et $\tilde{\omega}^i$ est une séquence qui commence *et* finit par un entier plus grand que 2. Plus précisément, on notera :

- $\omega_{<}$ Une séquence qui ne finit pas par 1
- $<\omega$ Une séquence qui ne commence pas par 1
- $<\omega_{<}$ Une séquence qui ne commence ni ne finit par 1

Il n'est pas difficile de voir que pour $n \geq 2$:

$$a_n = \sum_{\|\omega_{<}\| = n} T^{\omega_{<}} = \sum_{\|<\omega\| = n} T^{<\omega} = \frac{nc a_{n-1}}{2}
\tag{A.15}$$

$$b_n = \sum_{\|<\omega_{<}\| = n} T^{<\omega_{<}} = (n-1) c a_{n-2}
\tag{A.16}$$

Pour le moule $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$ on peut maintenant écrire, en distinguant les ω^i qui débutent (resp. finissent) par un 1 ou par un entier plus grand que 2 :

$$\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s} = (-1)^{s+1} \sum_{1=i_1 < \dots < i_q = s} C_1^{i_1, \dots, i_q} + C_2^{i_1, \dots, i_q} + C_3^{i_1, \dots, i_q} + C_4^{i_1, \dots, i_q}$$

où :

$$C_1^{i_1, \dots, i_q} = \sum T^{1^{(n_1 + \dots + k_2)}, <\omega_{<}^{i_2}, 1^{(l_2 + n_{i_2} + 1 + \dots + k_3)}, \dots, <\omega_{<}^{i_{q-1}}, 1^{(l_{q-1} + \dots + n_s)}}$$

avec une somme telle que les ω^i valent $1^{(n_i)}$ pour $i = i_1$, $i = i_q$ et tous les indices différents de i_2, \dots, i_{q-1} et avec, pour i parmi i_2, \dots, i_{q-1} , sommation sur toutes les décompositions $\omega^{i_j} = 1^{(k_j)} <\omega_{<}^{i_j} 1^{(l_j)}$ ($\|\omega^i\| = n_i$).

$$C_2^{i_1, \dots, i_q} = \sum T^{\omega_{<}^{i_1}, 1^{(l_1 + \dots + k_2)}, <\omega_{<}^{i_2}, 1^{(l_2 + n_{i_2} + 1 + \dots + k_3)}, \dots, <\omega_{<}^{i_{q-1}}, 1^{(l_{q-1} + \dots + n_s)}}$$

avec une somme telle que les ω^i valent $1^{(n_i)}$ pour $i = i_q$ et tous les indices différents de i_2, \dots, i_{q-1} et avec, pour i parmi i_2, \dots, i_{q-1} , sommation sur toutes les décompositions $\omega^{i_j} = 1^{(k_j)} \llcorner \omega \llcorner^{i_j} 1^{(l_j)}$ ($\|\omega^i\| = n_i$) et $\omega^{i_1} = \omega_{\leq}^{i_1} 1^{(l_1)}$.

$$C_3^{i_1, \dots, i_q} = \sum T^{1^{(n_1+\dots+k_2)}, \llcorner \omega \llcorner^{i_2} 1^{(l_2+n_{i_2}+1+\dots+k_3)}, \dots, \llcorner \omega \llcorner^{i_{q-1}} 1^{(l_{q-1}+\dots+k_q)}, \llcorner \omega^s}$$

avec une somme telle que les ω^i valent $1^{(n_i)}$ pour $i = i_1$ et tous les indices différents de i_2, \dots, i_{q-1} et avec, pour i parmi i_2, \dots, i_{q-1} , sommation sur toutes les décompositions $\omega^{i_j} = 1^{(k_j)} \llcorner \omega \llcorner^{i_j} 1^{(l_j)}$ ($\|\omega^i\| = n_i$) et $\omega^{i_q} = 1^{(k_q)} \llcorner \omega^{i_q}$.

$$C_4^{i_1, \dots, i_q} = \sum T^{\omega \llcorner^1 1^{(l_1+\dots+k_2)}, \llcorner \omega \llcorner^{i_2} 1^{(l_2+n_{i_2}+1+\dots+k_3)}, \dots, \llcorner \omega \llcorner^{i_{q-1}} 1^{(l_{q-1}+\dots+k_q)}, \llcorner \omega^s}$$

avec une somme telle que les ω^i valent $1^{(n_i)}$ pour tous les indices différents de i_2, \dots, i_{q-1} et avec, pour i parmi i_2, \dots, i_{q-1} , sommation sur toutes les décompositions $\omega^{i_j} = 1^{(k_j)} \llcorner \omega \llcorner^{i_j} 1^{(l_j)}$ ($\|\omega^i\| = n_i$), $\omega^{i_q} = 1^{(k_q)} \llcorner \omega^{i_q}$ et $\omega^{i_1} = \omega_{\leq}^{i_1} 1^{(l_1)}$. En utilisant alors l'expression de T^\bullet et les coefficients a_n et b_n , on obtient, pour ces quatre termes, les expressions suivantes :

$$C_1^{i_1, \dots, i_q} = \sum_{\substack{0 \leq k_2 + l_2 \leq n_{i_2} - 2 \\ \vdots \\ 0 \leq k_{q-1} + l_{q-1} \leq n_{i_{q-1}} - 2 \\ l_j \geq 0 \quad k_j \geq 0}} ca_{n_1+\dots+k_2} b_{n_{i_2}-k_2-l_2} ca_{l_2+n_{i_2}+1+\dots+k_3+1} \cdots ca_{l_{r-1}+\dots+n_s}$$

$$C_2^{i_1, \dots, i_q} = \sum_{\substack{0 \leq l_1 \leq n_1 - 2 \\ 0 \leq k_2 + l_2 \leq n_{i_2} - 2 \\ \vdots \\ 0 \leq k_{q-1} + l_{q-1} \leq n_{i_{q-1}} - 2 \\ l_j \geq 0 \quad k_j \geq 0}} a_{n_1-l_1} ca_{l_1+\dots+k_2+1} b_{n_{i_2}-k_2-l_2} ca_{l_2+n_{i_2}+1+\dots+k_3+1} \cdots ca_{l_{r-1}+\dots+n_s}$$

$$C_3^{i_1, \dots, i_q} = \sum_{\substack{0 \leq k_q \leq n_s - 2 \\ 0 \leq k_2 + l_2 \leq n_{i_2} - 2 \\ \vdots \\ 0 \leq k_{q-1} + l_{q-1} \leq n_{i_{q-1}} - 2 \\ l_j \geq 0 \quad k_j \geq 0}} ca_{n_1+\dots+k_2} b_{n_{i_2}-k_2-l_2} ca_{l_2+n_{i_2}+1+\dots+k_3+1} \cdots ca_{l_{r-1}+\dots+k_q+1} a_{n_s-k_q}$$

$$C_4^{i_1, \dots, i_q} = \sum_{\substack{0 \leq l_1 \leq n_1 - 2 \\ 0 \leq k_q \leq n_s - 2 \\ 0 \leq k_2 + l_2 \leq n_{i_2} - 2 \\ \vdots \\ 0 \leq k_{q-1} + l_{q-1} \leq n_{i_{q-1}} - 2 \\ l_j \geq 0 \quad k_j \geq 0}} a_{n_1-l_1} ca_{l_1+\dots+k_2+1} b_{n_{i_2}-k_2-l_2} ca_{l_2+n_{i_2}+1+\dots+k_3+1} \cdots ca_{l_{r-1}+\dots+k_q+1} a_{n_s-k_q}$$

Une fois la partition $(1 = i_1 < \dots < i_q = s)$ fixée, on peut faire apparaître la série génératrice que voici :

$$C_{i_1, \dots, i_q}^{x_1, \dots, x_s} = \sum_{n_1 \geq 1 \dots n_s \geq 1} (C_1^{i_1, \dots, i_q} + C_2^{i_1, \dots, i_q} + C_3^{i_1, \dots, i_q} + C_4^{i_1, \dots, i_q}) x_1^{n_1-1} \cdots x_s^{n_s-1}$$

Or on a :

$$\sum_{n \geq 2} a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)ca_n}{2} x^n = Q^x - 1$$

et

$$\sum_{n \geq 2} b_n x^{n-1} = x R^x$$

Donc, grâce aux propriétés élémentaires des séries génératrices, on obtient :

$$C_{i_1, \dots, i_q}^{x_1, \dots, x_s} = P^{x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_2}} \dots P^{x_{i_{q-1}} \oplus \dots \oplus x_{i_q}} Q^{x_{i_1} x_{i_2}} R^{x_{i_2}} \dots x_{i_{q-1}} R^{x_{i_{q-1}}} Q^{x_{i_q}}$$

On trouve alors immédiatement la formule de la proposition 1.3.

◁

Avant de passer aux “propriétés d’alternelité” de \mathcal{M}^\bullet , il faut encore procéder à une dernière transformation. Soit :

$$(A.17) \quad B(x) = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4x}) \quad \text{donc } B(x)P(x) = -1$$

Alors

$$(A.18) \quad P^{x_1 \oplus \dots \oplus x_s} = \sum_{1=i_1 < \dots < i_q=s} B^{x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_2}} \dots B^{x_{i_{q-1}} \oplus \dots \oplus x_{i_q}} P^{x_{i_1}} P^{x_{i_2}} \dots P^{x_{i_{q-1}}} P^{x_s}$$

En effet :

$$(BP)^{x_1 \oplus x_2} = 0 = B^{x_1} P^{x_1 \oplus x_2} + B^{x_1 \oplus x_2} P^{x_2}$$

Donc

$$P^{x_1 \oplus x_2} = P^{x_1} B^{x_1 \oplus x_2} P^{x_2} \quad (B(x)P(x) = -1)$$

Ensuite on raisonne par récurrence sur s . Si :

$$P^{x_1 \oplus \dots \oplus x_s} = \sum_{1=i_1 < \dots < i_q=s} B^{x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_2}} \dots B^{x_{i_{q-2}} \oplus \dots \oplus x_{i_{q-1}}} P^{x_{i_1}} P^{x_{i_2}} \dots P^{x_{i_{q-1}}} B^{x_{i_{q-1}} \oplus \dots \oplus x_{s-1} \oplus x_s} P^{x_s}$$

alors de la même façon :

$$P^{x_1 \oplus \dots \oplus x_{s-1} \oplus x_{s+1}} = \sum_{1=i_1 < \dots < i_q=s+1} B^{x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_2}} \dots B^{x_{i_{q-2}} \oplus \dots \oplus x_{i_{q-1}}} P^{x_{i_1}} P^{x_{i_2}} \dots P^{x_{i_{q-1}}} B^{x_{i_{q-1}} \oplus \dots \oplus x_{s-1} \oplus x_{s+1}} P^{x_{s+1}}$$

Maintenant, grâce à ces deux identités, on peut faire apparaître :

$$(A.19) \quad \sum_{1=i_1 < \dots < i_{q-1} \leq s-1} B^{x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_2}} \dots B^{x_{i_{q-2}} \oplus \dots \oplus x_{i_{q-1}}} P^{x_{i_1}} \dots P^{x_{i_{q-1}}} \left(B^{x_{i_{q-1}} \oplus \dots \oplus x_{s-1} \oplus \bullet P^\bullet} \right)^{x_s \oplus x_{s+1}}$$

Or

$$\begin{aligned} & \left(B^{x_{i_{q-1}} \oplus \dots \oplus x_{s-1} \oplus \bullet P^\bullet} \right)^{x_s \oplus x_{s+1}} = \\ & B^{x_{i_{q-1}} \oplus \dots \oplus x_s \oplus x_{s+1}} P^{x_{s+1}} + B^{x_{i_{q-1}} \oplus \dots \oplus x_s} P^{x_s \oplus x_{s+1}} \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$P^{x_s \oplus x_{s+1}} = P^{x_s} B^{x_s \oplus x_{s+1}} P^{x_{s+1}}$$

et en réindexant la somme dans $P^{x_1, \dots, x_{s-1}, x_s, x_{s+1}}$, on obtient alors aisément la formule (A.18) à l'ordre $s+1$.

En utilisant la formule (A.18) dans (A.13) et en remarquant que :

$$P(x)Q(x) = R(x) \quad \text{et} \quad P(x)^2 x R(x) = R(x) - P(x)$$

on arrive finalement à un résultat provisoire, mais crucial :

Proposition 1.4

$$(A.20) \quad \boxed{\mathcal{M}^{x_1, \dots, x_s} = (-1)^{s+1} \sum_{1=i_1 < \dots < i_q = s} B^{x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_2}} \dots B^{x_{i_{q-1}} \oplus \dots \oplus x_{i_q}} R^{x_{i_1}} R^{x_{i_2}} \dots R^{x_{i_{q-1}}} R^{x_{i_s}}}$$

Pour démontrer l'alternativité du moule $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$ à partir de \mathcal{M}^\bullet , on aura encore besoin des quelques identités suivantes :

$$(A.21) \quad R^{x \oplus y} = 2R^x B^{x \oplus y} R^y$$

$$(A.22) \quad B^{x \oplus y \oplus z} = \mathcal{M}^y \{-B^{x \oplus y} B^{y \oplus z} + B^{y \oplus x} B^{x \oplus z} + B^{x \oplus z} B^{z \oplus y}\}$$

Si on considère :

$$\mathcal{M}^{x_1, \dots, x_i \oplus x_{i+1}, \dots, x_s} = \sum_{n_j \geq 1} M^{n_1, \dots, n_i + n_{i+1}, \dots, n_s} x_1^{n_1 - 1} \dots x_i^{n_i - 1} x_{i+1}^{n_{i+1} - 1} \dots x_s^{n_s - 1}$$

alors, en utilisant (A.20), on obtient :

$$(A.23) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}^{x_1, \dots, x_i \oplus x_{i+1}, \dots, x_s} &= (\mathcal{M}^{x_1, \dots, x_{i-1}, \bullet, x_{i+2}, \dots, x_s})^{x_i \oplus x_{i+1}} \\ &= -\mathcal{M}^{x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_s} + \mathcal{M}^{x_1, \dots, x_i} B^{x_i \oplus x_{i+1}} \mathcal{M}^{x_{i+1}, \dots, x_s} \end{aligned}$$

L'alternativité de $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$.

On va raisonner par récurrence sur le "battage" d'une séquence de longueur k et d'une séquence de longueur j . Pour le moule $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$, on a l'hypothèse de récurrence suivante :

$Al(k, j)$:

$$(A.24) \quad \begin{cases} \forall \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k) \in (N^*)^k \quad \forall \mathbf{n}' = (n'_1, \dots, n'_j) \in (N^*)^j \\ \sum_{\mathbf{n}'' \in Ctsh(\mathbf{n}, \mathbf{n}')} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{\mathbf{n}''} = 0 \end{cases}$$

Lemme 1.1 $Al(k, j)$ équivaut pour le moule \mathcal{M}^\bullet à l'hypothèse $Al(k, j)$:

$$(A.25) \quad \begin{cases} X = (x_1, \dots, x_k) \quad Y = (y_1, \dots, y_j) \\ \sum_{Z \in Ctsh^\oplus(X, Y)} \mathcal{M}^Z = 0 \end{cases}$$

avec, en lieu et place de la contraction $n_p + n'_q$ qui intervenait dans $Al(k, j)$, la nouvelle "contraction" $x_p \oplus y_q$.

Ce lemme découle directement de la définition de \mathcal{M}^\bullet et de celle de la “contraction” \oplus . On peut remarquer par ailleurs que \mathcal{M}^\bullet , et donc $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$, sont symétriques (au sens usuel) et par suite que :

$$\begin{aligned} Al(k, j) &\Leftrightarrow Al(j, k) \\ \mathcal{A}l(k, j) &\Leftrightarrow \mathcal{A}l(j, k) \end{aligned}$$

Il s’agit maintenant de montrer par récurrence que $\mathcal{A}l(k, j)$ est toujours vrai. Les deux lemmes ci-après nous permettront de travailler sur une expression plus “maniable” de $\mathcal{A}l(k, j)$.

Fixons $X = (x_1, \dots, x_k)$ et $Y = (y_1, \dots, y_j)$, et considérons un seul des battages intervenant dans $\mathcal{A}l(k, j)$. On écrit pour $r \geq 1$:

$$X = X^1 \dots X^{r+1} \text{ où } X^{r+1} \text{ peut être la séquence vide.}$$

$$Y = Y^1 \dots Y^{r+1} \text{ où } Y^1 \text{ peut être la séquence vide.}$$

Pour une séquence donnée de variables Z , on notera $Z_{(i)}$ (resp. $Z_{(f)}$) le premier (resp. le dernier) élément de la séquence. De plus, on notera $(Z)'$ (resp. ${}^{\cdot}(Z)$) la séquence telle que $(Z)'Z_{(f)} = Z$ (resp. $Z_{(i)}{}^{\cdot}Z = Z$). On peut maintenant énoncer :

Lemme 1.2 *Pour tout $r \geq 1$ et une décomposition donnée (X et Y de longueurs arbitraires mais permettant cette décomposition) :*

$$(A.26) \quad \begin{cases} X = X^1 \dots X^{r+1} \\ Y = Y^1 \dots Y^{r+1} \end{cases}$$

on peut regrouper dans une même somme le battage $Y^1 X^1 Y^2 X^2 \dots Y^{r+1} X^{r+1}$ et les éventuelles “contractions” qu’il implique. On a alors le résultat suivant :

$$(A.27) \quad \begin{aligned} &\mathcal{M}^{Y^1 X^1 \dots Y^{r+1} X^{r+1}} + \sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_q \leq r} \mathcal{M}^{Y^1 X^1 \dots (X^{k_j})', X_{(f)}^{k_j} \oplus Y_{(i)}^{k_j+1}, {}^{\cdot}(Y^{k_j+1}), \dots X^{r+1}} \\ &= \mathcal{M}^{Y^1 X^1} B^{X_{(f)}^1 \oplus Y_{(i)}^2} \mathcal{M}^{Y^2 X^2} \dots B^{X_{(f)}^r \oplus Y_{(i)}^{r+1}} \mathcal{M}^{Y^{r+1} X^{r+1}} \end{aligned}$$

La démonstration de ce lemme se fait par récurrence sur r . Pour $r = 1$, le premier membre de (A.27) s’écrit :

$$\mathcal{M}^{Y^1 X^1 Y^2 X^2} + \mathcal{M}^{Y^1 (X^1)', X_{(f)}^1 \oplus Y_{(i)}^2, {}^{\cdot}(Y^2) X^2}$$

Or on sait que (voir (A.23)) :

$$\mathcal{M}^{Y^1 (X^1)', X_{(f)}^1 \oplus Y_{(i)}^2, {}^{\cdot}(Y^2) X^2} = -\mathcal{M}^{Y^1 X^1 Y^2 X^2} + \mathcal{M}^{Y^1 X^1} B^{X_{(f)}^1 \oplus Y_{(i)}^2} \mathcal{M}^{Y^2 X^2}$$

et donc le lemme est directement vérifié pour $r = 1$. Supposons-le vrai pour r fixé et posons :

$$\begin{cases} X = X^1 \dots X^{r+2} \\ Y = Y^1 \dots Y^{r+2} \end{cases}$$

On va bien sûr s’intéresser au battage $Y^1 X^1 Y^2 X^2 \dots Y^{r+1} X^{r+1} Y^{r+2} X^{r+2}$. Afin d’utiliser l’hypothèse de récurrence, on pose :

$$\begin{cases} X = X^1 \dots X^r \tilde{X}^{r+1} & \text{avec} & \tilde{X}^{r+1} = X^{r+2} \\ Y = Y^1 \dots Y^r \tilde{Y}^{r+1} & \text{avec} & \tilde{Y}^{r+1} = (X^{r+1})' Z {}^{\cdot}(Y^{r+2}) \end{cases}$$

Si on note :

$$F(Z) = \mathcal{M}^{Y^1 X^1 \dots \tilde{Y}^{r+1} \tilde{X}^{r+1}}$$

$$G(Z) = \sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_q \leq r} \mathcal{M}^{Y^1 X^1 \dots (X^{k_j})', X_{(f)}^{k_j} \oplus Y_{(i)}^{k_j+1}, (Y^{k_j+1}), \dots \tilde{X}^{r+1}}$$

$$H(Z) = \mathcal{M}^{Y^1 X^1} B_{(f)}^{X^1} \oplus Y_{(i)}^2 \mathcal{M}^{Y^2 X^2} \dots B_{(f)}^{X^r} \oplus Y_{(i)}^{r+1} \mathcal{M}^{\tilde{Y}^{r+1} \tilde{X}^{r+1}}$$

alors (A.27) s'écrit :

$$F(Z) + G(Z) = H(Z)$$

et donc :

$$F^{X_{(f)}^{r+1} \oplus Y_{(i)}^{r+2}} + G^{X_{(f)}^{r+1} \oplus Y_{(i)}^{r+2}} = H^{X_{(f)}^{r+1} \oplus Y_{(i)}^{r+2}}$$

Or, par rapport au battage $Y^1 X^1 Y^2 X^2 \dots Y^{r+1} X^{r+1} Y^{r+2} X^{r+2}$, chacun des termes ci-dessus a une signification particulière :

$F^{X_{(f)}^{r+1} \oplus Y_{(i)}^{r+2}}$ correspond à l'unique terme où seuls $X_{(f)}^{r+1}$ et $Y_{(i)}^{r+2}$ sont contractés.

$G^{X_{(f)}^{r+1} \oplus Y_{(i)}^{r+2}}$ correspond aux termes où $X_{(f)}^{r+1}$ et $Y_{(i)}^{r+2}$ et au moins une autre paire sont contractés.

Pour $H^{X_{(f)}^{r+1} \oplus Y_{(i)}^{r+2}}$, il faut faire un peu plus attention. Grâce à (A.23), on a :

$$H^{X_{(f)}^{r+1} \oplus Y_{(i)}^{r+2}} = -\mathcal{M}^{Y^1 X^1} B_{(f)}^{X^1} \oplus Y_{(i)}^2 \mathcal{M}^{Y^2 X^2} \dots B_{(f)}^{X^r} \oplus Y_{(i)}^{r+1} \mathcal{M}^{Y^{r+1} X^{r+1} Y^{r+2} X^{r+2}} \\ + \mathcal{M}^{Y^1 X^1} B_{(f)}^{X^1} \oplus Y_{(i)}^2 \mathcal{M}^{Y^2 X^2} \dots B_{(f)}^{X^r} \oplus Y_{(i)}^{r+1} \mathcal{M}^{Y^{r+1} X^{r+1}} B_{(f)}^{X^{r+1} \oplus Y_{(i)}^{r+2}} \mathcal{M}^{Y^{r+2} X^{r+2}}$$

Or $\mathcal{M}^{Y^1 X^1} B_{(f)}^{X^1} \oplus Y_{(i)}^2 \mathcal{M}^{Y^2 X^2} \dots B_{(f)}^{X^r} \oplus Y_{(i)}^{r+1} \mathcal{M}^{Y^{r+1} X^{r+1} Y^{r+2} X^{r+2}}$ est le second terme à l'ordre r de (3.27) pour $Y = Y^1 \dots Y^{r+1}$ et $X = X^1 \dots X^r (X^{r+1} Y^{r+2} X^{r+2})$. En remplaçant par le premier membre de (3.27), on voit apparaître le terme correspondant au simple battage $Y^1 X^1 Y^2 X^2 \dots Y^{r+1} X^{r+1} Y^{r+2} X^{r+2}$ et les termes correspondants, pour ce battage, aux contractions excluant celle de $X_{(f)}^{r+1}$ et $Y_{(i)}^{r+2}$. En regroupant ceci avec $F^{X_{(f)}^{r+1} \oplus Y_{(i)}^{r+2}}$ et $G^{X_{(f)}^{r+1} \oplus Y_{(i)}^{r+2}}$, on fait apparaître (A.27) à l'ordre $r+1$ pour le battage $Y^1 X^1 Y^2 X^2 \dots Y^{r+1} X^{r+1} Y^{r+2} X^{r+2}$. Ceci achève la démonstration par récurrence.

On peut maintenant énoncer le théorème principal :

Théorème 1 *Pour tous j et k entiers positifs, $\mathcal{A}l(k, j)$ et donc $\mathcal{A}l(k, j)$ est vrai. Le moule $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$ est donc alternel et A est une dérivation.*

En combinant les lemmes 1 et 2, on voit que $\mathcal{A}l(k, j)$ équivaut à :

$$(A.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = x_1 \dots x_k \\ Y = y_1 \dots y_j \\ \sum_{r=1}^{\min(k,j)} \sum_{\substack{X=X^1 \dots X^{r+1} \\ Y=Y^1 \dots Y^{r+1}}} \mathcal{M}^{Y^1 X^1} B_{(f)}^{X^1} \oplus Y_{(i)}^2 \mathcal{M}^{Y^2 X^2} \dots B_{(f)}^{X^r} \oplus Y_{(i)}^{r+1} \mathcal{M}^{Y^{r+1} X^{r+1}} = 0 \end{array} \right.$$

où évidemment le terme pour le battage YX est \mathcal{M}^{YX} .

On peut alors montrer par récurrence que $\mathcal{A}l(k, j)$ est toujours vrai. Pour ce faire, notons :

$$(A.29) \quad \mathcal{P}(k) \stackrel{def}{=} \{\forall j \geq 1, \mathcal{A}l(k, j) \text{ est vrai.}\}$$

Lemme 1.3 $\mathcal{P}(1)$ est vrai.

Il s'agit de montrer que :

$$\forall j \geq 1, \mathcal{A}l(1, j) \text{ est vrai.}$$

Ceci se fait ici encore par récurrence. $\mathcal{A}l(1, 1)$ est vrai car on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{x_1, y_1} + \mathcal{M}^{x_1 \oplus y_1} &= \mathcal{M}^{x_1} B^{x_1 \oplus y_1} \mathcal{M}^{y_1} && \text{(voir (A.23))} \\ &= -\mathcal{M}^{y_1, x_1} && \text{(par définition de } \mathcal{M}^\bullet) \end{aligned}$$

Supposons que $\mathcal{A}l(1, j)$ est vrai. Pour $X = x_1$ et $Y = z, y_3, \dots, y_{j+1} = z'(Y)$, l'hypothèse de récurrence s'écrit :

$$\mathcal{M}^{x_1} B^{x_1 \oplus z} \mathcal{M}^{z'(Y)} + \sum_{n=3}^{j+1} \mathcal{M}^{z, \dots, y_{n-1}, x_1} B^{x_1 \oplus y_n} \mathcal{M}^{y_n, \dots, y_{j+1}} + \mathcal{M}^{z, y_3, \dots, y_{j+1}, x_1} = 0$$

Comme dans la démonstration précédente, on pose :

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathcal{M}^{x_1} B^{x_1 \oplus z} \mathcal{M}^{z'(Y)} \\ G(z) &= \sum_{n=3}^{j+1} \mathcal{M}^{z, \dots, y_{n-1}, x_1} B^{x_1 \oplus y_n} \mathcal{M}^{y_n, \dots, y_{j+1}} \\ H(z) &= \mathcal{M}^{z, y_3, \dots, y_{j+1}, x_1} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$(A.30) \quad F^{y_1 \oplus y_2} + G^{y_1 \oplus y_2} + H^{y_1 \oplus y_2} = 0$$

Or

$$F^{y_1 \oplus y_2} = \mathcal{M}^{x_1} B^{x_1 \oplus y_1 \oplus y_2} \mathcal{M}^{y_2, \dots, y_{j+1}} + \mathcal{M}^{x_1} B^{x_1 \oplus y_1} (\mathcal{M}^{y_1 \oplus y_2, \dots, y_{j+1}})$$

et en utilisant (A.22), (A.23) et l'égalité $\mathcal{M}^x B^{x \oplus y} \mathcal{M}^y = -\mathcal{M}^{x, y} = -\mathcal{M}^{y, x}$, on obtient :

$$\begin{aligned} F^{y_1 \oplus y_2} &= \mathcal{M}^{y_1} B^{y_1 \oplus y_2} (\mathcal{M}^{x_1} B^{x_1 \oplus y_2} \mathcal{M}^{y_2, \dots, y_{j+1}}) \\ &\quad - (\mathcal{M}^{x_1} B^{x_1 \oplus y_1} \mathcal{M}^{y_1, \dots, y_{j+1}} + \mathcal{M}^{y_1, x_1} B^{x_1 \oplus y_2} \mathcal{M}^{y_2, \dots, y_{j+1}}) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} G^{y_1 \oplus y_2} &= \mathcal{M}^{y_1} B^{y_1 \oplus y_2} \left(\sum_{n=3}^{j+1} \mathcal{M}^{y_2, \dots, y_{n-1}, x_1} B^{x_1 \oplus y_n} \mathcal{M}^{y_n, \dots, y_{j+1}} \right) \\ &\quad - \left(\sum_{n=3}^{j+1} \mathcal{M}^{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x_1} B^{x_1 \oplus y_n} \mathcal{M}^{y_n, \dots, y_{j+1}} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H^{y_1 \oplus y_2} &= \mathcal{M}^{y_1} B^{y_1 \oplus y_2} (\mathcal{M}^{y_2, y_3, \dots, y_{j+1}, x_1}) \\ &\quad - (\mathcal{M}^{y_1, y_2, y_3, \dots, y_{j+1}, x_1}) \end{aligned}$$

En portant ces résultats dans (A.30), on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}^{y_1} B^{y_1 \oplus y_2} (\mathcal{M}^{x_1} B^{x_1 \oplus y_2} \mathcal{M}^{y_2, \dots, y_{j+1}} + \sum_{n=3}^{j+1} \mathcal{M}^{y_2, \dots, y_{n-1}, x_1} B^{x_1 \oplus y_n} \mathcal{M}^{y_n, \dots, y_{j+1}} + \mathcal{M}^{y_2, y_3, \dots, y_{j+1}, x_1}) \\ & - (\mathcal{M}^{x_1} B^{x_1 \oplus y_1} \mathcal{M}^{y_1, \dots, y_{j+1}} + \mathcal{M}^{y_1, x_1} B^{x_1 \oplus y_2} \mathcal{M}^{y_2, \dots, y_{j+1}} \\ & \quad + \sum_{n=3}^{j+1} \mathcal{M}^{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x_1} B^{x_1 \oplus y_n} \mathcal{M}^{y_n, \dots, y_{j+1}} + \mathcal{M}^{y_1, y_2, y_3, \dots, y_{j+1}, x_1}) = 0 \end{aligned}$$

Mais le premier terme est nul par hypothèse ($X = x_1$ et $Y = y_2, \dots, y_{j+1}$) et le second terme est, au signe près, l'identité recherchée pour $\mathcal{A}l(1, j+1)$ avec $X = x_1$ et $Y = y_1, \dots, y_{j+1}$. On a donc démontré par récurrence le lemme 3.

On peut maintenant achever la démonstration du théorème :

Lemme 1.4 $\forall j \leq k \mathcal{P}(j) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$

Supposons que, pour tout j inférieur ou égal à k , $\mathcal{P}(j)$ est vrai et montrons $\mathcal{P}(k+1)$. Pour $j \leq k$, comme $\mathcal{A}l(k+1, j) \Leftrightarrow \mathcal{A}l(j, k+1)$, $\mathcal{A}l(k+1, j)$ est vrai par hypothèse de récurrence. Supposons maintenant que, pour $j \geq k$ donné, $\mathcal{A}l(k, j)$ est vrai. Pour $X = x_1, \dots, x_{k-1}, z$ et $Y = y_1, \dots, y_j$, on peut écrire par hypothèse :

$$\sum_{r=1}^k \sum_{\substack{X=X^1 \dots X^{r+1} \\ Y=Y^1 \dots Y^{r+1}}} \mathcal{M}^{Y^1 X^1} B^{X_{(f)}^1 \oplus Y_{(i)}^2} \mathcal{M}^{Y^2 X^2} \dots B^{X_{(f)}^r \oplus Y_{(i)}^{r+1}} \mathcal{M}^{Y^{r+1} X^{r+1}} = 0 = F(z)$$

On peut donc former $F^{x_k \oplus x_{k+1}}$, qui vaut également 0. Mais les différents termes de $F(z)$ vont se transformer, selon que X^{r+1} est vide ou non, en des expressions distinctes :

Si X^{r+1} n'est pas vide, le terme générique de la somme devient :

$$\begin{cases} -(\mathcal{M}^{Y^1 X^1} B^{X_{(f)}^1 \oplus Y_{(i)}^2} \mathcal{M}^{Y^2 X^2} \dots B^{X_{(f)}^r \oplus Y_{(i)}^{r+1}} \mathcal{M}^{Y^{r+1} (X^{r+1})', x_k, x_{k+1}}) \\ +(\mathcal{M}^{Y^1 X^1} B^{X_{(f)}^1 \oplus Y_{(i)}^2} \mathcal{M}^{Y^2 X^2} \dots B^{X_{(f)}^r \oplus Y_{(i)}^{r+1}} \mathcal{M}^{Y^{r+1} (X^{r+1})', x_k}) B^{x_k \oplus x_{k+1}} \mathcal{M}^{x_{k+1}} \end{cases}$$

Si X^{r+1} est vide, on utilise, comme dans le lemme 3, les identités (A.22) et (A.23). On obtient alors :

$$\begin{cases} -(\mathcal{M}^{Y^1 X^1} B^{X_{(f)}^1 \oplus Y_{(i)}^2} \mathcal{M}^{Y^2 X^2} \dots \mathcal{M}^{Y^r (X^r)', x_k, x_{k+1}} B^{x_{k+1} \oplus Y_{(i)}^{r+1}} \mathcal{M}^{Y^{r+1}} \\ \quad + \mathcal{M}^{Y^1 X^1} B^{X_{(f)}^1 \oplus Y_{(i)}^2} \mathcal{M}^{Y^2 X^2} \dots \mathcal{M}^{Y^r (X^r)', x_k} B^{x_k \oplus Y_{(i)}^{r+1}} \mathcal{M}^{Y^{r+1}, x_{k+1}}) \\ +(\mathcal{M}^{Y^1 X^1} B^{X_{(f)}^1 \oplus Y_{(i)}^2} \mathcal{M}^{Y^2 X^2} \dots \mathcal{M}^{Y^r (X^r)', x_k} B^{x_k \oplus Y_{(i)}^{r+1}} \mathcal{M}^{Y^{r+1}}) B^{x_k \oplus x_{k+1}} \mathcal{M}^{x_{k+1}} \end{cases}$$

Si on somme le tout, on obtient un terme positif ayant $B^{x_k \oplus x_{k+1}} \mathcal{M}^{x_{k+1}}$ en facteur de $F(x_k)$ qui est nul par hypothèse ($X = x_1, \dots, x_k$ et $Y = y_1, \dots, y_j$). Les termes qui restent dans la formule $F^{x_k \oplus x_{k+1}} = 0$ ne sont autres, au signe près et après réindexation, que les termes présents dans l'équation (A.28) pour des séquences $X = x_1, \dots, x_{k+1}$ et $Y = y_1, \dots, y_j$. On obtient donc $\mathcal{A}l(k+1, j)$. Comme j est arbitraire, on a donc bien obtenu $\mathcal{P}(k+1)$. Le lemme 4 est démontré.

A partir des lemmes 4 et 5, il est immédiat que $\mathcal{P}(k)$ est toujours vrai et on obtient ainsi le théorème 1 et donc que **dam** est une dérivation.

B La convolution sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$.

Afin de décrire la convolution sur $RAMIF(\mathbf{R}^+)$, il suffit de la décrire sur une algèbre de mesures : l'algèbre des Diracs ramifiés.

Si on considère des mesures sur un $\mathbf{R}^+//\Omega$, on peut définir les “Diracs ramifiés” :

$$(B.1) \quad \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s, \omega'_{s+1}} \quad (\omega_1 > 0 ; \dots ; \omega_s > 0 ; \omega_{s+1} \geq \omega'_{s+1} \geq 0 ; \varepsilon_j \in \{+, -\})$$

de masse unité concentrée au point $\omega_1 + \dots + \omega'_{s+1}$ (ou plutôt immédiatement après ce point, pour comprendre le cas $\omega'_{s+1} = 0$) sur la branche d'adresse $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$. Sur tout espace $\mathbf{R}^+//\Omega'$ plus ramifié que $\mathbf{R}^+//\Omega$ ($\Omega \subset \Omega'$) ces mesures atomiques induisent de nouvelles mesures, *qui ne sont plus atomiques mais plutôt des sommes finies d'atomes*. Cela est dû aux relations d'autocohérence :

$$(B.2) \quad \sum_{\varepsilon_j = \pm} \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s, \omega_{s+1}} = \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_j + \omega_{j+1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \omega_{s+1}} \quad (\forall j \leq s)$$

Les fonctions localement intégrables sont denses dans l'espace des mesures (pour la topologie faible) et, par continuité, leur convolution s'étend aux Diracs ramifiés. C'est donc sur cette algèbre de Diracs ramifiés que nous allons indiquer comment opère la convolution.

Inversement, les sommes finies de Diracs ramifiés sont denses dans l'espace des mesures (toujours la topologie faible) et elles accumulent, en particulier, toute mesure à densité localement intégrable. Par suite, connaître la convolution des Diracs, c'est aussi connaître la convolution des fonctions intégrables.

Or il se trouve qu'on peut décrire la convolution des Diracs ramifiés au moyen de trois règles formelles très simples : (B.3), (B.4), (B.5) (ou (B.6)). Nous *admettons que ces règles sont les “bonnes”* (c'est-à-dire qu'elles traduisent bien la convolution induite par celle des fonctions ramifiées, qui elle-même est induite par celle des fonctions analytiques ramifiées et ne comporte aucune part d'arbitraire ; pour plus de détails, voir [3], §A.2) et *nous nous attacherons surtout à montrer comment elles fonctionnent*.

Proposition 1.26 *La convolution des Diracs ramifiés se déduit entièrement des règles :*

$$(B.3) \quad \delta^{\omega_1} * \delta^{\omega_2} = \delta^{\omega_1 + \omega_2}$$

$$(B.4) \quad \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} * \delta^{\omega_{s+1}} = \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s, \omega_{s+1}}$$

et de la symétrie du moule $R\delta^\bullet$ construit avec les Diracs latéraux droits :

$$(B.5) \quad R\delta^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \delta^{\omega_1, +, \omega_2, +, \dots, \omega_s, +}$$

ou, de manière équivalente, de la symétrie du moule $L\delta^\bullet$ construit avec les Diracs latéraux gauches :

$$(B.6) \quad L\delta^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \delta^{\omega_1, -, \omega_2, -, \dots, \omega_s, -}$$

Ainsi, l'équation B.4 permet d'éjecter le dernier indice ω_{s+1} du Dirac ramifié B.1 et les relations d'autocohérence B.2 permettent alors de décomposer celui-ci en somme de Diracs latéraux droits (ou gauches).

Afin de bien comprendre cette proposition, nous allons donner plusieurs exemples de son utilisation.

Calcul de $\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,+}$.

Pour calculer $\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,+}$, il suffit d'utiliser la symétrie du moule $R\delta^\bullet$ (voir (B.5)). On a alors

$$\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,+} = \delta^{\omega_1,+\omega_2,+} + \delta^{\omega_2,+\omega_1,+} - \delta^{(\omega_1+\omega_2),+}$$

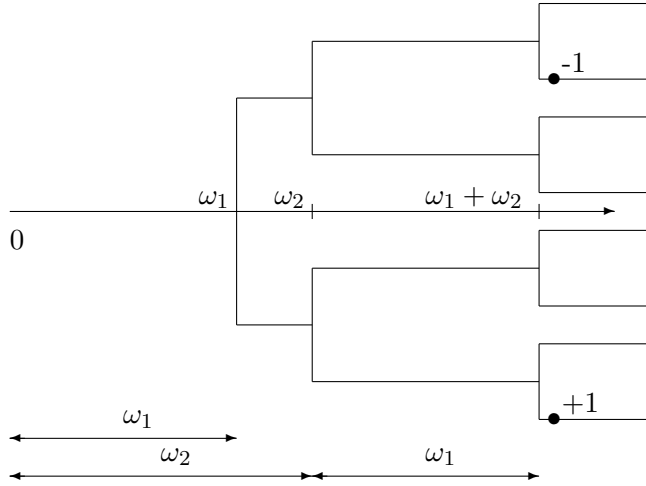
mais en utilisant les relations (B.2) on remarque que :

$$\delta^{(\omega_1+\omega_2),+} = \delta^{\omega_1,+\omega_2,+} + \delta^{\omega_1,-\omega_2,+} = \delta^{\omega_2,+\omega_1,+} + \delta^{\omega_2,-\omega_1,+}$$

et donc,

$$(B.7) \quad \delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,+} = \delta^{\omega_1,+\omega_2,+} - \delta^{\omega_2,-\omega_1,+} = \delta^{\omega_2,+\omega_1,+} - \delta^{\omega_1,-\omega_2,+}$$

On peut “situer” ces Diracs sur un espace $\mathbf{R}^+//\Omega$ suffisamment ramifié. On a par exemple, si $\omega_1 < \omega_2$:



Bien sûr, les points \bullet montrent où se situent les deux Diracs ramifiés qui “développent” $\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,+}$ sur cet espace. En effet, grâce aux relations d’autocohérence, on a bien :

$$\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,+} = \delta^{\omega_1,+(\omega_2-\omega_1),+\omega_1,+} - \delta^{\omega_1,-(\omega_2-\omega_1),-\omega_1,+}$$

Calcul de $\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,-}$.

Pour calculer $\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,-}$, on utilise d’abord l’équation (B.2) :

$$\delta^{\omega_2,-} = \delta^{\omega_2} - \delta^{\omega_2,+}$$

et donc

$$\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,-} = \delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2} - \delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,+}$$

En utilisant la symétrie du moule $R\delta^\bullet$ (voir (B.5)), on a alors

$$\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,-} = \delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2} - \delta^{\omega_1,+,\omega_2,+} - \delta^{\omega_2,+,\omega_1,+} + \delta^{(\omega_1+\omega_2),+}$$

mais en utilisant les relations (B.2) on remarque que :

$$\delta^{(\omega_1+\omega_2),+} = \delta^{\omega_2,+,\omega_1,+} + \delta^{\omega_2,-,\omega_1,+} = \delta^{(\omega_1+\omega_2)} - \delta^{\omega_1,+,\omega_2,-} - \delta^{\omega_1,-,\omega_2,-}$$

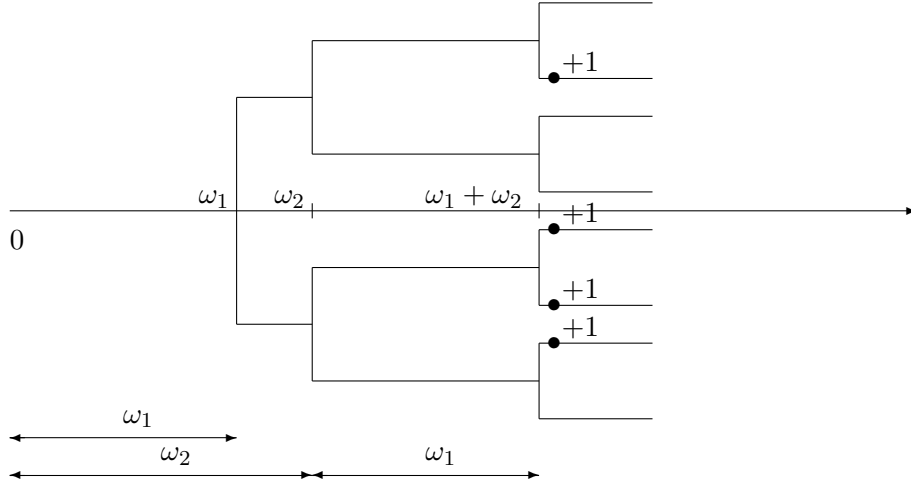
et

$$\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2} = \delta^{\omega_1,+,\omega_2} = \delta^{\omega_1,+,\omega_2,+} + \delta^{\omega_1,+,\omega_2,-}$$

donc,

$$(B.8) \quad \delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,-} = \delta^{\omega_1,+,\omega_2,-} + \delta^{\omega_2,-,\omega_1,+} = \delta^{(\omega_1+\omega_2)} - \delta^{\omega_1,-,\omega_2,-} - \delta^{\omega_2,+,\omega_1,+}$$

On peut “situer” ces Diracs sur un espace $\mathbf{R}^+//\Omega$ suffisamment ramifié et on a par exemple, si $\omega_1 < \omega_2$:



On obtient mécaniquement cette configuration en appliquant les relations d'autocohérence, qui donnent ici :

$$\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,-} = \delta^{\omega_1,+,(\omega_2 - \omega_1),+,\omega_1,-} + \delta^{\omega_1,+,(\omega_2 - \omega_1),-,\omega_1,+} + \delta^{\omega_1,+,(\omega_2 - \omega_1),-,\omega_1,-} + \delta^{\omega_1,-,(\omega_2 - \omega_1),-,\omega_1,+}$$

Nous finirons cette annexe par un dernier exemple qui se situe à la frontière entre les cas faciles à figurer géométriquement et les cas plus complexes, où seules restent praticables les manipulations algébriques.

Calcul de $\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,-,\omega_3,+}$.

Encore une fois, nous allons utiliser les relations d'autocohérence :

$$\delta^{\omega_2,-,\omega_3,+} = \delta^{(\omega_2+\omega_3),+} - \delta^{\omega_2,+,\omega_3,+}$$

En remarquant que $R\delta^\bullet$ est symétriel, on obtient :

$$\delta^{\omega_1,+} * \delta^{(\omega_2+\omega_3),+} = \delta^{\omega_1,+,(\omega_2+\omega_3),+} + \delta^{(\omega_2+\omega_3),+,\omega_1,+} - \delta^{(\omega_1+\omega_2+\omega_3),+}$$

$$\begin{aligned} \delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,+,\omega_3,+} &= \delta^{\omega_1,+,\omega_2,+,\omega_3,+} + \delta^{\omega_2,+,\omega_1,+,\omega_3,+} + \delta^{\omega_2,+,\omega_3,+,\omega_1,+} \\ &\quad - \delta^{(\omega_1+\omega_2),+,\omega_3,+} - \delta^{\omega_2,+,(\omega_1+\omega_3),+} \end{aligned}$$

or, par exemple,

$$\begin{aligned} \delta^{\omega_1,+,(\omega_2+\omega_3),+} &= \delta^{\omega_1,+,\omega_2,+,\omega_3,+} + \delta^{\omega_1,+,\omega_2,-,\omega_3,+} \\ \delta^{(\omega_2+\omega_3),+,\omega_1,+} &= \delta^{\omega_2,+,\omega_3,+,\omega_1,+} + \delta^{\omega_2,-,\omega_3,+,\omega_1,+} \\ \delta^{(\omega_1+\omega_2+\omega_3),+} &= \delta^{\omega_1,+,\omega_2,+,\omega_3,+} + \delta^{\omega_1,+,\omega_2,-,\omega_3,+} + \delta^{\omega_1,-,\omega_2,+,\omega_3,+} + \delta^{\omega_1,-,\omega_2,-,\omega_3,+} \\ \delta^{(\omega_1+\omega_2),+,\omega_3,+} &= \delta^{\omega_1,+,\omega_2,+,\omega_3,+} + \delta^{\omega_1,-,\omega_2,+,\omega_3,+} \\ \delta^{\omega_2,+,(\omega_1+\omega_3),+} &= \delta^{\omega_2,+,\omega_1,+,\omega_3,+} + \delta^{\omega_2,+,\omega_1,-,\omega_3,+} \end{aligned}$$

et donc $\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,-,\omega_3,+}$ peut s'écrire :

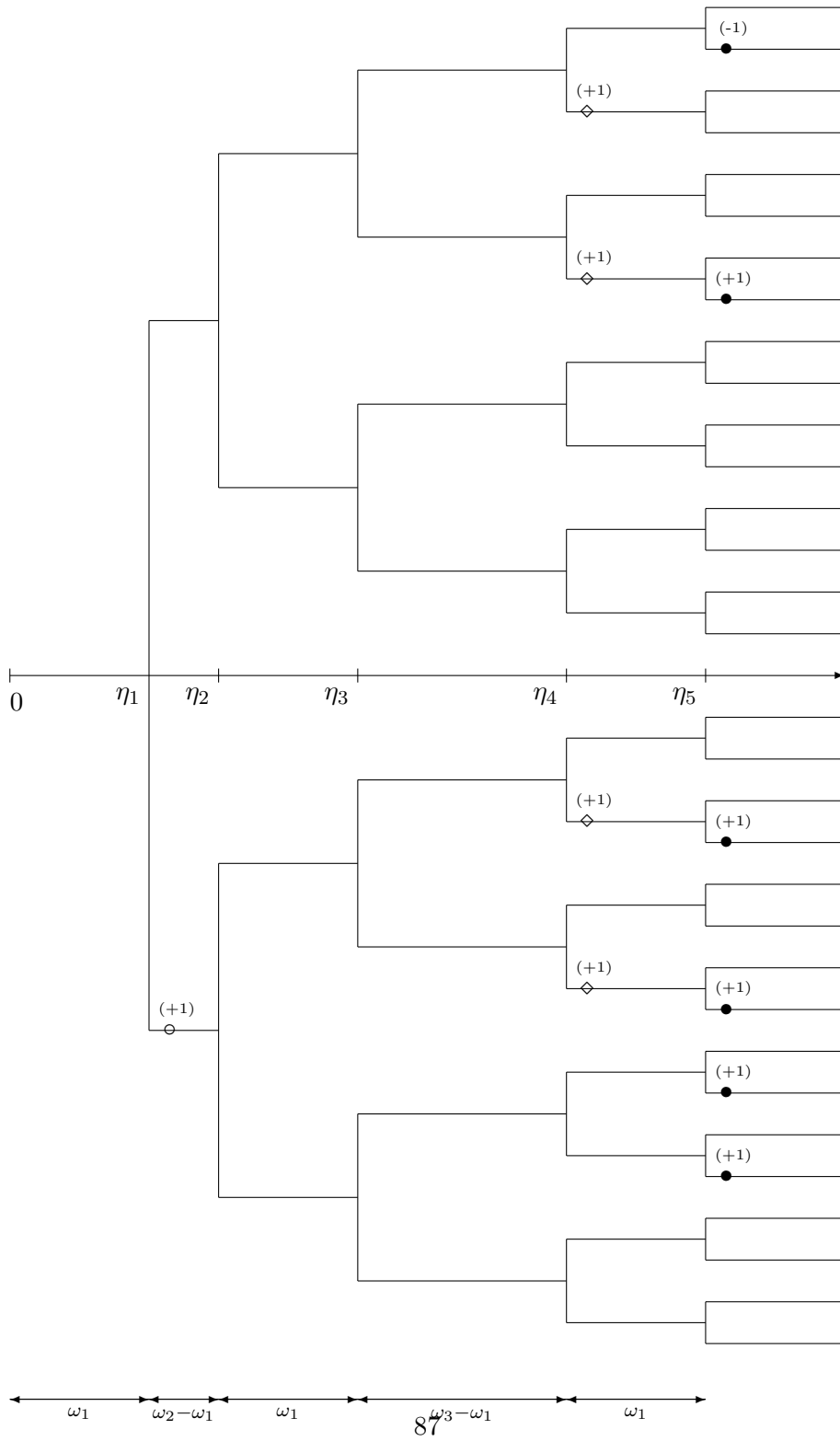
$$\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,-,\omega_3,+} = -\delta^{\omega_1,-,\omega_2,-,\omega_3,+} + \delta^{\omega_2,+,\omega_1,-,\omega_3,+} + \delta^{\omega_2,-,\omega_3,+,\omega_1,+}$$

Il est clair que cette expression n'est pas unique dans la mesure où on peut toujours faire intervenir les relations d'autocohérence. On peut figurer ce produit sur un espace suffisamment ramifié $\mathbf{R}^+//\Omega$ où les premiers éléments de Ω sont :

$$\eta_1 = \omega_1 ; \eta_2 = \omega_2 ; \eta_3 = \omega_1 + \omega_2 ; \eta_4 = \omega_2 + \omega_3 ; \eta_5 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

si $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$.

Il faut alors marquer les Diracs sur les $2^5 = 32$ branches au-dessus de $[\eta_5, \dots]$:



Sur cet espace, le Dirac $\delta^{\omega_1,+}$ reste atomique et son symbole est \circ . Par contre, le Dirac $\delta^{\omega_2,-,\omega_3,+}$ ne l'est plus et se décompose, en raison des relations d'autocohérence, en quatre atomes (symbole \diamond) :

$$\begin{aligned} \delta^{\omega_2,-,\omega_3,+} &= \delta^{\omega_1,-,(\omega_2-\omega_1),-\omega_1,-,(\omega_3-\omega_1),+} + \delta^{\omega_1,-,(\omega_2-\omega_1),-\omega_1,+,(\omega_3-\omega_1),+} \\ &\quad + \delta^{\omega_1,+,(\omega_2-\omega_1),-\omega_1,-,(\omega_3-\omega_1),+} + \delta^{\omega_1,+,(\omega_2-\omega_1),-\omega_1,+,(\omega_3-\omega_1),+} \end{aligned}$$

et de la même façon, le produit $\delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,-,\omega_3,+}$ (symbole \bullet) se décompose de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \delta^{\omega_1,+} * \delta^{\omega_2,-,\omega_3,+} &= -\delta^{\omega_1,-,(\omega_2-\omega_1),-\omega_1,-,(\omega_3-\omega_1),-\omega_1,+} + \delta^{\omega_1,-,(\omega_2-\omega_1),-\omega_1,+,(\omega_3-\omega_1),+\omega_1,+} \\ &\quad + \delta^{\omega_1,+,(\omega_2-\omega_1),-\omega_1,-,(\omega_3-\omega_1),+\omega_1,+} + \delta^{\omega_1,+,(\omega_2-\omega_1),-\omega_1,+,(\omega_3-\omega_1),+\omega_1,+} \\ &\quad + \delta^{\omega_1,+,(\omega_2-\omega_1),+\omega_1,-,(\omega_3-\omega_1),-\omega_1,+} + \delta^{\omega_1,+,(\omega_2-\omega_1),+\omega_1,-,(\omega_3-\omega_1),+\omega_1,+} \end{aligned}$$

Ces Diracs ramifiés vont aussi nous permettre de préciser l'action de *AVER* sur *RAMIF*(\mathbf{R}^+) et l'action de *ALIEN* sur *AVER* et *RAMIF*(\mathbf{R}^+).

C L'action de *AVER* sur *RAMIF*(\mathbf{R}^+) et l'action de *ALIEN* sur *AVER* et *RAMIF*(\mathbf{R}^+).

Nous *rappelons* simplement ici les définitions directes des actions de *AVER* sur *RAMIF*(\mathbf{R}^+) et nous *décrivons* celle de *ALIEN* sur *AVER* et *RAMIF*(\mathbf{R}^+) (pour plus de détail, voir [3], §A). Ici encore, par raison de densité, il nous suffit d'exprimer ces actions sur les Diracs ramifiés.

Proposition 1.27 *L'action de AVER sur les Diracs ramifiés obéit à la règle :*

$$(C.1) \quad \mathbf{m} \delta^{\omega_1,\varepsilon_1,\dots,\omega_s,\varepsilon_s,\omega_{s+1}} = \mathbf{m}^{\omega_1,\varepsilon_1,\dots,\omega_s,\varepsilon_s} \delta^{\omega_1+\dots+\omega_{s+1}}$$

et l'action de *ALIEN* obéit à la règle :

$$(C.2) \quad \mathbf{op}(\delta^{\omega_1,\varepsilon_1,\dots,\omega_s,\varepsilon_s,\omega_{s+1}}) = \sum_{j=0}^s \mathbf{op}^{\omega_1,\varepsilon_1,\dots,\omega_j,\varepsilon_j} \delta^{\omega_1+\dots+\omega_j} * \delta^{\omega_{j+1},\varepsilon_{j+1},\dots,\omega_s,\varepsilon_s,\omega_{s+1}}$$

Enfin, comme on l'a déjà signalé, l'action de *ALIEN* sur *AVER* obéit à la formule :

$$(C.3) \quad (\mathbf{m op})^{\omega_1,\varepsilon_1,\dots,\omega_s,\varepsilon_s} = \sum_{j=0}^s \mathbf{op}^{\omega_1,\varepsilon_1,\dots,\omega_j,\varepsilon_j} \mathbf{m}^{\omega_{j+1},\varepsilon_{j+1},\dots,\omega_s,\varepsilon_s}$$

Ces trois relations sont bien compatibles, ce qui signifie simplement que :

$$(C.4) \quad (\mathbf{m op}) \delta^{\omega_1,\varepsilon_1,\dots,\omega_s,\varepsilon_s,\omega_{s+1}} = \mathbf{m}(\mathbf{op} \delta^{\omega_1,\varepsilon_1,\dots,\omega_s,\varepsilon_s,\omega_{s+1}})$$

où, comme nous l'avons déjà vu, l'opérateur $(\mathbf{m op})$ agit comme une moyenne bien qu'il n'en soit pas exactement une : cet opérateur vérifie les relations d'autocohérence (1.1.5) mais sa masse totale $(\mathbf{m op})^\emptyset = \mathbf{m}^\emptyset \mathbf{op}^\emptyset$ peut être différente de 1.

On doit prêter une attention particulière à l'action (C.2). En effet, nous devons appliquer la règle de convolution spécifiée précédemment :

$$\delta^{\omega_1+\dots+\omega_j} * \delta^{\omega_{j+1},\varepsilon_{j+1},\dots,\omega_s,\varepsilon_s,\omega_{s+1}} = \delta^{\omega_{j+1},\varepsilon_{j+1},\dots,\omega_s,\varepsilon_s,(\omega_{s+1}+\omega_1+\dots+\omega_j)}$$

avec *postposition* de l'indice $(\omega_1 + \dots + \omega_j)$, et non pas la formule suivante qui consisterait à *préposer* ce même indice et pourrait, de prime abord, sembler plus naturel :

$$\delta^{\omega_1 + \dots + \omega_j} * \delta^{\omega_{j+1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \omega_s, \varepsilon_s, \omega_{s+1}} = \delta^{(\omega_1 + \dots + \omega_j + \omega_{j+1}), \varepsilon_{j+1}, \dots, \omega_s, \varepsilon_s, \omega_{s+1}}$$

En effet, avec cette deuxième définition (vicieuse), les trois produits $(\delta^{\omega_1} * \delta^{\omega_2, +}) * \delta^{\omega_3, -}$, $\delta^{\omega_2, +} * (\delta^{\omega_1} * \delta^{\omega_3, -})$ et $\delta^{\omega_1} * (\delta^{\omega_2, +} * \delta^{\omega_3, -})$ seraient généralement différents deux à deux, comme on s'en convainc par un calcul élémentaire.

L'action (C.2) sera qualifiée de stationnaire car l'image par un opérateur **op** d'un Dirac ramifié "au-dessus" d'un point donné est une somme de Diracs ramifiés "au-dessus" du même point dans les espaces \mathbf{R}^+/Ω . On aurait pu aussi définir une action propre en posant :

$$(C.5) \quad \mathbf{op}(\delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s, \omega_{s+1}}) = \sum_{j=0}^s \mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_j, \varepsilon_j} \delta^{\omega_{j+1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \omega_s, \varepsilon_s, \omega_{s+1}}$$

La différence n'est que dans le mode d'action : qu'on l'interprète comme algèbre d'opérateurs *propres ou stationnaires*, *ALIEN a exactement la même structure* (même *produit* et même *co-produit*).

Les *opérateurs propres* ont cependant l'avantage de conserver l'analyticité; ils agissent sur les fonctions résurgentes ordinaires et sont commodes pour l'étude des équations de résurgence.

Les *opérateurs stationnaires*, de leur côté, ont l'avantage de commuter avec la "dérivation naturelle" (qui change $\hat{\varphi}(\zeta)$ en $-\zeta\hat{\varphi}(\zeta)$ et qui est bien une dérivation par rapport au produit de convolution). En ce qui nous concerne, c'est surtout de l'*action stationnaire* que nous avons besoin dans cette étude, car c'est elle qui permet de relier deux à deux les *moyennes uniformisantes* :

$$(C.6) \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \text{ "stationnaire"}.$$

Chapitre 2

Moyennes de convolution induites par une diffusion.

2.1 Introduction.

Nous allons, dans cet article, décrire une classe de moyennes introduites par J. Ecalle : *les moyennes induites par diffusion*. Celles-ci ont la particularité de préserver systématiquement la convolution et la croissance latérale et un argument de parité permet d'obtenir, parmi ces moyennes, celles qui préservent la réalité.

Après avoir défini ce que nous nommerons une “diffusion”, nous construirons ces moyennes et nous donnerons l'ensemble de leurs propriétés. Nous appliquerons alors ce procédé à la sous-famille des moyennes “homogènes” et nous étudierons aussi la moyenne **mon** (*limite* de moyennes homogènes). Enfin, nous présenterons quelques arguments qui tendent à montrer que les moyennes préservant la réalité, la croissance latérale et la convolution sont “rares”.

Comme pour le premier chapitre, les objets (moyennes, opérateurs etc...) étudiés ici ont été introduits par J. Ecalle. De plus, en dehors des énoncés sur les limites des moyennes “homogènes” τ **mon** pour $\tau \rightarrow 0$ et $\tau \rightarrow +\infty$, il s'agit essentiellement d'un chapitre d'exposition, les résultats étant dus à J. Ecalle.

2.2 Diffusions discrètes ou continues et moyennes associées. Préservation de la croissance latérale.

2.2.1 Diffusions discrètes ou continues.

Nous allons définir ici ce que nous appellerons des “diffusions”, en un sens légèrement différent de celui qui est habituellement admis en théorie des probabilités. L'objectif est bien sûr d'obtenir des moyennes définies par leurs poids.

Diffusions discrètes.

Définition 2.1 Par diffusion discrète, nous entendons la donnée d'une famille de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ telle que $X_{n+p} = X_n + X_p$ pour tous p et n et X_1 a une loi de probabilité discrète P (à support dénombrable $E \subset \mathbf{R}$).

Cela permet de modéliser une marche aléatoire le long de l'axe réel dont la position au temps 0 est 0 et la position au temps n est donnée par la variable aléatoire X_n . On peut ainsi spécifier, pour n entier positif et pour a appartenant à \mathbf{R} , la probabilité $P(X_n = a)$:

$$P(X_n = a) = \sum_{b \in \mathbf{R}} P(X_{n-1} = b)P(X_1 = a - b)$$

Ceci est une somme dénombrable qui en fait n'est différente de 0 que sur un ensemble dénombrable de points de \mathbf{R} . Cet ensemble n'est évidemment autre que :

$$E_n = \{x_1 + \dots + x_n ; \forall i x_i \in E\}$$

Nous allons encore introduire quelques notations qui nous seront utiles pour définir des "poids". Par définition, on pose :

$$(2.2.1) \quad g_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a \in E_n} P(X_n = a)t^a$$

Il n'est alors pas difficile de voir que :

$$g_n(t) = (g_1(t))^n$$

Ces fonctions nous seront utiles pour déterminer la probabilité d'un évènement en utilisant les projecteurs suivants : soit $A \subset E_n$ alors le projecteur p_A agit sur $g_n(t)$ de la façon suivante :

$$(p_A g_n)(t) = \sum_{a \in A} P(X_n = a)t^a$$

On voit alors que $P(X_n \in A) = (p_A g_n)(1)$. On peut généraliser cette formule : si n_1, \dots, n_s sont des entiers positifs et si $A_i \subset E_{\tilde{n}_i}$ ($\tilde{n}_i = n_1 + \dots + n_i$) alors :

$$(2.2.2) \quad P(X_{\tilde{n}_1} \in A_1, \dots, X_{\tilde{n}_s} \in A_s) = (p_{A_s} g_{n_s} (p_{A_{s-1}} g_{n_{s-1}} \dots g_{n_2} (p_{A_1} g_{n_1}) \dots))(1)$$

Nous allons maintenant définir ce que nous appellerons une "diffusion continue".

Diffusions continues.

Définition 2.2 Par diffusion continue, nous entendons la donnée d'un semigroupe additif $\Omega \subset \mathbf{R}^+$ et d'une famille de fonctions intégrables $f_\omega(x)$ ($x \in \mathbf{R}$ et $\omega \in \Omega$) telles que :

$$(2.2.3) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega(x) dx &= 1 \quad (\forall \omega \in \Omega) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega_1}(x_1) f_{\omega_2}(x - x_1) dx_1 &= f_{\omega_1 + \omega_2}(x) \quad (\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega) \end{aligned}$$

Ceci nous permet de définir une famille de variables aléatoires $(X_\omega)_{\omega \in \Omega}$ telle que, X_ω a pour densité de probabilité f_ω et telle que, pour ω_1 et ω_2 dans Ω , $X_{\omega_1 + \omega_2} = X_{\omega_1} + X_{\omega_2}$.

Ceci permet de modéliser la trajectoire d'une particule partant de l'origine au temps $t=0$ et se déplaçant le long de \mathbf{R}^+ à vitesse unitaire en diffusant aléatoirement dans la direction verticale. Au temps $t = \omega$, son état sur l'axe vertical est décrit par (X_ω, f_ω) .

On peut enfin remarquer que les fonctions f_ω permettent de déterminer la probabilité d'un évènement. On a ainsi, pour $A \subset \mathbf{R}$ mesurable, $P(X_\omega \in A) = \int_{x \in A} f_\omega(x) dx$. On peut encore généraliser cette formule : Soient $\omega_1, \dots, \omega_s$ des éléments de Ω et A_1, \dots, A_s des ensembles mesurables de \mathbf{R} , alors, si $\tilde{\omega}_i = \omega_1 + \dots + \omega_i$, on a :

$$(2.2.4) \quad P(X_{\tilde{\omega}_1} \in A_1, \dots, X_{\tilde{\omega}_s} \in A_s) = \int_{\substack{x_1 \in A_1 \\ x_1 + x_2 \in A_2 \\ \dots \\ x_1 + \dots + x_s \in A_s}} f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_s}(x_s) dx_1 \dots dx_s$$

Du point de vue de la trajectoire d'une particule, cela représente la probabilité que celle-ci "arrive" dans l'ensemble A_1 au temps $\tilde{\omega}_1$ puis dans A_2 au temps $\tilde{\omega}_2$... puis dans l'ensemble A_s au temps $\tilde{\omega}_s$.

Ces "diffusions" vont nous permettre de définir des moyennes sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega)$ ou, dans le cas des diffusions discrètes, sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*)$

2.2.2 Moyenne moen induite par une diffusion.

Les définitions et propriétés sont analogues pour les diffusions discrètes ou continues. Par la suite, nous nous attacherons essentiellement au cas des diffusions continues.

Définition 2.3 Une moyenne **moen** sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*)$ est induite par une diffusion discrète si et seulement si ses poids sont définis par :

$$(2.2.5) \quad \mathbf{moen}^{n_1, \varepsilon_1, \dots, n_s, \varepsilon_s} = P(X_{n_1} \in E^{\varepsilon_1}, X_{n_1+n_2} \in E^{\varepsilon_2}, \dots, X_{\tilde{n}_s} \in E^{\varepsilon_s})$$

avec $E^+ = \mathbf{R}^+$ et $E^- = \mathbf{R}^{-*}$.

De même, une moyenne **moen** sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega)$ est induite par une diffusion continue $(X_\omega, f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ si et seulement si ses poids sont définis par :

$$(2.2.6) \quad \mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = P(X_{\omega_1} \in E^{\varepsilon_1}, X_{\omega_1+\omega_2} \in E^{\varepsilon_2}, \dots, X_{\tilde{\omega}_s} \in E^{\varepsilon_s})$$

Cette définition appelle quelques commentaires :

Dans le cas où $P(X_\omega = 0) \neq 0$ ($\omega \in \Omega$ ou $\omega \in \mathbf{N}^*$), nous avons arbitrairement choisi que de ne charger que les signes positifs ($E^+ = \mathbf{R}^+$ et $E^- = \mathbf{R}^{-*}$). Nous aurions pu faire le choix inverse. On peut aussi répartir ce terme sur les signes positifs et négatifs ; il existe plusieurs façons de le faire mais la définition de cette répartition est délicate. Pour les mesures discrètes, les choix "droite" et "gauche" sont différents mais cohérents. Dans le cas des diffusions continues ce choix est sans importance. Quoiqu'il en soit, cela n'a aucune incidence sur les propriétés importantes des moyennes induites par diffusion.

Dans le cas d'une diffusions discrète, étant données (2.2.1) et (2.2.2), en posant $p_+ = p_{E^+}$ et $p_- = p_{E^-}$, on obtient facilement :

$$(2.2.7) \quad \mathbf{moen}^{n_1, \varepsilon_1, \dots, n_s, \varepsilon_s} = (p_{\varepsilon_s} g_{n_s} (p_{\varepsilon_{s-1}} g_{n_{s-1}} \dots g_{n_2} (p_{\varepsilon_1} g_{n_1}) \dots))(1)$$

Dans le cas des diffusions continues, de la même façon, en utilisant (2.2.3) et (2.2.4), on a :

$$(2.2.8) \quad \mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \int_{\mathbf{R}^s} f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_s}(x_s) \sigma_{\varepsilon_1}(\check{x}_1) \dots \sigma_{\varepsilon_s}(\check{x}_s) dx_1 \dots dx_s$$

avec les fonctions en escalier σ_+ et σ_- :

$$(2.2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_+ &= 1 \text{ (resp. } 0) \text{ si } x \geq 0 \text{ (resp. } x < 0) \\ \sigma_- &= 1 \text{ (resp. } 0) \text{ si } x < 0 \text{ (resp. } x \geq 0) \end{aligned}$$

On peut tout de suite énoncer la propriété suivante :

Proposition 2.1 *Toute moyenne **moen** induite par diffusion vérifie la propriété P0 et préserve la convolution. Si de plus, pour tout ω , $P(X_\omega = 0) = 0$, et si $g_n(1/t) = g_n(t)$ (pour les diffusions discrètes) ou si la distribution f_ω est paire (pour les diffusions continues), la moyenne **moen** préserve la réalité.*

Démonstration :

Le fait que **moen** vérifie P0 et que, sous les hypothèses précédentes, elle préserve la réalité (P1), découle directement des formules (2.2.7) et (2.2.8).

Si on pose, pour une diffusion discrète, $f_n(x) = \sum_{a \in E_n} P(X_n = a) \delta_a(x)$ (δ_a est la mesure de Dirac en a), alors les f_n vérifient les mêmes relations (2.2.3) et la formule (2.2.7) s'identifie à la formule (2.2.8). Cet argument nous permettra désormais de n'envisager que le cas des diffusions continues dans les démonstrations à venir. Montrer que **moen** préserve la convolution équivaut à montrer (cf [6]) que le moule $R\mathbf{m}^\bullet$ est symétrérel avec :

$$R\mathbf{m}^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \mathbf{moen}^{\omega_1, +, \omega_2, +, \dots, \omega_s, +}$$

Or, à partir de (2.2.8), nous allons montrer que cela est vrai. Pour deux séquences $\omega' = \omega'_1, \dots, \omega'_{s'}$ et $\omega'' = \omega''_1, \dots, \omega''_{s''}$, en utilisant la formule (2.2.3), on vérifie aisément que :

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in ctsh(\omega', \omega'')} R\mathbf{m}^\omega &= \\ &\int_{\substack{\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_{s'}) \in \mathbf{R}^{s'} \\ \mathbf{x}'' = (x''_1, \dots, x''_{s''}) \in \mathbf{R}^{s''}}} f_{\omega'_1}(x'_1) \dots f_{\omega'_{s'}}(x'_{s'}) f_{\omega''_1}(x''_1) \dots f_{\omega''_{s''}}(x''_{s''}) \sum_{\mathbf{x} \in ctsh(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')} R^{\mathbf{x}} dx'_1 \dots dx''_{s''} \end{aligned}$$

avec

$$R^{x_1, \dots, x_s} = (-1)^s \sigma_+(\check{x}_1) \dots \sigma_+(\check{x}_s)$$

et par récurrence sur la longueur des séquences envisagées, il n'est pas difficile de voir que le moule R^\bullet est symétrérel. Nous ne nous appesantirons pas sur ce point car nous montrerons que **moen** préserve la convolution dans la section 2.2.7. On a donc :

$$\sum_{\omega \in ctsh(\omega', \omega'')} R\mathbf{m}^\omega$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\substack{\mathbf{x}'=(x'_1, \dots, x'_{s'}) \in \mathbf{R}^{s'} \\ \mathbf{x}''=(x''_1, \dots, x''_{s''}) \in \mathbf{R}^{s''}}} f_{\omega'_1}(x'_1) \dots f_{\omega'_{s'}}(x'_{s'}) f_{\omega''_1}(x''_1) \dots f_{\omega''_{s''}}(x''_{s''}) R^{\mathbf{x}'} R^{\mathbf{x}''} dx'_1 \dots dx''_{s''} \\
&= R\mathbf{m}^{\omega'} R\mathbf{m}^{\omega''}
\end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que $R\mathbf{m}^\bullet$ est symétriel et donc **moen** préserve la convolution.

◁

De la même façon, on peut, à partir d'une diffusion, définir une dérivation.

2.2.3 Dérivation doen induite par une diffusion.

Proposition - Définition 2.1 *Etant donné une diffusion de distribution f_ω (dans le cas d'une diffusion discrète, chaque f_ω est une somme de Diracs), on peut définir un opérateur **doen** sur $RAMIF(\mathbf{R}^+ // \Omega)$ ($\Omega = \mathbf{N}^*$ pour une diffusion discrète) par ses poids :*

$$(2.2.10) \quad \mathbf{doen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \varepsilon_s \int_{\mathbf{R}^s} f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_s}(x_s) \sigma_{\varepsilon_1}(\check{x}_1) \dots \sigma_{\varepsilon_{s-1}}(\check{x}_{s-1}) \delta_0(\check{x}_s) dx_1 \dots dx_s$$

Cet opérateur est une dérivation et on dira que **doen** est la dérivation induite par la diffusion.

Pour montrer que **doen** est effectivement une dérivation, il suffit, compte-tenu de la section 2.2.8, de prouver l'alternativité du moule $R\mathbf{d}^\bullet$ défini par :

$$R\mathbf{d}^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \mathbf{doen}^{\omega_1, +, \omega_2, +, \dots, \omega_s, +}$$

or ceci est vrai, comme on le voit par un argument similaire à celui utilisé pour établir la proposition 2.1.

On peut généraliser les définitions de **moen** et **doen** à des familles paramétrées **moe_t** et **doe_t**.

2.2.4 Moyennes paramétrées moe_t et dérivations paramétrées doe_t.

Nous allons nous intéresser aux cas de diffusions continues.

Définition 2.4 *Soit une diffusion continue donnée par sa famille de fonctions intégrables $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$. Alors, on peut définir, pour tout réel t , une nouvelle diffusion $(f_\omega^t)_{\omega \in \Omega}$ par :*

$$(2.2.11) \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad f_\omega^t(x) = f_\omega(x - t\omega)$$

Ces fonctions vérifient encore (2.2.3) et induisent donc une moyenne **moe_t** et une dérivation **doe_t**. On a donc une famille $(\mathbf{moe}_t)_{t \in \mathbf{R}}$ (resp. $(\mathbf{doe}_t)_{t \in \mathbf{R}}$) de moyennes (resp. dérivations). Bien sûr, **moen** = **moe₀** et **doen** = **doe₀**.

L'introduction du paramètre t permet d'établir un lien entre moyennes et dérivations. En effet :

Proposition 2.2 Si les fonctions f_ω sont dérivables de dérivée intégrable, alors, \mathbf{moe}_t est dérivable et :

$$(2.2.12) \quad \partial_t \mathbf{moe}_t = \mathbf{moe}_t(\nabla \mathbf{doe}_t)$$

(bien sûr, pour un opérateur \mathbf{op} de poids $\mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$, $\nabla \mathbf{op}$ désigne l'opérateur de poids $(\omega_1 + \dots + \omega_s) \mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$).

Démonstration :

Etant donnée la formule (2.2.8), il est clair que, si les fonctions f_ω sont dérivables de dérivée intégrable, alors \mathbf{moe}_t est dérivable et on a :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{moe}_t^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} &= \\ & \sum_{i=1}^s -\omega_i \int_{\mathbf{R}^s} f_{\omega_1}(x_1 - t\omega_1) \dots f'_{\omega_i}(x_i - t\omega_i) \dots f_{\omega_s}(x_s - t\omega_s) \sigma_{\varepsilon_1}(\tilde{x}_1) \dots \sigma_{\varepsilon_s}(\tilde{x}_s) dx_1 \dots dx_s \end{aligned}$$

En intégrant par partie les f'_{ω_i} , il n'est pas difficile d'obtenir que :

$$\begin{aligned} & -\omega_s \int_{\mathbf{R}^s} f_{\omega_1}(x_1 - t\omega_1) \dots f'_{\omega_s}(x_s - t\omega_s) \sigma_{\varepsilon_1}(\tilde{x}_1) \dots \sigma_{\varepsilon_s}(\tilde{x}_s) dx_1 \dots dx_s \\ &= \varepsilon_s \omega_s \int_{\mathbf{R}^{s-1}} f_{\omega_1}(x_1 - t\omega_1) \dots f_{\omega_s}(-\tilde{x}_{s-1} - t\omega_s) \sigma_{\varepsilon_1}(\tilde{x}_1) \dots \sigma_{\varepsilon_{s-1}}(\tilde{x}_{s-1}) dx_1 \dots dx_{s-1} \\ &= \varepsilon_s \omega_s \int_{\mathbf{R}^s} f_{\omega_1}(x_1 - t\omega_1) \dots f_{\omega_s}(x_s - t\omega_s) \sigma_{\varepsilon_1}(\tilde{x}_1) \dots \sigma_{\varepsilon_{s-1}}(\tilde{x}_{s-1}) \delta(\tilde{x}_s) dx_1 \dots dx_s \\ &= \omega_s \mathbf{doe}_t^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \end{aligned}$$

et de la même manière, pour $i \leq s-1$,

$$\begin{aligned} & -\omega_i \int_{\mathbf{R}^s} f_{\omega_1}(x_1 - t\omega_1) \dots f'_{\omega_i}(x_i - t\omega_i) \dots f_{\omega_s}(x_s - t\omega_s) \sigma_{\varepsilon_1}(\tilde{x}_1) \dots \sigma_{\varepsilon_s}(\tilde{x}_s) dx_1 \dots dx_s \\ &= \omega_i \left(\sum_{k=i}^s \mathbf{doe}_t^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_k, \varepsilon_k} \mathbf{moe}_t^{\omega_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \right) \end{aligned}$$

En regroupant les différents termes, on obtient sans difficulté l'équation (2.2.12).

◁

2.2.5 Représentations des Diracs ramifiés et des pseudovariabes induites par une diffusion continue.

Afin de décrire la convolution sur $\mathbf{RAMIF}(\mathbf{R}^+)$, on peut faire usage de deux algèbres : \mathbf{DIRAC} et \mathbf{PSEUDO} . Pour plus de détails voir Chapitre 1 et [3], §A.2.

L'algèbre \mathbf{DIRAC} est l'algèbre engendrée par les Diracs ramifiés :

$$(2.2.13) \quad \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s, \omega_{s+1}} \quad (\omega_1 > 0 ; \dots ; \omega_s > 0 ; \omega_{s+1} \geq 0 ; \varepsilon_j \in \{+, -\})$$

Ceux-ci vérifient les relations d'autocoherence :

$$(2.2.14) \quad \sum_{\varepsilon_j = \pm} \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s, \omega_{s+1}} = \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_j + \omega_{j+1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \omega_{s+1}} \quad (\forall j \leq s)$$

et leur convolution est déterminée par les règles :

$$(2.2.15) \quad \delta^{\omega_1} * \delta^{\omega_2} = \delta^{\omega_1 + \omega_2}$$

$$(2.2.16) \quad \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} * \delta^{\omega_{s+1}} = \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s, \omega_{s+1}}$$

et par la symétrie du moule $R\delta^\bullet$ construit avec les Diracs latéraux droits :

$$(2.2.17) \quad R\delta^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \delta^{\omega_1, +, \omega_2, +, \dots, \omega_s, +}$$

ou, de manière équivalente, par la symétrie du moule $L\delta^\bullet$ construit avec les Diracs latéraux gauches :

$$(2.2.18) \quad L\delta^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \delta^{\omega_1, -, \omega_2, -, \dots, \omega_s, -}$$

De même on peut définir *PSEUDO* comme le quotient de *DIRAC* par l'idéal engendré par les éléments δ^{ω_0} ($\omega_0 > 0$). Cette algèbre (notée multiplicativement) est engendrée par les éléments :

$$(2.2.19) \quad z^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \quad (\omega_1 > 0 ; \dots ; \omega_s > 0 ; \varepsilon_j \in \{+, -\})$$

qui vérifient les relations d'autocoherence :

$$(2.2.20) \quad \sum_{\varepsilon_j = \pm} z^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = z^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_j + \omega_{j+1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \quad (\forall j < s)$$

$$(2.2.21) \quad \sum_{\varepsilon_s = \pm} z^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = 0$$

et dont le produit est déterminé par la symétrie du moule Rz^\bullet :

$$(2.2.22) \quad Rz^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s z^{\omega_1, +, \omega_2, +, \dots, \omega_s, +}$$

ou, de manière équivalente, par la symétrie du moule Lz^\bullet :

$$(2.2.23) \quad Lz^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s z^{\omega_1, -, \omega_2, -, \dots, \omega_s, -}$$

Etant données ces algèbres, une représentation des Diracs ramifiés (resp. des pseudovariations) est alors simplement un homomorphisme d'algèbre de *DIRAC* (resp. *PSEUDO*) dans une algèbre donnée. On peut maintenant énoncer la propriété suivante :

Proposition 2.3 *Toute diffusion continue, donnée par une famille $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$, induit deux représentations. La première :*

$$(2.2.24) \quad \begin{cases} PSEUDO & \rightarrow \mathbf{R} \\ z^\varpi & \mapsto \mathbf{moen}^\varpi \end{cases}$$

est une représentation de *PSEUDO* dans l'algèbre multiplicative \mathbf{R} . La seconde :

$$(2.2.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{DIRAC} \rightarrow L_1(\mathbf{R}) \\ \delta^\varpi \mapsto f^\varpi \end{array} \right.$$

est une représentation de *DIRAC* dans l'algèbre de convolution $L_1(\mathbf{R})$ des fonctions intégrables sur \mathbf{R} .

Bien sûr, ϖ est de la forme $\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s$ (ou avec un dernier indice ω_{s+1} mais celui-ci correspond, dans la représentation de *DIRAC*, à la convolution avec $f_{\omega_{s+1}}(x)$) et la représentation (2.2.25) est définie comme suit :

$$(2.2.26) \quad f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(x) \stackrel{def}{=} \int_{\mathbf{R}^s} f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_s}(x_s) \sigma_{\varepsilon_1}(\check{x}_1) \dots \sigma_{\varepsilon_s}(\check{x}_s) \delta_0(\check{x}_s - x) dx_1 \dots dx_s$$

soit encore :

$$f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(x) \stackrel{def}{=} \int_{\mathbf{R}^{s-1}} f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_{s-1}}(x_{s-1}) f_{\omega_s}(x - \check{x}_{s-1}) \sigma_{\varepsilon_1}(\check{x}_1) \dots \sigma_{\varepsilon_{s-1}}(\check{x}_{s-1}) \sigma_{\varepsilon_s}(x) dx_1 \dots dx_{s-1}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$(2.2.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} f^{\omega_1, \varepsilon_1}(x) = f_{\omega_1}(x) \sigma_{\varepsilon_1}(x) \\ f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(x) = (f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}} * f_{\omega_s})(x) \sigma_{\varepsilon_s}(x) \quad (s \geq 2) \end{array} \right.$$

Démonstration :

Pour démontrer cette proposition, il suffit de vérifier que ces représentations ont un produit qui obéit aux règles qui déterminent le produit de *DIRAC* ou *PSEUDO*. Dans le cas de la représentation (2.2.24), le simple fait que **moen** préserve la convolution suffit à obtenir le résultat attendu (voir [3]).

Pour la représentation (2.2.25), on peut remarquer que :

$$(2.2.28) \quad \sum_{\varepsilon_i = \pm} f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_i, \varepsilon_i, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(x) = f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_i + \omega_{i+1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(x) \quad (i < s)$$

$$\sum_{\varepsilon_s = \pm} f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(x) = (f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}} * f_{\omega_s})(x)$$

Etant donné ces relations d'autocohérence, on peut se restreindre à montrer (voir [3]) que le moule $M^\bullet(x)$:

$$(2.2.29) \quad M^{\omega_1, \dots, \omega_s}(x) \stackrel{def}{=} (-1)^s f^{\omega_1, +, \omega_2, +, \dots, \omega_s, +}(x)$$

vérifie les relations de "symétrellité" :

$$(2.2.30) \quad \sum_{\omega \in \text{ctsh}(\omega', \omega'')} M^\omega(x) = (M^{\omega'} * M^{\omega''})(x)$$

Mais si on se reporte à la démonstration de la proposition 2.1, on remarque alors que :

$$\sum_{\omega \in ctsh(\omega', \omega'')} M^\omega(x) = \int_{\substack{\mathbf{x}'=(x'_1, \dots, x'_{s'}) \in \mathbf{R}^{s'} \\ \mathbf{x}''=(x''_1, \dots, x''_{s''}) \in \mathbf{R}^{s''}}} f_{\omega'_1}(x'_1) \dots f_{\omega'_{s'}}(x'_{s'}) f_{\omega''_1}(x''_1) \dots f_{\omega''_{s''}}(x''_{s''}) \delta_0(\tilde{x}'_{s'} + \tilde{x}''_{s''} - x) \sum_{\mathbf{x} \in ctsh(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')} R^{\mathbf{x}} dx'_1 \dots dx''_{s''}$$

avec

$$R^{x_1, \dots, x_s} = (-1)^s \sigma_+(\tilde{x}_1) \dots \sigma_+(\tilde{x}_s)$$

Grâce à la démonstration de la proposition 2.1, on obtient :

$$\sum_{\omega \in ctsh(\omega', \omega'')} M^\omega(x) = \int_{\substack{\mathbf{x}'=(x'_1, \dots, x'_{s'}) \in \mathbf{R}^{s'} \\ \mathbf{x}''=(x''_1, \dots, x''_{s''}) \in \mathbf{R}^{s''}}} f_{\omega'_1}(x'_1) \dots f_{\omega'_{s'}}(x'_{s'}) f_{\omega''_1}(x''_1) \dots f_{\omega''_{s''}}(x''_{s''}) \delta_0(\tilde{x}'_{s'} + \tilde{x}''_{s''} - x) R^{\mathbf{x}'} R^{\mathbf{x}''} dx'_1 \dots dx''_{s''}$$

et un calcul simple montre que l'équation (2.2.30) est bien vérifiée.

◁

On peut, pour la représentation (2.2.25), appliquer la transformation de Fourier afin d'obtenir une nouvelle représentation de *DIRAC*. Cette transformation permet aussi d'obtenir, dans certains cas, de nouvelles formules pour définir **moen** et **doen**.

2.2.6 Diffusions continues et transformation de Fourier.

Nous allons rappeler la définition de la transformation de Fourier ainsi qu'un certain nombre de ses propriétés, puis nous les appliquerons aux définitions et propriétés des sections précédentes.

A une fonction intégrable f on peut associer sa transformée de Fourier (cf [8]) :

$$(2.2.31) \quad g(y) = (\mathcal{F}f)(y) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{ixy} dx$$

On a les propriétés classiques (voir [8]) :

– $(\mathcal{F}f)(y) = g(y)$ est une fonction continue, bornée et on a :

$$(2.2.32) \quad g(0) = \int_{\mathbf{R}} f(x) dx$$

$$\|g\|_\infty \leq \|f\|_1$$

– On a de plus : $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} g(y) = 0$.

– Soient deux fonctions intégrables f_1 et f_2 , alors $f_1 * f_2$ est une fonction intégrable et :

$$(2.2.33) \quad \mathcal{F}(f_1 * f_2) = (\mathcal{F}f_1)(\mathcal{F}f_2)$$

– Si $\mathcal{F}f = g$ est intégrable, alors on peut définir la transformée de Fourier inverse :

$$(2.2.34) \quad (\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} g(y) e^{-ixy} dy$$

Utilisant ces propriétés, on peut associer à une diffusion continue (définie par le semigroupe de convolution $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$) un semigroupe multiplicatif $(g_\omega(y))_{\omega \in \Omega}$ (dans toute la suite nous noterons $g_\omega \stackrel{def}{=} \mathcal{F}f_\omega$) de fonctions continues qui sont bornées et tendent vers 0 à l'infini (on notera $g_\omega \in \mathbf{C}_0$). Cette famille hérite des propriétés (2.2.3) :

$$(2.2.35) \quad \begin{aligned} g_\omega(0) &= 1 \\ g_{\omega_1}(y) g_{\omega_2}(y) &= g_{\omega_1 + \omega_2}(y) \quad (\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega) \end{aligned}$$

De plus, si $g_1(y)$ ne s'annule pas (et $1 \in \Omega$), alors $g_\omega(y) = (g_1(y))^\omega$. On peut réécrire ce que l'on a énoncé précédemment :

Proposition 2.4 *Etant donné une diffusion continue, on obtient une nouvelle représentation de DIRAC dans \mathbf{C}_0 (algèbre multiplicative) par transformation de Fourier :*

$$(2.2.36) \quad \begin{cases} \text{DIRAC} & \rightarrow \mathbf{C}_0 \\ \delta^\varpi & \mapsto g^\varpi \end{cases}$$

où $g^\varpi = \mathcal{F}f^\varpi$ avec f^ϖ défini par (2.2.27). De plus :

$$(2.2.37) \quad \mathbf{moen}^\varpi = g^\varpi(0)$$

Démonstration :

L'existence de la représentation (2.2.36) est une conséquence immédiate, par transformation de Fourier, de celle de la représentation (2.2.25) et de la propriété (2.2.33). De plus, il est clair, étant donnée la relation (2.2.32), que :

$$\mathbf{moen}^\varpi = \int_{\mathbf{R}} f^\varpi(x) dx = g^\varpi(0)$$

◁

Nous allons maintenant voir que, lorsque les fonctions $g_\omega(y)$ appartiennent à une classe particulière, alors on obtient de nouvelles expressions de \mathbf{moen}^ϖ et $g^\varpi(y)$. Pour h réel strictement positif, nous noterons B_h la bande du plan complexe :

$$B_h = \{x + iy, -h \leq y \leq h\}$$

On peut alors définir le sous ensemble \mathcal{A} de \mathbf{C}_0 des fonctions g pour lesquelles on peut choisir h, α, C réels strictement positifs tels que g soit holomorphe sur B_h , et :

$$\forall y \in B_h \quad |g(y)| \leq \frac{C}{(1 + |y|^2)^\alpha}$$

On a la propriété :

Proposition 2.5 *Etant donné une diffusion continue, alors, si la famille $(g_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est incluse dans \mathcal{A} (par exemple si g_1 ne s'annule pas et appartient à \mathcal{A}), on a les formules suivantes :*

$$(2.2.38) \quad g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y) = \frac{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s}{(2i\pi)^s} \int_{\mathbf{R}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s}^s} g_{\omega_1}(y_1) \dots g_{\omega_s}(y_s) \frac{dy_1 \dots dy_s}{(y_1 - y_2) \dots (y_{s-1} - y_s)(y_s - y)}$$

Par conséquent :

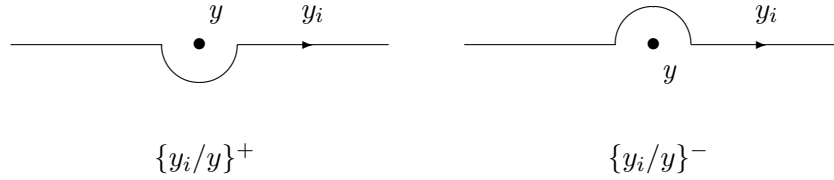
$$(2.2.39) \quad \mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \frac{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s}{(2i\pi)^s} \int_{\mathbf{R}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s}^s} g_{\omega_1}(y_1) \dots g_{\omega_s}(y_s) \frac{dy_1 \dots dy_s}{(y_1 - y_2) \dots (y_{s-1} - y_s)y_s}$$

et, de plus, si $g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}}(y)g_{\omega_s}(y)$ est intégrable, alors :

$$(2.2.40) \quad \mathbf{doen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \frac{\varepsilon_s}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}}(y_s) g_{\omega_s}(y_s) dy_1 \dots dy_s$$

Dans toutes ces intégrales,

$\mathbf{R}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s}^s$ représente un multichemin $\{y_1/y_2\}^{\varepsilon_1} \dots \{y_{s-1}/y_s\}^{\varepsilon_{s-1}} \{y_s/y\}^{\varepsilon_s}$ ($y=0$ dans la deuxième équation) où le symbole $\{y_i/y\}^\varepsilon$ représente le contour suivant :



avec un demi-cercle de rayon ρ suffisamment petit pour que l'intégrande soit définie sur ce chemin.

Démonstration : Elle tient essentiellement en un lemme :

Lemme 2.1 *Soit g une fonction de \mathcal{A} , transformée de Fourier de f , alors :*

$$g^\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon}{2i\pi} \int_{\mathbf{R}_\varepsilon^1} \frac{g(y)}{y - z} dy$$

existe, est indépendante de la distance ρ de contournement de z et définit une fonction analytique bornée dans une bande B_h . De plus, $g^\varepsilon(z)$ est la transformée de Fourier de $f(x)\sigma_\varepsilon(x)$.

Une fois ce lemme acquis, il n'est pas difficile de conclure, par récurrence. La formule (2.2.39) est une conséquence directe de (2.2.38) et de (2.2.32), vu que :

$$\mathbf{moen}^\varpi = \int_{\mathbf{R}} f^\varpi(x) dx$$

Nous allons d'abord montrer la formule (2.2.38) par récurrence. Selon la définition (2.2.27), on a $f^{\omega_1, \varepsilon_1}(x) = f_{\omega_1}(x)\sigma_{\varepsilon_1}(x)$. En appliquant le lemme 1, on a immédiatement que $(\mathcal{F}f^{\omega_1, \varepsilon_1})(y) = \frac{\varepsilon_1}{2i\pi} \int_{\mathbf{R}_{\varepsilon_1}^1} \frac{g_{\omega_1}(y_1)}{y_1 - y} dy_1$, fonction analytique bornée sur une bande B_h . Supposons maintenant que pour s donné, et pour tout choix de ω_i et ε_i , la transformée de Fourier de $f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$ soit donnée par la formule (2.2.38) et soit une fonction analytique bornée dans une bande B_h . Alors, $g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y)g_{\omega_{s+1}}(y)$ appartient à \mathcal{A} et est la transformée de Fourier de $(f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} * f_{\omega_{s+1}})(x)$. On peut appliquer à nouveau le lemme et l'on trouve que :

$$g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s, \omega_{s+1}, \varepsilon_{s+1}}(y) = \frac{\varepsilon_{s+1}}{2i\pi} \int_{\mathbf{R}_{\varepsilon_{s+1}}^1} g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y_s)g_{\omega_{s+1}}(y_s) \frac{dy_s}{y_s - y}$$

est une fonction analytique bornée sur une bande B_h et n'est autre que la transformée de Fourier de $(f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} * f_{\omega_{s+1}})(x)\sigma_{\varepsilon_{s+1}}(x)$ ou encore, si l'on préfère, de $f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s, \omega_{s+1}, \varepsilon_{s+1}}(x)$ (voir (2.2.27)). On obtient alors immédiatement la formule (2.2.38). Pour obtenir la formule (2.2.40), on commence par remarquer que :

$$\text{doen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \varepsilon_s(f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}} * f_{\omega_s})(0)$$

Mais la transformée de Fourier de $f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}} * f_{\omega_s}$ est $g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}}(y)g_{\omega_s}(y)$ et si cette dernière fonction est intégrable, on peut lui appliquer la transformation inverse. Raisonnant comme en (2.2.32), on obtient :

$$\frac{\varepsilon_s}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}}(y_s)g_{\omega_s}(y_s)dy_s = \varepsilon_s(f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}} * f_{\omega_s})(0)$$

On obtient immédiatement la formule (2.2.40) et il ne reste donc plus qu'à montrer le lemme 1. Soit donc une fonction g de \mathcal{A} , sur une bande B_{h_0} . Nous allons examiner le cas de $g^+(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{R}_+^1} \frac{g(y)}{y-z} dy$ (la

démonstration pour $\varepsilon = -$ est la même). Cette intégrale est bien définie si on prend une distance ρ de contournement de z telle que le chemin reste dans B_{h_0} (on a convergence grâce aux majorations des fonctions de \mathcal{A}). Comme l'intégrande est holomorphe, on peut, sans changer la valeur de l'intégrale, déformer un peu le contour et donc cette intégrale ne dépend pas de ρ . Fixons maintenant un ρ . Soit \tilde{z} tel que $|z - \tilde{z}| < \rho$ où z est à l'intérieur de la bande B_{h_0} . On a alors :

$$g^+(\tilde{z}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{R}_+^1} \frac{g(y)}{y - \tilde{z}} dy$$

et on peut choisir comme chemin d'intégration celui qui contourne z à distance ρ .

$$g^+(\tilde{z}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{R}_+^1} \frac{g(y)}{y - z} \frac{1}{1 - \left(\frac{\tilde{z}-z}{y-z}\right)} dy$$

Mais puisque $\left(\frac{\tilde{z}-z}{y-z}\right) < 1$, on peut développer $\frac{1}{1 - \left(\frac{\tilde{z}-z}{y-z}\right)}$ en série normalement convergente. Par suite :

$$g^+(\tilde{z}) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbf{R}_+^1} \frac{g(y)}{(y-z)^n} dy \right) (\tilde{z}-z)^n$$

Ceci prouve que $g^+(z)$ est holomorphe en tout point intérieur à B_{h_0} et donc sur une bande $B_h \subset B_{h_0}$. Pour montrer maintenant que g^+ est bornée, on se place sur B_h . Sur cette bande on peut fixer uniformément une distance de contournement ρ pour tout z et décomposer l'intégrale de $g^+(z)$ en deux morceaux :

- une intégrale sur le demi-cercle de contournement. Comme $g(y)$ est borné, cette intégrale est inférieure à C/ρ .
- une intégrale sur la partie du chemin telle que $|y - z| \geq \rho$. Or on sait que :

$$|g(y)| \leq \frac{C}{(1 + |y|^2)^\alpha}$$

et donc si α est plus grand que 1, cette portion de l'intégrale est inférieure à :

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1 + |y|^2} \leq \frac{1}{2\rho}$$

sinon, soit $p = 1/\alpha$ et $q = 1/(1 - \alpha)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). On peut alors appliquer l'inégalité de Hölder. Cette portion de l'intégrale est alors inférieure à :

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1 + |y|^2} \right)^\alpha \left(\int_{|y-z| \geq \rho} \frac{dy}{|y-z|^{1/(1-\alpha)}} \right)^{1-\alpha} \leq \frac{1}{2\pi} \pi^\alpha \left(\frac{2\alpha}{\rho^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\alpha)} \right)^{1-\alpha}$$

Dans tous les cas de figure, g^+ est bornée sur B_h . Il reste donc à montrer que $g^+(z)$ (avec z réel) est bien la transformée de Fourier de $f(x)\sigma_+(x)$. Par commodité, nous noterons $C^+(z, \rho)$ le demi-cercle inférieur de rayon ρ . On a :

$$g^+(z) = I_1(z) + I_2(z) + I_3(z)$$

avec

$$I_1(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(z, \rho)} \frac{g(y)}{y-z} dy, \quad I_2(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{A \geq |y-z| \geq \rho} \frac{g(y)}{y-z}, \quad I_3(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|y-z| \geq A} \frac{g(y)}{y-z}$$

Soit δ positif fixé. Alors on peut fixer A tel que :

$$\forall z \in \mathbf{R}, \quad |I_3(z)| \leq \delta$$

Par un argument similaire à celui utilisé pour démontrer la formule intégrale de Cauchy, on peut fixer ρ tel que :

$$\forall z \in \mathbf{R}, \quad |I_1(z) - \frac{1}{2}g(z)| \leq \delta$$

On rappelle maintenant que $g(y) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{ixy} dx$ et donc :

$$I_2(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{A \geq |y-z| \geq \rho} \int_{\mathbf{R}} \frac{f(x)e^{ixy}}{y-z} dx dy$$

Sur ce domaine, on peut sans difficulté appliquer le théorème de Fubini et donc :

$$I_2(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{R}} f(x) \int_{A \geq |y-z| \geq \rho} \frac{e^{ixy}}{y-z} dy dx$$

En posant $u = y - z$, on obtient :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{A \geq |y-z| \geq \rho} \frac{e^{ixy}}{y-z} dy = \frac{e^{ixz}}{\pi} \int_{\rho}^A \frac{\sin xu}{u} du$$

On peut ensuite prendre A plus grand et ρ plus petit, de manière à avoir :

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\rho}^A \frac{\sin xu}{u} du - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) \right| \leq \frac{\delta}{\|f\|_1}$$

où $\operatorname{sgn}(x)$ est le signe de x (on prendra par convention $\operatorname{sgn}(0)=+1$). Donc :

$$\left| I_3(z) - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} f(x) \operatorname{sgn}(x) e^{ixz} dx \right| \leq \delta$$

En regroupant ces trois termes, comme g^+ est indépendant de ρ et A et comme $g(y) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{ixy} dx$, quel que soit le réel δ :

$$\left| g^+(z) - \int_{\mathbf{R}} f(x) \frac{1 + \operatorname{sgn}(x)}{2} e^{ixz} dx \right| \leq 3\delta$$

Donc, en remarquant que $\frac{1 + \operatorname{sgn}(x)}{2} = \sigma_+(x)$, pour tout z réel, on a :

$$g^+(z) = \int_{\mathbf{R}} f(x) \sigma_+(x) e^{ixz} dx$$

ce qui prouve bien que g^+ est la transformée de Fourier de $f(x)\sigma_+(x)$. La démonstration est la même pour g^- . Ceci achève la démonstration du lemme et de la proposition 2.5.

◁

Cette proposition fait intervenir des hypothèses qui peuvent sembler plutôt restrictives, mais qui en fait sont souvent réalisées. Elle s'applique en particulier à la moyenne de Catalan continue (voir Chapitre 1). Si on pose :

$$(2.2.41) \quad f_{\omega}(x) = \frac{|x|^{\omega-\frac{1}{2}}}{2^{\omega-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(\omega)} K_{\frac{1}{2}-\omega}(|x|)$$

où K_{ν} est la fonction de Bessel modifiée de troisième type :

$$K_{\nu}(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_{\nu}(z)}{\sin \nu \pi}$$

avec

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{\nu+2n}}{n!2^{\nu+2n}\Gamma(\nu+n+1)}$$

alors (voir [7]), la famille $(f_\omega)_{\omega \in \mathbf{R}^{+*}}$ définit une diffusion continue et :

$$(2.2.42) \quad g_\omega(y) = (\mathcal{F}f_\omega)(y) = \frac{1}{(1+y^2)^\omega} \in \mathcal{A}$$

On peut donc, dans ce cas, appliquer la propriété précédente.

2.2.7 Automorphismes de passage et moules de passage pour la moyenne moen.

Nous allons donner les poids des automorphismes faisant passer de la moyenne **moen** aux moyennes latérales **mul** et **mur** ainsi que les moules qui relient ceux-ci aux automorphismes de passage de **mul** à **mur**. Cela nous permettra d'achever la démonstration de la proposition 2.1 en montrant que **moen** préserve la convolution.

Proposition 2.6 *Pour une diffusion donnée, les quatre automorphismes de passage $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ ont des poids qui valent :*

$$(2.2.43) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \varepsilon_s \mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}, \omega_s, +}$$

$$(2.2.44) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = -\varepsilon_s \mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}, \omega_s, -}$$

$$(2.2.45) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \bar{\varepsilon}_s \mathbf{moen}^{\omega_s, \bar{\varepsilon}_s, \dots, \omega_2, \bar{\varepsilon}_1, \omega_1, +}$$

$$(2.2.46) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = -\bar{\varepsilon}_s \mathbf{moen}^{\omega_s, \bar{\varepsilon}_s, \dots, \omega_2, \bar{\varepsilon}_1, \omega_1, -}$$

où $\bar{\varepsilon}$ désigne le signe opposé de ε . Tous ces automorphismes de passage préservent la convolution. Quant aux moules de passage, eux aussi s'expriment en fonction des poids :

$$(2.2.47) \quad \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \mathbf{moen}^{\omega_1, +, \dots, \omega_s, +}$$

$$(2.2.48) \quad \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \mathbf{moen}^{\omega_1, -, \dots, \omega_s, -}$$

$$(2.2.49) \quad \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{moen}^{\omega_1, +, \dots, \omega_{s-1}, +, \omega_s, -}$$

$$(2.2.50) \quad \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{moen}^{\omega_1, -, \dots, \omega_{s-1}, -, \omega_s, +}$$

$$(2.2.51) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right) \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \mathbf{moen}^{\omega_s, +, \dots, \omega_1, +}$$

$$(2.2.52) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right) \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \mathbf{moen}^{\omega_s, -, \dots, \omega_1, -}$$

$$(2.2.53) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right) \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{moen}^{\omega_s, +, \dots, \omega_2, +, \omega_1, -}$$

$$(2.2.54) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right) \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{moen}^{\omega_s, -, \dots, \omega_2, -, \omega_1, +}$$

(Pour les quatres dernières formules, on note l'inversion de la séquence ω_i dans les poids.)

Démonstration :

Nous allons d'abord démontrer les équations (2.2.43) et (2.2.44) puis nous en déduisons (2.2.45) et (2.2.46). Un argument général sur l'expression d'un opérateur étranger en fonction de $\left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right)$ ou $\left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right)$ nous permettra alors d'obtenir les moules (2.2.47) à (2.2.54). Nous reviendrons ensuite à la proposition 1 pour montrer alors que tous les automorphismes de passage reliant **moen** à **mul** ou **mur** préservent la convolution.

Nous allons donc démontrer la formule (2.2.43), le mécanisme étant le même pour (2.2.44). Si l'automorphisme $\left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{array} \right)$ existe, il doit vérifier :

$$\mathbf{moen} = \mathbf{mul} \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{array} \right)$$

en la définiton de **mul** par ses poids :

$$\mathbf{mul}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = 1 \text{ (resp. 0) si } \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_s = - \text{ (resp. autrement)}$$

on obtient aisément les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}, \omega_s, +} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{array} \right)^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}, \omega_s, +} \\ \mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{i-1}, +, \omega_i, -, \dots, \omega_s, -} = \sum_{j=i-1}^s \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{array} \right)^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{i-1}, +, \omega_i, -, \dots, \omega_j, -} \end{array} \right.$$

de ceci, on tire facilement :

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{array} \right)^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}, \omega_s, +} = \mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}, \omega_s, +}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}, \omega_s, -} = \mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}, \omega_s, -} \\ - \mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}}$$

mais, étant donné les définitions de \mathbf{moen} (voir (2.2.7) et (2.2.8)), on a :

$$\mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}, \omega_s, -} - \mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}} = -\mathbf{moen}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}, \omega_s, +}$$

On a donc bien démontré la formule (2.2.43) et un argument de même type permet d'obtenir la formule (2.2.44). Il nous faut montrer maintenant les formules (2.2.45) et (2.2.46). Les démonstrations étant identiques, nous allons nous attacher à montrer (2.2.45).

L'automorphisme $\begin{pmatrix} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$ est l'inverse de $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix}$ et donc :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} = \left\{ Id + \left(\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix} - Id \right) \right\}^{-1}$$

On peut se restreindre au cas des diffusions continues car l'argument est le même pour les diffusions discrètes. Pour prouver la formule (2.2.45), il faut donc montrer que pour toute séquence $\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s$, on a :

$$(2.2.55) \quad \bar{\varepsilon}_s \mathbf{moen}^{\omega_s, \bar{\varepsilon}_{s-1}, \dots, \omega_2, \bar{\varepsilon}_1, \omega_1, +} = \sum_{1=i_0 < \dots < i_q = s} (-1)^q \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{i_1} \varepsilon_{i_1}} \dots \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix}^{\omega_{i_{q-1}+1}, \varepsilon_{i_{q-1}+1}, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$$

Grâce aux formules (2.2.43) et (2.2.8), on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{moen} \end{pmatrix}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \int_{\mathbf{R}^s} f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_s}(x_s) T^{x_1, \varepsilon_1, \dots, x_s, \varepsilon_s} dx_1 \dots dx_s$$

avec

$$T^{x_1, \varepsilon_1, \dots, x_s, \varepsilon_s} = \varepsilon_s \sigma_{\varepsilon_1}(\check{x}_1) \dots \sigma_{\varepsilon_{s-1}}(\check{x}_{s-1}) \sigma_+(\check{x}_s)$$

et pour obtenir la formule (2.2.55) il suffit alors de prouver que :

$$(2.2.56) \quad T^{x_s, \bar{\varepsilon}_{s-1}, \dots, x_2, \bar{\varepsilon}_1, x_1, \bar{\varepsilon}_s} = \sum_{1=i_0 < \dots < i_q = s} (-1)^q T^{x_1, \varepsilon_1, \dots, x_{i_1} \varepsilon_{i_1}} \dots T^{x_{i_{q-1}+1}, \varepsilon_{i_{q-1}+1}, \dots, x_s, \varepsilon_s}$$

Or on peut montrer ceci par récurrence. Pour $s = 1$, la formule est évidente, en effet :

$$T^{x_1, \bar{\varepsilon}_1} = \bar{\varepsilon}_1 \sigma_+(x_1) = -T^{x_1, \varepsilon_1}$$

Pour $s = 2$, on a :

$$-T^{x_1, \varepsilon_1, x_2, \varepsilon_2} + T^{x_1, \varepsilon_1} T^{x_2, \varepsilon_2} = -\varepsilon_2(\sigma_{\varepsilon_1}(x_1)\sigma_+(x_1 + x_2) - \varepsilon_1\sigma_+(x_1)\sigma_+(x_2))$$

et un simple calcul montre que ceci est égal à :

$$-\varepsilon_2\sigma_{\bar{\varepsilon}_1}(x_2)\sigma_+(x_1 + x_2) = T^{x_2, \bar{\varepsilon}_1, x_1, \bar{\varepsilon}_2}$$

Supposons maintenant que l'équation (2.2.56) soit vérifiée jusqu'à l'ordre $s - 1$. On peut remarquer que :

$$T^{x_s, \bar{\varepsilon}_{s-1}, \dots, x_2, \bar{\varepsilon}_1, x_1, \bar{\varepsilon}_s} = \sigma_{\bar{\varepsilon}_{s-1}}(x_s) T^{x_s + x_{s-1}, \bar{\varepsilon}_{s-2}, \dots, x_2, \bar{\varepsilon}_1, x_1, \bar{\varepsilon}_s}$$

soit encore, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} T^{x_s, \bar{\varepsilon}_{s-1}, \dots, x_2, \bar{\varepsilon}_1, x_1, \bar{\varepsilon}_s} = \\ \sigma_{\bar{\varepsilon}_{s-1}}(x_s) \sum_{1=i_0 < \dots < i_q = s-1} (-1)^q T^{x_1, \varepsilon_1, \dots, x_{i_1}, \varepsilon_{i_1}} \dots T^{x_{i_{q-1}+1}, \varepsilon_{i_{q-1}+1}, \dots, x_{s-1} + x_s, \varepsilon_s} \end{aligned}$$

Pour chaque partition $1 = i_0 < \dots < i_q = s - 1$, on peut isoler le dernier terme :

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{\varepsilon}_{s-1}}(x_s) T^{x_{i_{q-1}+1}, \varepsilon_{i_{q-1}+1}, \dots, x_{s-1} + x_s, \varepsilon_{s-1}} = \\ \sigma_{\varepsilon_{i_{q-1}+1}}(x_{i_{q-1}+1}) \dots \sigma_{\varepsilon_{s-2}}(x_{i_{q-1}+1} + \dots + x_{s-2}) (\varepsilon_s \sigma_{\bar{\varepsilon}_{s-1}}(x_s) \sigma_{\varepsilon_s}(x_{i_{q-1}+1} + \dots + x_{s-1} + x_s)) \end{aligned}$$

or, en utilisant la même identité que pour $s = 2$, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_s \sigma_{\bar{\varepsilon}_{s-1}}(x_s) \sigma_+(x_{i_{q-1}+1} + \dots + x_{s-1} + x_s) = \\ \varepsilon_s \sigma_{\varepsilon_{s-1}}(x_{i_{q-1}+1} + \dots + x_{s-1}) \sigma_+(x_{i_{q-1}+1} + \dots + x_{s-1} + x_s) \\ - \varepsilon_{s-1} \sigma_+(x_{i_{q-1}+1} + \dots + x_{s-1}) \varepsilon_s \sigma_+(x_s) \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} T^{x_s, \bar{\varepsilon}_{s-1}, \dots, x_2, \bar{\varepsilon}_1, x_1, \bar{\varepsilon}_s} = \\ \sum_{1=i_0 < \dots < i_q = s-1} (-1)^q T^{x_1, \varepsilon_1, \dots, x_{i_1}, \varepsilon_{i_1}} \dots T^{x_{i_{q-1}+1}, \varepsilon_{i_{q-1}+1}, \dots, x_{s-1}, \varepsilon_{s-1}, x_s, \varepsilon_s} \\ - \sum_{1=i_0 < \dots < i_q = s-1} (-1)^q T^{x_1, \varepsilon_1, \dots, x_{i_1}, \varepsilon_{i_1}} \dots T^{x_{i_{q-1}+1}, \varepsilon_{i_{q-1}+1}, \dots, x_{s-1}, \varepsilon_{s-1}} T^{x_s, \varepsilon_s} \end{aligned}$$

en réindexant ces sommes, on retrouve bien l'équation (2.2.56). Ceci implique la relation (2.2.55) et donc aussi la formule (2.2.45). On obtient de la même façon la formule (2.2.46). Pour montrer maintenant les formules (2.2.47) à (2.2.54), nous allons utiliser un résultat plus général :

Soit \mathbf{op} un opérateur étranger donné par ses poids $\mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$ alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{op} &= 1 + \sum \left\langle \mathbf{op}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}_{\omega_s} \dots \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}_{\omega_1} \\ \mathbf{op} &= 1 + \sum \left\langle \mathbf{op}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}_{\omega_s} \dots \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}_{\omega_1} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{op}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} &= (-1)^s \mathbf{op}^{\omega_1, -, \dots, \omega_s, -} \\ \left\langle \mathbf{op}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} &= (-1)^s \mathbf{op}^{\omega_1, +, \dots, \omega_s, +} \end{aligned}$$

En appliquant ce résultat aux opérateurs de passage et en utilisant les formules (2.2.43) à (2.2.46), on obtient directement les formules (2.2.47) à (2.2.54). La démonstration du résultat précédent est simple.

En effet, par exemple, l'ensemble des monômes $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}_{\omega_s} \dots \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}_{\omega_1}$ forme une base de l'espace de opérateurs étrangers, ce qui justifie l'expression de \mathbf{op} en fonction de ces monômes. De plus, le seul monôme ayant un poids d'adresse $(\omega_1, -, \dots, \omega_s, -)$ non nul est le monôme $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}_{\omega_s} \dots \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}_{\omega_1}$

pour lequel ce poids vaut $(-1)^s$. Cela impose immédiatement l'expression précédente du moule $\left\langle \mathbf{op}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s}$.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que ces opérateurs de passages préservent la convolution. Pour cela, il suffit simplement de montrer que l'un des moules (2.2.47) à (2.2.54) est symétriel. Prenons par exemple le moule (2.2.51) que nous noterons M^\bullet .

Comme précédemment, on peut remarquer que :

$$M^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \int_{\mathbf{R}^s} f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_s}(x_s) N^{x_1, \dots, x_s} dx_1 \dots dx_s$$

où

$$N^{x_1, \dots, x_s} = (-1)^s \sigma_+(\hat{x}_1) \dots \sigma_+(\hat{x}_s)$$

avec $\hat{x}_i = x_i + \dots + x_s$. Pour que M^\bullet soit symétriel, il suffit alors que N^\bullet soit lui-même symétriel. Soient $X = x_1, \dots, x_s$ et $Y = y_1, \dots, y_t$, on va alors montrer les relations de symétrélicité par récurrence sur le couple (s, t) . Plus précisément, il est facile de voir que ces relations sont vérifiées pour le couple $(1, 1)$. Il reste à montrer que, si ces relations sont vraies pour un couple (s, t) (et tous les couples (s', t') avec $s' \leq s$ et $t' \leq t$), alors elles sont vraies pour le couple $(s+1, t)$ et donc aussi pour $(t, s+1)$ (par symétrie des relations de battage). On a, pour $X = x_1, \dots, x_{s+1}$ et $Y = y_1, \dots, y_t$:

$$\begin{aligned} \sum_{Z \in ctsh(X, Y)} N^Z &= \sum_{\substack{Y_0 \dots Y_r = Y \\ X_1 \dots X_r = \tilde{X}}} \sum_{Z \in ct(X_1 Y_1 \dots X_r Y_r)} N^{Y_0 x_1 Z} \\ &+ \sum_{\substack{Y_0 y^0 \dots Y_r = Y \\ X_1 \dots X_r = \tilde{X}}} \sum_{Z \in ct(X_1 Y_1 \dots X_r Y_r)} N^{Y_0 (y^0 + x_1) Z} \end{aligned}$$

avec $\tilde{X} = x_2 \dots x_{s+1}$ et Y_0, X_1, Y_r peuvent être vides. La notation $ct(X_1 Y_1 \dots X_r Y_r)$ désigne l'ensemble des contractions possibles pour le battage $X_1 Y_1 \dots X_r Y_r$ de \tilde{X} et \tilde{Y} avec $\tilde{Y} = Y_1 \dots Y_r$. Etant donné la forme du moule N^\bullet , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{Z \in ctsh(X,Y)} N^Z &= \sum_{\substack{Y_0 \dots Y_r = Y \\ X_1 \dots X_r = \tilde{X}}} \sum_{Z \in ct(X_1 Y_1 \dots X_r Y_r)} N^{Y_0(x_1 + \|Z\|)} N^Z \\ &+ \sum_{\substack{Y_0 y^0 \dots Y_r = Y \\ X_1 \dots X_r = \tilde{X}}} \sum_{Z \in ct(X_1 Y_1 \dots X_r Y_r)} N^{Y_0(y^0 + x_1 + \|Z\|)} N^Z \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \sum_{Z \in ctsh(X,Y)} N^Z &= \sum_{Y_0 \tilde{Y} = Y} N^{Y_0(x_1 + \|\tilde{X}\| + \|\tilde{Y}\|)} \sum_{Z \in ctsh(\tilde{X}, \tilde{Y})} N^Z \\ &+ \sum_{Y_0 y^0 \tilde{Y} = Y} N^{Y_0(y^0 + x_1 + \|\tilde{X}\| + \|\tilde{Y}\|)} \sum_{Z \in ctsh(\tilde{X}, \tilde{Y})} N^Z \end{aligned}$$

et, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \sum_{Z \in ctsh(X,Y)} N^Z &= \sum_{Y_0 \tilde{Y} = Y} N^{Y_0(x_1 + \|\tilde{X}\| + \|\tilde{Y}\|)} N^{\tilde{X}} N^{\tilde{Y}} \\ &+ \sum_{Y_0 y^0 \tilde{Y} = Y} N^{Y_0(y^0 + x_1 + \|\tilde{X}\| + \|\tilde{Y}\|)} N^{\tilde{X}} N^{\tilde{Y}} \end{aligned}$$

soit, grâce à la forme du moule N^\bullet :

$$\sum_{Z \in ctsh(X,Y)} N^Z = N^{\tilde{X}} \left(\sum_{Y_0 \tilde{Y} = Y} N^{Y_0(x_1 + \|\tilde{X}\|) \tilde{Y}} + \sum_{Y_0 y^0 \tilde{Y} = Y} N^{Y_0(y^0 + x_1 + \|\tilde{X}\|) \tilde{Y}} \right)$$

On reconnaît entre parenthèses le battage contractant des séquences $x_1 + \|\tilde{X}\|$ et Y qui vaut, par récurrence, $N^{x_1 + \|\tilde{X}\|} N^{\tilde{Y}}$. Comme $N^{x_1 + \|\tilde{X}\|} N^{\tilde{X}} = N^X$, on obtient :

$$\sum_{Z \in ctsh(X,Y)} N^Z = N^X N^Y$$

et donc, par récurrence, le moule N^\bullet est symétriel. Alors le moule M^\bullet l'est aussi et tous les automorphismes de passage précédemment considérés préservent la convolution. Cela montre en particulier que la moyenne **moen** préserve la convolution.

◁

De la même façon on peut exprimer la dérivation **doen** en fonction des opérateurs $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$.

2.2.8 Moules de passage pour la dérivation **doen**.

On peut tout de suite énoncer la propriété suivante :

Proposition 2.7 *Pour une diffusion donnée, on a les moules de passage suivants :*

$$(2.2.57) \quad \left\langle \mathbf{doen}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \mathbf{doen}^{\omega_1, -, \dots, \omega_s, -}$$

$$(2.2.58) \quad \left\langle \mathbf{doen}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \mathbf{doen}^{\omega_1, +, \dots, \omega_s, +}$$

et **doen** est bien une dérivation car ces moules sont alternels.

Démonstration :

On obtient les moules (2.2.57) et (2.2.58) de la même manière que dans la propriété précédente grâce à l'expression générale d'un opérateur étranger en fonction de $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à montrer qu'un de ces moules est alternel. Mais si on prend par exemple le moule (2.2.58), que nous appellerons encore une fois M^\bullet , alors (voir (2.2.10)) :

$$M^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \int_{\mathbf{R}^s} f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_s}(x_s) N^{x_1, \dots, x_s} dx_1 \dots dx_s$$

avec cette fois,

$$N^{x_1, \dots, x_s} = (-1)^s \sigma_+(x_1) \dots \sigma_+(x_{s-1}) \delta_0(x_s)$$

et un raisonnement similaire à celui de la propriété précédente permet de montrer que N^\bullet est alternel et donc M^\bullet l'est aussi. Ceci achève la démonstration.

◁

Nous allons maintenant montrer par “erborification” que les moyennes induites par diffusion préservent la croissance latérale.

2.2.9 Erborification et préservation de la croissance latérale.

Après quelques rappels concernant la technique de “regroupement de termes” introduite par J. Ecalle et connue sous le nom d'*arborification* (et sa variante, l'*erborification*, pertinente pour les moules symétriels), nous verrons que le procédé s'applique particulièrement bien au moule (2.2.51). Cela nous permettra de présenter une démonstration, due à J. Ecalle, de la propriété principale des moyennes **moen** “induites par diffusion” : pour toute réduction, $red\left(\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}\right)$ est moins analytique que

$red\left(\begin{pmatrix} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}\right)$ et donc **moen** préserve la croissance latérale.

Soit une réduction standard de *ALIEN* dans $Endo(\mathbf{C}\{u_1, \dots, u_\nu\})$. Il existe donc des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ strictement positifs tels que la réduction *red* agisse non trivialement sur les seules composantes des opérateurs étrangers dont le degré d'homogénéité appartient à $\Omega = \{n_1\lambda_1 + \dots + n_\nu\lambda_\nu; n_i \in \mathbf{N}^*\}$:

$$\mathbf{B}_\eta = red\left(\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}_\eta\right) \text{ (resp. } 0 \text{) si } \eta \in \Omega \text{ (resp. } \eta \notin \Omega)$$

Soit alors une diffusion donnée par la famille $(f_\omega)_{\omega \in \tilde{\Omega}}$ et **moen** la moyenne associée. On impose que Ω soit inclus dans $\tilde{\Omega}$ afin de pouvoir utiliser le moule de passage (2.2.51). On a alors :

$$(2.2.59) \quad \begin{aligned} red\left(\begin{pmatrix} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}\right) &= 1 + \sum_{\omega_i \in \Omega} \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} \mathbf{B}_{\omega_s} \dots \mathbf{B}_{\omega_1} \\ &= 1 + \sum_{\omega} M^\omega \mathbf{B}_\omega \end{aligned}$$

Comme le moule utilisé est symétriel, on obtient par cette opération un automorphisme formel de substitution de $Endo(\mathbf{C}[[u_1, \dots, u_\nu]])$.

On peut aussi remarquer que, pour une réduction dans $Endo(\mathbf{C}\{u_1, \dots, u_\nu\})$, on a toujours les estimations suivantes (voir [5]) :

$$(2.2.60) \quad \|\mathbf{B}_\omega\|_{V, V'} \leq C_{V, V'}^{\|\omega\|} s! \quad (\omega = \omega_1, \dots, \omega_s)$$

avec une famille de seminormes sur les opérateurs \mathbf{B}_\bullet relatives à des paires de voisinages ($V' \subset V$) de 0 dans \mathbf{C}^ν :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_V &\stackrel{def}{=} \sup_{(u_1, \dots, u_\nu) \in V} |\varphi(u_1, \dots, u_\nu)| \quad (\varphi \in \mathbf{C}\{u_1, \dots, u_\nu\}) \\ \|\mathbf{B}\|_{V, V'} &\stackrel{def}{=} \sup_{\|\varphi\|_V \leq 1} \|\mathbf{B}\varphi\|_{V'} \quad (\mathbf{B} \in Endo(\mathbf{C}\{u_1, \dots, u_\nu\})) \end{aligned}$$

et on peut choisir V, V' assez petits pour que $C_{V, V'}$ soit moins grand que tout nombre ρ positif donné.

Les meilleures majorations que l'on puisse obtenir pour le moule (2.2.51) sont de la forme :

$$(2.2.61) \quad |M^\omega| \leq C^{\|\omega\|} \quad (\omega = \omega_1, \dots, \omega_s)$$

Les estimations (2.2.60) et (2.2.61) ne permettent aucunement de conclure à la convergence normale de la série (2.2.59) : sauf cas triviaux, on a toujours *divergence* de la série des normes $(1 + \sum_{\omega} |M^\omega| \|\mathbf{B}_\omega\|_{V, V'}) = +\infty$ pour tous voisinages V, V' .

Pour remédier à cela, on doit regrouper judicieusement les termes de la série (2.2.59) et la façon systématique de procéder consiste à recourir au procédé dit d'*erborification* (appelée encore "arborification symétrielle" ou "contractante"). Il conduit à remplacer les séquences totalement ordonnées ω par des séquences $\omega^<$ partiellement ordonnées, relativement à un *ordre partiel arborescent*. Cela signifie que chaque élément ω_i de $\omega^<$ a au plus un antécédent immédiat ω_{i-} relativement à l'ordre

partiel. On a, par exemple, pour trois éléments $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, les 16 séquences arborifiées :

$$\begin{array}{lll}
\{\omega_1 \prec \omega_2 \prec \omega_3\} & \{\omega_1 \prec \omega_3 \prec \omega_2\} & \{\omega_2 \prec \omega_1 \prec \omega_3\} \\
\{\omega_2 \prec \omega_3 \prec \omega_1\} & \{\omega_3 \prec \omega_1 \prec \omega_2\} & \{\omega_3 \prec \omega_2 \prec \omega_1\} \\
\{\omega_1 \not\prec \omega_2, \omega_1 \not\prec \omega_3, \omega_2 \not\prec \omega_3\} & & \{\omega_1 \not\prec \omega_2, \omega_1 \not\prec \omega_3, \omega_2 \prec \omega_3\} \\
\{\omega_1 \not\prec \omega_2, \omega_1 \not\prec \omega_3, \omega_3 \prec \omega_2\} & & \{\omega_2 \not\prec \omega_1, \omega_2 \not\prec \omega_3, \omega_1 \prec \omega_3\} \\
\{\omega_2 \not\prec \omega_1, \omega_2 \not\prec \omega_3, \omega_3 \prec \omega_1\} & & \{\omega_3 \not\prec \omega_1, \omega_3 \not\prec \omega_2, \omega_1 \prec \omega_2\} \\
\{\omega_3 \not\prec \omega_1, \omega_3 \not\prec \omega_2, \omega_2 \prec \omega_1\} & & \{\omega_2 \not\prec \omega_3, \omega_1 \prec \omega_2, \omega_1 \prec \omega_3\} \\
\{\omega_1 \not\prec \omega_3, \omega_2 \prec \omega_1, \omega_2 \prec \omega_3\} & & \{\omega_1 \not\prec \omega_2, \omega_3 \prec \omega_1, \omega_3 \prec \omega_2\}
\end{array}$$

Pour une séquence arborifiée $\omega^<$, nous noterons $cts(\omega^<, \omega)$ le nombre surjections contractantes (qui respectent l'ordre) de $\omega^<$ dans ω et $ct(\omega^<)$ l'ensemble des ω tels que le nombre de surjections contractantes soit non nul. Avec ces notations, l'arborification des moules est *définie* par la relation :

$$(2.2.62) \quad M^{\omega^<} = \sum_{\omega \in ct(\omega^<)} cts(\omega^<, \omega) M^\omega$$

Ainsi, pour la séquence arborifiée $\omega^< = \{\omega_1 \prec \omega_2, \omega_1 \prec \omega_3, \omega_2 \not\prec \omega_3\}$ (ω_1 est l'unique antécédent de ω_2 et ω_3 qui ne sont pas comparables), on a :

$$M^{\omega^<} = M^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} + M^{\omega_1, \omega_3, \omega_2} + M^{\omega_1, \omega_2 + \omega_3}$$

D'autre part, la transformation duale $\mathbf{B}_\omega \mapsto B_{\omega^<}$ est soumise à la seule contrainte :

$$(2.2.63) \quad \mathbf{B}_\omega = \sum cts(\omega^<, \omega) B_{\omega^<}$$

qui, bien sûr, ne suffit pas à la définir. Si toutefois on pose :

$$B_{\omega^<}. \varphi = \{B_{\omega_s} \dots B_{\omega_1}\}_{<}. \varphi$$

où chaque composante B_{ω_i} dans $\{\dots\}_{<}$ agit sur φ seulement si ω_i n'a pas d'antécédent dans $\omega^<$ ou bien agit sur les coefficients de $B_{\omega_{i-}}$ si ω_{i-} est l'unique antécédent de ω_i dans $\omega^<$. (voir [5]), alors on constate sans peine que (2.2.63) est bien satisfaite.

Les relations (2.2.62) et (2.2.63) étant des relations "duales", le développement moulien reste formellement inchangé :

$$(2.2.64) \quad red\left(\begin{pmatrix} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}\right) = 1 + \sum_{\omega} M^\omega \mathbf{B}_\omega = 1 + \sum_{\omega^<} M^{\omega^<} \mathbf{B}_{\omega^<}$$

Dans le cas qui nous intéresse présentement, ce "transvasement de termes" en apparence anodin va nous permettre de surmonter la *divergence en norme* de la série (2.2.59). Plus précisément :

Proposition 2.8 (*J. Ecalle*) *Pour une diffusion donnée, la série :*

$$1 + \sum_{\omega^<} M^{\omega^<} \mathbf{B}_{\omega^<}$$

est normalement convergente et donc $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ *est moins analytique que* $\begin{pmatrix} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$. *Cela prouve que la moyenne* **moen** *présERVE la croissance latérale.*

Démonstration :

Le point essentiel est bien sûr la convergence normale de la série “erborifiée”, tout le reste en étant une conséquence immédiate. Cette convergence est due à trois inégalités :

1 Alors que l’on avait des majorations essentiellement optimales du type :

$$\|\mathbf{B}_\omega\|_{V,V'} \leq C_{V,V'}^{\|\omega\|} s! \quad (\omega = \omega_1, \dots, \omega_s)$$

le procédé d’erborification permet (voir [5]) d’obtenir :

$$\|\mathbf{B}_{\omega^<}\|_{V,V'} \leq \tilde{C}_{V,V'}^{\|\omega\|} \quad (\omega = \omega_1, \dots, \omega_s)$$

où on peut choisir V, V' de telle sorte que $\tilde{C}_{V,V'}$ soit plus petit qu’un réel ρ fixé.

2 Si on appelle $q(\eta)$ le nombre de séquences arborifiées dont les éléments sont dans Ω et dont la somme vaut η , alors :

$$q(\eta) \leq C^\eta$$

3 Bien que le nombre de termes dans l’équation (2.2.62) soit grand, dans le cas particulier du moule (2.2.51), on a pour toute séquence arborifiée :

$$|M^{\omega^<}| \leq D^{\|\omega^<\|}$$

Avec ces trois inégalités, il n’est pas difficile de conclure. En effet, si on prend des voisinages V, V' tels que $\tilde{C}_{V,V'}$ soit inférieur à $1/(2CD)$, on obtient :

$$1 + \sum_{\omega^<} |M^{\omega^<}| \|\mathbf{B}_{\omega^<}\|_{V,V'} \leq 1 + \sum_{\eta \in \Omega} q(\eta) \tilde{C}_{V,V'}^\eta D^\eta \leq 1 + \sum_{\eta \in \Omega} 2^{-\eta} < +\infty$$

ce qui montre bien que $red\left(\begin{pmatrix} \mathbf{moen} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}\right)$ existe et préserve l’analycité. Il reste donc à montrer ces inégalités et plus particulièrement la troisième (pour les deux premières on se reportera à [5]). Cette inégalité découle directement d’une propriété du moule (2.2.51) : on rappelle que

$$M^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \int_{\mathbf{R}^s} f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_s}(x_s) N^{x_1, \dots, x_s} dx_1 \dots dx_s$$

où

$$N^{x_1, \dots, x_s} = (-1)^s \sigma_+(\hat{x}_1) \dots \sigma_+(\hat{x}_s) \quad (\hat{x}_i = x_i + \dots + x_s)$$

mais alors, pour une séquence arborifiée $\{\omega_1, \dots, \omega_s\}^<$:

$$(2.2.65) \quad M^{\{\omega_1, \dots, \omega_s\}^<} = \int_{\mathbf{R}^s} f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_s}(x_s) N^{\{x_1, \dots, x_s\}^<} dx_1 \dots dx_s$$

où $\{x_1, \dots, x_s\}^<$ est une séquence “arborifiée” de la séquence (x_1, \dots, x_s) qui est de la même forme que $\{\omega_1, \dots, \omega_s\}^<$ et :

$$(2.2.66) \quad N^{\{x_1, \dots, x_s\}^<} = (-1)^s \sigma_+(\hat{x}_1) \dots \sigma_+(\hat{x}_s)$$

avec des sommes “finissantes” \hat{x}_i relatives à l’ordre arborescent de $\{x_1, \dots, x_s\}^<$, ce qui signifie plus précisément que \hat{x}_i est la somme de x_j postérieurs ou égaux à x_i , mais *relativement à l’ordre partiel de $\{x_1, \dots, x_s\}^<$* . Ceci nous permet de conclure car, pour toute séquence arborifiée $\mathbf{x}^<$, $N^{\mathbf{x}^<}$ est plus petit que 1 ce qui conduit tout droit à l’inégalité 3. Il ne nous reste plus qu’à établir l’identité (2.2.66) par récurrence sur le nombre d’éléments s de la séquence arborifiée $\{x_1, \dots, x_s\}^<$.

Pour $s = 1$, la relation (2.2.62) est évidente et $N^{x_1^<} = N^{x_1} = -\sigma_+(x_1)$. Supposant maintenant la relation (2.2.66) vérifiée pour toute séquence arborifiée de longueur strictement inférieure à s , nous allons montrer que la relation (2.2.66) est vraie pour toute séquence arborifiée de longueur s . Si la séquence $\mathbf{x}^<$ est décomposable en deux séquences arborifiées $\mathbf{y}^<$ et $\mathbf{z}^<$ dont les éléments ne sont pas comparables, alors on peut décomposer la somme (2.2.62). A chaque surjection contractante de $\mathbf{y}^<$ dans une séquence \mathbf{y} et de $\mathbf{z}^<$ dans une séquence \mathbf{z} , on peut associer une partie de la somme (2.2.62) qui correspond au battage contractant de \mathbf{y} et \mathbf{z} et cela couvre l’ensemble des termes de cette somme :

$$\begin{aligned} N^{\mathbf{x}^<} &= \sum_{\mathbf{x} \in ct(\mathbf{x}^<)} cts(\mathbf{x}^<, \mathbf{x}) N^{\mathbf{x}} \\ &= \sum_{\mathbf{y} \in ct(\mathbf{y}^<)} \sum_{\mathbf{z} \in ct(\mathbf{z}^<)} cts(\mathbf{y}^<, \mathbf{y}) cts(\mathbf{z}^<, \mathbf{z}) \sum_{\mathbf{u} \in ctsh(\mathbf{y}, \mathbf{z})} N^{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

Mais comme nous avons déjà démontré que le moule N^\bullet est symétriel, on obtient :

$$N^{\mathbf{x}^<} = \left(\sum_{\mathbf{y} \in ct(\mathbf{y}^<)} cts(\mathbf{y}^<, \mathbf{y}) N^{\mathbf{y}} \right) \left(\sum_{\mathbf{z} \in ct(\mathbf{z}^<)} cts(\mathbf{z}^<, \mathbf{z}) N^{\mathbf{z}} \right) = N^{\mathbf{y}^<} N^{\mathbf{z}^<}$$

L’hypothèse de récurrence permet alors de conclure que $N^{\mathbf{x}^<}$ est bien de la forme (2.2.66) si $\mathbf{x}^<$ est décomposable en au moins deux séquences arborifiées dont les éléments ne sont pas comparables. Il reste à étudier le cas où la séquence $\mathbf{x}^<$ admet un plus petit élément x (comparable à tous les autres). Mais toutes les séquences admissibles de $ct(\mathbf{x}^<)$ commencent par x , non contracté avec les éléments suivants :

$$N^{\mathbf{x}^<} = \sum_{\mathbf{y} \in ct(\mathbf{y}^<)} cts(\mathbf{y}^<, \mathbf{y}) N^{x, \mathbf{y}}$$

où $\mathbf{y}^<$ est la séquence arborifiée obtenue en supprimant x dans $\mathbf{x}^<$. Or on remarque immédiatement que $N^{x, \mathbf{y}} = -\sigma_+(x + \|\mathbf{y}\|) N^{\mathbf{y}}$ et donc, grâce à l’hypothèse de récurrence, on conclut encore une fois que $N^{\mathbf{x}^<}$ est bien de la forme attendue ($N^{\mathbf{x}^<} = -\sigma_+(\hat{x}) N^{\mathbf{y}^<}$).

Ce dernier point achève la démonstration de la formule (2.2.66) et donc de la proposition 8.

◁

Récapitulons : à chaque diffusion (discrète ou continue), on peut associer une moyenne **moen** (discrète ou continue) et une dérivation **doen**. Cette moyenne possède des propriétés remarquables puisqu’elle préserve la *réalité* (si $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une famille de fonctions réelles paires), la *convolution* et la *croissance latérale*.

Nous allons maintenant étudier en détail une famille de moyennes continues et homogènes.

2.3 Diffusions homogènes et moyennes associées.

Nous allons définir une famille de diffusions continues paramétrées par τ ($\tau > 0$). Pour τ fixé, la diffusion $({}^\tau fou_\omega)_{\omega \in \mathbf{R}^{+*}}$ permet de définir une moyenne ${}^\tau \mathbf{moun}$ dite *homogène*, car possédant l'*invariance d'échelle* (voir ci-après).

2.3.1 Les diffusions homogènes $({}^\tau fou_\omega)_{\omega \in \mathbf{R}^{+*}}$.

Soit τ un réel positif fixé. Si on pose :

$$(2.3.1) \quad {}^\tau gou_\omega(y) = \exp(-\omega |y|^\tau) \quad (y \in \mathbf{R}, \omega \in \mathbf{R}^{+*})$$

alors la famille $({}^\tau gou_\omega)_{\omega \in \mathbf{R}^{+*}}$ forme un semigroupe multiplicatif. Qui plus est :

Proposition 2.9 *Pour tout réel strictement positif τ le semigroupe multiplicatif $({}^\tau gou_\omega)_{\omega \in \mathbf{R}^{+*}}$ est la transformée de Fourier d'un semigroupe convolutif $({}^\tau fou_\omega)_{\omega \in \mathbf{R}^{+*}}$ qui définit une diffusion et donc une moyenne ${}^\tau \mathbf{moun}$. De plus, cette moyenne est homogène, en ce sens qu'elle est invariante pour toute dilatation des incréments ω_j par un même facteur t ("invariance d'échelle") :*

$$(2.3.2) \quad {}^\tau \mathbf{moun}^{t\omega_1, \varepsilon_1, \dots, t\omega_s, \varepsilon_s} = {}^\tau \mathbf{moun}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \quad (\forall \varepsilon_i = \pm; \forall \omega_i \in \mathbf{R}^{+*}; \forall t \in \mathbf{R}^{+*})$$

Démonstration :

Montrons d'abord que $({}^\tau fou_\omega)_{\omega \in \mathbf{R}^{+*}}$ est bien la transformée d'un semigroupe convolutif. Soit, pour ω fixé :

$${}^\tau fou_\omega(x) = (\mathcal{F}^{-1}({}^\tau gou_\omega))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-\omega|y|^\tau} e^{-ixy} dy$$

Cette intégrale est absolument convergente et, vu les propriétés de la transformation de Fourier directe et inverse, pour montrer que la famille $({}^\tau fou_\omega)_{\omega \in \mathbf{R}^{+*}}$ est un semigroupe convolutif, il suffit de montrer que, pour tout ω , ${}^\tau fou_\omega$ est une fonction intégrable. Il est aisé de voir que la fonction ${}^\tau fou_\omega$, ainsi définie, est continue, donc localement intégrable. De plus,

$$(2.3.3) \quad {}^\tau fou_\omega(x) = \omega^{-1/\tau} {}^\tau fou_1(x\omega^{-1/\tau})$$

et

$$(2.3.4) \quad {}^\tau fou_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^\tau} \cos(xt) dt$$

L'équation (2.3.3) montre qu'il suffit que ${}^\tau fou_1$ soit intégrable pour que toute la famille soit intégrable. Lorsque τ est plus grand que 1, en intégrant deux fois par parties, on obtient pour x non nul :

$$|{}^\tau fou_1(x)| \leq \frac{C_\tau}{x^2}$$

ce qui prouve, dans ce cas, que ${}^\tau fou_1(x)$ est intégrable. Lorsque τ est égal à 1, ${}^\tau fou_1(x)$ est égal à $\{\pi(1+x^2)\}^{-1}$ qui est intégrable. Lorsque τ est strictement compris entre 0 et 1, alors (voir [9]) on peut écrire :

$$(2.3.5) \quad {}^\tau fou_1(x) = |x|^{-1} \Phi(|x|^{-\tau})$$

avec une fonction Φ entière donnée par :

$$(2.3.6) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp\{-t - t^\tau z \cos(\frac{1}{2}\pi\tau)\} \sin\{t^\tau z \sin(\frac{1}{2}\pi\tau)\} dt$$

mais, pour z réel positif :

$$|\Phi(z)| \leq \frac{z}{\pi} \sin(\frac{1}{2}\pi\tau) \int_0^{+\infty} t^\tau e^{-t} dt \leq C_\tau z$$

soit alors :

$$|\tau \text{fou}_1(x)| \leq C_\tau |x|^{-1-\tau}$$

pour x non nul. Cela montre que, dans ce cas aussi, $\tau \text{fou}_1(x)$ est intégrable. Dans tous les cas de figure, $(\tau \text{fou}_\omega)_{\omega \in \mathbf{R}^{+*}}$ est un semigroupe convolutif.

Il reste à montrer que $\tau \mathbf{moun}$ est homogène. On a :

$$\tau \mathbf{moun}^{t\omega_1, \varepsilon_1, \dots, t\omega_s, \varepsilon_s} = \int_{\mathbf{R}^s} \tau \text{fou}_{t\omega_1}(x_1) \dots \tau \text{fou}_{t\omega_s}(x_s) \sigma_{\varepsilon_1}(\check{x}_1) \dots \sigma_{\varepsilon_s}(\check{x}_s) dx_1 \dots dx_s$$

On tire sans difficultés de l'équation (2.3.3) que :

$$\tau \text{fou}_{t\omega_i}(x_i) = t^{-1/\tau} \tau \text{fou}_{\omega_i}(x_i t^{-1/\tau})$$

et en effectuant les changements de variable $x_i \mapsto x_i t^{-1/\tau}$, on obtient immédiatement l'équation (2.3.2). ◁

Deux de ces diffusions homogènes ont des expressions simples que nous allons détailler dans la section suivante.

2.3.2 La diffusion de Cauchy et la diffusion brownienne.

Dans les cas importants $\tau = 1$ et $\tau = 2$, on a des semigroupes de convolution aux distributions explicites :

$$(2.3.7) \quad \text{fy}(x) \stackrel{\text{def}}{=} {}^1 \text{fou}_\omega(x) = (\omega/\pi)(x^2 + \omega^2)^{-1}$$

$$(2.3.8) \quad \text{fow}(x) \stackrel{\text{def}}{=} {}^2 \text{fou}_\omega(x) = (1/2)(\omega\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/4\omega)$$

On reconnaît le noyau de Cauchy et le noyau gaussien. Les moyennes induites qui leur correspondent seront dites “de Cauchy” et “brownienne” :

$$(2.3.9) \quad \mathbf{myn} \stackrel{\text{def}}{=} {}^1 \mathbf{moun} ; \mathbf{mown} \stackrel{\text{def}}{=} {}^2 \mathbf{moun}$$

On reconnaît en \mathbf{mown} est la moyenne déjà étudiée dans le Chapitre 1.

Avant de poursuivre l'étude de notre famille de “moyennes homogènes”, il vaut la peine d'examiner si $\tau \mathbf{moun}$ possède des limites lorsque τ tend vers 0 ou vers l'infini, et, si oui, ce que valent ces limites.

2.3.3 Limite de τ **moun** lorsque τ tend vers l'infini.

Ce point est un corollaire des propriétés qui seront énoncées dans la section 2.4. On a (voir proposition 2.14) :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \mathbf{moun} = \mathbf{mun}$$

où **mun** est la moyenne “médiane” ou “uniforme” dont les poids ne dépendent que du nombre de signes positifs et négatifs :

$$\mathbf{mun}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \frac{(2p)!(2q)!}{4^{p+q}(p+q)!p!q!}$$

avec p (resp. q) désignant le nombre de signes positifs (resp. négatifs) dans la séquence $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$. On peut encore remarquer que l'existence de cette limite ne peut être déduite simplement des théorèmes sur la limite de fonctions intégrables car :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \mathit{fou}_\omega(x) = \frac{\mathit{sin}x}{\pi x}$$

avec un second membre qui n'est pas intégrable.

Lorsque τ tend vers 0, nous allons montrer qu'il existe bien une limite, qui n'est autre que la moyenne organique (voir [6], [3], §B.2).

2.3.4 Limite de τ **moun** lorsque τ tend vers 0.

Nous nous proposons de montrer que :

Proposition 2.10

$$(2.3.10) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \mathbf{moun} = \mathbf{mon}$$

où **mon** est la moyenne organique, construite et étudiée par J. Ecalle (voir [3], §B.2), définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{mon}^{\omega_1, \varepsilon_1} &= \frac{1}{2} \\ \mathbf{mon}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} &= \mathbf{mon}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{s-1}, \varepsilon_{s-1}} P_s \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} P_s &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_s}{\omega_1 + \dots + \omega_s} \quad \text{si } \varepsilon_{s-1} = \varepsilon_s \\ P_s &= \frac{1}{2} \frac{\omega_s}{\omega_1 + \dots + \omega_s} \quad \text{si } \varepsilon_{s-1} \neq \varepsilon_s \end{aligned}$$

Démonstration :

Comme τ **moun** et **mon** vérifient la propriété P0, la connaissance des poids de ces moyennes pour les seules séquences alternées $\omega_1, +, \omega_2, -, \dots, \omega_s, \mathit{sgn}((-1)^{s-1})$ permet de déterminer *algébriquement* tous les autres poids. Il suffit donc de vérifier l'équation (2.3.10) pour ce type de séquence. Or, pour des signes ε_i alternés, la formule générale (2.2.8) livre :

$$\tau \mathbf{moun}^{\omega_1, +, \omega_2, -, \dots, \omega_s, \mathit{sgn}((-1)^{s-1})} = \int_{\substack{x_1 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ (-1)^{s-1}(x_1 + \dots + x_s) > 0}} \tau \mathit{fou}_{\omega_1}(x_1) \dots \tau \mathit{fou}_{\omega_s}(x_s) dx_1 \dots dx_s$$

En fait, sur le domaine d'intégration, chaque x_i reste du signe de $(-1)^{i-1}$ et, opérant les changements de variable $y_i = ((-1)^{i-1}x_i)^\tau$, on obtient :

$$(2.3.11) \quad \tau \mathbf{moun}^{\omega_1, +, \omega_2, -, \dots, \omega_s, \text{sgn}((-1)^{s-1})} = \int_{D_\tau^s} \tau h_{\omega_1}(y_1) \dots \tau h_{\omega_s}(y_s) dy_1 \dots dy_s$$

avec :

$$(2.3.12) \quad D_\tau^s = \{y_1 > 0, y_2 > y_1, \dots, y_s > (\sum_{k=1}^{s-1} (-1)^{s-1-k} y_k^{1/\tau})^\tau\} \subset (\mathbf{R}^{+*})^s$$

et

$$(2.3.13) \quad \tau h_\omega(y) = \frac{y^{1/\tau}}{\tau y} \tau \text{fou}_\omega(y^{1/\tau}) \in L_1(\mathbf{R}^+)$$

Supposons maintenant que $0 < \tau < \tau_0 < 1/2$. Puisque $\tau h_\omega(y)$ (voir [2]) converge ponctuellement vers ${}^0h_\omega(y) = \frac{\omega}{2y^2} e^{-\omega/y}$ pour tout y positif et compte tenu des équations (2.3.3), (2.3.5), (2.3.6) et (2.3.13), on obtient :

$$(2.3.14) \quad \tau h_\omega(y) = \frac{1}{\tau \pi y} \int_0^{+\infty} e^{-t - \frac{\omega t^\tau}{y} \cos(\frac{\pi \tau}{2})} \sin(\frac{\omega t^\tau}{y} \sin(\frac{\pi \tau}{2}))$$

Grâce à cette équation, on voit sans difficulté que, pour $0 < \tau < \tau_0 < 1/2$, et pour tout ω , il existe une fonction H_ω dans $L_1(\mathbf{R}^{+*})$ telle que pour tout y :

$$|\tau h_\omega(y)| \leq H_\omega(y)$$

De plus, si $\chi_{D_\tau^s}$ dénote la fonction indicatrice de D_τ^s , cette fonction tend ponctuellement vers $\chi_{D_0^s}$ avec :

$$D_0^s = \{y_s > \dots > y_2 > y_1 > 0\}$$

Grâce à tous ces résultats, on obtient, par un argument de convergence dominée, que :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{(\mathbf{R}^{+*})^s} \tau h_{\omega_1}(y_1) \dots \tau h_{\omega_s}(y_s) \chi_{D_\tau^s} dy_1 \dots dy_s = \int_{(\mathbf{R}^{+*})^s} {}^0h_{\omega_1}(y_1) \dots {}^0h_{\omega_s}(y_s) \chi_{D_0^s} dy_1 \dots dy_s$$

et donc

$$(2.3.15) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \mathbf{moun}^{\omega_1, +, \omega_2, -, \dots, \omega_s, \text{sgn}((-1)^{s-1})} = \int_{y_s > \dots > y_2 > y_1 > 0} \frac{\omega_1}{2y_1^2} e^{-\omega_1/y_1} \dots \frac{\omega_s}{2y_s^2} e^{-\omega_s/y_s} dy_1 \dots dy_s$$

Un calcul simple montre alors que :

$$\int_{y_s > \dots > y_2 > y_1 > 0} \frac{\omega_1}{2y_1^2} e^{-\omega_1/y_1} \dots \frac{\omega_s}{2y_s^2} e^{-\omega_s/y_s} dy_1 \dots dy_s = \mathbf{mon}^{\omega_1, +, \omega_2, -, \dots, \omega_s, \text{sgn}((-1)^{s-1})}$$

ce qui achève la démonstration.

◁

Nous allons revenir, dans la section suivante, sur le problème de la limite de τ **moun** lorsque τ tend vers l'infini. Ce problème est un cas particulier de la question suivante : lorsqu'une moyenne est induite par une diffusion $(f_\omega(x), g_\omega(y))_{\omega \in \Omega}$, peut-on, à partir de ces semigroupes, construire de nouvelles diffusions qui induisent de nouvelles moyennes ? Hormis la transformation :

$$\begin{aligned} f_\omega(x) &\rightarrow t f_\omega(tx) \\ g_\omega(y) &\rightarrow g_\omega(y/t) \end{aligned}$$

qui induit la même moyenne pour tout t réel non nul, on peut étudier la transformation qui, à une diffusion de semigroupe multiplicatif $(g_\omega(y))_{\omega \in \Omega}$ pair, associe le semigroupe $(g_\omega(|y|^\tau))_{\omega \in \Omega}$. Sous certaines conditions, nous allons montrer que cette transformation induit une nouvelle diffusion (pour τ "assez" grand) que nous appellerons *décélérée* de la diffusion d'origine.

2.4 Moyennes induites par les décélérées d'une diffusion.

Afin de pouvoir étudier ces "décélérées", nous aurons besoin de revenir sur la section 2.2.6 et d'introduire la *transformation de Hilbert*.

2.4.1 Complément sur la représentation $\delta^\varpi \rightarrow g^\varpi(y)$.

Dans toute la suite, nous noterons C_0 l'ensemble des fonctions continues sur \mathbf{R} et qui tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Nous noterons aussi L^2 l'ensemble des fonctions sur \mathbf{R} de carré intégrable.

Nous allons donner de nouvelles expressions de $g^\varpi(y)$ lorsque $(f_\omega(x))_{\omega \in \Omega}$ est un semigroupe de convolution composé de fonctions appartenant à $L^1 \cap L^2$. Ces formules feront intervenir le semigroupe multiplicatif $(g_\omega(y))_{\omega \in \Omega}$ ($g_\omega = \mathcal{F}f_\omega$) et la transformation de Hilbert (voir [11]) :

$$(2.4.1) \quad \begin{aligned} H &: L^2 \rightarrow L^2 \\ g(y) &\mapsto (Hg)(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{i\pi} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{g(y+t) - g(y-t)}{t} dt \end{aligned}$$

On pourra remarquer que $\|Hg\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}$. Énonçons tout de suite le résultat :

Proposition 2.11 *Soit $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une diffusion, telle que chaque f_ω appartient à $L^1 \cap L^2$ et $g_\omega = \mathcal{F}f_\omega$. Alors on peut définir, pour $\omega_i \in \Omega$:*

$$(2.4.2) \quad \begin{cases} G_g^{\omega_1}(y) &= g_{\omega_1}(y) \\ G_g^{\omega_1, \dots, \omega_s}(y) &= (HG_g^{\omega_1, \dots, \omega_{s-1}})(y) g_{\omega_s}(y) \quad (s \geq 2) \end{cases}$$

Toutes ces fonctions, ainsi que leurs transformées de Hilbert, appartiennent à $C_0 \cap L^2$ et :

$$(2.4.3) \quad g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y) = \frac{1}{2^s} \left[(1 + \varepsilon_s H) \sum_{\boldsymbol{\eta}^1 \dots \boldsymbol{\eta}^t = (\omega_1, \dots, \omega_s)} \varepsilon_{l(\boldsymbol{\eta}^1)} \dots \varepsilon_{l(\boldsymbol{\eta}^1 \dots \boldsymbol{\eta}^{t-1})} G_g^{\|\boldsymbol{\eta}^1\|, \dots, \|\boldsymbol{\eta}^t\|} \right] (y)$$

Démonstration :

On peut remarquer que :

$$\sigma_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon s(x))$$

avec

$$s(x) = +1 \text{ (resp. } -1) \text{ si } x \geq 0 \text{ (resp. } x < 0)$$

Donc, si on pose, pour ω_i dans Ω :

$$(2.4.4) \quad \begin{cases} F_f^{\omega_1}(x) &= f_{\omega_1}(x) \\ F_f^{\omega_1, \dots, \omega_s}(x) &= [(F_f^{\omega_1, \dots, \omega_{s-1}})(\cdot) s(\cdot)] * f_{\omega_s}(x) \quad (s \geq 2) \end{cases}$$

alors ces fonctions appartiennent à $L^1 \cap L^2$ et il n'est pas difficile de voir que :

$$(2.4.5) \quad f^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(x) = \frac{1}{2^s}(1 + \varepsilon_s s(x)) \left[\sum_{\boldsymbol{\eta}^1 \dots \boldsymbol{\eta}^t = (\omega_1, \dots, \omega_s)} \varepsilon_{l(\boldsymbol{\eta}^1)} \dots \varepsilon_{l(\boldsymbol{\eta}^1 \dots \boldsymbol{\eta}^{t-1})} F_f^{\|\boldsymbol{\eta}^1\|, \dots, \|\boldsymbol{\eta}^t\|} \right]$$

et donc, par transformation de Fourier :

$$g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y) = \frac{1}{2^s} \times \sum_{\boldsymbol{\eta}^1 \dots \boldsymbol{\eta}^t = (\omega_1, \dots, \omega_s)} (\varepsilon_{l(\boldsymbol{\eta}^1)} \dots \varepsilon_{l(\boldsymbol{\eta}^1 \dots \boldsymbol{\eta}^{t-1})}) \left[\mathcal{F} F_f^{\|\boldsymbol{\eta}^1\|, \dots, \|\boldsymbol{\eta}^t\|} + \varepsilon_s \mathcal{F}(s(x) F_f^{\|\boldsymbol{\eta}^1\|, \dots, \|\boldsymbol{\eta}^t\|}) \right]$$

Mais si on pose :

$$(2.4.6) \quad G_g^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \mathcal{F} F_f^{\omega_1, \dots, \omega_s}$$

comme $F_f^{\omega_1, \dots, \omega_s}$ et $s(x) F_f^{\omega_1, \dots, \omega_s}$ appartiennent à L^1 (et L^2), $G_g^{\omega_1, \dots, \omega_s}$ et $\mathcal{F}(s(x) F_f^{\omega_1, \dots, \omega_s})$ appartiennent à C_0 (et L^2). De plus :

$$(2.4.7) \quad \begin{cases} G_g^{\omega_1, \dots, \omega_{s+1}}(y) &= \mathcal{F} \left[(F_f^{\omega_1, \dots, \omega_s}(\cdot) s(\cdot) * f_{\omega_{s+1}})(x) \right] (y) \\ &= \mathcal{F} \left(F_f^{\omega_1, \dots, \omega_s}(x) s(x) \right) (y) g_{\omega_{s+1}}(y) \end{cases}$$

Or pour une fonction $f(x)$ dans $L^1 \cap L^2$, de transformée de Fourier $g(y)$ dans $C_0 \cap L^2$, on remarque que $(Hg)(y)$ définit une fonction de L^2 (car $g \in L^2$) qui n'est autre (voir [11]) que la transformée de Fourier (au sens L^2) de $f(x)s(x)$. Mais cette dernière fonction est intégrable, ce qui implique que $(Hg)(y)$ appartient à C_0 . Donc :

$$(2.4.8) \quad \mathcal{F} \left(F_f^{\omega_1, \dots, \omega_s}(x) s(x) \right) (y) = HG_g^{\omega_1, \dots, \omega_s}(y) \quad (\in C_0 \cap L^2)$$

et donc :

$$(2.4.9) \quad G_g^{\omega_1, \dots, \omega_{s+1}}(y) = (HG_g^{\omega_1, \dots, \omega_s})(y) g_{\omega_{s+1}}(y) \quad (\in C_0 \cap L^2)$$

En utilisant ces équations, on retrouve bien l'équation (2.4.3) et on retrouve par la même occasion la récurrence (2.4.2).

◁

2.4.2 Les décélérées d'une diffusion et les moyennes induites.

Soit une diffusion $(f_\omega(x), g_\omega(y))_{\omega \in \Omega}$ et \mathbf{m} la moyenne induite par celle-ci. Sous certaines conditions de régularité sur le semigroupe $(g_\omega(y))_{\omega \in \Omega}$, on peut construire une nouvelle famille de diffusions et donc de moyennes. Plus précisément :

Proposition - Définition 2.2 Soit une diffusion réelle symétrique $(f_\omega(x))_{\omega \in \Omega}$ de transformée de Fourier $(g_\omega(y))_{\omega \in \Omega}$ telle que :

$$C1 \quad \forall \omega \in \Omega, \exists M_\omega \in \mathbf{R}^+, \forall y \in \mathbf{R} \quad |g_\omega(y)| \leq M_\omega$$

$$C2 \quad \forall \omega \in \Omega \quad g_\omega \in C^2([0, +\infty[)$$

$$C3 \quad \exists \alpha > 0, \forall \omega \in \Omega, \exists A_\omega, B_\omega, C_\omega \in \mathbf{R}^+, \forall t \in \mathbf{R}^+ :$$

$$\begin{aligned} |g_\omega(t)| &\leq \frac{A_\omega}{t^{\alpha\omega}} \\ |g'_\omega(t)| &\leq \frac{B_\omega}{t^{\alpha\omega+1}} \\ |g''_\omega(t)| &\leq \frac{C_\omega}{t^{\alpha\omega+2}} \end{aligned}$$

Alors pour tout $\rho > 0$ fixé, il existe $\tau_0(\rho) > 0$, tel que, pour tout $\tau \geq \tau_0(\rho)$, la famille $({}^\tau g_\omega(y))_{\omega \in \Omega_\rho} = (g_\omega(|y|^\tau))_{\omega \in \Omega_\rho}$ ($\Omega_\rho = \Omega \cap [\rho, +\infty[$) est un semigroupe multiplicatif de fonctions de $C_0 \cap L^1 \cap L^2$ et c'est la transformée de Fourier d'une diffusion $({}^\tau f_\omega(x))_{\omega \in \Omega_\rho}$ composée de fonctions ${}^\tau f_\omega$ continues de $L^1 \cap L^2$ et appelée la décélérée d'ordre τ de la diffusion initiale.

Celle-ci induit donc une moyenne ${}^\tau m$ dont les poids sont dans Ω_ρ . A tout ρ fixé, nous appellerons $\{\rho \mathbf{m}\}_{\tau \geq \tau_0(\rho)}$ la famille des moyennes sur Ω_ρ induites par les "décélérées" de la diffusion de \mathbf{m} .

De plus, on a :

$$(2.4.10) \quad \forall \omega \in \Omega_\rho, \exists M_\omega, \forall \tau \geq \tau_0 \quad \|{}^\tau g_\omega\|_{L^\infty} \leq M_\omega$$

$$(2.4.11) \quad \forall \omega \in \Omega_\rho, \exists k_\omega, \forall \tau \geq \tau_0 \quad \begin{cases} \sup_{y \in [-1/2, 1/2]} |{}^\tau g'_\omega(y)| \leq k_\omega \\ \sup_{y \in [-1/2, 1/2]} |{}^\tau g''_\omega(y)| \leq k_\omega \end{cases}$$

$$\text{et } {}^\tau g'_\omega(0) = {}^\tau g''_\omega(0) = 0.$$

$$(2.4.12) \quad \forall \omega \in \Omega_\rho, \exists G_\omega \in L^1 \cap L^2; \forall \tau \geq \tau_0 \quad |{}^\tau g_\omega(y)| \leq |G_\omega(y)|$$

Démonstration :

Soit ρ strictement positif fixé et donc $\Omega_\rho = \Omega \cap [\rho, +\infty[$. Si on pose $\tau_1 = \frac{2}{\alpha\rho}$, alors il est clair que, pour tout τ plus grand que τ_1 , ${}^\tau g_\omega(y)$ est une fonction de C_0 et :

$$(2.4.13) \quad \forall y; |y| \geq 1 \quad |{}^\tau g_\omega(y)| \leq \frac{A_\omega}{|y|^{\alpha\omega\tau}} \leq \frac{A_\omega}{|y|^2}$$

donc, pour $\tau \geq \tau_1$, la famille $({}^\tau g_\omega(y))_{\omega \in \Omega_\rho}$ forme un semigroupe multiplicatif de fonctions de $C_0 \cap L^1 \cap L^2$. Par transformation de Fourier inverse (voir [11]) on obtient un semigroupe de convolution $({}^\tau f_\omega(x))_{\omega \in \Omega_\rho}$ constitué de fonctions de C_0 (car ${}^\tau g_\omega \in L^1$) et L^2 (car ${}^\tau g_\omega \in L^2$) avec :

$$(2.4.14) \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad {}^\tau f_\omega(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} {}^\tau g_\omega(t) \cos(xt) dt \quad (\text{car } {}^\tau g_\omega \text{ est paire})$$

Si on prend maintenant $\tau_0 = \sup(2, \tau_1)$, alors pour tout τ supérieur à τ_0 , ${}^\tau g_\omega$ appartient à $C^2([0, +\infty[)$ et donc, il est facile de voir que :

$$(2.4.15) \quad {}^\tau g'_\omega(0) = {}^\tau g''_\omega(0) = 0$$

$$(2.4.16) \quad \forall \omega \in \Omega_\rho, \forall t \geq 1 \quad |{}^\tau g'_\omega(t)| \leq \frac{B_\omega \tau}{t^3}$$

$$(2.4.17) \quad \forall \omega \in \Omega_\rho, \forall t \geq 1 \quad |{}^\tau g''_\omega(t)| \leq \frac{C_\omega \tau^2}{t^4}$$

On peut donc intégrer (2.4.14) deux fois par parties :

$$(2.4.18) \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad {}^\tau f_\omega(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} {}^\tau g''_\omega(t) \frac{1 - \cos(xt)}{x^2} dt$$

donc pour $x \neq 0$,

$$(2.4.19) \quad |{}^\tau f_\omega(x)| \leq \frac{2}{\pi x^2} \int_0^{+\infty} |{}^\tau g''_\omega(t)| dt$$

et donc ${}^\tau f_\omega$ est une fonction intégrable et :

$$(2.4.20) \quad \int_{\mathbf{R}} {}^\tau f_\omega(x) dx = {}^\tau g_\omega(0) = g_\omega(0) = 1$$

Donc pour $\tau \geq \tau_0$, on a bien défini une diffusion $({}^\tau f_\omega)_{\omega \in \Omega_\rho}$ constituée de fonctions de $C_0 \cap L^1 \cap L^2$ et dont la transformée de Fourier est le semigroupe $({}^\tau g_\omega(y))_{\omega \in \Omega_\rho} = (g_\omega(|y|^\tau))_{\omega \in \Omega_\rho}$.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer les relations (2.4.10), (2.4.11) et (2.4.12). La relation (2.4.10) est évidente car $\|{}^\tau g_\omega\|_{L^\infty} = \|g_\omega\|_{L^\infty}$. La relation (2.4.11) est simple, en effet :

$$\forall t \in [0, 1/2] \quad \begin{cases} {}^\tau g'_\omega(t) &= \tau t^{\tau-1} g'_\omega(t^\tau) \\ {}^\tau g''_\omega(t) &= \tau^2 t^{2\tau-2} g''_\omega(t^\tau) + \tau(\tau-1)t^{\tau-2} g'_\omega(t^\tau) \end{cases}$$

et donc on peut trouver une constante C indépendante de τ telle que :

$$(2.4.21) \quad \forall t \in [0, 1/2] \quad \begin{cases} |{}^\tau g'_\omega(t)| \leq C \sup_{t \in [0, 1/2]} |g'_\omega(t^\tau)| \leq C \sup_{t \in [0, 1/2]} |g'_\omega(t)| \\ |{}^\tau g''_\omega(t)| \leq C \sup_{t \in [0, 1/2]} (|g'_\omega(t)| + |g''_\omega(t)|) \end{cases}$$

Quant à la relation (2.4.12), il suffit de prendre :

$$(2.4.22) \quad G_\omega(y) \mapsto \begin{cases} M_\omega & \text{si } -1 \leq y \leq 1 \quad (\text{voir (2.4.10)}) \\ \frac{A_\omega}{y^2} & \text{si } |y| > 1 \quad (\text{voir (2.4.13)}) \end{cases}$$

Ceci achève la démonstration.

Cette proposition-définition appelle quelques commentaires. Les critères $C1$, $C2$, $C3$ semblent plutôt restrictifs mais ils sont vérifiés pour la diffusion de Catalan et la diffusion brownienne. Ces hypothèses ne sont peut-être pas les plus “faibles” mais elles permettent de travailler sur des “décélérées” de diffusion telles que $({}^\tau g_\omega(y))_{\omega \in \Omega_\rho}$ soient au moins dans $L^\infty \cap L^2$ et telles (voir (2.4.10), (2.4.11), (2.4.12)) que l’on ait des majorations *uniformes* sur ${}^\tau g_\omega(y)$ et sa norme L^2 pour $\omega \in \Omega_\rho$ et pour *tout* $\tau \geq \tau_0$. De même, on obtient (voir (2.4.11)) que, à ω fixé dans Ω_ρ , la famille $({}^\tau g_\omega(y))_{\tau \geq \tau_0}$ est *uniformément* k_ω – lipschitzienne.

Ces conditions ne semblent pas très essentielles, mais elles permettent de montrer que, pour ρ fixé, la famille $\{{}_\rho^\tau \mathbf{m}\}_{\tau \geq \tau_0}$ admet une limite lorsque τ tend vers l’infini et cette limite n’est autre que \mathbf{mun} .

2.4.3 Limite des moyennes induites par les décélérées d’une diffusion.

Dans un premier temps, nous allons rappeler la définition de la transformée de Hilbert sur les fonctions de $L^\infty \cap L^1 \cap L^2$ et nous reviendrons sur les objets construits dans la proposition 11. Grâce à cela, nous pourrions conclure quant à la limite des moyennes ${}_\rho^\tau \mathbf{m}$.

Retour sur la transformée de Hilbert et la représentation $z^\varpi \rightarrow g^\varpi(y)$.

Rappelons d’abord que la transformation de Hilbert est une involution de L^2 :

$$(2.4.23) \quad \begin{aligned} H &: L^2 \rightarrow L^2 \\ g(y) &\mapsto (Hg)(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{i\pi} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{g(y+t) - g(y-t)}{t} dt \end{aligned}$$

et

$$(2.4.24) \quad \|Hg\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}$$

Soit maintenant un semigroupe multiplicatif quelconque $(h_\omega)_{\omega \in \Omega}$ constitué de fonctions de $L^\infty \cap L^2$, alors il est clair que l’on peut encore construire les objets :

$$\begin{cases} G_h^{\omega_1}(y) = h_{\omega_1}(y) \\ G_h^{\omega_1, \dots, \omega_s}(y) = (HG_h^{\omega_1, \dots, \omega_{s-1}})(y) h_{\omega_s}(y) \quad (s \geq 2) \end{cases}$$

Ces fonctions, ainsi que leurs transformées de Hilbert, appartiennent à L^2 et on a (grâce à (2.4.24)) :

$$(2.4.25) \quad \|G_h^{\omega_1, \dots, \omega_s}\|_{L^2} \leq \|h_{\omega_s}\|_{L^\infty} \dots \|h_{\omega_2}\|_{L^\infty} \|h_{\omega_1}\|_{L^2}$$

$$(2.4.26) \quad \|HG_h^{\omega_1, \dots, \omega_s}\|_{L^2} \leq \|h_{\omega_s}\|_{L^\infty} \dots \|h_{\omega_2}\|_{L^\infty} \|h_{\omega_1}\|_{L^2}$$

On peut remarquer de la même façon que, si $(g_\omega)_{\omega \in \Omega}$ et $(h_\omega)_{\omega \in \Omega}$ sont deux semigroupes multiplicatifs de fonctions de $L^\infty \cap L^2$, alors :

$$(2.4.27) \quad \begin{aligned} \|HG_g^{\omega_1, \dots, \omega_s} - HG_h^{\omega_1, \dots, \omega_s}\|_{L^2} &= \|G_g^{\omega_1, \dots, \omega_s} - G_h^{\omega_1, \dots, \omega_s}\|_{L^2} \\ &\leq \sum_{i=2}^s \|g_{\omega_s}\|_{L^\infty} \dots \|g_{\omega_i} - h_{\omega_i}\|_{L^\infty} \dots \|h_{\omega_2}\|_{L^\infty} \|h_{\omega_1}\|_{L^2} \\ &\quad + \|g_{\omega_s}\|_{L^\infty} \dots \|g_{\omega_2}\|_{L^\infty} \|g_{\omega_1} - h_{\omega_1}\|_{L^2} \end{aligned}$$

Ceci va nous permettre d'énoncer un premier résultat sur la limite des moyennes ${}^\tau_\rho \mathbf{m}$ induites par les "décélérées" d'une diffusion ou plutôt sur leur représentation $z^\varpi \rightarrow g^\varpi(y)$.

Mais notons d'abord $(\chi_\omega)_{\omega \in \mathbf{R}^{+*}}$ le semigroupe multiplicatif donné par :

$$(2.4.28) \quad \chi_\omega(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |y| > 1 \end{cases} \in L^\infty \cap L^2$$

Pour tous ω_i dans \mathbf{R}^{+*} et tous signes ε_i , on peut définir de la même manière :

$$(2.4.29) \quad G_\chi^{\omega_1, \dots, \omega_s}(y) \in L^2 \quad ; \quad HG_\chi^{\omega_1, \dots, \omega_s}(y) \in L^2$$

et

$$(2.4.30) \quad \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y) = \frac{1}{2^s} \left[(1 + \varepsilon_s H) \sum_{\boldsymbol{\eta}^1 \dots \boldsymbol{\eta}^t = (\omega_1, \dots, \omega_s)} \varepsilon_l(\boldsymbol{\eta}^1) \dots \varepsilon_l(\boldsymbol{\eta}^1 \dots \boldsymbol{\eta}^{t-1}) G_\chi^{\|\boldsymbol{\eta}^1\|, \dots, \|\boldsymbol{\eta}^t\|} \right] (y) \in L^2$$

Alors :

Proposition 2.12 *Soit $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une diffusion réelle symétrique vérifiant les conditions C1, C2, C3 de la proposition-définition 2. Alors, pour ρ fixé et pour tout $\tau \geq \tau_0(\rho)$, on peut former, pour la diffusion $({}^\tau f_\omega)_{\omega \in \Omega_\rho}$, la représentation :*

$$(2.4.31) \quad z^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \mapsto {}^\tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y) \in C_0 \cap L^2 \quad (\omega_i \in \Omega_\rho)$$

et pour tous $\omega_i \in \Omega_\rho$ et $\varepsilon_i = \pm 1$:

$$(2.4.32) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|{}^\tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} - \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}\|_{L^2} = 0$$

Démonstration : Ces résultats s'obtiennent sans difficultés, en effet :

$$(2.4.33) \quad \|{}^\tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} - \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}\|_{L^2} \leq \frac{1}{2^{s-1}} \sum_{\boldsymbol{\eta}^1 \dots \boldsymbol{\eta}^t = (\omega_1, \dots, \omega_s)} \|G_{g^\tau}^{\|\boldsymbol{\eta}^1\|, \dots, \|\boldsymbol{\eta}^t\|} - G_\chi^{\|\boldsymbol{\eta}^1\|, \dots, \|\boldsymbol{\eta}^t\|}\|_{L^2}$$

mais on peut remarquer que :

$$\forall \omega \in \Omega_\rho \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|{}^\tau g_\omega - \chi_\omega\|_{L^\infty} = 0$$

et comme ${}^\tau g_\omega$ converge presque partout vers χ_ω et que (voir (2.4.12)) :

$$(2.4.34) \quad \forall y \in \mathbf{R} \quad |{}^\tau g_\omega(y) - \chi_\omega(y)| \leq |G_\omega(y)| + |\chi_\omega(y)| \in L^2$$

on en déduit, par un argument de convergence dominée, que :

$$\forall \omega \in \Omega_\rho \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|{}^\tau g_\omega - \chi_\omega\|_{L^2} = 0$$

En utilisant alors l'inégalité (2.4.27), on obtient :

$$\forall \omega_1, \dots, \omega_s \in \Omega_\rho \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|G_{g^\tau}^{\omega_1, \dots, \omega_s} - G_\chi^{\omega_1, \dots, \omega_s}\|_{L^2} = 0$$

et donc, en utilisant (2.4.33), on obtient le résultat (2.4.32).

◁

Nous avons obtenu un premier résultat assez fort sur la représentation $z^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \mapsto \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y)$ et son comportement lorsque τ tend vers l'infini. Cependant, ce résultat ne permet pas de conclure quant à la limite pour les poids des moyennes $\tau_{\rho} \mathbf{m}$. En effet :

$$\tau_{\rho} \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0) \quad (\forall \omega_i \in \Omega_{\rho})$$

mais, a priori, $\chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$ n'est défini que presque partout (est-ce que $\chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0)$ est bien défini ?) et de toute façon, même si $\chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}$ est continue en 0, cela ne permet pas de conclure car la convergence en norme L^2 , même pour des fonctions continues, n'implique la convergence ponctuelle que presque partout.

Pour contourner cet obstacle, nous allons montrer que la transformation de Hilbert conserve les fonctions de L^2 , k -lipschitziennes d'exposant $1/2$ au voisinage de 0. Nous utiliserons alors cette propriété pour montrer que les moyennes induites par les décélérées d'une diffusion ont une limite lorsque τ tend vers l'infini.

Transformation de Hilbert et fonctions L^2 , k -lipschitziennes d'exposant $1/2$ en 0.

Enonçons tout de suite le résultat suivant, qui est un raffinement d'un théorème connu (voir [11]) :

Proposition 2.13 *Soit g une fonction de L^2 telle que :*

$$(2.4.35) \quad \forall (y_1, y_2) \in [-\beta, \beta]^2 \quad \begin{cases} |g(y_1) - g(y_2)| \leq k |y_1 - y_2|^{1/2} \\ \text{et} \\ |g(y_1)| \leq M \end{cases}$$

Alors la transformée de Hilbert $(Hg)(y)$ est une fonction de L^2 et pour tout $0 < \beta_1 < \beta$:

$$(2.4.36) \quad \forall (y_1, y_2) \in [-\beta_1, \beta_1]^2 \quad \begin{cases} |Hg(y_1) - Hg(y_2)| \leq K |y_1 - y_2|^{1/2} \\ \text{et} \\ |Hg(y_1)| \leq C \end{cases}$$

où K et C dépendent uniquement de k , M , $(\beta - \beta_1)$, β et $\|g\|_{L^2}$

Démonstration :

On peut d'abord remarquer que nous avons choisi $1/2$ mais on peut faire les mêmes calculs pour un exposant α compris strictement entre 0 et 1.

Soit

$$(2.4.37) \quad V(y, z) = -\frac{1}{i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{t(g(y+t) - g(y-t))}{t^2 + z^2} dt = -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t-y}{(t-y)^2 + z^2} g(t) dt$$

$V(y, z)$ est bien défini et dérivable en y pour tout $z > 0$ (voir [11]). Soit $\beta_1 < \beta$ et $y \in [-\beta_1, \beta_1]$, on rappelle :

$$(Hg)(y) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{g(y+t) - g(y-t)}{t} dt = \frac{1}{i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{g(y+t) - g(y-t)}{t} dt$$

et cette intégrale est bien définie car pour $y \in [-\beta_1, \beta_1]$ et t suffisamment petit, on a :

$$|g(y+t) - g(y-t)| \leq k\sqrt{2}t^{1/2}$$

Pour $z > 0$, on a :

$$(Hg)(y) + V(y, z) = \frac{z^2}{i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{g(y+t) - g(y-t)}{t(t^2 + z^2)} dt$$

et donc pour y dans $[-\beta_1, \beta_1]$,

$$|(Hg)(y) + V(y, z)| \leq \frac{|z^2|}{\pi} \left[\int_0^{\beta-y} \frac{|g(y+t) - g(y-t)|}{t(t^2 + z^2)} dt + \int_{\beta-y}^{+\infty} \frac{|g(y+t) - g(y-t)|}{t(t^2 + z^2)} dt \right]$$

Dans la première intégrale on peut utiliser (2.4.35) :

$$\int_0^{\beta-y} \frac{|g(y+t) - g(y-t)|}{t(t^2 + z^2)} dt \leq k\sqrt{2} \int_0^{\beta-y} \frac{1}{(t^2 + z^2)\sqrt{t}} dt \leq k\sqrt{2}\gamma_1 z^{-3/2}$$

avec

$$\gamma_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)\sqrt{t}} dt$$

Dans la deuxième intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\beta-y}^{+\infty} \frac{|g(y+t) - g(y-t)|}{t(t^2 + z^2)} dt &\leq \left[\int_{\beta-y}^{+\infty} |g(y+t) - g(y-t)|^2 dt \right]^{1/2} \left[\int_{\beta-y}^{+\infty} \frac{1}{t^2(t^2 + z^2)^2} dt \right]^{1/2} \\ &\leq 2\|g\|_{L^2} \left[\int_{\beta-\beta_1}^{+\infty} \frac{1}{t^6} dt \right]^{1/2} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{5}} \|g\|_{L^2} \frac{1}{(\beta - \beta_1)^{5/2}} \end{aligned}$$

donc, en regroupant ces deux résultats et pour $z \in [0, 2\beta]$ et $y \in [-\beta_1, \beta_1]$, on a :

$$(2.4.38) \quad |(Hg)(y) + V(y, z)| \leq \left(\frac{k\gamma_1\sqrt{2}}{\pi} + \frac{2}{\pi\sqrt{5}} \|g\|_{L^2} \frac{(2\beta)^{3/2}}{(\beta - \beta_1)^{5/2}} \right) z^{1/2}$$

soit, plus simplement,

$$(2.4.39) \quad |(Hg)(y) + V(y, z)| \leq a(k, \beta, \beta - \beta_1, \|g\|_{L^2}) z^{1/2}$$

De la même manière (voir [11]) :

$$\frac{\partial V}{\partial y}(y, z) = -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 - z^2}{(t^2 + z^2)^2} [g(t+y) - g(y)] dt$$

et donc pour $y \in [-\beta_1, \beta_1]$ et $z > 0$ on peut écrire :

$$\frac{\partial V}{\partial y}(y, z) = I_1(y, z) + I_2(y, z) + I_3(y, z) + I_4(y, z) + I_5(y, z)$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1(y, z) &= -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{-\beta-y} \frac{t^2 - z^2}{(t^2 + z^2)^2} g(t+y) dt \\
I_2(y, z) &= +\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{-\beta-y} \frac{t^2 - z^2}{(t^2 + z^2)^2} g(y) dt \\
I_3(y, z) &= -\frac{1}{i\pi} \int_{-\beta-y}^{\beta-y} \frac{t^2 - z^2}{(t^2 + z^2)^2} [g(t+y) - g(y)] dt \\
I_4(y, z) &= -\frac{1}{i\pi} \int_{\beta-y}^{+\infty} \frac{t^2 - z^2}{(t^2 + z^2)^2} g(t+y) dt \\
I_5(y, z) &= +\frac{1}{i\pi} \int_{\beta-y}^{+\infty} \frac{t^2 - z^2}{(t^2 + z^2)^2} g(y) dt
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
|I_1(y, z)| &\leq \frac{1}{\pi} \|g\|_{L^2} \left[\int_{-\infty}^{-\beta-y} \left(\frac{t^2 - z^2}{(t^2 + z^2)^2} \right)^2 dt \right]^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\pi} \|g\|_{L^2} \left[\int_{-\infty}^{-\beta+\beta_1} \frac{1}{t^4} dt \right]^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \|g\|_{L^2} \frac{1}{(\beta - \beta_1)^{3/2}}
\end{aligned}$$

et de même :

$$|I_4(y, z)| \leq \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \|g\|_{L^2} \frac{1}{(\beta - \beta_1)^{3/2}}$$

D'autre part,

$$|I_2(y, z)| \leq \frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^{-(\beta-\beta_1)} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{M}{\pi} \frac{1}{(\beta - \beta_1)}$$

et de même :

$$|I_5(y, z)| \leq \frac{M}{\pi} \frac{1}{(\beta - \beta_1)}$$

Enfin :

$$|I_3(y, z)| \leq \frac{k}{\pi} \int_{-\beta-y}^{\beta-y} \frac{|t^2 - z^2| \sqrt{|t|}}{(t^2 + z^2)^2} dt$$

et en utilisant le changement de variable $t = uz$, on trouve :

$$|I_3(y, z)| \leq \frac{k\gamma_2}{\pi\sqrt{z}} \quad \text{avec} \quad \gamma_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u^2 - 1| \sqrt{|u|}}{(u^2 + 1)^2} du$$

et donc, en regroupant ces résultats, on trouve que, pour $y \in [-\beta_1, \beta_1]$ et $z \in]0, 2\beta]$:

$$(2.4.40) \quad \left| \frac{\partial V}{\partial y}(y, z) \right| \leq \left(\frac{1}{\pi\sqrt{3}} \|g\|_{L^2} \frac{2\sqrt{2}\beta}{(\beta - \beta_1)^{3/2}} + \frac{M}{\pi} \frac{2\sqrt{2}\beta}{(\beta - \beta_1)} + \frac{k\gamma_2}{\pi} \right) \frac{1}{z^{1/2}}$$

soit plus simplement,

$$(2.4.41) \quad \left| \frac{\partial V}{\partial y}(y, z) \right| \leq b(M, k, \beta, \beta - \beta_1, \|g\|_{L^2}) \frac{1}{z^{1/2}}$$

Il est maintenant facile de montrer la première partie de (2.4.36) en utilisant les inégalités (2.4.39) et (2.4.41). Soient y_1 et y_2 dans $[-\beta_1, \beta_1]$ tels que $y_2 > y_1$ (on remarque que $z = y_2 - y_1 \in]0, 2\beta[$), alors :

$$\begin{aligned} |Hg(y_2) - Hg(y_1)| &\leq |Hg(y_2) + V(y_2, y_2 - y_1)| \\ &\quad + |V(y_2, y_2 - y_1) - V(y_1, y_2 - y_1)| \\ &\quad + |Hg(y_1) + V(y_1, y_2 - y_1)| \end{aligned}$$

mais

$$V(y_2, y_2 - y_1) - V(y_1, y_2 - y_1) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial V}{\partial y}(y, y_2 - y_1) dy$$

et en utilisant alors (2.4.39) et (2.4.41), on trouve :

$$|Hg(y_2) - Hg(y_1)| \leq K |y_1 - y_2|^{1/2}$$

avec :

$$K = 2a(k, \beta, \beta - \beta_1, \|g\|_{L^2}) + b(k, \beta, \beta - \beta_1, \|g\|_{L^2})$$

La démonstration de la deuxième partie de (2.4.36) se fait avec le même type de calcul et on trouve, pour $y \in [-\beta_1, \beta_1]$,

$$|Hg(y)| \leq C$$

avec :

$$C = \frac{2k\sqrt{2(\beta + \beta_1)}}{\pi} + \frac{2\|g\|_{L^2}}{\sqrt{\beta - \beta_1}}$$

◁

Cette propriété de la transformation de Hilbert va nous permettre de conclure quand à la limite des moyennes induites par les décélérées d'une diffusion.

Limite des moyennes induites par les décélérées d'une diffusion.

Enonçons tout de suite le résultat :

Proposition 2.14 *Soit $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une diffusion symétrique réelle vérifiant les critères C1, C2 et C3 de la proposition-définition 2. Alors, pour tout ρ fixé, on a une famille de moyennes $\{\tau_\rho \mathbf{m}\}_{\tau \geq \tau_0}$ à incréments dans $\Omega_\rho = \Omega \cap [\rho, +\infty[$ et :*

$$(2.4.42) \quad \forall \omega_1, \dots, \omega_s \in \Omega_\rho, \forall \varepsilon_i = \pm \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau_\rho \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \mathbf{mun}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s}$$

avec comme conséquence immédiate (par application sur la diffusion brownienne) :

$$(2.4.43) \quad \forall \omega_1, \dots, \omega_s \in \mathbf{R}^{+*}, \forall \varepsilon_i = \pm \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau \mathbf{moun}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \mathbf{mun}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s}$$

Démonstration :

On rappelle que : $\tau_\rho \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0)$

Maintenant, si on a un semigroupe multiplicatif $(h_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de fonctions de L^2 continues bornées sur $[-1/2, 1/2]$ et telles que :

$$\forall y_1, y_2 \in [-1/2, 1/2] \quad |h_\omega(y_1) - h_\omega(y_2)| \leq k_\omega |y_1 - y_2|^{1/2}$$

alors (voir proposition 11), on peut toujours construire :

$$\begin{cases} G_h^{\omega_1}(y) = h_{\omega_1}(y) \\ G_h^{\omega_1, \dots, \omega_s}(y) = (HG_h^{\omega_1, \dots, \omega_{s-1}})(y) h_{\omega_s}(y) \end{cases}$$

Mais en itérant le résultat de la proposition 2.13, on montre sans difficultés par récurrence que $G_h^{\omega_1, \dots, \omega_s}(y)$ et $HG_h^{\omega_1, \dots, \omega_s}(y)$ sont continues sur un intervalle assez petit $[-\beta_s, \beta_s]$ et :

$$(2.4.44) \forall y_1, y_2 \in [-\beta_s, \beta_s] \quad \begin{cases} |G_h^{\omega_1, \dots, \omega_s}(y_1) - G_h^{\omega_1, \dots, \omega_s}(y_2)| \leq K_h^{\omega_1, \dots, \omega_s} |y_1 - y_2|^{1/2} \\ |HG_h^{\omega_1, \dots, \omega_s}(y_1) - HG_h^{\omega_1, \dots, \omega_s}(y_2)| \leq K_h^{\omega_1, \dots, \omega_s} |y_1 - y_2|^{1/2} \end{cases}$$

où $K_h^{\omega_1, \dots, \omega_s}$ est une constante qui dépend de $k_{\omega_1}, \dots, k_{\omega_s}, \|h_{\omega_1}\|_{L^\infty([-1/2, 1/2])}, \dots, \|h_{\omega_s}\|_{L^\infty([-1/2, 1/2])}, \|h_{\omega_1}\|_{L^2}, \dots, \|h_{\omega_s}\|_{L^2}$.

Or on peut appliquer ceci à $(\tau g_\omega)_{\omega \in \Omega_\rho}$ car (voir proposition-définition 2.2) pour tout ω dans Ω_ρ et tout $\tau \geq \tau_0$, τg_ω est continue sur $[-1/2, 1/2]$ et :

$$(2.4.45) \quad \|\tau g_\omega\|_{L^\infty([-1/2, 1/2])} \leq M_\omega \quad (\text{indépendant de } \tau)$$

$$(2.4.46) \quad \|\tau g_\omega\|_{L^2} \leq C_\omega \quad (\text{indépendant de } \tau)$$

et comme

$$\sup_{y \in [-1/2, 1/2]} |\tau g'_\omega(y)| \leq k_\omega \quad (\text{indépendant de } \tau)$$

on a :

$$(2.4.47) \quad \forall y_1, y_2 \in [-1/2, 1/2], \quad |\tau g_\omega(y_1) - \tau g_\omega(y_2)| \leq k_\omega |y_1 - y_2| \leq k_\omega |y_1 - y_2|^{1/2}$$

En appliquant (2.4.44) dans (2.4.3), on prouve que, pour tout $\tau \geq \tau_0$, tous ω_i dans Ω_ρ et tout signes ε_i , $\tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y)$ est une fonction de L^2 , continue en 0. De plus, sur un intervalle $[-\beta_s, \beta_s]$ (indépendant de τ et des ω_i, ε_i), on a :

$$(2.4.48) \quad \forall y_1, y_2 \in [-\beta_s, \beta_s], \quad |\tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y_1) - \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y_2)| \leq K_{\tau g}^{\omega_1, \dots, \omega_s} |y_1 - y_2|^{1/2}$$

mais, étant donné les majorations uniformes en τ (2.4.45), (2.4.46) et (2.4.47), on peut prendre une constante $K_{\tau g}^{\omega_1, \dots, \omega_s}$ indépendante de τ (notée $K_g^{\omega_1, \dots, \omega_s}$).

De la même façon, pour tous ω_i dans Ω_ρ et tout signes ε_i , $\chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y)$ est une fonction de L^2 , continue en 0. De plus, sur un intervalle $[-\alpha_s, \alpha_s]$, on a :

$$(2.4.49) \quad \forall y_1, y_2 \in [-\alpha_s, \alpha_s], \quad |\chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y_1) - \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y_2)| \leq K_\chi^{\omega_1, \dots, \omega_s} |y_1 - y_2|^{1/2}$$

Soit $\alpha > 0$ le minimum de α_s et de β_s (afin que (2.4.48) et (2.4.49) soient vérifiés), alors pour tout y dans $[-\alpha, \alpha]$, on a :

$$\begin{aligned} | \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0) - \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0) | &\leq | \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0) - \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y) | \\ &+ | \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y) - \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y) | \\ &+ | \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y) - \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0) | \end{aligned}$$

soit alors, pour tout $\tau \geq \tau_0$:

$$\begin{aligned} | \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0) - \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0) | &\leq K_g^{\omega_1, \dots, \omega_s} \sqrt{|y|} \\ &+ | \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y) - \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(y) | \\ &+ K_\chi^{\omega_1, \dots, \omega_s} \sqrt{|y|} \end{aligned}$$

Mais pour tout γ ($\alpha > \gamma > 0$), on peut appliquer les inégalités de la norme $L^2([-\gamma, \gamma])$ et on obtient, pour tous ω_i dans Ω_ρ , tous signes ε_i , tout $\tau \geq \tau_0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\gamma} | \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0) - \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0) | &\leq (K_g^{\omega_1, \dots, \omega_s} + K_\chi^{\omega_1, \dots, \omega_s})\gamma \\ &+ \| \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} - \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \|_{L^2} \end{aligned}$$

Pour tout $\eta > 0$, il existe γ_η ($\alpha > \gamma_\eta > 0$), indépendant de τ , tel que :

$$(K_g^{\omega_1, \dots, \omega_s} + K_\chi^{\omega_1, \dots, \omega_s})\gamma_\eta \leq \eta/2$$

Une fois γ_η fixé, étant donné la proposition 12, il existe $\tau_1 \geq \tau_0$ tel que, pour tout $\tau \geq \tau_1$, on a :

$$\| \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} - \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} \|_{L^2} \leq (\eta/2) \sqrt{2\gamma_\eta}$$

Pour résumer, on a :

$$(2.4.50) \quad \forall \eta > 0, \exists \tau_1 \geq \tau_0; \forall \tau \geq \tau_1 \quad | \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0) - \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0) | \leq \eta$$

donc, pour tous ω_i dans Ω_ρ , tous signes ε_i , on a :

$$(2.4.51) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau g^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0) = \chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0)$$

et $\chi^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s}(0)$ est bien défini car cette fonction est continue en 0.

Chaque moyenne $\tau \mathbf{m}$ vérifie les propriétés $P0$, $P1$, $P2$ et ces propriétés “passent à la limite”. La moyenne de poids ${}^\infty \mathbf{m}^\varpi = \chi^\varpi(0)$ vérifie donc les mêmes propriétés mais il n'est pas dur de voir que les poids $\chi^\varpi(0)$ sont indépendants des incréments ω_i et donc cette moyenne s'identifie à la seule qui vérifie $P0$, $P1$, $P2$ et qui soit indépendante des incréments, c'est-à-dire \mathbf{mun} .

◁

Dans la section suivante, nous étudierons plus en détail la moyenne \mathbf{mon} introduite dans la section 2.3.4, ainsi que la famille de moyennes $\mathbf{mo}_{\alpha, \beta}$ qui lui est associée. La construction de \mathbf{mon} et de la famille $\mathbf{mo}_{\alpha, \beta}$, ainsi que leur étude, sont dus à J. Ecalle.

2.5 La moyenne organique.

Il s'agit donc de plonger la moyenne organique **mon** dans une famille paramétrée de moyennes $\mathbf{mo}_{\alpha,\beta}$ de "même nature" (avec, comme pour tous ces plongements, des paramètres α et β positifs et complémentaires : $\alpha + \beta = 1$).

2.5.1 Définition.

Commençons par rappeler la :

Définition 2.5 (J. Ecalle) Pour $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, on définit la moyenne $\mathbf{mo}_{\alpha,\beta}$ par ses poids :

$$(2.5.1) \quad \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\omega,\varepsilon_1} = \alpha \text{ (resp. } \beta) \text{ si } \varepsilon_1 = + \text{ (resp. } -)$$

$$(2.5.2) \quad \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\omega_1,\varepsilon_1,\dots,\omega_s,\varepsilon_s} = \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\omega_1,\varepsilon_1,\dots,\omega_{s-1},\varepsilon_{s-1}} P_s$$

avec un facteur P_s défini par :

$$(2.5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_s = 1 - \beta \frac{\omega_s}{\omega_1 + \dots + \omega_s} \quad \text{si } (\varepsilon_{s-1}, \varepsilon_s) = (+, +) \\ P_s = \beta \frac{\omega_s}{\omega_1 + \dots + \omega_s} \quad \text{si } (\varepsilon_{s-1}, \varepsilon_s) = (+, -) \\ P_s = \alpha \frac{\omega_s}{\omega_1 + \dots + \omega_s} \quad \text{si } (\varepsilon_{s-1}, \varepsilon_s) = (-, +) \\ P_s = 1 - \alpha \frac{\omega_s}{\omega_1 + \dots + \omega_s} \quad \text{si } (\varepsilon_{s-1}, \varepsilon_s) = (-, -) \end{array} \right.$$

Il est facile de voir que ces moyennes vérifient la propriété P0. De plus, on peut remarquer que :

$$(2.5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{mo}_{1,0} = \mathbf{mur} \\ \mathbf{mo}_{1/2,1/2} = \mathbf{mon} \\ \mathbf{mo}_{0,1} = \mathbf{mul} \end{array} \right.$$

Enfin, on lit directement sur les poids que **mon** préserve la réalité.

Nous allons maintenant montrer que ces moyennes préservent la convolution, puis nous verrons qu'elles préservent aussi la croissance latérale.

2.5.2 Les moyennes $\mathbf{mo}_{\alpha,\beta}$ préservent la convolution.

On peut tout de suite énoncer la propriété suivante :

Proposition 2.15 (J. Ecalle) Pour tout (α, β) , on a les moules de passage suivants :

$$(2.5.5) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mo}_{\alpha,\beta} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right) \right\rangle^{\omega_1,\dots,\omega_s} = (-1)^s \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\omega_1,+,\dots,\omega_s,+}$$

$$(2.5.6) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mo}_{\alpha,\beta} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right) \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\omega_1, -, \dots, \omega_s, -}$$

$$(2.5.7) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mo}_{\alpha,\beta} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right) \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\omega_1, +, \dots, \omega_{s-1}, +, \omega_s, -}$$

$$(2.5.8) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mo}_{\alpha,\beta} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right) \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\omega_1, -, \dots, \omega_{s-1}, -, \omega_s, +}$$

et :

$$(2.5.9) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mo}_{\alpha,\beta} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right) \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\omega_s, +, \dots, \omega_1, +}$$

$$(2.5.10) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mo}_{\alpha,\beta} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right) \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\omega_s, -, \dots, \omega_1, -}$$

$$(2.5.11) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mo}_{\alpha,\beta} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right) \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\omega_s, +, \dots, \omega_2, +, \omega_1, -}$$

$$(2.5.12) \quad \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mo}_{\alpha,\beta} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right) \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\omega_s, -, \dots, \omega_2, -, \omega_1, +}$$

et, comme tous ces moules sont symétriels, la moyenne $\mathbf{mo}_{\alpha,\beta}$ préserve la convolution.

Démonstration :

Les expressions des moules de passage (2.5.5) à (2.5.8) sont valables à la seule condition que la moyenne $\mathbf{mo}_{\alpha,\beta}$ vérifie la propriété P0, ce qui est bien le cas. Si on montre qu'un de ces quatre moules est symétriel, alors les huit moules le seront automatiquement. De plus, les quatre derniers moules (2.5.9) à (2.5.12) se déduisent des quatre premiers par l'opération :

$$M^\bullet \mapsto (1^\bullet + I^\bullet)^{-1} \circ M^\bullet \circ (1^\bullet + I^\bullet)^{-1}$$

avec :

$$((1^\bullet + I^\bullet)^{-1})^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s$$

Or, pour un moule symétriel, cette opération revient à prendre le moule $(rev M^\bullet)$ où $(rev M^\bullet)^{\omega_1, \dots, \omega_s} = M^{\omega_s, \dots, \omega_1}$. On ramène ainsi la validité des formules (2.5.9) à (2.5.12) à celle des formules (2.5.5) à (2.5.8), qui sont mutuellement équivalentes. Il ne reste donc plus qu'à établir, par exemple, la première de celles-ci, c'est-à-dire (2.5.5). A partir de la définition 2.5, on trouve :

$$M^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mo}_{\alpha,\beta} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right) \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \prod_{i=1}^s \left(\beta \frac{\omega_i}{\tilde{\omega}_i} - 1 \right)$$

et donc,

$$(2.5.13) \quad M^{\omega_1, \dots, \omega_s} = M^{\omega_1, \dots, \omega_{s-1}} \left(\beta \frac{\omega_s}{\tilde{\omega}_s} - 1 \right)$$

Introduisons des séquences $\boldsymbol{\omega} = \omega_1, \dots, \omega_s$ et $\boldsymbol{\eta} = \eta_1, \dots, \eta_t$ et montrons, par récurrence sur la longueur de ces séquences (ou plutôt, sur la somme $s+t$ de ces longueurs) que le moule M^\bullet est symétriel. Nous

autoriserons s ou t à être nuls, ce cas correspondant à une séquence ω ou η *vide*. Pour démarrer la récurrence, on observe que la relation (2.5.13) est vérifiée pour des séquences de longueur nulle ($M^\emptyset = 1$) et que $ctsh(\emptyset, \omega) = \{\omega\}$ et $ctsh(\emptyset, \emptyset) = \{\emptyset\}$.

Il est facile de voir que les relations de symétrie sont vérifiées pour $s + t = 2$ et $s + t = 1$. (Pour les couples $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ et $(2, 0)$, ces relations sont même triviales). Supposons que ces relations soient vérifiées pour des séquences de longueur s et t avec $s + t$ strictement inférieur à un entier n . Les relations sont triviales pour les couples $(n, 0)$ et $(0, n)$. Il reste donc à établir ces relations de symétrie pour des séquences de longueur s et t avec $s + t = n$, $s \geq 1$ et $t \geq 1$. Posant $\omega' = \omega_1, \dots, \omega_{s-1}$ et $\eta' = \eta_1, \dots, \eta_{t-1}$, et appliquant la relation (2.5.13) à toutes les séquences v de $ctsh(\omega, \eta)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in ctsh(\omega, \eta)} M^v &= \sum_{v \in ctsh(\omega', \eta)} M^v \left(\beta \frac{\omega_s}{\check{\omega}_s + \check{\eta}_t} - 1 \right) + \sum_{v \in ctsh(\omega', \eta')} M^v \left(\beta \frac{\omega_s + \eta_t}{\check{\omega}_s + \check{\eta}_t} - 1 \right) \\ &\quad + \sum_{v \in ctsh(\omega, \eta')} M^v \left(\beta \frac{\eta_t}{\check{\omega}_s + \check{\eta}_t} - 1 \right) \end{aligned}$$

Mais en appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in ctsh(\omega, \eta)} M^v &= M^{\omega'} M^\eta \left(\beta \frac{\omega_s}{\check{\omega}_s + \check{\eta}_t} - 1 \right) + M^{\omega'} M^{\eta'} \left(\beta \frac{\omega_s + \eta_t}{\check{\omega}_s + \check{\eta}_t} - 1 \right) \\ &\quad + M^\omega M^{\eta'} \left(\beta \frac{\eta_t}{\check{\omega}_s + \check{\eta}_t} - 1 \right) \end{aligned}$$

Soit, en utilisant encore la relation (2.5.13) :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in ctsh(\omega, \eta)} M^v &= M^{\omega'} M^{\eta'} \times \\ &\quad \left(\left(\beta \frac{\omega_s}{\check{\omega}_s} - 1 \right) \left(\beta \frac{\omega_s}{\check{\omega}_s + \check{\eta}_t} - 1 \right) + \left(\beta \frac{\omega_s + \eta_t}{\check{\omega}_s + \check{\eta}_t} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\beta \frac{\eta_t}{\check{\eta}_t} - 1 \right) \left(\beta \frac{\eta_t}{\check{\omega}_s + \check{\eta}_t} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

Mais le facteur entre parenthèse est égal à $\left(\beta \frac{\omega_s}{\check{\omega}_s} - 1 \right) \left(\beta \frac{\eta_t}{\check{\eta}_t} - 1 \right)$ et, en utilisant à nouveau la relation (2.5.13), on obtient bien :

$$\sum_{v \in ctsh(\omega, \eta)} M^v = M^\omega M^\eta$$

ce qui achève la démonstration par récurrence.

◁

Nous allons maintenant démontrer, par “erborification”, que les moyennes $\mathbf{mo}_{\alpha, \beta}$ préservent la croissance latérale.

2.5.3 Les moyennes $\mathbf{mo}_{\alpha,\beta}$ préservent la croissance latérale.

En reprenant le raisonnement de la section 2.9, il suffit de montrer que, pour l'un des moules (2.5.5) à (2.5.12), le procédé d'erborification fournit un “bon” moule erborifié. Cela signifie que le moule en question M^\bullet doit admettre des majorations du type :

$$|M^{\omega^<}| \leq C^{\|\omega^<\|}$$

Or ceci est vrai, par exemple, pour le moule (2.5.9) :

$$M^\bullet = \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mo}_{\alpha,\beta} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right) \right\rangle^\bullet$$

Pour le voir, nous allons partir des relations :

$$(2.5.14) \quad M^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \prod_{i=1}^s \left(\beta \frac{\omega_i}{\hat{\omega}_i} - 1 \right)$$

et montrer que :

$$(2.5.15) \quad M^{\{\omega_1, \dots, \omega_s\}^<} = \prod_{i=1}^s \left(\beta \frac{\omega_i}{\hat{\omega}_i} - 1 \right)$$

avec des sommes “finissantes” $\hat{\omega}_i$ relatives à l'ordre arborescent.

Manifestement, si on a l'équation (2.5.15), alors on tient les majorations souhaitées pour $M^{\bullet^<}$ et on peut énoncer la :

Proposition 2.16 (*J. Ecalle*) *Pour tout couple (α, β) ($\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$), la moyenne $\mathbf{mo}_{\alpha,\beta}$ préserve la croissance latérale.*

Démonstration :

D'après les résultats de la section 2.2.9, il suffit de démontrer l'identité (2.5.15). Nous le ferons par récurrence sur la longueur de la séquence arborifiée $\omega^< = \{\omega_1, \dots, \omega_s\}^<$. Il est clair que la relation (2.5.15) est vraie pour $s = 1$. Supposons-la vérifiée pour toute séquence arborifiée de longueur strictement inférieure à s . Si la séquence $\omega^< = \{\omega_1, \dots, \omega_s\}^<$ est décomposable en au moins deux séquences arborifiées $\eta^<$ et $\nu^<$ dont les éléments ne sont pas comparables, alors, dans ce cas, l'argument de la section 2.2.9 est utilisable (il ne tient qu'au caractère symétriel du moule à erborifier). Donc :

$$M^{\omega^<} = M^{\eta^<} M^{\nu^<}$$

et, par l'hypothèse de récurrence, on obtient bien la formule (2.5.15) pour la séquence $\omega^<$. Reste à étudier le cas où la séquence $\omega^<$ admet un plus petit élément ω_0 (comparable à tous les autres). Comme dans la section 2.2.9, on a :

$$M^{\omega^<} = \sum_{\mathbf{v} \in \text{ct}(\omega^<)} \text{cts}(\mathbf{v}^<, \mathbf{v}) M^{\omega_0, \mathbf{v}}$$

où $\mathbf{v}^<$ désigne la séquence arborifiée obtenue en otant ω_0 de la séquence $\boldsymbol{\omega}^<$. Mais, d'après l'équation (2.5.14), comme ω_0 est le plus petit élément, on a :

$$M^{\boldsymbol{\omega}^<} = \left(\beta \frac{\omega_0}{\|\boldsymbol{\omega}^<\|} - 1 \right) \left(\sum_{\mathbf{v} \in ct(\mathbf{v}^<)} cts(\mathbf{v}^<, \mathbf{v}) M^{\mathbf{v}} \right)$$

soit encore :

$$M^{\boldsymbol{\omega}^<} = \left(\beta \frac{\omega_0}{\|\boldsymbol{\omega}^<\|} - 1 \right) M^{\mathbf{v}^<}$$

Ici encore, on trouve bien l'identité (2.5.15).

Ceci achève la démonstration de la relation (2.5.15), qui fournit de bonnes majorations pour l'erborifié du moule (2.5.9). Un argument identique à celui de la section 2.2.9 permet de conclure.

◁

Dans toutes les sections précédentes, nous avons étudié des moyennes qui toutes préservent la croissance latérale. Nous allons maintenant donner des exemples qui montrent que cette propriété n'est en fait qu'exceptionnellement vérifiée.

2.6 Rareté des moyennes préservant la croissance latérale.

L'objet de cette section est de construire, par divers procédés, des moyennes qui préservent la *convolution* et la *réalité* et de constater qu'elles ne préservent généralement pas la *croissance latérale* – et ce, même lorsqu'elles sont construites à partir de “bonnes moyennes”.

2.6.1 Rappel sur les moules $R\mathbf{m}^\bullet$ et $L\mathbf{m}^\bullet$.

Pour toute moyenne \mathbf{m} qui préserve la convolution (propriété P1), les opérateurs de passage $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$ sont des automorphismes de convolution et :

$$(2.6.1) \quad \begin{cases} R\mathbf{m}^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \mathbf{m}^{\omega_1, +, \dots, \omega_s, +} \\ L\mathbf{m}^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \mathbf{m}^{\omega_1, -, \dots, \omega_s, -} \end{cases}$$

De plus, comme \mathbf{m} préserve la convolution, ces moules sont symétriels. Mais la donnée de \mathbf{m} équivaut à la donnée du moule symétriel $R\mathbf{m}^\bullet$ (grâce à la propriété P0) ou encore à la donnée du moule symétriel $L\mathbf{m}^\bullet$, car $R\mathbf{m}^\bullet$ et $L\mathbf{m}^\bullet$ se déduisent l'un de l'autre.

C'est justement ces moules $R\mathbf{m}^\bullet$ et $L\mathbf{m}^\bullet$ que nous allons utiliser pour construire de nouvelles moyennes à peu près “génériques” et pour constater que “la plupart” des moyennes vérifiant P1 et P2 ne vérifient pas P3.

2.6.2 La moyenne **mun** ne préserve pas la croissance latérale.

La moyenne **mun** est donnée par les poids :

$$(2.6.2) \quad \mathbf{mun}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_s, \varepsilon_s} = \frac{(2p)!(2q)!}{4^{p+q}(p+q)!p!q!}$$

où p (resp. q) désigne le nombre de signes $+$ (resp. $-$) dans $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$.

Cette moyenne préserve la réalité et la convolution car les moules :

$$(2.6.3) \quad R\mathbf{mun}^{\omega_1, \dots, \omega_s} = L\mathbf{mun}^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \frac{(2s)!}{4^s(s!)^2}$$

sont réels et symétriels, mais elle ne préserve pas la croissance latérale, car (voir aussi [3], §B.1) :

$$(2.6.4) \quad \left\langle \left[\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right]^{1/2}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{(2s)!}{4^s(s!)^2}$$

où $\left[\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right]^{1/2}$ est la puissance 1/2 de l'automorphisme $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ (relativement au produit de composition des automorphismes). Donc :

$$(2.6.5) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mun} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right]^{1/2}$$

Cela permet de montrer que **mun** ne préserve pas la croissance latérale : soit une réduction de *ALIEN* dans $Endo(\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]])$ telle que $red \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ soit un automorphisme de substitution sur $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$, alors, généralement, les seules puissances de composition d'un tel automorphisme qui restent des automorphismes de $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$ sont les puissances entières (positives ou négatives) (voir [4]) et donc, dans la plupart des cas, $red \left[\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right]^{1/2}$ ne préserve pas $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$.

L'utilisation, comme pour la moyenne **mun**, de la puissance d'un automorphisme, permet de définir de nouvelles moyennes.

2.6.3 L'hybridation des moyennes.

Soient \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 deux moyennes qui préservent la convolution, alors on peut définir toute une famille de moyennes "hybrides" $(\mathbf{m}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ de la manière suivante :

$$(2.6.6) \quad \mathbf{m}_\alpha = \mathbf{m}_2 \left[\begin{pmatrix} \mathbf{m}_2 \\ \mathbf{m}_1 \end{pmatrix} \right]^\alpha = \mathbf{mul} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \right]^{1-\alpha} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m}_1 \end{pmatrix} \right]^\alpha$$

et on a :

$$(2.6.7) \quad R\mathbf{m}_\alpha^\bullet = (P_\alpha^\bullet \circ R\mathbf{m}_1^\bullet) \times (P_{1-\alpha}^\bullet \circ R\mathbf{m}_2^\bullet)$$

$$(2.6.8) \quad L\mathbf{m}_\alpha^\bullet = (P_\alpha^\bullet \circ L\mathbf{m}_1^\bullet) \times (P_{1-\alpha}^\bullet \circ L\mathbf{m}_2^\bullet)$$

avec

$$P_\alpha^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-s+1)}{s!}$$

Il est clair que, pour tout α , si \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 préservent la convolution, alors \mathbf{m}_α préserve la convolution ($R\mathbf{m}_\alpha^\bullet$ est symétral). De même, si \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 préservent la réalité ($R\mathbf{m}_1^\bullet = L\mathbf{m}_1^\bullet$ et $R\mathbf{m}_2^\bullet = L\mathbf{m}_2^\bullet$), il n'est pas difficile de voir que $R\mathbf{m}_\alpha^\bullet = L\mathbf{m}_\alpha^\bullet$ et donc \mathbf{m}_α préserve aussi la réalité. Cependant, même si \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 préservent la croissance latérale, généralement, l'hybride \mathbf{m}_α ne possède pas cette propriété. En effet, on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m}_\alpha \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \right]^{1-\alpha} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m}_1 \end{pmatrix} \right]^\alpha$$

et un argument similaire à celui de la section précédente permet de conclure.

Nous allons maintenant introduire un procédé général pour construire une moyenne, qui préserve la réalité (P2) et la convolution (P1), à partir d'un moule symétral M^\bullet .

2.6.4 Procédé général pour fabriquer une moyenne P1, P2 à partir d'un moule symétral M^\bullet .

On rappelle (voir section 2.6.1) que se donner une moyenne P1 équivaut à se donner un moule symétral $R\mathbf{m}^\bullet$ ou $L\mathbf{m}^\bullet$. Chacun de ces moules détermine l'autre grâce aux relations générales :

$$(2.6.9) \quad (revR\mathbf{m}^\bullet) \times (L\mathbf{m}^\bullet) = (1^\bullet + I^\bullet)^{-1}$$

$$(2.6.10) \quad (revL\mathbf{m}^\bullet) \times (R\mathbf{m}^\bullet) = (1^\bullet + I^\bullet)^{-1}$$

où $(1^\bullet + I^\bullet)^{-1}$ désigne l'inverse multiplicatif de $(1^\bullet + I^\bullet)$:

$$(1^\bullet + I^\bullet)^{-1} = 1^\bullet - I^\bullet + I^\bullet \times I^\bullet - I^\bullet \times I^\bullet \times I^\bullet + \dots$$

et rev (pour "reversal") dénote la transformation :

$$(revM^\bullet) = N^\bullet \quad avec \quad N^{\omega_1, \dots, \omega_s} = M^{\omega_s, \dots, \omega_1}$$

Ces identités se démontrent sans difficulté. Par exemple, comme $R\mathbf{m}^\bullet$ est symétral :

$$\begin{aligned} (revR\mathbf{m}^\bullet) &= (1^\bullet + I^\bullet)^{-1} \circ R\mathbf{m}^\bullet \circ (1^\bullet + I^\bullet)^{-1} \\ &= (1^\bullet + I^\bullet)^{-1} \circ \left\langle \left(\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right) \right\rangle^\bullet \circ ((1^\bullet + I^\bullet)^{-1}) \\ &= \left\langle \left(\begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right) \right\rangle^\bullet \end{aligned}$$

et par suite :

$$(revR\mathbf{m}^\bullet) \times (L\mathbf{m}^\bullet) = \left\langle \left(\begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right) \right\rangle^\bullet \times \left\langle \left(\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right) \right\rangle^\bullet$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{m} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right) \right\rangle^{\bullet} \\
&= \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right) \right\rangle^{\bullet} = (1^{\bullet} + I^{\bullet})^{-1}
\end{aligned}$$

Dans le cas où \mathbf{m} préserve la réalité ($R\mathbf{m}^{\bullet} = L\mathbf{m}^{\bullet}$), ces identités sont équivalentes à :

$$(2.6.11) \quad (R\mathbf{m}^{\bullet})^{-1} \times (revR\mathbf{m}^{\bullet})^{-1} = 1^{\bullet} + I^{\bullet}$$

Par conséquent, si on pose, pour un moule symétral M^{\bullet} :

$$(2.6.12) \quad (R\mathbf{m}^{\bullet})^{-1} \stackrel{def}{=} (L\mathbf{m}^{\bullet})^{-1} \stackrel{def}{=} M^{\bullet} \circ \{(M^{\bullet} \times (revM^{\bullet}) - 1^{\bullet})^{\circ(-1)}\}$$

alors, la construction garantit les propriétés suivantes :

- Les moules $R\mathbf{m}^{\bullet}$ et $L\mathbf{m}^{\bullet}$ sont égaux.
- Les moules $R\mathbf{m}^{\bullet}$ et $L\mathbf{m}^{\bullet}$ sont symétrals. En effet, comme M^{\bullet} est symétral, $\{(M^{\bullet} \times (revM^{\bullet}) - 1^{\bullet})^{\circ(-1)}\}$ est symétral et donc l'inverse de composition $\{(M^{\bullet} \times (revM^{\bullet}) - 1^{\bullet})^{\circ(-1)}\}$ est alternel. Comme la postcomposition d'un moule symétral par un moule alternel est symétral, $(R\mathbf{m}^{\bullet})^{-1}$ est symétral et son inverse multiplicatif $R\mathbf{m}^{\bullet}$ l'est aussi.
- Les moules $R\mathbf{m}^{\bullet}$ et $L\mathbf{m}^{\bullet}$ vérifient la relation (2.6.11). Il suffit en effet de remarquer que :

$$\begin{aligned}
(R\mathbf{m}^{\bullet})^{-1} \times (revR\mathbf{m}^{\bullet})^{-1} &= (R\mathbf{m}^{\bullet})^{-1} \times (rev(R\mathbf{m}^{\bullet})^{-1}) \\
&= \left(M^{\bullet} \circ \{(M^{\bullet} \times (revM^{\bullet}) - 1^{\bullet})^{\circ(-1)}\} \right) \\
&\quad \times \left((revM^{\bullet} \circ \{(M^{\bullet} \times (revM^{\bullet}) - 1^{\bullet})^{\circ(-1)}\}) \right) \\
&= (M^{\bullet} \times (revM^{\bullet})) \circ \{(M^{\bullet} \times (revM^{\bullet}) - 1^{\bullet})^{\circ(-1)}\} \\
&= 1^{\bullet} + I^{\bullet}
\end{aligned}$$

D'après ces propriétés, la donnée d'un moule symétral permet ainsi de construire une moyenne \mathbf{m} qui préserve la *réalité* et la *convolution*. Cependant, on ne peut pas conclure que notre nouvelle moyenne préserve la *croissance latérale*. Par exemple, si on envisage des moules symétraux de la forme :

$$M^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \frac{1}{s!} M^{\omega_1} \dots M^{\omega_s}$$

on obtient :

$$\{(M^{\bullet} \times (revM^{\bullet}) - 1^{\bullet})^{\omega_1, \dots, \omega_s}\} = \frac{2^s}{s!} M^{\omega_1} \dots M^{\omega_s}$$

Donc :

$$\left(\{(M^{\bullet} \times (revM^{\bullet}) - 1^{\bullet})^{\circ(-1)}\}^{\omega_1, \dots, \omega_s} \right) = \frac{(-1)^{s-1}}{2^s} \frac{1}{M^{\omega_1 + \dots + \omega_s}}$$

A partir de quoi, on calcule facilement :

$$((R\mathbf{m}^{\bullet})^{-1})^{\omega_1, \dots, \omega_s} = \frac{(-1)^{s-1}}{2^{2s-1}} \frac{(2s-2)!}{(s-1)!s!}$$

si bien que :

$$R\mathbf{m}^{\omega_1, \dots, \omega_s} = (-1)^s \frac{(2s)!}{4^s (s!)^2}$$

Ainsi donc, tous les moules symétraux de ce type conduisent à la même moyenne qui n'est autre que **mun**, laquelle ne préserve pas la croissance latérale.

Nous tenons donc là un procédé fort général pour fabriquer des moyennes **m** qui vérifient les propriétés P1 et P2, mais qui ne vérifient pas toujours (voir ci-dessus) la propriété P3 et qui même ne la vérifient “presque jamais” (voir [3], §G.2). Ceci nous autorise à dire que les “bonnes moyennes”, c'est-à-dire celles qui concilient les trois propriétés-clef P1, P2, P3, sont “rares” ou “clairsemées” dans l'ensemble des moyennes ne vérifiant que deux des propriétés P1, P2, P3. Pour un énoncé plus précis, voir [3], §G.2.

Annexe A

Tables numériques.

Nous donnons ici quelques tables numériques concernant la famille des moyennes de Catalan et la transformation $\mathcal{U} \leftrightarrow \mathbf{dam}$. Ces quelques données, et essentiellement celles concernant les passages de \mathcal{U} à \mathbf{dam} et de \mathbf{dam} à \mathcal{U} sont importantes car ce sont elles qui, au départ, nous ont suggéré que la dérivation \mathbf{dam} et l'automorphisme de convolution \mathcal{U} sont équi-analytiques (voir section 1.5) : Ce sont aussi ces tables qui nous ont permis de conjecturer la forme des coefficients $Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s}$, ce qui est essentiel dans la démonstration de la proposition 1.15.

A.1 La transformation $\mathbf{dam} \rightarrow \mathcal{U}$.

Après avoir dérivé la famille des moyennes $\mathbf{ma}_{\alpha, \beta}$ ($\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$), il apparaît la dérivation $\mathbf{daa}_{\alpha, \beta} = (2\nabla - 1)(\alpha\beta)^\nabla \mathbf{dam}$ (voir section (1.3.2)). Nous avons pu montrer que, si $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} = \infty + \sum_{\setminus \geq \infty} \mathcal{U}_{\setminus}$, alors :

$$(A.1.1) \quad \forall n \geq 1 \quad \mathcal{U}_{\setminus} = \sum_{\setminus \geq \infty} \sum_{\setminus_{\infty + \dots + \setminus} = \setminus} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dam} \rangle^{\setminus_{\infty, \dots, \setminus}} \mathbf{dam}_{\setminus} \dots \mathbf{dam}_{\setminus}$$

avec

$$(A.1.2) \quad \langle \mathcal{U}, \mathbf{dam} \rangle^{n_1, \dots, n_s} = \prod_{i=1}^s (2n_i - 1) \int_{0 < \alpha_s < \dots < \alpha_1 < 1} (\alpha_1 \beta_1)^{n_1 - 1} \dots (\alpha_s \beta_s)^{n_s - 1} d\alpha_1 \dots d\alpha_s$$

On peut calculer ainsi les premières valeurs de ce moule et, si on pose $[n_1, \dots, n_s] = \langle \mathcal{U}, \mathbf{dam} \rangle^{n_1, \dots, n_s}$,

on a :

$$\begin{aligned}
(A.1.3) \quad & \begin{array}{llll}
[1] = 1 & [2] = \frac{1}{2} & [1, 1] = \frac{1}{2} & [3] = \frac{1}{6} \\
[2, 1] = \frac{1}{4} & [1, 2] = \frac{1}{4} & [1, 1, 1] = \frac{1}{6} & [4] = \frac{1}{20} \\
[3, 1] = \frac{1}{12} & [2, 2] = \frac{1}{8} & [1, 3] = \frac{1}{12} & [2, 1, 1] = \frac{3}{40} \\
[1, 2, 1] = \frac{1}{10} & [1, 1, 2] = \frac{3}{40} & [1, 1, 1, 1] = \frac{1}{24} & [5] = \frac{1}{70} \\
[4, 1] = \frac{1}{40} & [3, 2] = \frac{1}{24} & [2, 3] = \frac{1}{24} & [1, 4] = \frac{1}{40} \\
[3, 1, 1] = \frac{1}{42} & [1, 3, 1] = \frac{1}{28} & [1, 1, 3] = \frac{1}{42} & [2, 2, 1] = \frac{13}{280} \\
[2, 1, 2] = \frac{9}{280} & [1, 2, 2] = \frac{13}{280} & [2, 1, 1, 1] = \frac{1}{60} & [1, 2, 1, 1] = \frac{1}{40} \\
[1, 1, 2, 1] = \frac{1}{40} & [1, 1, 1, 2] = \frac{1}{60} & [1, 1, 1, 1, 1] = \frac{1}{120} &
\end{array}
\end{aligned}$$

On peut continuer ces calculs, cependant, on lit sur les formules intégrales les majorations suivantes :

$$(A.1.4) \quad | \langle \mathcal{U}, \mathbf{dam} \rangle^{n_1, \dots, n_s} | \leq \frac{1}{s!}$$

En utilisant alors une démonstration similaire à celle de la proposition 1.1.7, on peut directement montrer que \mathbf{dam} est moins analytique que \mathcal{U} .

La démonstration du fait que \mathcal{U} est moins analytique que \mathbf{dam} est plus problématique.

A.2 La transformation $\mathcal{U} \rightarrow \mathbf{dam}$.

La définition de $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$ (voir proposition 1.1.11) permet de calculer les premiers coefficients de ce moule et, en posant $[n_1, \dots, n_s] = \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_1, \dots, n_s}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1) &= 1 & (2) &= 2 & (1,1) &= -1 & (3) &= 6 \\
(2,1) &= -3 & (1,2) &= -3 & (1,1,1) &= 2 & (4) &= 20 \\
(3,1) &= -10 & (2,2) &= -10 & (1,3) &= -10 & (2,1,1) &= 7 \\
(1,2,1) &= 6 & (1,1,2) &= 7 & (1,1,1,1) &= -5 & (5) &= 70 \\
(4,1) &= -35 & (3,2) &= -35 & (2,3) &= -35 & (1,4) &= -35 \\
(3,1,1) &= 25 & (1,3,1) &= 20 & (1,1,3) &= 25 & (2,2,1) &= 22 \\
(2,1,2) &= 26 & (1,2,2) &= 22 & (2,1,1,1) &= -19 & (1,2,1,1) &= -16 \\
(1,1,2,1) &= -16 & (1,1,1,2) &= -19 & (1,1,1,1,1) &= 14
\end{aligned}
\tag{A.2.5}$$

Mais ces coefficients sont tous entiers et on ne peut avoir de majorations similaires à celles pour $\langle \mathcal{U}, \mathbf{dam} \rangle^\bullet$: On ne peut déduire *directement* du moule $\langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^\bullet$ que \mathcal{U} est moins analytique que \mathbf{dam} .

C'est l'étude de certaines réductions de *ALIEN* dans $\text{Endo}(\mathbf{C}[t])$ qui nous a poussés à conjecturer que \mathcal{U} est moins analytique que \mathbf{dam} .

A.3 Exemples numériques de réduction.

Nous allons considérer des réductions red de *ALIEN* dans $\text{Endo}(\mathbf{C}[t])$ telles que $red(\mathcal{U})$ soit analytique (i.e. préserve $\mathbf{C}\{t\}$). Comme \mathcal{U} est un automorphisme de convolution, $red(\mathcal{U})$ est un automorphisme de substitution et donc :

$$(A.3.6) \quad \forall f \in \mathbf{C}\{t\} \quad red(\mathcal{U}).\{\sqcup\} = \{\{\sqcap(\sqcup)\}\}$$

avec

$$(A.3.7) \quad u(t) = t + \sum_{n \geq 1} u_n t^{n+1} \in \mathbf{C}\{t\} \quad ; \quad red(\mathcal{U}).\sqcup = \sqcap \sqcup^{\setminus +\infty}$$

D'autre part, comme \mathbf{dam} est une dérivation, $red(\mathbf{dam})$ est alors une dérivation sur $\mathbf{C}[t]$:

$$(A.3.8) \quad red(\mathbf{dam}) = a(t)\partial_t$$

avec

$$(A.3.9) \quad a(t) = \sum_{n \geq 1} a_n t^{n+1} \in \mathbf{C}[t] \quad ; \quad red(\mathbf{dam}_n) = a_n t^{n+1} \partial_t$$

On rappelle alors que :

$$\forall n \geq 1 \quad \mathcal{U}_\setminus = \sum_{J \geq \infty} \sum_{\setminus_\infty + \dots + \setminus_J = \setminus} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dam} \rangle^{\setminus_\infty, \dots, \setminus_J} \mathbf{dam}_{\setminus_J} \dots \mathbf{dam}_{\setminus_\infty}$$

et donc, en appliquant la réduction :

$$\forall n \geq 1 \quad red(\mathcal{U}) = \sum_{f \geq \infty} \sum_{\setminus_{\infty} + \dots + \setminus_f = \setminus} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dam} \rangle^{\setminus_{\infty}, \dots, \setminus_f} \nabla \lceil [(\mathbf{dam}_{\setminus_f}) \dots \nabla] \lceil [(\mathbf{dam}_{\setminus_{\infty}})$$

Si on fait opérer les deux membres de cette équation sur t , on obtient, pour tout entier n strictement positif, et après avoir simplifié par t^{n+1} :

$$(A.3.10) \quad u_n = \sum_{s \geq 1} \sum_{n_1 + \dots + n_s = n} \langle \mathcal{U}, \mathbf{dam} \rangle^{n_1, \dots, n_s} \left(\prod_{i=1}^{s-1} (n_1 + \dots + n_i + 1) \right) a_{n_s} \dots a_{n_1}$$

Ces équations permettent de calculer de proche en proche les coefficient a_n en fonction des coefficients u_n et on obtient par exemple :

$$(A.3.11) \quad \begin{aligned} a_1 &= u_1 \\ &= \\ a_2 &= 2u_2 - 2u_1^2 \\ &= \\ a_3 &= 6u_3 - 15u_2u_1 + 9u_1^3 \\ &= \\ a_4 &= 20u_4 - 60u_3u_1 - 30u_2^2 + 124u_2u_1^2 - 54u_1^4 \\ &= \\ a_5 &= 70u_5 - 245u_4u_1 - 245u_3u_2 + 570u_3u_1^2 + 573u_2^2u_1 - 1101u_2u_1^3 + 378u_1^5 \\ &\dots \end{aligned}$$

Encore une fois ceci ne permet pas de conclure que si $u(t)$ est analytique ($red(\mathcal{U})$ analytique) alors $a(t)$ est analytique ($red(\mathbf{dam})$ analytique). Toutefois, ces équations permettent de tester certaines réductions, c'est-à-dire certains germes $u(t) \in t + t^2\mathbf{C}\{t\}$.

$red(\mathcal{U})$ analytique avec $u(t) = (1 - \sqrt{1 - 4t})/2$.

On alors $u_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ et on obtient numériquement :

1	2	3	4	5	6	7
1	2	9	54	378	2916	24057

Il semble donc que $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n+1)!}$ et donc, pour cette réduction, on démarre avec un opérateur $red(\mathcal{U})$ analytique et on peut penser qu'alors $red(\mathbf{dam})$ l'est aussi.

$red(\mathcal{U})$ analytique avec $u(t) = -\ln(1 - t)$.

On alors $u_n = \frac{1}{n+1}$ et on obtient numériquement :

1	2	3	4	5	6	7
1/2	1/6	1/8	1/8	7/48	3/16	33/128

Il semble donc que $a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n+1)!}$ et donc, pour cette réduction, on démarre avec un opérateur $red(\mathcal{U})$ analytique et on peut penser qu'alors $red(\mathbf{dam})$ l'est aussi.

On peut se demander si ces exemples sont réellement représentatifs du fait que \mathcal{U} est moins analytique que \mathbf{dam} . C'est pourtant à partir de telles études que nous avons d'abord conjecturé ce fait et c'est finalement l'étude des coefficients $Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s}$ qui permet de le prouver (voir sections 1.5.3-4).

A.4 Les coefficients $Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s}$.

On rappelle (voir section 1.5.4) que :

$$\nabla \mathbf{dam} = \sum Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} [\mathbf{daam}_{n_s} \dots [\mathbf{daam}_{n_1}, \mathbf{door}_{n_0}] \dots]$$

où $(\nabla \mathbf{dam})_n = n \mathbf{dam}_n$, $\mathbf{daam} = (2\nabla - 1)\mathbf{dam}$ et \mathbf{door} est la dérivation appariée à \mathcal{U} .

On a

$$(A.4.12) \quad Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} = \sum_{\mathbf{n}^1 \dots \mathbf{n}^t = n_1, \dots, n_s} \langle \mathbf{dam}, \mathcal{U} \rangle^{n_0, \|\mathbf{n}^1\|, \dots, \|\mathbf{n}^t\|} \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{\mathbf{n}^1} \dots \langle \mathcal{U}, \mathbf{daam} \rangle^{\mathbf{n}^t}$$

C'est à partir de ces formules que l'on montre (section 1.5.5) que \mathcal{U} est moins analytique que \mathbf{dam} et ce grâce à l'identité suivante :

$$Cac_{n_0}^\emptyset = ka_{n_0-1}$$

$$Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s} = \sum_{p_0+p_1+\dots+p_s=n_0-1} ka_{p_0} ka_{p_1} \dots ka_{p_s} Sa^{p_1+n_1, p_2+n_2, \dots, p_s+n_s}$$

avec

$$(A.4.13) \quad Sa^{m_1, \dots, m_s} = \frac{(-1)^s}{\check{m}_1 \check{m}_2 \dots \check{m}_s}$$

et

$$ka_n = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

Encore une fois, c'est en calculant les premiers coefficients $Cac_{n_0}^{n_1, \dots, n_s}$ que l'on a conjecturé la formule ci-dessus. C'est pourquoi nous reportons ici quelques uns de ces coefficients.

$$\begin{aligned}
(A.4.14) \quad & Cac_1^\emptyset = 1 & Cac_2^\emptyset = 2 & Cac_1^1 = -1 \\
& Cac_3^\emptyset = 6 & Cac_2^1 = -3 & Cac_1^2 = -1/2 \\
& Cac_1^{1,1} = 1/2 & Cac_4^\emptyset = 20 & Cac_3^1 = -10 \\
& Cac_2^2 = -5/3 & Cac_2^{1,1} = 2 & Cac_1^3 = -1/3 \\
& Cac_1^{2,1} = 1/6 & Cac_1^{1,2} = 1/3 & Cac_1^{1,1,1} = -1/6 \\
& Cac_5^\emptyset = 70 & Cac_4^1 = -35 & Cac_3^2 = -35/6 \\
& Cac_3^{1,1} = 15/2 & Cac_2^3 = -7/6 & Cac_2^{2,1} = 3/4 \\
& Cac_2^{1,2} = 17/12 & Cac_2^{1,1,1} = -5/6 & Cac_1^4 = -1/4 \\
& Cac_1^{3,1} = 1/12 & Cac_1^{2,2} = 1/8 & Cac_1^{1,3} = 1/4 \\
& Cac_1^{2,1,1} = -1/24 & Cac_1^{1,2,1} = -1/12 & Cac_1^{1,1,2} = -1/8 \\
& Cac_1^{1,1,1,1} = 1/24
\end{aligned}$$

Nous achevons ici les quelques exemples de calcul numérique qui nous ont été utiles. Ces tables (parmi d'autres) ont joué un rôle à ne pas négliger dans l'étude de la moyenne de Catalan.

Annexe B

“Well-behaved convolution averages and the non-accumulation theorem for limit-cycles” (J. Ecalle and F. Menous).

Nous reprenons ici l'intégralité de l'article [6] dans lequel sont esquissées différentes applications des bonnes moyennes uniformisantes.

Abstract : This expository paper introduces several uniformizing averages, which are serviceable in resummation theory because they manage to reconcile three essential, but at first sight quite conflicting demands : respecting convolution ; preserving realness ; reproducing lateral growth. Their potential range of application covers most situations characterized by a combination of (1) non-linearity, (2) divergence, (3) realness. We sketch three typical applications, the last of which leads to a marginal, yet significant simplification of the constructive (i.e. resummation-theoretical) proof of the non-accumulation theorem for the limit-cycles of a real-analytic vector field on \mathbf{R}^2 .

Résumé : Nous introduisons, comme auxiliaire pour l'accéléro-sommation des séries divergentes, diverses *moyennes uniformisantes* qui concilient trois propriétés essentielles, mais à première vue antagonistes : respecter le produit de convolution ; préserver la réalité des séries ; reproduire la croissance latérale de leurs transformées de Borel. Ces moyennes uniformisantes ont un domaine naturel d'application qui couvre peu ou prou toutes les situations mêlant (1) non-linéarité, (2) divergence, (3) réalité. Nous esquissons trois applications typiques, dont la dernière apporte des simplifications appréciables à la preuve constructive (fondée sur la théorie de la resommation) du théorème de non-accumulation des cycles-limite pour un champ de vecteurs analytique-réel sur \mathbf{R}^2 .

Keywords : Resummation ; convolution ; resurgence ; Catalan numbers ; Brownian diffusion ; Laplace transform ; acceleration transforms ; local analytic diffeomorphisms ; local analytic vector fields ; Hilbert's 16th problem ; limit-cycles.

AMS code : 32S05 ; 32S65 ; 40A99 ; 40H05 ; 53B99 ; 58F99 ; 60G15 ; 60J60 ; 60J65 .

B.1 Some heuristics. The need for well-behaved, convolution-preserving averages.

The general resummation scheme .

The general scheme for resumming divergent series $\tilde{\varphi}(t)$ of “natural origin” goes like this :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{\varphi}_1(z_1) \equiv \tilde{\varphi}(t) & \longrightarrow & & & & & \varphi(t) \equiv \varphi_r(z_r) \\
 \downarrow & & & & & & \uparrow \\
 \hat{\varphi}_1(\zeta_1) & \longrightarrow & \hat{\varphi}_2(\zeta_2) & \longrightarrow & \cdots & \hat{\varphi}_{r-1}(\zeta_{r-1}) & \longrightarrow & \hat{\varphi}_r(\zeta_r)
 \end{array}$$

figure 1

(a) Here $\tilde{\varphi}(t)$ denotes a divergent power series (or transseries) of *natural origin*; for instance the formal solution of a local analytic equation or system (differential; partial differential; functional; etc...).

(b) t is the natural variable (usually $t \sim 0$) and $z_1 \ll z_2 \ll \dots \ll z_r$ are the so-called *critical times* (or *critical variables*), defined up to equivalence and ordered from *slower* to *faster*. Each of them is large ($z_i \sim \infty$) and a function of t . Most often, they are just plain negative powers of t :

$$(1) \quad z_1 \equiv t^{-p_1} ; z_2 \equiv t^{-p_2} ; \dots ; z_r \equiv t^{-p_r} \quad (0 < p_1 < p_2 < \dots < p_r)$$

(c) We begin (step $t \rightarrow z_1$) by expressing $\tilde{\varphi}(t)$ in terms of its slowest time z_1 and then (step $z_1 \rightarrow \zeta_1$) we subject $\tilde{\varphi}_1(z_1)$ to the *formal Borel transform*, which for instance turns each monomial $(z_1)^{-\sigma}$ into $(\zeta_1)^{\sigma-1}/\Gamma(\sigma)$.

(d) then we go successively through the steps $\zeta_i \rightarrow \zeta_{i+1}$. These stand for the so-called *acceleration transforms* :

$$(2) \quad \hat{\varphi}_i(\zeta_i) \rightarrow \hat{\varphi}_{i+1}(\zeta_{i+1}) \equiv \int_0^{+\infty} C_{F_i}(\zeta_{i+1}, \zeta_i) \hat{\varphi}_i(\zeta_i) d\zeta_i$$

which are the pull-back, under Borel-Laplace, of the mere changes of “time” $\varphi_i(z_i) \equiv \varphi_{i+1}(z_{i+1})$ with $z_i \equiv F_i(z_{i+1})$.

(e) then (step $\zeta_r \rightarrow z_r$) we carry out a *Laplace transform* :

$$(3) \quad \hat{\varphi}_r(\zeta_r) \rightarrow \varphi_r(z_r) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-z_r \zeta_r} \hat{\varphi}_r(\zeta_r) d\zeta_r$$

and lastly we revert to the original variable (step $z_r \rightarrow t$).

This seemingly round-about procedure for ”dropping the twiddle”, i.e. for turning the formal object $\tilde{\varphi}(t)$ into a geometric one $\varphi(t)$, is known as *accelero-summation*. It has nothing arbitrary about it, and the various steps must be enacted in precisely the specified order, because the growth rate in each ζ_i – *plane* allows acceleration to ζ_{i+1} , but (usually) not to ζ_{i+2} , ζ_{i+3} , \dots .

Three steps in one.

Although each move from ζ_i to ζ_{i+1} (or from ζ_r to z_r) looks like being one single step, it actually involves three distinct substeps.

(i) *First substep : calculating a germ.* We first obtain $\hat{\varphi}_i(\zeta_i)$ as a germ near $\zeta_i = +0$ either (if $i = 1$) by the formal Borel transform or (if $i \geq 2$) by an acceleration integral which, generally speaking, converges only for small enough values of ζ_i .

(ii) *Second substep : getting a global function.* We must continue this germ $\hat{\varphi}_i(\zeta_i)$ from $+0$ to $+\infty$, so as to get hold of a *global function*. This turns out to be possible because $\hat{\varphi}_i(\zeta_i)$ is always *cohesive* (either *analytic* or *regular quasianalytic*) and because, owing to the “natural origin” of $\tilde{\varphi}(t)$, there are no obstacles to cohesive continuation from $+0$ to $+\infty$.

(iii) *Third substep : uniformizing the global function.* Although there are no obstacles to *cohesive* (analytic or quasianalytic) *continuation*, there may well be *cohesive* (analytic or quasianalytic) *singularities*. Indeed, we must recall that the existence of various singularities in the various ζ_i – *planes* is precisely what causes the divergence of the initial series $\tilde{\varphi}(t)$, and that there is nothing to prevent those singularities from lying over \mathbf{R}^+ . On the contrary, there are often compelling reasons for them to be located there. Whenever this is the case, the global function $\hat{\varphi}_i(\zeta_i)$ is *multivalued* (i.e. *many-branched*) over \mathbf{R}^+ , and we must turn it, *in some suitable way* (here lies the hitch!) into a *univalued function* ($\mathbf{m}\hat{\varphi}_i(\zeta_i)$), so as to be in a position to perform the next acceleration transform $\zeta_i \rightarrow \zeta_{i+1}$ or (if $i = r$) the concluding Laplace transform $\zeta_r \rightarrow z_r$.

The space *RAMIF* and its natural convolution product.

So let us fix some i and put $\zeta_i = \zeta$ for simplicity. What we require, in order to carry out the third substep in the above scheme, is a proper *uniformizing average* from the space *RAMIF*(\mathbf{R}^+) of *forward-ramified functions over \mathbf{R}^+* into the space *UNIF*(\mathbf{R}^+) of *uniform functions on \mathbf{R}^+* . But first, we must get a few definitions out of the way.

To each (finite or infinite) sequence :

$$(4) \quad \Omega = \{0 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < \dots\} \subset \mathbf{R}^+$$

we associate the space *RAMIF*($\mathbf{R}^+//\Omega$) of all complex-valued functions $\hat{\varphi}(\zeta)$ defined on the set $\mathbf{R}^+//\Omega$ consisting of one branch over the interval $]0, \eta_1[$, two branches over the interval $]\eta_1, \eta_2[$, ..., and 2^r branches over the interval $]\eta_r, \eta_{r+1}[$. Each branch over $]\eta_r, \eta_{r+1}[$ is characterized by its “address” $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ consisting of r signs $\varepsilon_i = \pm$. If $\varepsilon_r = +$ (resp. $-$), the branch over $]\eta_r, \eta_{r+1}[$ with address $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ is regarded as being the right (resp. the left) continuation of the branch over $]\eta_{r-1}, \eta_r[$ with address $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1})$. See figure 2 below.

If $\Omega_1 \subset \Omega_2$, there is a trivial projection of $\mathbf{R}^+//\Omega_2$ onto $\mathbf{R}^+//\Omega_1$ and so too (with provision for the usual reversal) a trivial injection of *RAMIF*($\mathbf{R}^+//\Omega_1$) into *RAMIF*($\mathbf{R}^+//\Omega_2$). This enables us to define *RAMIF*(\mathbf{R}^+) as the inductive limit of all spaces *RAMIF*($\mathbf{R}^+//\Omega$) relatively to the inclusion of the indexing sets Ω :

$$(5) \quad \text{RAMIF}(\mathbf{R}^+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim \text{ind}_{\Omega} \text{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\Omega)$$

But we must also endow *RAMIF*(\mathbf{R}^+), or rather the subspace *RAMIF*($\mathbf{R}^+ ; \text{int.}$) of *locally integrable functions*, with a convolution product $*$ that extends the natural convolution $*$ defined on the space

of locally integrable germs at $+0$:

$$(6) \quad \hat{\varphi}_3(\zeta) = (\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2)(\zeta) = \int_0^\zeta \hat{\varphi}_1(\zeta_1) \hat{\varphi}_2(\zeta - \zeta_1) d\zeta_1 \quad (0 < \zeta \ll 1)$$

This is done by piecing together the three following lemmas :

Lemma 1 *Let Ω be any discrete additive semigroup of \mathbf{R}^+ . If the analytic germs $\hat{\varphi}_1$ and $\hat{\varphi}_2$ are defined on $]0, \dots[$, integrable at 0, and possess analytic continuations uniform on $RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega)$, so too does the germ $\hat{\varphi}_3$ defined by the local convolution above. Such germs span a space $RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega; ana.)$ embedded in $RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega; int.)$ and endowed with a global convolution.*

Lemma 2 *Relative to a suitable system of L_1 -norms on increasing compact subsets of $\mathbf{R}^+//\Omega$, the space $RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega; ana.)$ is actually dense in $RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega; int.)$. This induces on $RAMIF(\mathbf{R}^+; int.)$ a global convolution which owes nothing to analytic continuability (there is no analyticity or cohesiveness any more), but is directly calculable by :*

$$(7) \quad \hat{\varphi}_3(\zeta) = \int \mathbf{T}_{\zeta_3}^{\zeta_1, \zeta_2}(\Omega) \hat{\varphi}_1(\zeta_1) \hat{\varphi}_2(\zeta_2) d\zeta_1 \quad (\text{or } d\zeta_2)$$

$$(8) \quad \zeta_1, \zeta_2, \zeta \in \mathbf{R}^+//\Omega; \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_2 = \dot{\zeta}; 0 < \dot{\zeta}_1 < \dot{\zeta}; 0 < \dot{\zeta}_2 < \dot{\zeta}$$

Here, ζ_1, ζ_2, ζ are points of $\mathbf{R}^+//\Omega$ with projections $\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dot{\zeta}$ on \mathbf{R}^+ . The well-defined “structure tensor” $\mathbf{T}_{\zeta_3}^{\zeta_1, \zeta_2}(\Omega)$ is locally constant in its three variables; assumes whole values (positive or negative) only; and vanishes unless $\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_2 = \dot{\zeta}$.

Lemma 3 *The convolutions defined on the various spaces $RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega; int.)$ are compatible with the natural embeddings :*

$$(9) \quad RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega_1; int.) \rightarrow RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega_2; int.)$$

$$(10) \quad \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbf{R}^+; \Omega_1 \text{ and } \Omega_2 \text{ discrete additive semigroups}$$

and this induces a global convolution on the limit space :

$$(11) \quad RAMIF(\mathbf{R}^+; int.) \stackrel{def}{=} \lim \text{ind}_\Omega RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega; int.)$$

For details, see [8].

There is a very rich array of internal operators acting on $\hat{\varphi}$. Apart from the *natural derivation* $\hat{\partial}$:

$$(12) \quad \hat{\partial}\hat{\varphi}(\zeta) \stackrel{def}{=} -\dot{\zeta}\hat{\varphi}(\zeta)$$

(which is simply the image under Borel of the plain derivation $\partial = \partial/\partial z$) and the *complex conjugation* (which exchanges conjugate branches), there are the far more interesting *alien operators*, which are characterized by commuting with the natural derivation $\hat{\partial}$. They span an associative algebra *ALIEN* which is essentially generated by the *alien derivations* (under allowance of infinite sums; see [8]). In this paper, however, the internal operators on *RAMIF* shall play an ancillary part at best, and we shall focus instead on the “projections” or “averages” from *RAMIF* onto *UNIF*.

Uniformizing averages. Six desirable properties

Uniformizing averages are linear maps from *RAMIF* to *UNIF* which reverse the natural embedding of *UNIF* into *RAMIF*. In concrete term, each uniformizing average :

$$(13) \quad \mathbf{m} : \hat{\varphi} \mapsto \mathbf{m}\hat{\varphi}; \quad (\mathbf{m}) \circ (\text{embed.}) = id_{UNIF}$$

$$(14) \quad RAMIF(\mathbf{R}^+) \rightarrow UNIF(\mathbf{R}^+); \quad RAMIF(\mathbf{R}^+; \text{int.}) \rightarrow UNIF(\mathbf{R}^+; \text{int.})$$

is defined by an infinite set of *averaging weights* \mathbf{m}^{ϖ} :

$$(15) \quad \{\mathbf{m}^{\varpi} = \mathbf{m}^{\varpi_1, \dots, \varpi_r}; \text{ with } r \in \mathbf{N}; \varpi_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \omega_i \end{pmatrix}; \varepsilon_i = \pm; \omega_i \in \mathbf{R}^+; \mathbf{m}^{\varpi} \in \mathbf{C}\}$$

and it acts on a given ramified function :

$$(16) \quad \hat{\varphi} \in RAMIF(\mathbf{R}^+ // \Omega) \\ \text{with } \Omega = \{\eta_0 = 0; \eta_1 = \omega_1; \eta_2 = \omega_1 + \omega_2; \eta_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3; \dots\}$$

according to the rule :

$$(17) \quad (\mathbf{m}\hat{\varphi})(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\varepsilon_1 = \pm; \dots; \varepsilon_r = \pm} \mathbf{m}^{\varpi_1, \dots, \varpi_r} \hat{\varphi}(\zeta^{\varpi_1, \dots, \varpi_r}) \quad (\text{if } \eta_r < \zeta < \eta_{r+1})$$

Here, of course, $\varpi_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \omega_i \end{pmatrix}$ and $\zeta^{\varpi_1, \dots, \varpi_r}$ denotes the point of $\mathbf{R}^+ // \Omega$ that lies *over* ζ on the branch $]\eta_r, \eta_{r+1}[$ of address $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$.

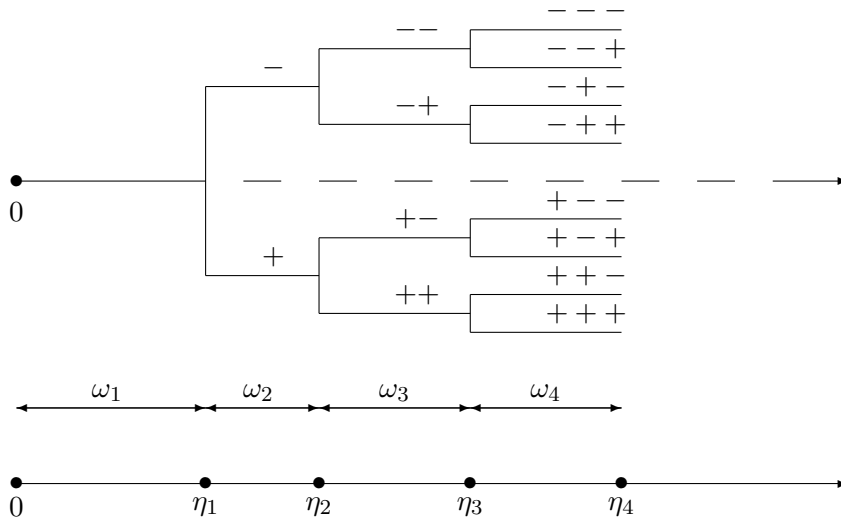


figure 2

Obviously, in order for the averaging to be independent of Ω (i.e. compatible with the canonical embeddings of $RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega_1)$ into $RAMIF(\mathbf{R}^+//\Omega_2)$ for $\Omega_1 \subset \Omega_2$) and therefore to induce a map from the limit space $RAMIF(\mathbf{R}^+)$ into $UNIF(\mathbf{R}^+)$, the weights must satisfy the following condition :

Property 0 : self-consistency

$$(18) \quad \sum_{\varepsilon_1=\pm} \mathbf{m} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{and}$$

$$\sum_{\varepsilon_j=\pm} \mathbf{m} \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j, \dots, \varepsilon_r \\ \omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_r \end{pmatrix} = \mathbf{m} \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \dots, \varepsilon_r \\ \omega_1, \dots, \omega_{j-1} + \omega_j, \dots, \omega_r \end{pmatrix} \quad (\forall j)$$

for all ω_i in \mathbf{R}^+ and all ε_i in $\{+, -\}$.

This is the very least we must ask, and Property 0 will always be tacitly assumed. But we may, and often must, make additional demands on our uniformizing averages, such as :

P.1 : respecting convolution.

P.2 : respecting realness.

P.3 : respecting lateral growth.

P.4 : being positive.

P.5 : being secable.

P.6 : being scale-invariant.

Let us now spell out the exact import of each property, and examine its algebraic translation in terms of averaging weights.

Property 1 : respecting convolution.

This is arguably the main demand. It means that the map (13) should be an algebra homomorphism :

$$(19) \quad \mathbf{m}(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2) = (\mathbf{m}\hat{\varphi}_1) * (\mathbf{m}\hat{\varphi}_2) \quad \forall \hat{\varphi}_i \in RAMIF(\mathbf{R}^+; int.)$$

where the first (resp. second) star $*$ denotes the *global convolution* on $RAMIF(\mathbf{R}^+; int.)$ (resp. on $UNIF(\mathbf{R}^+; int.)$). Actually, if we don't want to bother with the rather complicated convolution on $RAMIF(\mathbf{R}^+; int.)$, we may simply impose (19) for all pairs $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$ in the space $RAMIF(\mathbf{R}^+; ana.)$ of ramified analytic functions, where the *global convolution* may be decomposed into the elementary *local convolution* (6) at $+0$, followed by *analytic continuation*. This apparently weaker demand is in fact equivalent to (19), and implies the same constraints¹ on the weights, namely :

Lemma 4 *An averaging map \mathbf{m} respects convolution if and only if the following equivalent conditions are fulfilled :*

1. There are various and quite cogent technical reasons, though, for preferring to work with the pair $\{RAMIF(\mathbf{R}^+; int.); UNIF(\mathbf{R}^+; int.)\}$ rather than with the pair $\{RAMIF(\mathbf{R}^+; ana.); UNIF(\mathbf{R}^+; int.)\}$. With the first pair, all averaging maps are *onto*, instead of *into* with the second pair. Also, the first pair, being of type {non cohesive; non cohesive}, is more homogeneous than the second pair, which is of type {cohesive; non cohesive} and cannot, moreover, be replaced by a pair of type {cohesive; cohesive}.

(C.1) The right-associated mould Rm^\bullet is symmetrel

(C.2) The left-associated mould Lm^\bullet is symmetrel

(C.3) For each discrete additive semigroup $\Omega \subset \mathbf{R}^+$, the discretized weights $\mathbf{m}^\varepsilon(\Omega)$ verify the canonical multiplication table :

$$(20) \quad \mathbf{m}^\varepsilon(\Omega) = \sum_{\varepsilon', \varepsilon''} \mathbf{T}_{\varepsilon}^{\varepsilon', \varepsilon''}(\Omega) \mathbf{m}^{\varepsilon'}(\Omega) \mathbf{m}^{\varepsilon''}(\Omega)$$

This calls for some explanations. A *mould* M^\bullet is simply a collection of elements $M^\omega \equiv M^{\omega_1, \dots, \omega_r}$ of some commutative algebra. The indexing sequences have arbitrary length r and (usually) real or complex components ω_i . In the above criteria (C.1) and (C.2), the moulds Rm^\bullet and Lm^\bullet are defined as follows :

$$(21) \quad Rm^{\omega_1, \dots, \omega_r} \stackrel{def}{=} (-1)^r \mathbf{m} \begin{pmatrix} +, +, \dots, + \\ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \end{pmatrix} \quad (\forall r \in \mathbf{N}; \forall \omega_i \in \mathbf{R}^+)$$

$$(22) \quad Lm^{\omega_1, \dots, \omega_r} \stackrel{def}{=} (-1)^r \mathbf{m} \begin{pmatrix} -, -, \dots, - \\ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \end{pmatrix} \quad (\forall r \in \mathbf{N}; \forall \omega_i \in \mathbf{R}^+)$$

There is a rich structure attached to moulds, but here we only require the notion of *symmetrelness*. *Being symmetrel* for a mould M^\bullet means that for any two sequences ω' and ω'' we should have :

$$(23) \quad M^{\omega'} M^{\omega''} = \sum M^\omega \quad (\omega \in ctsh(\omega'; \omega''))$$

with a sum \sum extending to all sequences ω obtained by *shuffling* the sequence ω' with ω'' (i.e. by interdigitating their elements under preservation of the internal order of each parent sequence) and, possibly, *contracting* adjacent components from ω' and ω'' . Thus, if M^\bullet is symmetrel, we must have, for example :

$$(24) \quad M^{\omega_1} M^{\omega_2} = M^{\omega_1, \omega_2} + M^{\omega_2, \omega_1} + M^{\omega_1 + \omega_2}$$

$$(25) \quad M^{\omega_1} M^{\omega_2, \omega_3} = M^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_1, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_3, \omega_1} \\ + M^{\omega_1 + \omega_2, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_1 + \omega_3}$$

In the criterion (C.3), Ω denotes any fixed additive subgroup of \mathbf{R}^+ with *elements* η_i and *increments* ω_i :

$$(26) \quad \Omega = \{\eta_0 = 0; \eta_1 = \omega_1; \eta_2 = \omega_1 + \omega_2; \eta_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3; \dots\}$$

The *discretized weights* $\mathbf{m}^\varepsilon(\Omega)$ are indexed by sequences $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ of plus or minus signs, and defined by :

$$(27) \quad \mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}(\Omega) \stackrel{def}{=} \mathbf{m} \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ \omega_1, \dots, \omega_r \end{pmatrix} \quad (\forall r \in \mathbf{N}; \forall \varepsilon_i \in \{+, -\})$$

The sum in (20) extends to all sign sequences $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{r'})$ and $\varepsilon'' = (\varepsilon''_1, \dots, \varepsilon''_{r''})$ such that :

$$(28) \quad \eta_r = \eta_{r'} + \eta_{r''}$$

and the structure tensor in (2) is elementarily related to the structure tensor in (7) by :

$$(29) \quad \mathbf{T}_{\varepsilon}^{\varepsilon', \varepsilon''}(\Omega) = \mathbf{T}_{\zeta}^{\zeta', \zeta''}(\Omega)$$

where ζ, ζ', ζ'' denote the points of $\mathbf{R}^+//\Omega$ that lie over $\eta_r(1+t), \eta_{r'}(1+t), \eta_{r''}(1+t)$ with addresses $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ (and t is any small enough positive real number; recall that the structure tensor in (7) is *locally constant*). The criteria (C.1) and (C.2) are handier than (C.3), but (C.3) has its usefulness, too, especially when $\Omega = \mathbf{N}$. In this case, (28) reduces to :

$$(30) \quad r = r' + r''$$

and the “basic” structure tensor $\mathbf{T}_{\varepsilon}^{\varepsilon', \varepsilon''} \stackrel{def}{=} \mathbf{T}_{\zeta}^{\zeta', \zeta''}(\mathbf{N})$ can be calculated by either of the following inductions :

$$(31) \quad | \mathbf{T}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} | = \delta^{a_1, c_1} | \mathbf{T}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}', \mathbf{b}} | + \delta^{b_1, c_1} | \mathbf{T}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}'} | - \delta^{a_1, c_2} \delta^{b_1, c_2} | \mathbf{T}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} |$$

$$(32) \quad | \mathbf{T}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} | = \delta^{a_{r_1}, c_{r_3}} | \mathbf{T}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}', \mathbf{b}} | + \delta^{b_{r_2}, c_{r_3}} | \mathbf{T}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}'} | - \delta^{a_{r_1}, c_{r_3}} \delta^{b_{r_2}, c_{r_3}} | \mathbf{T}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}', \mathbf{b}'} |$$

supplemented by the “initial conditions” :

$$(33) \quad \mathbf{T}_{\emptyset}^{\emptyset, \emptyset} \equiv \mathbf{T}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{a}, \emptyset} \equiv \mathbf{T}_{\mathbf{b}}^{\emptyset, \mathbf{b}} \equiv 1 \quad (\forall \mathbf{a}, \forall \mathbf{b})$$

and the elementary sign rule :

$$(34) \quad \text{sign of } \mathbf{T}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = (\prod a_i)(\prod b_i)(\prod c_i)$$

Needless to say, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ denote three sign sequences :

$$(35) \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{r_1}), \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{r_2}), \quad \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{r_3})$$

and ‘ \mathbf{a} ’, ‘ \mathbf{a} ’, etc...(resp. \mathbf{a}' , \mathbf{a}'' , etc...) denote the sequence \mathbf{a} deprived of its first term, first and second terms, etc...(resp. last term, two last terms, etc...). Lastly, $\delta^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ denotes the classical Kronecker symbol :

$$(36) \quad \delta^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 1 \text{ (resp. } 0) \text{ if } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \text{ (resp. } \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2)$$

Thus the universal multiplication table for the discretized weights $\mathbf{m}^{\varepsilon} = \mathbf{m}^{\varepsilon}(\mathbf{N})$ reads :

$$(37) \quad \mathbf{m}^+ \mathbf{m}^+ = \mathbf{m}^{++} - \mathbf{m}^{-+}; \quad \mathbf{m}^+ \mathbf{m}^- = \mathbf{m}^{+-} + \mathbf{m}^{-+}; \quad \mathbf{m}^- \mathbf{m}^- = \mathbf{m}^{--} - \mathbf{m}^{+-}$$

$$(38) \quad \mathbf{m}^+ \mathbf{m}^{++} = \mathbf{m}^{+++} - \mathbf{m}^{+-+} - \mathbf{m}^{-++} \dots$$

Of course, each relation remains valid when we simultaneously *change* all signs ε_i ; but it *does not* when we simultaneously *reverse* all three sign sequences. For proofs, complements, and tables, see [8]. We now proceed with our list of “desirable” properties.

Property 2 : respecting realness.

This means that $\mathbf{m}\hat{\varphi}$ must be real whenever $\hat{\varphi}$ is real. For an analytic $\hat{\varphi}$, being real, of course, means assuming real values right of 0 up to the first singularity η_1 . For a merely integrable $\hat{\varphi}$, being real means assuming complex conjugate values on *conjugate branches*, i.e. on branches with conjugate addresses $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ and $(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_r)$ (ε_i is any sign and $\bar{\varepsilon}_i$ is the opposite sign). Therefore, an averaging map respects realness if and only if its weights verify :

$$(39) \quad \mathbf{m} \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ \omega_1, \dots, \omega_r \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{m}} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_r \\ \omega_1, \dots, \omega_r \end{pmatrix} \quad (\forall \omega_i \in \mathbf{R}^+; \forall \varepsilon_i \in \{+, -\})$$

Property 3 : respecting lateral growth.

Here, three basic facts must be borne in mind :

Fact 1 : A function $\hat{\varphi}(\zeta)$ can be accelerated or Laplaced only if it has a well-defined critical growth at infinity. For instance, it can be Laplaced if it grows no faster than exponentially, and it can be accelerated if it grows no faster than $C_F(\zeta_2, \zeta)$ for some fixed $\zeta_2 > 0$ ($\zeta \rightarrow +\infty$). Now, in all natural instances, some “preestablished harmony” underlying resummation theory automatically ensures this required growth condition *on singularity-free axes* and also (with certain innocuous provisos) *on both sides*, right and left, *of singularity-carrying axes*.

Fact 2 : However, if we continue $\hat{\varphi}(\zeta)$ along a singularity-carrying direction and follow an “oft-crossing” path (for instance, if we cross the axis between any two consecutive singularities - assuming of course that there are infinitely many), we will quite generically, at least in non-linear problems, encounter faster-than-critical growth. Thus, if $\hat{\varphi}(\zeta)$ has exponential *lateral* growth, on *oft-crossing paths* the bounds are, generically, no better than :

$$(40) \quad |\hat{\varphi}(\zeta)| \leq K_1 \exp(K_2 |\zeta| |\log(\zeta)|) \quad (K_1, K_2 \text{ constant})$$

Fact 3 : This remarkable phenomenon, in turn, is due to the special nature of the *acting alien algebra* $ACT(\varphi)$ associated with resurgent functions of natural origin, and defined as being the quotient :

$$(41) \quad ACT(\varphi) \equiv ALIEN/IDE(\varphi)$$

of the algebra *ALIEN* of all *alien derivations* by the *ideal IDE*(φ) generated by those alien derivations that annihilate φ . Indeed, despite the amazing diversity of resurgence patterns and resurgence equations met with in real life, the *acting alien algebra* $ACT(\varphi)$ turns out, in factually all natural instances, to be isomorphic to some subalgebra of $Endo(\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]])$. These three facts, taken together, motivate the following definition, which we first state and then explain :

Definition 1 *A uniformizing average \mathbf{m} is said to “preserve lateral growth” if the following alien operators :*

$$(42) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$$

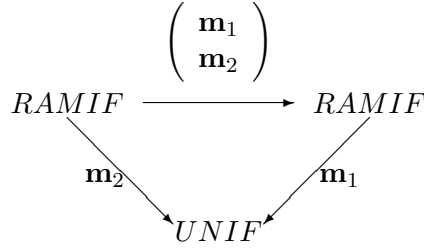
or equivalently :

$$(43) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$$

are equianalytic.

Explanations : Any two averaging maps \mathbf{m}_1 and \mathbf{m}_2 are connected by a well-defined alien automorphism $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$ of *RAMIF* :

$$(44) \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$$



and, if both \mathbf{m}_1 and \mathbf{m}_2 respect convolution, so too does $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$. Consequently, defining a plain (resp. convolution-respecting) uniformizing average \mathbf{m} is equivalent to defining the plain (resp. convolution-respecting) alien automorphisms $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$ which connect \mathbf{m} with the *trivial lateral averages*, namely \mathbf{mur} (right determination) and \mathbf{mul} (left determination) (see section 2 below, Example 1).

Next, a *reduction* of the graded algebra *ALIEN* of alien operators is, by definition, any (continuous) graded algebra homomorphism of *ALIEN* into *some* algebra $\text{Endo}(\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]])$. Obviously, a “reduction” is known the moment we know the images of each alien derivation Δ_ω :

$$(45) \quad \Delta_\omega \mapsto \text{red}(\Delta_\omega) \equiv x_1^{n_1(\omega)} \dots x_\nu^{n_\nu(\omega)} \sum_{1 \leq i \leq \nu} A_\omega^i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (A_\omega^i \in \mathbf{C})$$

The constraint of having to respect the gradation forces all but enumerably many Δ_ω to have vanishing images $\text{red}(\Delta_\omega)$. For instance, the map :

$$(46) \quad \Delta_\omega \mapsto \text{red}(\Delta_\omega) = 0 \quad \text{if } \omega \notin \mathbf{N}$$

$$(47) \quad \Delta_\omega \mapsto \text{red}(\Delta_\omega) = A_\omega x^{\omega+1} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{if } \omega \in \mathbf{N} \text{ with } A_\omega \in \mathbf{C}$$

is one of the simplest examples of non-trivial “reduction”.

Further, any two alien operators Op and Op' are said to be *equianalytic* if, under any given reduction red , their images $\text{red}(Op)$ and $\text{red}(Op')$ are *simultaneously analytic* or *non-analytic*. Of course, since $\text{red}(Op)$ and $\text{red}(Op')$ are endomorphisms of the space $\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]]$ of formal power series in x_1, \dots, x_ν , being *analytic* for them means that they should leave invariant the subspace $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$ consisting of convergent power series.

Lastly, our definition 1 is self-consistent because, under any “reduction”, the images $\text{red} \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ and $\text{red} \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$, being *mutually reciprocal substitution automorphisms* of $\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]]$, are *automatically equianalytic* (either both analytic or both non-analytic).

Thus, the vague-sounding requirement of “respecting lateral growth” admits of a rigorous and fully algebraized translation (namely the one in definition 1), which is neither too strong nor too weak, but *exactly what the applications require*.

Property 4 : being positive.

Weak positivity for an average \mathbf{m} simply means that all the weights \mathbf{m}^{ϖ} are non-negative. *Strong positivity* is a more recondite property ; it means that, for each $p \geq 1$, there should exist a general co-product :

$$(48) \quad \mathbf{m}(\hat{\varphi}_1 * \cdots * \hat{\varphi}_p) \equiv \sum P^{i_1, \dots, i_p} (\mathbf{m}_{i_1} \hat{\varphi}_1) * \cdots * (\mathbf{m}_{i_p} \hat{\varphi}_p) \quad (\forall \hat{\varphi}_i)$$

involving only *weakly positive* averages \mathbf{m}_{i_q} . The P^{\dots} denote universal constants, and the sum \sum in (48) may involve an infinite number of terms. For a convolution-preserving average, weak positivity clearly implies strong positivity (in view of (19)), but for general uniformizing averages, there is a great gap between the two conditions.

Property 5 : being secable.

“Secability” is specially meaningful for convolution-preserving averages. This notion is relative to a fixed semigroup Ω , usually $\Omega = \mathbf{N}$, and means that the averages $\mathbf{m}_{\varepsilon} = \mathbf{m}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}$ (mark the *lower position* of the indices, as opposed to their upper position in (27)) obtained by “cutting” \mathbf{m} (i.e. by retaining only that part of \mathbf{m} which is supported by the branches of $\mathbf{R}^+ // \mathbf{N}$ whose address starts with ε) should, like \mathbf{m} itself, verify some *finite coproduct* :

$$(49) \quad \mathbf{m}_{\varepsilon}(\hat{\varphi} * \hat{\psi}) \equiv \sum K_{\varepsilon}^{\varepsilon', \varepsilon''} \mathbf{m}_{\varepsilon'}(\hat{\varphi}) * \mathbf{m}_{\varepsilon''}(\hat{\psi}) \quad (K_{\varepsilon}^{\varepsilon', \varepsilon''} \in \mathbf{C})$$

that is to say, a coproduct with finitely many terms in \sum .

Property 6 : being scale-invariant.

Scale invariance means invariance under homothetic rescalings $\zeta \mapsto t\zeta$ of \mathbf{R}^+ or, in terms of weights :

$$(50) \quad \mathbf{m} \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ \omega_1, \dots, \omega_r \end{pmatrix} = \mathbf{m} \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ t\omega_1, \dots, t\omega_r \end{pmatrix} \quad (\forall \varepsilon_i = \pm ; \forall \omega_i \in \mathbf{R}^+ ; \forall t \in \mathbf{R}^+)$$

Let us recapitulate :

Property 0 (being an average) is a logical necessity.

Property 1 (respecting convolution) is indispensable in all non-linear situations (i.e. whenever the divergent series $\tilde{\varphi}(t)$ we wish to resum happens to be the formal solution of a non-linear equation or system), because in that case all the steps in the resummation diagram (figure 1) must involve algebra homomorphisms.

Property 2 (respecting realness) is a must whenever the series $\tilde{\varphi}(t)$ has real coefficients and must be assigned a real sum $\varphi(t)$ for some compelling reason, e.g. because it represents a physical or real-geometric object.

Property 3 (respecting lateral growth) is highly desirable (see the application in section 6) and sometimes indispensable (see the applications in sections 4 and 5), namely when the half-axis \mathbf{R}^+ in some $\zeta - plane$ carries infinitely many singularities and when the added necessity of summing the real series $\tilde{\varphi}(t)$ to a real germ $\varphi(t)$ forces one to take into account the continuation of $\hat{\varphi}(\zeta)$ along all paths, including oft-crossing ones (see the Lemma 5 below).

Properties 4,5,6 are not indispensable, but merely desirable. They are helpful in narrowing down the field of investigation, and in characterizing some of the main uniformizing averages. Thus, the important *Catalan average* (see section 3) was discovered while searching for “secable” averages.

Let us now conclude this extensive introductory section with a lemma that brings out the conflicting nature of Properties 1,2,3.

Lemma 5 *Any uniformizing average \mathbf{m} which respects both convolution and realness, necessarily involves the determinations of $\hat{\varphi}$ on at least some paths that cross the real axis infinitely many times. More precisely, for each finite q , there always exists at least one non-vanishing weight $\mathbf{m} \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ \omega_1, \dots, \omega_r \end{pmatrix} \neq 0$ with an address $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ displaying more than q sign changes.*

It is enough to consider the case of unit increments ($1 = \omega_1 = \omega_2 = \dots$). Using the induction (31) or (32), it can be checked that, if ε' and ε'' are two sign sequences starting with different signs but displaying exactly q sign changes each, then the structure tensor $\mathbf{T}_{\varepsilon}^{\varepsilon', \varepsilon''}$ vanishes unless the third sequence ε displays at least $q + 1$ sign changes.

Now, let us assume the above Lemma 5 to be false. Then there exists some critical integer q such that all discretized weights \mathbf{m}^{ε} with more than q sign changes vanish, while at least one weight $\mathbf{m}^{\varepsilon'}$ with exactly q sign changes is different from 0. But since \mathbf{m} preserves realness, the weight $\mathbf{m}^{\varepsilon''}$ with address ε'' conjugate to ε' (i.e. with all signs changed) is complex-conjugate to $\mathbf{m}^{\varepsilon'}$, and so different from 0. Therefore :

$$(51) \quad 0 \neq \mathbf{m}^{\varepsilon'} \mathbf{m}^{\varepsilon''} = \sum \mathbf{T}_{\varepsilon}^{\varepsilon', \varepsilon''} \mathbf{m}^{\varepsilon}$$

This, however, is impossible because, due to the above remark, $\mathbf{T}_{\varepsilon}^{\varepsilon', \varepsilon''}$ vanishes unless ε has more than q sign changes, in which case $\mathbf{m}^{\varepsilon} = 0$ according to our assumption. Contradiction.

The import is this : if there existed realness-preserving convolution averages which involved only paths that cross \mathbf{R}^+ finitely often, such averages would automatically “respect lateral growth” since, due to the universal resurgence structure, lateral growth always obtains on such paths. But our Lemma 5 rules out the existence of averages so conveniently simple. It shows that Properties 1,2,3 cannot be reconciled in any “cheap” manner but only, if at all, through a very careful selection of weights (so as to load oft-crossing paths as lightly as possible), or else through some subtle compensation between the various branches. As we shall see, there actually exist averages illustrating either possibility.

B.2 Examples of convolution-respecting averages.

The abbreviations for averages all begin with the letter \mathbf{m} (for *mean-value*) followed by some vowel reminiscent of their nature (\mathbf{u} for *uniform*; \mathbf{o} for *organic*; \mathbf{a} for *Catalan*; \mathbf{y} for *Cauchy*; \mathbf{ow} for *Brownian*; etc...), and they end either with \mathbf{r} (for *right*) or \mathbf{l} (for *left*) or with \mathbf{n} (for *neutral*) in the case of realness-preserving averages; or again with the lower indices (α, β) in the case of parameter-dependent families.

Example 1 : The right-lateral average \mathbf{mur} and the left-lateral average \mathbf{mul} .

They may be characterized as the only convolution-preserving “averages” that involve only one determination over each interval. With the criteria of Lemma 4, it may be shown that the determination in question must be either right-lateral or left-lateral, to the exclusion of any other. In terms of weights :

$$(52) \quad \mathbf{mur}^{\varpi_1, \dots, \varpi_r} = 1 \text{ (resp. } 0) \text{ if } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = + \text{ (resp. otherwise)}$$

$$(53) \quad \mathbf{mul}^{\varpi_1, \dots, \varpi_r} = 1 \text{ (resp. } 0) \text{ if } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = - \text{ (resp. otherwise)}$$

\mathbf{mur} and \mathbf{mul} clearly fail to preserve realness, but possess all five other properties P_i . Despite being utterly trivial, \mathbf{mur} and \mathbf{mul} are quite basic since, owing to formula (44), they generate all other convolution averages by postcomposition with alien automorphisms of *RAMIF*.

Example 2 : The median average \mathbf{mun} .

Like \mathbf{mur} and \mathbf{mul} , \mathbf{mun} is “uniform” in the sense that its weights do not depend on the increments $(\omega_1, \dots, \omega_r)$, but only on the addresses $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$. In fact they depend only on the number p (resp. q) of + signs (resp. - signs) in the address $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$:

$$(54) \quad \mathbf{mun}^{\varpi_1, \dots, \varpi_r} \equiv \frac{\Gamma(p + 1/2) \Gamma(q + 1/2)}{\Gamma(p + q + 1)} \equiv \frac{(2p)! (2q)!}{4^{p+q} (p + q)! p! q!}$$

All these averages \mathbf{mur} , \mathbf{mul} , \mathbf{mun} can actually be embedded in an interval of “uniform” averages $\mathbf{mu}_{\alpha, \beta}$ with weights of the form :

$$(55) \quad \mathbf{mu}_{\alpha, \beta}^{\varpi_1, \dots, \varpi_r} \equiv \frac{\Gamma(p + \alpha) \Gamma(q + \beta)}{\Gamma(p + q + 1)} \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R} ; \alpha + \beta = 1)$$

$$(56) \quad \mathbf{mu}_{1,0} = \mathbf{mur} ; \mathbf{mu}_{1/2,1/2} = \mathbf{mun} ; \mathbf{mu}_{0,1} = \mathbf{mul}$$

Using criteria (C.1) or (C.2) of Lemma 4, one checks that all averages $\mathbf{mu}_{\alpha, \beta}$ respect convolution. It is trivial to see that only \mathbf{mun} respects realness, but non-trivial that only \mathbf{mur} and \mathbf{mul} respect lateral growth. All $\mathbf{mu}_{\alpha, \beta}$ are clearly positive if (and only if) α and β are positive, but it may be shown that none is secable (except for \mathbf{mur} and \mathbf{mul}). The “uniform” averages are quite important, due mainly to their independence on the increments ω_i , but their failure to combine P_1, P_2, P_3 is a severe drawback.

Example 3 : the organic average \mathbf{mon} .

Its weights depend both on the signs ε_i and the increments ω_i , but the latter dependence is optimally simple, i.e. rational :

$$(57) \quad \mathbf{mon}^{\varpi_1} = 1/2 \quad (\forall \varpi_1 = \left(\begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \omega_1 \end{array} \right))$$

$$(58) \quad \mathbf{mon}^{\varpi_1, \dots, \varpi_r} = \mathbf{mon}^{\varpi_1, \dots, \varpi_{r-1}} P_r$$

with a factor P_r defined by :

$$P_r = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_r}{\omega_1 + \dots + \omega_r} \quad \text{if } \varepsilon_{r-1} = \varepsilon_r$$

$$(59) \quad P_r = \frac{1}{2} \frac{\omega_r}{\omega_1 + \dots + \omega_r} \quad \text{if} \quad \varepsilon_{r-1} \neq \varepsilon_r$$

Like **mun**, **mon** may be imbedded in an interval of averages $\mathbf{mo}_{\alpha,\beta}$ ($\alpha + \beta = 1$), with extremities $\mathbf{mor} = \mathbf{mo}_{1,0}$ and $\mathbf{mol} = \mathbf{mo}_{0,1}$ that are “tilted” to the right or to the left. In terms of weights :

$$(60) \quad \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\overline{\omega}_1} = \alpha \text{ (resp. } \beta) \text{ if } \varepsilon_1 = + \text{ (resp. } -)$$

$$(61) \quad \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_r} = \mathbf{mo}_{\alpha,\beta}^{\overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_{r-1}} P_r$$

with a factor P_r defined by :

$$(62) \quad \begin{aligned} P_r &= 1 - \beta \frac{\omega_r}{\omega_1 + \dots + \omega_r} & \text{if} & \quad (\varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r) = (+, +) \\ P_r &= \beta \frac{\omega_r}{\omega_1 + \dots + \omega_r} & \text{if} & \quad (\varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r) = (+, -) \\ P_r &= \alpha \frac{\omega_r}{\omega_1 + \dots + \omega_r} & \text{if} & \quad (\varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r) = (-, +) \\ P_r &= 1 - \alpha \frac{\omega_r}{\omega_1 + \dots + \omega_r} & \text{if} & \quad (\varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r) = (-, -) \end{aligned}$$

Clearly, **mon** respects realness, and it can be shown that all $\mathbf{mo}_{\alpha,\beta}$ respect convolution (use the criteria of Lemma 4) and lateral growth (use the fact that each sign change contributes a small factor P_r). These averages are positive if α and β are > 0 (recall that $\alpha + \beta = 1$) and they are clearly scale-invariant. They are not secable, though.

The “organic” average **mon** is thus a marked improvement on the “uniform” average **mun**, as it reconciles the three main demands P_1, P_2, P_3 .

Example 4 : averages induced by a diffusion process.

We fix any continuous convolution semigroup on \mathbf{R} , i.e any family of integrable functions $f_\omega(x)$ (with $x \in \mathbf{R}$ and $\omega \in \mathbf{R}^+$) such that :

$$(63) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega(x) dx = 1 \quad (\forall \omega \in \mathbf{R}^+)$$

$$(64) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega_1}(x_1) f_{\omega_2}(x - x_1) dx_1 = f_{\omega_1 + \omega_2}(x) \quad (\forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}^+)$$

(Observe that integration here is over \mathbf{R} , not over \mathbf{R}^+ as in (6)). Each function f_ω may be viewed as representing the probability distribution at the time $t = \omega$, on the vertical axis $\omega + i\mathbf{R}$, of a particle starting from the origin at $t = 0$, moving along \mathbf{R}^+ with unit speed, and diffusing randomly in the vertical direction. To any such “diffusion” (the term is used somewhat loosely here), we may associate a uniformizing average **m** with weights defined as follows :

Definition 2 . $\mathbf{m}^{\overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_r}$ is the probability for the particle to hit the half-axis $\eta_r + i\varepsilon_r \mathbf{R}^+$ at the time $\eta_r = \omega_1 + \dots + \omega_r$ after successively crossing each half-axis $\eta_j + i\varepsilon_j \mathbf{R}^+$ at the time $\eta_j = \omega_1 + \dots + \omega_j$.

Analytically, this translates into the following formula :

$$(65) \quad \mathbf{m}^{\varpi_1, \dots, \varpi_r} = \int f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_r}(x_r) \sigma_{\varepsilon_1}(x_1) \sigma_{\varepsilon_2}(x_1 + x_2) \dots \sigma_{\varepsilon_r}(x_1 + \dots + x_r) dx_1 \dots dx_r$$

with integration over \mathbf{R}^r and with the classical step functions σ_+ and σ_- :

$$(66) \quad \sigma_{\pm}(x) \equiv 1 \text{ (resp. } 0) \text{ if } \pm x > 0 \text{ (resp. } \pm x \leq 0)$$

Due to (63), \mathbf{m} satisfies Property 0, and is indeed a uniformizing average. It also respects convolution, due to the symmetrical nature of the moulds R^\bullet and L^\bullet defined by :

$$(67) \quad R^\omega \stackrel{def}{=} (-1)^r \sigma_+(\omega_1) \sigma_+(\omega_1 + \omega_2) \dots \sigma_+(\omega_1 + \dots + \omega_r)$$

$$(68) \quad L^\omega \stackrel{def}{=} (-1)^r \sigma_-(\omega_1) \sigma_-(\omega_1 + \omega_2) \dots \sigma_-(\omega_1 + \dots + \omega_r)$$

for any sequence of real numbers ω_i . Lastly, if each function f_ω is even, the average \mathbf{m} clearly respects realness. As for settling the other properties P_i , we must know more about the particular “diffusion” which induces \mathbf{m} .

We may note that, although quite diverse, the diffusion-induced averages are very thinly spread out in the much larger set of convolution-respecting averages. Most such averages, like **mun** and **mon**, are *not* diffusion-induced.

Example 5 : averages induced by pseudo-diffusions.

We introduce on \mathbf{R} a (commutative and associative) *pseudoaddition* defined, for almost every pair of real numbers, by :

$$(69) \quad x_1 \wedge x_2 = x_1 \text{ if } |x_1| > |x_2| \text{ (resp. } x_2 \text{ if } |x_2| > |x_1|)$$

We then replace the convolution semigroups of Example 4 by pseudoconvolution semigroups. To do so, we leave (63) in force, but change (64) into :

$$(70) \quad \int_{x_1 \wedge x_2 = x} f_{\omega_1}(x_1) f_{\omega_2}(x_2) (dx_1 + dx_2) = f_{\omega_1 + \omega_2}(x) \quad (\forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}^+)$$

or less abstrusely :

$$(71) \quad f_{\omega_2}(x) \int_{|x_1| < |x|} f_{\omega_1}(x_1) dx_1 + f_{\omega_1}(x) \int_{|x_2| < |x|} f_{\omega_2}(x_2) dx_2 = f_{\omega_1 + \omega_2}(x) \quad (\forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}^+)$$

Lastly, we change (65) into :

$$(72) \quad \mathbf{m}^{\varpi_1, \dots, \varpi_r} = \int f_{\omega_1}(x_1) \dots f_{\omega_r}(x_r) \sigma_{\varepsilon_1}(x_1) \sigma_{\varepsilon_2}(x_1 \wedge x_2) \dots \sigma_{\varepsilon_r}(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) dx_1 \dots dx_r$$

It is not difficult to check that pseudodiffusions, like diffusions, induce convolution-preserving averages. Here, however, an interesting universality phenomenon enters the picture : whenever the pseudodiffusion is *symmetrical* (meaning that each function f_ω is even), it always induces *one and the same* uniformizing average, namely the “organic” average **mon** of Example 3.

Example 6 : the homogeneous averages ${}^\tau\mathbf{moun}$.

Scale-invariant convolution averages depend on an infinity of continuous parameters; and so do the diffusion-induced averages. If we combine both requirements, however, the situation becomes more rigid : there is only one degree of freedom left, and we get the family ${}^\tau\mathbf{moun}$ ($\tau > 0$) of “homogeneous” averages. For each given τ , the average ${}^\tau\mathbf{moun}$ is induced by a *convolution semigroup* ${}^\tau f_\omega$, which is the Fourier transform of a quite elementary *multiplication semigroup* ${}^\tau g_\omega$. Indeed :

$$(73) \quad {}^\tau g_\omega(y) \equiv \exp(-\omega |y|^\tau) \quad (y \in \mathbf{R} ; \omega, \tau \in \mathbf{R}^+)$$

$$(74) \quad {}^\tau f_\omega(x) \equiv (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} {}^\tau g_\omega(y) e^{ixy} dy \quad (x, y \in \mathbf{R} ; \omega, \tau \in \mathbf{R}^+)$$

For each fixed τ , the variables x and ω essentially coalesce into one :

$$(75) \quad {}^\tau f_\omega(x) \equiv \omega^{-1/\tau} {}^\tau f_1(x/\omega^{1/\tau})$$

which fact is of course responsible for the scale-invariance of ${}^\tau\mathbf{moun}$.

When $\tau \rightarrow \infty$ or $\tau \rightarrow 0$, the above “diffusions”² possess no limit, but the weights of the “homogeneous” averages seem to tend to limits, namely to the weights of \mathbf{mun} and \mathbf{mon} :

$$(76) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} {}^\tau\mathbf{moun} = \mathbf{mun} ; \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} {}^\tau\mathbf{moun} = \mathbf{mon} \quad (?)$$

but this point hasn’t been settled yet.

Example 7 : the Cauchy average \mathbf{myn} and the Brownian average \mathbf{mown} .

In the important special cases $\tau = 1$ and $\tau = 2$, we get quite explicit distribution functions :

$$(77) \quad {}^1 f_\omega(x) \equiv (\omega/\pi) (x^2 + \omega^2)^{-1}$$

$$(78) \quad {}^2 f_\omega(x) \equiv (1/2)(\omega\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/4\omega)$$

We recognize the Cauchy kernel, resp. the Gaussian kernel of the Brownian motion on \mathbf{R} . Accordingly, the induced averages :

$$(79) \quad \mathbf{myn} \stackrel{def}{=} {}^1\mathbf{moun} ; \quad \mathbf{mown} \stackrel{def}{=} {}^2\mathbf{moun}$$

will be referred to as the Cauchy and Brownian averages. The latter will be studied in some detail in the coming section.

B.3 More examples. The Catalan and Brownian averages.

Example 8 : the Catalan average \mathbf{man} .

The Catalan average \mathbf{man} is induced by the diffusion process corresponding to the convolution semigroup f_ω obtained by Fourier transforming the following multiplicative semigroup g_ω :

$$(80) \quad g_\omega(y) \stackrel{def}{=} (y^2 + 1)^{-\omega} \quad (y \in \mathbf{R} ; \omega \in \mathbf{R}^+)$$

2. according to standard terminology, we have proper diffusion processes only for $\tau \leq 2$, but we need not bother about this distinction

$$(81) \quad f_\omega(x) \stackrel{def}{=} (2\pi)^{-1} \int g_\omega(y) e^{ixy} dy \quad (x, y \in \mathbf{R} ; \omega \in \mathbf{R}^+)$$

(81) yields explicit formulae for integral values of ω :

$$(82) \quad f_1(x) \equiv \frac{1}{2} \exp(-|x|) ; \quad f_n(x) \equiv P_n(|x|) \exp(-|x|)$$

where P_n is a polynomial of degree $(n-1)$ simply connected to the Catalan polynomial Cat_n (see below). By plugging (81) into the general formula (65), we get the weights \mathbf{man}^ϖ for arbitrary increments ω_i . For whole increments, however, the weights assume rational values, and may be obtained much more directly by the following formula :

$$(83) \quad \mathbf{man}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} \equiv 4^{-r} cat_{n_1} cat_{n_2} \dots cat_{n_s} (1 + n_s)$$

with the discretized weights relative to $\Omega = \mathbf{N}$:

$$(84) \quad \mathbf{man}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} = \mathbf{man}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}(\mathbf{N}) = \mathbf{man} \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ 1, \dots, 1 \end{pmatrix}$$

and with the classical Catalan numbers :

$$(85) \quad cat_n \stackrel{def}{=} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \quad (cat_n \in \mathbf{N})$$

which in this case are indexed by the integers n_1, n_2, \dots, n_s which denote the numbers of identical consecutive signs within the address $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$:

$$(86) \quad (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) = (\pm)^{n_1} (\mp)^{n_2} \dots (\varepsilon_r)^{n_s} \quad (\text{of course } n_1 + \dots + n_s = r)$$

Like \mathbf{mun} and \mathbf{mon} , the Catalan average \mathbf{man} may be imbedded in an interval of averages $\mathbf{ma}_{\alpha, \beta}$ (as usual $\alpha + \beta = 1$) with weights :

$$(87) \quad \mathbf{ma}_{\alpha, \beta}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} \stackrel{def}{=} (\alpha\beta)^r (cat_{n_1} cat_{n_2} \dots cat_{n_{s-1}}) Cat_{n_s} ((\alpha/\beta)^{\varepsilon_r})$$

Here, as in (83), n_i denotes the cardinality of the i^{th} cluster of identical signs. The new formula, however, alongside with the Catalan numbers cat_n , also involves the Catalan polynomials Cat_n , which are distinguished by a capital C and inductively definable by :

$$(88) \quad Cat_0(x) = 1$$

$$(89) \quad Cat_{1+n}(x) = -(1+x^{-1})cat_n + (x+2+x^{-1})Cat_n(x)$$

All negative powers of x cancel out, and it may be noted that :

$$(90) \quad Cat_n(0) = cat_n ; \quad Cat_n(1) = (1+n)cat_n$$

$$(91) \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^{-1} Cat_n(x) = cat_{n-1}$$

The Catalan average has quite a few remarkable properties, about which more in a moment. But it has one blemish : it is not scale-invariant. There is no reason why it should be, and from (83) one can easily infer that it is not. However, under a rescaling and a passage to the limit, the Catalan average gives rise to the so-called Brownian average, which inherits most of its nicer properties, and is scale-invariant into the bargain.

Example 9 : the Brownian average mown.

We already defined **mown**, in Example 7, as being induced by the Brownian diffusion (with the Gaussian distribution (78)). But **mown** is also the limit of the Catalan average (and of many others, besides) under an infinite shrinking (not dilatation!) of the scale. In terms of weights :

$$(92) \quad \mathbf{mown} \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ \omega_1, \dots, \omega_r \end{pmatrix} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{man} \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ t\omega_1, \dots, t\omega_r \end{pmatrix} \quad (\varepsilon_i = \pm, \omega_i > 0)$$

Or again, since **man** has the merit of possessing simple and rational-valued weights for integer-valued increments ω_i , we may take :

$$(93) \quad \mathbf{mown} \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ \omega_1, \dots, \omega_r \end{pmatrix} = \lim \mathbf{man} \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ n_1, \dots, n_r \end{pmatrix}$$

with integers n_i growing in such a way that $n_i/n_j \rightarrow \omega_i/\omega_j \forall i, j$.

Both **man** and **mown** clearly respect realness, but also convolution. The latter point follows from their being induced by diffusion processes, but in the case of **man**, two alternative proofs, directly based on (83), may also be found in [9]. Then **man** has the outstanding (and nearly characteristic) property of being secable : see [8]. The average **mown** is not secable, but makes up for it by being scale-invariant, unlike **man**. The crucial point, however, is Property 3 :

Proposition 1 : (*F. Menous*) *Both the Catalan and Brownian averages respect lateral growth.*

Unlike in the case of the “organic” average **mon**, this doesn’t directly follow from the smallness of the weights on *bad*, i.e. *oft-crossing, paths*. Indeed, if we assume unit increments ($\omega_i = 1$) and look at the worst possible situation, namely fully alternating sign sequences of length $2r$, we find for the discretized weights the following expressions :

$$(94) \quad \mathbf{mun}^{(+,-,+,-,\dots,\varepsilon_{2r})} = 4^{-2r}(2r)!(r!)^{-2} \# 2^{-2r} \quad (\text{from (54)})$$

$$(95) \quad \mathbf{mon}^{(+,-,+,-,\dots,\varepsilon_{2r})} = 2^{-2r}((2r)!)^{-1} \quad (\text{from (58)})$$

$$(96) \quad \mathbf{man}^{(+,-,+,-,\dots,\varepsilon_{2r})} = 2 \cdot 4^{-2r} \quad (\text{from (83)})$$

$$(97) \quad \mathbf{mown}^{(+,-,+,-,\dots,\varepsilon_{2r})} \# (\text{Const})^{-2r} \text{ with } 2 < \text{Const} < 4 \quad (\text{from (78)})$$

Thus, of these four realness and convolution-preserving averages, only the “organic” average displays a factor $1/(2r)!$ which exactly offsets the characteristic “median growth” described in (40) and, by so doing, rather easily ensures the Property 3. But neither **mun** nor **man** nor **mown** possess the required rate of decrease for alternating sequences ; indeed, the weights of **man** and **mown** are only marginally smaller than those of **mun** (compare (96) and (97) with (94)). Now, as we already pointed out, the “uniform” average **mun** *does not respect lateral growth*. So it comes as a pleasant surprise to learn that **man** and **mown** *do*, owing to a subtle compensation mechanism from path to path. The proof (see [9]) resolves into five main steps :

Step one : To the family of Catalan averages $\mathbf{ma}_{\alpha,\beta}$ and \mathbf{man} , one associates a parallel family of *alien derivations* $\mathbf{da}_{\alpha,\beta}$ and \mathbf{dan} , which are characterized by :

$$(98) \quad (\partial/\partial\alpha)\mathbf{ma}_{\alpha,\beta} \equiv -(\partial/\partial\beta)\mathbf{ma}_{\alpha,\beta} \equiv \mathbf{ma}_{\alpha,\beta} \mathbf{da}_{\alpha,\beta} \quad (\alpha + \beta = 1)$$

$$(99) \quad \mathbf{dan} \stackrel{def}{=} \mathbf{da}_{1/2,1/2}$$

Step two : One shows that both $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{man} \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{man} \end{pmatrix}$ are equianalytic to \mathbf{dan} .

Step three : One shows that both $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ are “at least as analytic” as \mathbf{dan} .

Step four : One shows that \mathbf{dan} is “at least as analytic” as $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$.

Step five : By rescaling \mathbf{man} and letting it tend to \mathbf{mown} as in (93), one checks that each of the four first steps carries over from \mathbf{man} to \mathbf{mown} .

The arguments at each step are largely “algebraic”, but they also rest on remarkable integral (or combinatorial) identities. Step four is particularly tricky : the analyticity-preserving nature of the transformation from $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ to \mathbf{dan} is not directly apparent on that transformation itself, but on its *first derivative*. For details, see [9].

B.4 First application : unitary iteration of unitary diffeomorphisms.

A (local, analytic) diffeomorphism U of \mathbf{C}^ν is said to be *unitary* if it is reciprocal to its own complex conjugate :

$$(100) \quad \{U \text{ unitary}\} \iff \{U \circ \bar{U} = id\} \quad (U, \bar{U} : \mathbf{C}_{,0}^\nu \mapsto \mathbf{C}_{,0}^\nu)$$

We shall focus for simplicity on *unitary* and *identity-tangent diffeomorphisms* of \mathbf{C} . It is actually more convenient to locate the fixed point at infinity and, as far as analytic difficulties are concerned, quite sufficient to study diffeomorphisms U that are formally conjugate to a pure imaginary shift, say $T_{2\pi i}$ for convenience. Thus we may consider the following data, with twiddles standing for formalness :

$$(101) \quad U : z \mapsto U(z) = z + 2\pi i + \sum_{n \geq 2} a_n z^{-n} \quad (z \sim \infty ; a_n \in \mathbf{C})$$

$$(102) \quad U = (*\tilde{U}) \circ (T_{2\pi i}) \circ (\tilde{U}^*) \quad \text{and} \quad (*\tilde{U}) \circ (\tilde{U}^*) = id$$

with $T_{2\pi i} \stackrel{def}{=} z + 2\pi i$ and :

$$(103) \quad U(z) \in z + \mathbf{C}\{z^{-1}\} ; \quad \tilde{U}^*(z) \text{ and } *\tilde{U}(z) \text{ both in } z + \mathbf{R}[[z^{-1}]]$$

Clearly, the mapping U is *unitary* if and only if the formal power series \tilde{U}^* and $*\tilde{U}$ are real, in which case the formal iterates of *real* order w :

$$(104) \quad \tilde{U}^{\circ w} \stackrel{def}{=} (*\tilde{U}) \circ (T_{2\pi iw}) \circ (\tilde{U}^*) \quad (\text{with } T_{2\pi iw} \stackrel{def}{=} z + 2\pi iw)$$

are themselves *formally unitary*. It is well-known, however, that the formal power series \tilde{U}^* , ${}^*\tilde{U}$, \tilde{U}^{ow} are *generically divergent* and *always resurgent* (see [4] or [6]) and that their Borel transform display, again generically, ramified singularities all over \mathbf{Z} in the ζ -*plane*. So the challenge here is to resum the series \tilde{U}^* and ${}^*\tilde{U}$ (resp. \tilde{U}^{ow}) to *real germs* U^* and *U (resp. to a unitary germ U^{ow}). The difficulty, of course, stems from the singularities which lie over \mathbf{R}^+ in the ζ -*plane* and obstruct straightforward Laplace integration, and from the faster-than-exponential growth of type (40) which generically occurs on oft-crossing paths. We can apply Laplace neither to the lateral determinations **mur** or **mul** (for they would yield imaginary parts), nor to their half-sum (because $(\mathbf{mur} + \mathbf{mul})/2$ does not respect convolution), nor to the median average **mun** (because of the faster-than-exponential growth), but only to a suitable average, like **mon**, **man**, or **mown**, which simultaneously respects *convolution*, *realness*, and *lateral growth*.

Similar results hold in all dimensions, not only for unitary diffeomorphisms that are identity-tangent, but also for merely resonant ones.

B.5 Second application : real normalization of real vector fields.

The remarks in the preceding section also apply, for much the same reasons, to local, real-analytic vector fields on \mathbf{R}^{ν} , especially when they are *resonant* and some of their *multipliers* λ_i (i.e. the eigenvalues of the field's linear part) are *real*, rather than complex and pairwise conjugate. Indeed, the *formal normalizing maps* attached to such fields will not only be generically divergent, but also resurgent with respect to a well-chosen, infinitely large variable z ; and the Borel transform $z \rightarrow \zeta$ will generically produce singularities over the set $\sum(\lambda_i \mathbf{Z})$ and thus over \mathbf{R} , with all the attending complications of non-linearity and faster-than-exponential growth on oft-crossing paths. All of which calls for an averaging of type $P_1 + P_2 + P_3$ if we want resummation to convert the *real formal normalization* into a *real sectorial normalization*.

There exist, however, subtle differences between the various sectors in the z -*plane*, which reflect the unequal “badness” of the singularities over $\lambda_i \mathbf{N}$ and $-\lambda_i \mathbf{N}$ in the ζ -*plane*, for an *inert multiplier* λ_i (i.e. one that is *not* involved in the resonance relations). On the “good side”, namely over $-\lambda_i \mathbf{N}$, the resurgent pattern is so utterly simple (since here only *one* alien derivation, i.e. $\Delta_{-\lambda_i}$, may act effectively) that *all* realness-preserving averages not only yield the *same result*, but also respect lateral growth. On the “bad side”, however, that is to say over $\lambda_i \mathbf{N}$, the resurgence structure is far more tangled (because there an *infinity* of alien derivations, i.e. Δ_{λ_i} , $\Delta_{2\lambda_i}$, $\Delta_{3\lambda_i}$, ..., are liable to act), so that the various realness-preserving averages generally produce distinct results, and only the well-behaved ones amongst them (like **mon**, **man**, **mown**) preserve lateral growth. For an *active* (i.e. *non-inert*) *multiplier* λ_i , of course, both sides $\pm\lambda_i \mathbf{N}$ are equally “bad”. For details, see [8] and [9].

B.6 Third application : simplifying the proof of the non-accumulation theorem for limit-cycles.

For most mathematicians concerned with the subject, the prime motivation seems to lie with Hilbert's 16th problem, which asks for an optimal bound $B(d)$ on the number of possible limit-cycles for a polynomial vector field of degree d over \mathbf{R}^2 . The non-accumulation theorem does indeed reinforce

the conjecture that each $B(d)$ is $< \infty$, but its proper setting is that of *real-analytic* (rather than *real-polynomial*) *vector fields* on \mathbf{R}^2 . Since the limit-cycles of such a field X might accumulate only to an invariant polycycle \mathcal{C} (possibly degenerate and reduced to a point) and since the accumulating limit-cycles would correspond to isolated fixed points of the so-called *return map* F associated with the polycycle, everything reduces to disproving the accumulation of isolated fixed points of F . A geometric, non-constructive proof was given in [10], while a resummation-theoretical and constructive one is available in [6]. For a lively survey, see [1].

What we propose to show here is how the *well-behaved averages* of the present paper may be used to simplify (and beautify) the resummation-theoretical proof. It is in fact enough (at the cost of repeated blow-ups) to consider the case of a *reduced polycycle* \mathcal{C} with r *summits* S_1, \dots, S_r where the vector field X turns singular, but retains a *non-zero linear part* with real eigenvalues λ_1, λ_2 . These summits S_i can be of three types :

Type I : Non-resonant hyperbolic : $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbf{Q}$.

Type II : Resonant hyperbolic : $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_1/\lambda_2 \in \mathbf{Q}$.

Type III : Semihyperbolic : $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, *)$ or $(*, 0)$.

The *return map* F attached to the polycycle \mathcal{C} factors into r so-called *transit-maps* G_i attached to the individual summits S_i :

$$(105) \quad F = G_r \circ G_{r-1} \circ \dots \circ G_2 \circ G_1$$

It being technically more convenient to work with an *infinitely large* reference variable z , F and G_i are actually *germs of maps* from $[\dots, +\infty[$ to $[\dots, +\infty[$. They are *real-analytic* (except at $+\infty$), and have an analytic continuation to some neighbourhood of \mathbf{R}^+ tapering off at $+\infty$. The resummation-theoretical scheme is to associate formal objects \tilde{F} and \tilde{G}_i to these maps :

$$(106) \quad \tilde{F} = \tilde{G}_r \circ \tilde{G}_{r-1} \circ \dots \circ \tilde{G}_2 \circ \tilde{G}_1$$

and to show that the trivial *formal trichotomy* :

$$(107) \quad \text{either } \{\tilde{F}(z) - z \equiv 0\} \text{ or } \{\tilde{F}(z) - z > 0\} \text{ or } \{\tilde{F}(z) - z < 0\}$$

translates, for z large enough, in an *effective*, i.e. *geometric trichotomy* :

$$(108) \quad \text{either } \{F(z) - z \equiv 0\} \text{ or } \{F(z) - z > 0\} \text{ or } \{F(z) - z < 0\}$$

which rules out any accumulation of isolated fixed points at infinity.

For all three types of summit, the formal maps \tilde{G}_i may be divergent, but they are always resumable under the general resummation scheme of section 1, with at most one “critical time” for each summit. The summits of Type I and II offer no special difficulty, but those of Type III (semi-hyperbolic) do, because, for them, the formal map \tilde{G}_i cannot be a plain *series* (with one order of infinitesimals) but a so-called *transseries*, which associates several orders of infinitesimals - in this case, only two, namely plain powers and exponentials, or plain powers and logarithms. Indeed, depending on the transit direction at a given summit of Type III (either expanding or contracting), any formal object \tilde{G}_i that encodes the whole information necessary to reconstruct G_i , must necessarily be of the form :

Type III⁺ (expanding) : $\tilde{G}_i = \tilde{K}_i \circ E \circ \tilde{U}_i^*$ (with $E(z) = \exp(z)$)

Type III⁻ (contracting) : $\tilde{G}_i = {}^* \tilde{U}_i \circ L \circ \tilde{H}_i$ (with $L(z) = \log(z)$)

with ordinary formal power series at both ends and an exponential E or a logarithm L as middle factor. As for the formal return map \tilde{F} constructed by composing the transit maps \tilde{G}_i , it may be a general transseries of awesome complexity, since it may involve several orders of infinitesimals (plain powers; exponentials and logarithms; iterated exponentials and logarithms). Nonetheless, it can always be written down, in a unique way, as a *well-ordered sum of pairwise comparable, irreducible expressions* $A_\alpha(z)$ known as *transmonomials* :

$$(109) \quad \tilde{F}(z) = \sum c_\alpha A_\alpha(z) \quad (\text{with } 1 \leq \alpha < \gamma < \omega^\omega \ ; \ c_\alpha \in \mathbf{R})$$

with a natural indexation α running through a transfinite subinterval $[1, \gamma[$ of $[1, \omega^\omega[$, in Cantor's standard notations. For the transit maps \tilde{G}_i of semi-hyperbolic summits, which involve only *two* orders of magnitude, γ is admittedly smaller (indeed, $\gamma = \omega^2$) :

$$(110) \quad \tilde{G}_i = \sum_{1 \leq \alpha < \omega} c_{i,\alpha} A_{i,\alpha}(z) + \sum_{\omega \leq \alpha < \omega^2} c_{i,\alpha} A_{i,\alpha}(z) \quad (c_{i,\alpha} \in \mathbf{R})$$

but still large enough to create both an *asymptotic part* (with finite ordinals α as indices) and a *transasymptotic part* (with transfinite indices α). As a consequence, *the very definition of the formal map \tilde{G}_i becomes a non-trivial affair*, and involves three distinct steps, which we detail, for definiteness, in the expanding case (*Type III⁺*) :

Step one : We obtain the formal map \tilde{U}_i^* as the *asymptotic part* of the geometric map $L \circ G_i$. That formal map \tilde{U}_i^* turns out to be the *normalizing map* of an *identity-tangent, unitary map* U_i (see section 4), which is none other than the holonomy map of the field X at S_i . Therefore (see section 4) the Borel transform of \tilde{U}_i^* is convergent, with singularities over \mathbf{Z} .

Step two : We resum \tilde{U}_i^* to a germ U_i^* by Borel-Laplace, *relative to some convolution preserving average \mathbf{m} of our own choosing, but which must be the same for all summits*.

Step three : We calculate \tilde{K}_i as the asymptotic part of the germ $G_i \circ {}^*U_i \circ L$ (where *U_i is of course reciprocal to U_i^*).

If we now move on to the study of \tilde{F} and F , we find that this latitude in the choice of the convolution-preserving average \mathbf{m} can lead to three different methods : *crude*; *smarter*; *smartest*.

First method (crude).

We select the *right-lateral* or *left-lateral* average (**mur** or **mul**). Then of course we have no problem with preserving lateral growth, but we get sums U_i^* which carry *imaginary parts*. The other factor, namely \tilde{K}_i , will be *convergent*. Both \tilde{K}_i and its trivial sum K_i will have their own imaginary parts, which will cancel out that of U_i^* , so that the product $K_i \circ E \circ G_i$ will indeed yield the *real germ* G_i .

Still, the procedure introduces imaginary parts in the transasymptotic coefficients c_α of the transseries \tilde{F} and, even worse, inside some of the transmonomials \tilde{A}_α - namely "upstairs", inside the towers of piled-up exponentials. This is a severe drawback for two reasons. First, imaginary parts are *personae non gratae* in the formalization of an inherently *real object* like F . Second, the imaginary numbers tucked away upstairs inside the exponential towers might create oscillations in the *sums* A_α of some of the transmonomials, and so in $F(z) - z$ itself. By a careful induction, we may satisfy ourselves *that this is not the case*, because the imaginary parts "sitting upstairs" are always neutralized by larger infinitesimals which are *purely real*. Nonetheless, the presence of imaginary parts is an aesthetic irritant and a practical nuisance. It robs the non-oscillation of $F(z) - z$ of the intuitive obviousness which it ought to possess, and which it acquires in the second and third methods.

Second method (smarter).

We select (as in [6]) the “uniform” median average **mun** (which in [6] was denoted by **med**). This does away with all imaginary numbers, but introduces faster-than-exponential growth in the “uniformized” or “averaged” Borel transform of \tilde{U}_i^* . This is offset, fortunately, by the phenomenon of “*emanated resurgence*” (analyzed at great length in [6]) which induces *divergence* and *resurgence* inside the factor \tilde{K}_i (defined relatively to **mun** by the standard procedure : see Step Three earlier on in this section). This time, both \tilde{U}_i^* and \tilde{K}_i are *real* and *divergent-resurgent*, and the faster-than-exponential growth *disappears* in the (uniformized) *joint Borel transform* of $\tilde{K}_i \circ E \circ \tilde{U}_i^*$, so that $\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_r$ and \tilde{F} may be accelero-summed to G_1, \dots, G_r and F .

There does remain, however, a slight flaw : unlike \tilde{G}_i and \tilde{F} taken as a whole, *some partial sums of these transseries may not always be resummed exactly, but only up to arbitrarily small ideals*. Due once again to “*emanation resurgence*”, these ideals may be chosen as small as :

$$(111) \quad 1/\exp \exp \dots \exp(z) \quad (n \text{ times ; } n \text{ arbitrary ; } z \sim +\infty)$$

that is to say, *smaller than any term present in a given transseries*. This is sufficient for all intents and purposes, and in particular more than sufficient for proving the non-oscillation of F . But the impossibility of resumming *exactly* (rather than modulo some ideals) certain subtransseries of our transseries is slightly irksome. This last remaining imperfection vanishes in the third method.

Third method (smartest).

We select a well-behaved average, like **mon**, **man**, **mown**, which respects *convolution*, *realness* and *lateral growth*. Then the formal factors \tilde{K}_i (defined according to the standard scheme) will automatically be *convergent* (like in the first method) but also *real* (like in the second method). There will be no faster-than-exponential growth to worry about, nor any need for any compensation of any sort. And not only will all our transseries be exactly resumable to their correct sums, but so will all their subtransseries (whose sums are *beyond the reach of geometry*, and definable only by *resummation*).

We conclude this section with a short table listing the main differences between the three methods :

	\tilde{U}_i^*	\tilde{K}_i	U_i^*	K_i
First method	real divergent resurgent	complex convergent	complex exact	complex exact
Second method	real divergent resurgent	real divergent resurgent	real approximate	real approximate
Third method	real divergent resurgent	real convergent	real exact	real exact

We note that \tilde{U}_i^* and (of course) G_i are independent of the method, but not so U_i^* , K_i , \tilde{K}_i and \tilde{G}_i .

B.7 Conclusion. Looking ahead .

Let us review our main averages in relation to the six crucial properties P_1, \dots, P_6 of section 1.

name of average	abbrev.	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
right-lat. av.	mur	yes	no	yes	yes	yes	yes
left-lat. av.	mul	yes	no	yes	yes	yes	yes
uniform av.	mun	yes	yes	no	yes	no	yes
organic av.	mon	yes	yes	yes	yes	no	yes
Catalan av.	man	yes	yes	yes	yes	yes	no
Brownian av.	mown	yes	yes	yes	yes	no	yes
Cauchy av.	myn	yes	yes	?	yes	no	yes
homogeneous av.	τ moun	yes	yes	?	yes	no	yes

There are many open questions left, apart from the two question-marks which pock-mark the above table. What is the distinctiveness of the *diffusion-induced averages*? Just how exceptional are the averages that reconcile the properties P_1, P_2, P_3 ? What is the description of the space $AVER^+$ spanned by the averages which are *strongly positive* (P_4), but *not necessarily convolution-preserving* (P_1)? $AVER^+$ being a convex compact set, what are its *extremal elements*? How do the fundamental averages (**mun**, **mon**, **man**, **mown**, **myn**, etc...) relate to each other? How do the probability measures which they induce on the ultrametric space $\{+, -\}^{\mathbf{N}}$ compare with one another? Most pairs would seem to be *mutually singular*, but not all of them - for instance, not **man** and **mown**. When the latter is the case, what is the *mutual density* of our measures? And so on and so forth.

The subject is in fact quite new. The only non-trivial average investigated so far was the “*uniform*” *median average* **mun**, which was introduced in [6] (under the label **med**) for some special application. None of the other averages (*organic*, *Catalan*, etc...) seems to have been defined, let alone investigated, prior to resurgence theory. However, two recent articles, [3] and [2], by M. Kruskal and his PhD student O. Costin, must be mentioned in this context. These interesting papers (yet to appear), which show that their authors are quite alive to the need for transasymptotics and transseries, also introduce (especially [2]) a certain realness-preserving average in order to resum the formal solutions of a special differential system. That average, however, draws only on those paths which cross \mathbf{R}^+ *at most once*, and so it cannot preserve convolution in general (see our Lemma 5). It works alright, though, in the particular case considered by O. Costin (which essentially amounts to resumming a resonant vector field on the “good side” $-\lambda_i \mathbf{N}$; see section 5 above) due to the very special resurgence structure of the objects involved.

The space $AVER$ of *averages* from $RAMIF$ to $UNIF$ does not exhaust the structural richness of the convolution algebra $RAMIF$: there is also the space $ALIEN$ consisting of the so-called *alien operators* (chiefly: *alien derivations* and *alien automorphisms*) which act *internally* on $RAMIF$ (and commute with the *natural derivation* of $RAMIF$). Clearly, $AVER$ and $ALIEN$ are closely interlinked, and to each remarkable family of averages (“uniform”, “organic”, “Catalan”, “Brownian”, etc...), there answers a related family of *alien derivations* and *alien automorphisms*. For lack of space, $ALIEN$ was given short shrift in this paper, but we caught a glimpse of its usefulness for *establishing* the properties of the averages, and even for *formulating* some of these properties, like P_3 (“respecting lateral growth”).

And then, of course, *alien operators* are the bone and marrow of *resurgence theory*, which in turn is the proper tool for investigating *Stokes phenomena*, linear or non-linear.

As for the field of applications of *well-behaved averages*, it is potentially quite vast, since it factually covers the whole range of situations characterized by a combination of (1) non-linearity, (2) divergence, (3) realness. Our three examples (in sections 4, 5 and 6) merely scratch the ground open. Still, they typify two quite different situations :

In the *first applications* (sections 4 and 5), the emphasis lies squarely on the passage from *formal* to *geometric*. The formal objects there are uniquely and simply defined, but they have no obvious geometric counterparts, and it takes resummation to *define these counterparts* (i.e. the unitary fractional iterates in section 4 ; the real normalizations in section 5) *unambiguously*. Different averages, generally speaking, lead to different sums, and thus to different geometric objects, but this is perfectly in order because, once again, there does not seem to exist any purely geometric criterion for selection. And once the convolution average is *fixed*, the correspondence from *formal* to *geometric* becomes perfectly intrinsical, i.e. chart-invariant.

In the last application, however (see section 6), the priorities are partially reversed. The emphasis there lies on the *two-way shuttle* between *formal* and *geometric*. The geometric objects, namely the return map F and the transit maps G_i , are *unambiguously given by geometry*, and their formalizations \tilde{F} and \tilde{G}_i are helpful (even indispensable) for *establishing the properties of F and G_i , not for defining them*. In fact, it is exactly the reverse : due to the “non-archimedeaness” (i.e. the coexistence of infinitesimals of different orders of smallness, like inverse powers and inverse exponentials), it is the *formal objects \tilde{F} and \tilde{G}_i* which, in this case, *require a construction and depend on the selection of the uniformizing average*. But once a proper average is chosen, and adhered to, we get an unambiguous, constructive shuttle $\tilde{F} \leftrightarrow F$ between *formal* and *geometric*, which completely illuminates the latter side (i.e. geometric) by transposing to it all the properties (like, in our case, the non-oscillation of F) which are directly obvious on the formal side.

Most of the instances where resummation is of service to geometry would seem to partake of one or the other of these two situations, exemplified by sections 4,5 and section 6 respectively. Moreover, the applicability to all cases of the same method (namely the general scheme of accelero-summation ; see section 1) irrespective of the causes of divergence, underscores the remarkable unity which pervades modern resummation theory.

Bibliographie

- [1] CHICONE C. C., *Finiteness theorems for limit-cycles*. Book review, Bull. Am. Math. Soc., 28, n° 1 (1993), 123-130.
- [2] COSTIN O., *Exponential asymptotics, transseries and generalized Borel summation for analytic, non-linear, rank one systems of ODE's.*, (May 15, 1995; first draft of a PhD thesis).
- [3] COSTIN O. and KRUSKAL M. D., *Optimal uniform estimates and rigorous asymptotics beyond all orders for a class of ordinary differential equations*, To appear.
- [4] ECALLE J., *Les fonctions résurgentes, Vol. 2, Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération.*, Publ. Math. Orsay., (1981).
- [5] ECALLE J., *Finitude des cycles-limites et accéléro-sommation de l'application de retour.*, in : Bifurcations of planar vector fields, (J.P. Francoise and R. Roussarie, eds.).
- [6] ECALLE J., *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac.*, Actualités Math., Hermann, Paris 1992.
- [7] ECALLE J., *Six lectures on transseries, analysable functions and the constructive proof of Dulac's conjecture.*, in : Bifurcations and periodic orbits of vector fields, 75-184, (D. Schlomiuk, ed), 1993, Kluwer Acad. Publ..
- [8] ECALLE J. , *Well-behaved convolution averages and their applications to real resummation.*, To appear.
- [9] MENOUS F., *Propriétés algébriques et analytiques de l'uniformisation de Catalan et de l'uniformisation brownienne.*, Thesis, chapter 1.
- [10] ILYASHENKO Yu. S., *Finiteness theorems for limit-cycles.*, Transl. Math. Monographs 94, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

Annexe C

Introduction de l'article "Well-behaved uniformizing averages and their applications to real resummation".

WELL-BEHAVED UNIFORMIZING AVERAGES AND THEIR APPLICATIONS TO REAL RESUMMATION

by

Jean ECALLE (Orsay)

Contents

A. Three related challenges in resummation theory.

- A1. Some heuristics. The need for well-behaved uniformizing averages, well-behaved alien derivations, and well-behaved resurgent monomials.
- A2. Convolution algebras of ramified functions. The operators on them.
- A3. Some highly desirable properties that one may look for in a uniformizing average; an alien derivation; or a family of resurgent monomials. Conflicting nature of the main demands.
- A4. Complement : convolution algebras with fixed singular points.
- A5. Complement : what exactly does “exponential growth” mean for a ramified function?
- A6. Complement : some elementary moulds for future use.

B. Botanical interlude : five remarkable averages and their associated alien derivations.

- B1. The uniform average **mun** and its independence on the increments.
- B2. The organic average **mon** and its rationality.
- B3. The Catalan average **man** and its self-reproduction under splitting.
- B4. The Bernouilli average **men** and its path-independence.
- B5. The hyperlogarithmic average **min** and its strange analytic properties.

C. Diffusion processes as a principal source of well-behaved averages.

- C1. Averages induced by a diffusion or prodiffusion.
- C2. Averages induced by a pseudo-diffusion.
- C3. Averages induced by diffusions or pseudo-diffusions are always well-behaved.
- C4. Averages induced by a materialization of the pseudo-variables. Orthogonality.
- C5. Averages and resurgent monomials jointly induced by a prodiffusion.

D. Further averages and associated resurgent monomials.

- D1. The homogeneous averages τ **moun**. The Brownian average **mown** and the Cauchy average **mayn** as special cases. The uniform average **mun** and the organic average **mon** as limit cases.
- D2. The Catalan average **man** revisited and re-assessed.
- D3. The Brownian average **moun** as a limit of dilated Catalan averages. Consequences.
- D4. The not-so-well-behaved family of hyperlogarithmic averages and resurgent monomials.
- D5. The impeccably well-behaved family of parallogarithmic averages and resurgent monomials.

E. Applications to real resummation.

- E1. Unitary iteration of unitary diffeomorphisms.
- E2. Real normalization of real, resonant vector fields.
- E3. Real normalization of real, resonant diffeomorphisms.
- E4. Real resummation of the formal solutions of real, singular differential systems. The Good and Bad sides. Remark on other approaches.
- E5. Simplification of the constructive proof of Dulac’s conjecture about the non-accumulation of limit-cycles.

F. Applications to object analysis and object synthesis.

- F1. A user-friendly version of the Bridge Equation.
- F2. Canonical synthesis for the Euler equation and Euler systems.
- F3. Canonical synthesis for identity-tangent diffeomorphisms.
- F4. Canonical synthesis for general resonant objects.
- F5. Isoresurgent deformations and related issues.

G. Complements ; open questions ; overview.

- G1. Partial uniformizations.
- G2. Complements and open questions.
- G3. Twenty-point conclusion.
- G4. Formulary.
- G5. Tables.

References.

Chapter A

THREE RELATED CHALLENGES IN RESUMMATION THEORY

A1. Some heuristics. The need for well-behaved uniformizing averages ; well-behaved alien derivations ; and well-behaved resurgent monomials.

The general resummation scheme.

The general scheme for resumming divergent series $\tilde{\varphi}(t)$ of “natural origin” goes like this :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{\varphi}_1(z_1) \equiv \tilde{\varphi}(t) & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \longrightarrow & \varphi(t) \equiv \varphi_r(z_r) \\
 \downarrow & & & & & & & \uparrow \\
 \hat{\varphi}_1(\zeta_1) & \longrightarrow & \hat{\varphi}_2(\zeta_2) & \longrightarrow & \cdots & \hat{\varphi}_{r-1}(\zeta_{r-1}) & \longrightarrow & \hat{\varphi}_r(\zeta_r)
 \end{array}$$

(A1.1)

(a) Here $\tilde{\varphi}(t)$ denotes a divergent power series (or transseries) of *natural origin* ; for instance the formal solution of a local analytic equation or system (differential ; partial differential ; functional ; etc...).

(b) t is the natural variable (usually $t \sim 0$) and $z_1 \ll z_2 \ll \cdots \ll z_r$ are the so-called *critical times* (or *critical variables*), defined up to equivalence and ordered from *slower* to *faster*. Each of them is large ($z_i \sim \infty$) and a function of t . Most often, they are just plain negative powers of t :

$$(A1.2) \quad z_1 \equiv t^{-p_1} ; z_2 \equiv t^{-p_2} ; \cdots ; z_r \equiv t^{-p_r} \quad (0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_r)$$

(c) We begin (step $t \rightarrow z_1$) by expressing $\tilde{\varphi}(t)$ in terms of its slowest critical time z_1 and then (step $z_1 \rightarrow \zeta_1$) we subject $\tilde{\varphi}_1(z_1)$ to the *formal Borel transform*, which for instance turns each monomial $(z_1)^{-\sigma}$ into $(\zeta_1)^{\sigma-1}/\Gamma(\sigma)$.

(d) then we go successively through the steps $\zeta_i \rightarrow \zeta_{i+1}$. These stand for the so-called *acceleration transforms* :

$$(A1.3) \quad \hat{\varphi}_i(\zeta_i) \rightarrow \hat{\varphi}_{i+1}(\zeta_{i+1}) \equiv \int_0^{+\infty} C_{F_i}(\zeta_{i+1}, \zeta_i) \hat{\varphi}_i(\zeta_i) d\zeta_i$$

which are the pull-back, under Borel-Laplace, of the mere changes of “time” $\varphi_i(z_i) \equiv \varphi_{i+1}(z_{i+1})$ with $z_i \equiv F_i(z_{i+1})$.

(e) then (step $\zeta_r \rightarrow z_r$) we carry out a *Laplace transform* :

$$(A1.4) \quad \tilde{\varphi}_r(\zeta_r) \rightarrow \varphi_r(z_r) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-z_r \xi_r} \tilde{\varphi}_r(\zeta_r) d\zeta_r$$

and lastly we revert to the original variable (step $z_r \rightarrow t$).

This seemingly round-about procedure for “dropping the twiddle”, i.e. for turning the formal object $\tilde{\varphi}(t)$ into a geometric one $\varphi(t)$, is known as *accelero-summation*. It has nothing arbitrary about it, and the various steps must be enacted in precisely the specified order, because the growth rate in each ζ_i -plane allows acceleration to ζ_{i+1} , but (usually) not to ζ_{i+2} , ζ_{i+3} , \dots

Three steps in one.

Although each move from ζ_i to ζ_{i+1} (or from ζ_r) looks like being one single step, it actually involves three distinct substeps.

(i) *First substep : calculating a germ*. We first obtain $\tilde{\varphi}_i(\zeta_i)$ as a germ near $\zeta_i = +0$ either (if $i = 1$) by the formal Borel transform or (if $i \geq 2$) by an acceleration integral which, generally speaking, converges only for small enough values of ζ_i .

(ii) *Second substep : getting a global function*. We must continue this germ $\tilde{\varphi}_i(\zeta_i)$ from $+0$ to $+\infty$, so as to get hold of a *global function*. This turns out to be possible because $\tilde{\varphi}_i(\zeta_i)$ is always *cohesive* (either *analytic* or *regular quasianalytic*) and because, owing to the “natural origin” of $\tilde{\varphi}(t)$, there are no obstacles to cohesive continuation from $+0$ to $+\infty$.

(iii) *Third substep : uniformizing the global function*. Although there are no obstacles to *cohesive* (analytic or quasianalytic) *continuation*, there may well be *cohesive* (analytic or quasianalytic) *singularities*. Indeed, we must recall that the existence of various singularities in the various ζ_i -planes is precisely what causes the divergence of the initial series $\tilde{\varphi}(t)$, and that there is nothing to prevent those singularities from lying over \mathbf{R}^+ . On the contrary, there are often compelling reasons for them to be located there. Whenever this is the case, the global function $\tilde{\varphi}_i(\zeta_i)$ is *multivalued* (i.e. *many-branched*) over \mathbf{R}^+ , and we must turn it, *in some suitable way* (here lies the hitch!) into a *univalued function* ($\mathbf{m}\tilde{\varphi}_i$)(ζ_i), so as to be in a position to perform the next acceleration transform $\zeta_i \rightarrow \zeta_{i+1}$ or (if $i = r$) the concluding Laplace transform $\zeta_r \rightarrow z_r$.

First challenge : Constructing well-behaved uniformizing averages.

The difficulty in question relates directly to the last substep (iii) and has to do with the choice of a suitable *uniformizing average* \mathbf{m} . *Suitable*, here, means three things :

(a) The averaging by \mathbf{m} must be such that, when followed by an acceleration (resp. Laplace transform), it should yield an *algebra homomorphism* $\hat{\varphi}_i(\zeta_i) \rightarrow \hat{\varphi}_i(\zeta_i)$ (resp. $\hat{\varphi}_r(\zeta_r) \rightarrow \hat{\varphi}_r(z_r)$), turning convolution into convolution (resp. into multiplication). This is essential, because if the series $\tilde{\varphi}(z)$ to be resummed stems from a non-linear problem (e.g. is the formal solution of a non-linear equation or system), then

only a *resummation procedure resolving into a succession of algebra homomorphisms* can yield an acceptable sum $\varphi(z)$, i.e. one that verifies the original equation or system. But since the acceleration (resp. Laplace-transformation) of *uniform functions* $\hat{\varphi}(\xi)$ *does respect convolution* (resp. *does turn it into multiplication*), this means that our uniformizing averages will have to change *ramified convolution* into *uniform convolution*.

(b) The average \mathbf{m} should also *respect realness*. This is always preferable and often indispensable. Indeed, if the divergent series $\tilde{\varphi}(z)$ is real and has its origin in a problem of physics or real geometry, then only a real sum $\varphi(z)$ is acceptable.

(c) The uniformizing average \mathbf{m} should be very finely honed so as to cope with the *chronic nuisance of faster-than-critical* (or *faster-than-lateral*) *growth on oft-crossing paths*. Let us make our meaning clear. In each convolutive model $\zeta \equiv \zeta_i$, the resurgent function $\hat{\varphi}(\zeta)$ displays, generally speaking, precisely the *critical growth rate* (at infinity) which allows acceleration $\zeta_i \rightarrow \zeta_{i+1}$ or Laplace transformation $\zeta_r \rightarrow z$ (in the latter case, this means that $\hat{\varphi}(\zeta)$ has - at most - exponential growth). But that statement must, alas, be qualified. In actual fact, *critical growth* obtains only :

(*) *inside singularity-free sectors* $S_{\theta_1, \theta_2} = \{\theta_1 < \arg \zeta < \theta_2\}$

(**) *laterally on singularity-carrying axes* $\Gamma_{\theta_0} = \{\arg \zeta = \theta_0\}$, i.e. *right and left* of Γ_{θ_0} .

It obtains, too, on paths Γ which keep close to Γ_{θ_0} and cross it only a finite number of times. But if the axis Γ_{θ_0} carries infinitely many singularities and if Γ follows it laterally, from 0 to ∞ , but with infinitely many crossings, then, for reasons which will emerge in the sequel (see § A3 and chap. E and F), the function $\hat{\varphi}(\zeta)$ *often has faster-than-critical growth along the path* Γ . Thus, in the most important case, namely when *critical* means *exponential*, $\hat{\varphi}(\zeta)$ usually admits no better bounds than :

$$(A1.5) \quad |\hat{\varphi}(\zeta)| \leq c_0 \exp(c_1 |\zeta| + |\zeta| \log |\zeta|)$$

on those “sinusoidal” paths Γ which cross Γ_{θ_0} “often enough”. It is plain, therefore, that a carelessly chosen uniform average $(\mathbf{m}\hat{\varphi})(\zeta)$ *won't* have exponential growth and *won't* be fit for Laplace transformation. Fortunately, the mechanism responsible for *faster-than-lateral growth* is a very precise one (it has to do with the nature of the “*active alien algebras*”; see chap. E and F) and, when closely analysed, it suggests its own antidote : it shows how to construct “well-behaved” averages \mathbf{m} which, via a subtle path-to-path compensation, systematically produce mean values $(\mathbf{m}\hat{\varphi})(\zeta)$ that grow at the requisite “critical” or “lateral” rate.

Second challenge : constructing well-behaved families of alien derivations.

This specific difficulty arises when we try to write down the *resurgence equations* of $\tilde{\varphi}(z)$ in a manner conducive to an easy *characterization of the holomorphic invariants* \mathbf{A}_ω which are the vital part of most resurgence equations. To clarify this point, let us consider the so-called Bridge Equation :

$$(A1.6) \quad \dot{\Delta}_\omega \tilde{x}(z, u) = \mathbf{A}_\omega \tilde{x}(z, u)$$

with its three ingredients, namely :

(i) the *formal integral* $\tilde{x}(z, u)$, which is the formal solution of the *dynamical system* associated with a “*local analytic object*” \mathbf{Ob} , like a *local resonant vector field* or *diffeomorphism* on \mathbf{C}^ν (see chap. E, F). The formal integral typically involves divergent-resurgent power series of *one complex variable* z and *several parameters* $u = (u_i)$.

(ii) the *alien derivations* Δ_ω , which enable us to measure the singularities of the formal integral's Borel transform $\hat{x}(\zeta, u)$ over a countable set Ω of singular points ω .

(iii) the ordinary differential operators \mathbf{A}_ω (in z and u) which are *determined* by (and *calculable* from) the Bridge Equation and which, taken together, constitute a (usually) complete set of *holomorphic-cum-analytic invariants* of the object \mathbf{Ob} under consideration (see chap. E,F).

Of course, what set of invariants $\{\mathbf{A}_\omega\}$ we end up with depends solely on what particular family of alien derivations $\{\Delta_\omega\}$ we choose to work with. Furthermore, it turns out that, for *all families* $\{\mathbf{A}_\omega\}$, the growth pattern of the corresponding invariants \mathbf{A}_ω (or rather their natural norms $\|\mathbf{A}_\omega\|$) when ω grows, is rather easy to describe, but *only for some special*, “*well-behaved*” families $\{\mathbf{A}_\omega\}$ of alien derivations is this growth condition *characteristic*, i.e. sufficient to ensure that an arbitrarily given set $\{\mathbf{A}_\omega\}$ of differential operators be an actual set of invariants for *some* local object \mathbf{Ob} . What is more, the alien derivations easiest to construct (such as the standard ones $\Delta_\omega = \mathbf{Dun}_\omega$; see § B1) are *not well-behaved* in the above sense, due to the rather clumsy path weightage upon which they rely. Hence the need for a more clever choice.

Third challenge : constructing well-behaved resurgent monomials.

The problem we have just been discussing may be described as “object analysis” : starting from a local analytic object \mathbf{Ob} , calculate its holomorphic invariants \mathbf{A}_ω by means of the Bridge Equation.

“Object synthesis” is the reverse problem : use the Bridge Equation to construct an object \mathbf{Ob} , as simple and “canonical” as possible, but with a prescribed set of invariants $\{\mathbf{A}_\omega\}$. Of course, the *a priori* given operators must satisfy the characteristic *growth condition* for holomorphic invariants. Therefore, in view of the preceding section, it is highly advisable to work with a *well-behaved* family $\{\Delta_\omega\}$ of alien derivations. But this is not enough, and we require an essential extra ingredient, namely *well-behaved resurgent monomials*. By that, we mean elementary resurgent functions $\mathcal{U}^\omega \equiv \mathcal{U}^{\omega_1, \dots, \omega_r}$:

(*) from which all other resurgent functions may be built

(**) which obey the simplest possible rules (of multiplication - convolution ; ordinary and alien differentiation)

(***) and which - this is really the crux of the matter - grow as slowly as possible when the length r of the indexing sequence ω increases.

The last condition (see § A3 and §§ D4,5 for precise statements) is meant to ensure the automatic convergence (*in the space of resurgent functions*) of the formal solutions of resurgence equations, or resurgence systems (such as the Bridge Equation). In other words, it is meant *to reduce “integral alien calculus” to a largely formal affair, with little or no analytic complications left.*

Three questions answered at one go.

Summing up, we may say that we are faced with three stark challenges, each rooted in a quite distinct problem. The first challenge is specific to *real resummation* and calls for *well-behaved uniformizing averages*, different from the standard (“median”) average. The second one is rooted in “*object analysis*” and requires *well-behaved alien derivations*, different from the standard (“uniform”) alien derivations. The third one originates in “*object synthesis*” and requires *well-behaved resurgent monomials*, different from the standard (“hyperlogarithmic”) monomials.

However, as we propose to show in this paper, these three challenges are essentially **one**; and they can be tackled, and completely solved, by a unified approach, based on the notion of *diffusion process*.

A2. Convolution algebras of ramified functions. The operators on them.

The algebra $\text{RESUR}(\mathbf{R}^+)$ of resurgent functions over \mathbf{R}^+ .

Throughout, \mathbf{C}_\bullet will denote the Riemann surface of $\log \zeta$ and we will use \mathbf{R}^+ as short-hand for the axis $\{\arg \zeta = 0\}$. To any discrete additive semi-group $\Omega \subset \mathbf{R}^+$ there answers the algebra $\text{RESUR}(\mathbf{R}^+//\Omega)$ (resp. $\text{RESUR}(\mathbf{R}^+//\Omega; \text{int})$) of general (resp. locally integrable) resurgent functions over \mathbf{R}^+ with singularities over Ω .

The larger algebra $\text{RESUR}(\mathbf{R}^+//\Omega)$ consists of pairs :

$$(A2.1) \quad \overline{\varphi} = (\check{\varphi}, \hat{\varphi}) = (\text{major}, \text{minor})$$

with majors $\check{\varphi}(\zeta)$ defined and holomorphic on some small set :

$$(A2.2) \quad \{0 < |\zeta| < \varepsilon ; -\pi \leq \arg \zeta \leq +\pi\} \subset \mathbf{C}_\bullet$$

and with minors $\hat{\varphi}(\zeta)$ defined and holomorphic at the root of \mathbf{R}^+ (i.e. on some small interval $]0, \varepsilon[$) and analytically continuable along any path that follows \mathbf{R}^+ and dodges each of the points of Ω , to the right or to the left, but without ever going back.

The majors $\check{\varphi}$ are regarded as defined upto addition of a regular analytic germ at $\zeta = 0$, while the minors $\hat{\varphi}$ are exactly defined and deducible from the majors according to :

$$(A2.3) \quad -2\pi i \hat{\varphi}(\zeta) \equiv \check{\varphi}(e^{i\pi}\zeta) - \check{\varphi}(e^{-i\pi}\zeta) \quad (0 < \zeta \ll 1).$$

(In other words, instead of the “natural majors”, we shall use the so-called “real-majors”, since these are better suited to the calculation of accelerates and to the expression of *realness*, which shall be one of our main concerns in this paper).

For any two elements $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2$ in $\text{RESUR}(\mathbf{R}^+//\Omega)$, the integral

$$(A2.4) \quad \check{\varphi}_3(\zeta) = (1/2\pi i) \int_{I(\zeta, u)} \check{\varphi}_1(\zeta_1) \check{\varphi}_2(\zeta - \zeta_1) d\zeta_1$$

$$(0 < \zeta < u \ll 1)$$

calculated on a small vertical segment :

$$(A2.5) \quad I(\zeta, u) = \left[\frac{1}{2}\zeta + e^{-\pi i/2}u ; \frac{1}{2}\zeta + e^{+\pi i/2}u \right]$$

yields a major $\check{\varphi}_3$ whose class $\overline{\varphi}_3$ (module the space of regular germs at $\zeta = 0$) depends neither on the point u nor on the choice of the majors $\check{\varphi}_1, \check{\varphi}_2$ within the classes $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2$. Moreover, the minor $\hat{\varphi}_3$ associated with $\overline{\varphi}_3$ automatically enjoys the same continuability properties along \mathbf{R}^+ as do the minors $\hat{\varphi}_1$ and $\hat{\varphi}_2$. We thus have an internal convolution product $\overline{\varphi}_1 * \overline{\varphi}_2$ which is clearly commutative and (less obviously so) associative, and which turns $\text{RESUR}(\mathbf{R}^+//\Omega)$ into a commutative algebra.

The subalgebra $\text{RESUR}(\mathbf{R}^+//\Omega; \text{int})$ consists of all resurgent functions $\overline{\varphi}$ whose majors have sub-polar growth at 0 :

$$(A2.6) \quad \zeta \check{\varphi}(\zeta) \rightarrow 0 \text{ as } \zeta \rightarrow 0 \text{ (uniformly on } -\pi \leq \arg \zeta \leq +\pi)$$

and whose *minor* is locally integrable, not only at 0 but also at each singular point over Ω . The elements of $\text{RESUR}(\mathbf{R}^+//\Omega; \text{int})$ are entirely determined by their *minors*, and the convolution product reduces to *minor convolution* :

$$(A2.7) \quad \hat{\varphi}_3(\zeta) = \hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2(\zeta) := \int_0^\zeta \hat{\varphi}_1(\zeta_1) \hat{\varphi}_2(\zeta - \zeta_1) d\zeta_1 \quad (0 < \zeta \ll 1).$$

Note that this expression is *purely local* (at $\zeta = 0$) and that the *germ* $\hat{\varphi}_3(\zeta)$ must then be extended, by analytic continuation, to a global function.

Lastly, the algebras $\text{RESUR}(\mathbf{R}^+)$ and $\text{RESUR}(\mathbf{R}^+; \text{int})$ (or RESUR and $\text{RESUR}(\text{int})$ for short) may be defined as the *inductive limits*, for increasing semi-groups Ω , of the above algebras.

The algebra ALIEN of alien operators.

On top of the *natural derivation* $\hat{\partial}$:

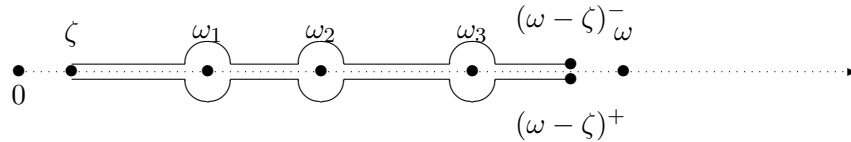
$$(A2.8) \quad \hat{\partial} : \check{\varphi} = (\check{\varphi}(\zeta), \hat{\varphi}(\zeta)) \rightarrow \partial \check{\varphi} = (+\zeta \check{\varphi}(\zeta), -\zeta \hat{\varphi}(\zeta))$$

(which merely transposes the ordinary z -differentiation under the Borel transform $z \rightarrow \zeta$), our resurgence algebras possess a huge array of internal operators, the *so-called alien operators*, which are uniquely expressible as finite or infinite sums of elementary operators \mathbf{Lur}_ω (or \mathbf{Rul}_ω) and their products. These elementary operators constitute a continuous set, with indexes ω running through \mathbf{R}^+ , and act as follows :

$$(A2.9) \quad \mathbf{Lur}_\omega : \check{\varphi} \rightarrow \check{\psi} \quad \text{with} \quad \check{\psi}(\zeta) \equiv -2\pi i \hat{\varphi}((\omega - \zeta)_+) \quad (0 < \zeta \ll 1)$$

$$(A2.10) \quad \mathbf{Rul}_\omega : \check{\varphi} \rightarrow \check{\psi} \quad \text{with} \quad \check{\psi}(\zeta) \equiv -2\pi i \hat{\varphi}((\omega - \zeta)_-) \quad (0 < \zeta \ll 1).$$

Note that the *major* of $\check{\psi}$ is defined in terms of the *minor* of $\check{\varphi}$. Here, ζ is positive and small, and $(\omega - \zeta)_+$ (resp. $(\omega - \zeta)_-$) denotes *the point* over $(\omega - \zeta)$ that may be reached from 0 by following \mathbf{R}^+ and circumventing to the right (resp. to the left) all the intermediary singular points $\omega_1, \dots, \omega_{r-1}$ of $\hat{\varphi}$ that lie between 0 and $\omega = \omega_r$. Observe that $\hat{\psi} \equiv 0$ if $\hat{\varphi}$ has no singular point over ω .



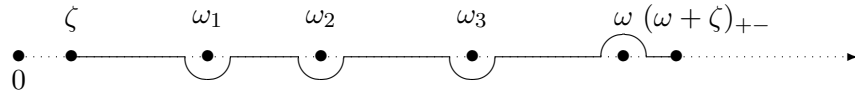
$$(A2.11)$$

On the algebra $\text{RESUR}(\text{int})$ of *locally integrable* resurgent functions, this reduces to a minor-to-minor transformation :

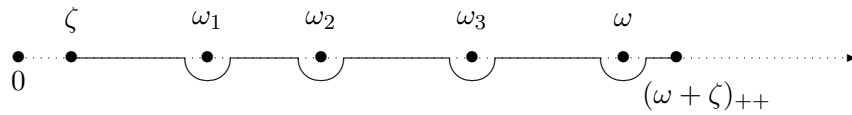
$$(A2.12) \quad \mathbf{Lur}_\omega : \hat{\varphi} \rightarrow \hat{\psi} \quad \text{with} \quad \hat{\psi}(\zeta) \equiv \hat{\varphi}((\omega + \zeta)_{++}) - \hat{\varphi}((\omega + \zeta)_{+-})$$

$$(A2.13) \quad \mathbf{Rul}_\omega : \hat{\varphi} \rightarrow \hat{\psi} \quad \text{with} \quad \hat{\psi}(\zeta) \equiv \hat{\varphi}((\omega + \zeta)_{--}) - \hat{\varphi}((\omega + \zeta)_{-+}).$$

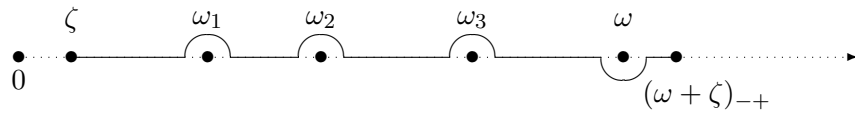
As usual, the definition is local (for $0 < \zeta \ll 1$) but allows analytic continuation. Here $(\omega + \zeta)_{\varepsilon\eta}$ denotes *the point over $(\omega + \zeta)$ that may be reached from 0 by circumventing all the intermediary singular points $\omega_1, \dots, \omega_{r-1}$ to the right if $\varepsilon = +$ (resp. to the left if $\varepsilon = -$) and the last point $\omega = \omega_r$ to the right if $\eta = +$ (resp. to the left if $\eta = -$)*. Of course, in the absence of singularities over ω , both $\mathbf{Lur}_\omega \hat{\varphi}$ and $\mathbf{Rul}_\omega \hat{\varphi}$ vanish.



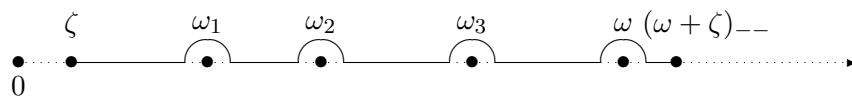
(A2.14)



(a2.14bis)



(A2.15)



(a2.15bis)

The algebra ALIEN (short for ALIEN(\mathbf{R}^+)) of *alien operators* over \mathbf{R}^+ is a graded algebra :

$$(A2.16) \quad \text{ALIEN} = \bigoplus_{0 \leq \omega} \text{ALIEN}_\omega = (\mathbf{C}Id) \bigoplus_{0 < \omega} \text{ALIEN}_\omega.$$

The component ALIEN_0 merely contains multiples of the identity operator. The other components ALIEN_ω ($\omega > 0$) contain all “alien operators over ω ” representable as sums

$$(A2.17) \quad \mathbf{Op}_\omega = \sum_{1 \leq r} \sum_{0 < \omega_i} a^{\omega_1, \dots, \omega_r} \mathbf{Lur}_{\omega_r} \cdots \mathbf{Lur}_{\omega_2} \mathbf{Lur}_{\omega_1} \quad (\sum \omega_i = \omega).$$

or as sums :

$$(A2.18) \quad \mathbf{Op}_\omega = \sum_{1 \leq r} \sum_{0 \leq \omega_i} b^{\omega_1, \dots, \omega_r} \mathbf{Rul}_{\omega_r} \cdots \mathbf{Rul}_{\omega_2} \mathbf{Rul}_{\omega_1} \quad (\sum \omega_i = \omega).$$

Representability by (A2.17) is equivalent to representability by (A2.18) since :

$$(A2.19) \quad \mathbf{Lur}_\omega = \sum_{1 \leq r} \sum_{0 < \omega_i} (-1)^r \mathbf{Rul}_{\omega_r} \cdots \mathbf{Rul}_{\omega_1} \quad (\sum \omega_i = \omega)$$

$$(A2.20) \quad \mathbf{Rul}_\omega = \sum_{1 \leq r} \sum_{0 < \omega_i} (-1)^r \mathbf{Lur}_{\omega_r} \cdots \mathbf{Lur}_{\omega_1} \quad (\sum \omega_i = \omega).$$

We should not worry over the (non-countable) infinity of terms in the above sums : since $\mathbf{Lur}_\omega \overset{\nabla}{\varphi}$ and $\mathbf{Rul}_\omega \overset{\nabla}{\varphi}$ vanish unless the minor $\hat{\varphi}$ has *at least* one singular point over ω , it is plain that, for any given function $\overset{\nabla}{\varphi}$, only finitely many terms in the above sums (A2.17) or (A2.18) may act non-trivially on $\overset{\nabla}{\varphi}$. These sums, therefore, define precise operators \mathbf{Op}_ω which act internally on the whole of RESUR.

The general elements \mathbf{Op} of ALIEN, on the other hand, are formal sums :

$$(A2.21) \quad \mathbf{Op} = \sum_{0 \leq \omega} \mathbf{Op}_\omega = c \text{Id} + \sum_{0 < \omega} \mathbf{Op}_\omega$$

which operate only on strict subspaces of RESUR (as well as on strict *extensions* of RESUR, such as RAMIF ; see below).

Writing 1 short for Id and setting :

$$(A2.22) \quad \mathbf{Lur} = 1 + \sum_{0 < \omega} \mathbf{Lur}_\omega$$

$$(A2.23) \quad \mathbf{Rul} = 1 + \sum_{0 < \omega} \mathbf{Rul}_\omega$$

we observe that the relations (A2.19) and (A2.20) reduce to :

$$(A2.24) \quad \mathbf{Rul.Lur} = \mathbf{Lur.Rul} = 1.$$

The (associative but non-commutative) operator algebra ALIEN is also endowed with a natural *co-product* :

$$(A2.25) \quad \text{cop} : \text{ALIEN} \rightarrow \text{ALIEN} \otimes \text{ALIEN}$$

$$(A2.26) \quad \text{cop} : \mathbf{Op} \rightarrow \sum \Gamma^{1,2} \mathbf{Op}^1 \otimes \mathbf{Op}^2 \quad (\Gamma^{1,2} \in \mathbf{C})$$

which is *co-commutative* and reflects the interaction of alien operators with the *commutative* convolution product :

$$(A2.27) \quad \mathbf{Op}(\overline{\varphi}_1 * \overline{\varphi}_2) \equiv \sum \Gamma^{1,2} (\mathbf{Op}^1 \overline{\varphi}_1) * (\mathbf{Op}^2 \overline{\varphi}_2) \quad (\forall \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2).$$

Deserving of special attention are the operators \mathbf{Op} whose *coproduct is finite* (meaning that the sum \sum in (A2.26) is finite). Among them, the *alien automorphisms* and *alien derivations* stand out, with coproducts of the form :

$$(A2.28) \quad \text{cop} : \mathbf{Op} \rightarrow \mathbf{Op} \otimes \mathbf{Op} \quad (\mathbf{Op} \text{ automorphism})$$

$$(A2.29) \quad \text{cop} : \mathbf{Op} \rightarrow \mathbf{Op} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{Op} \quad (\mathbf{Op} \text{ derivation}).$$

For instance, \mathbf{Lur} and \mathbf{Rul} are alien automorphisms. Therefore, their common logarithm :

$$(A2.30) \quad \mathbf{Dun} = \sum_{0 < \omega} \mathbf{Dun}_\omega := +\log(\mathbf{Lur}) = -\log(\mathbf{Rul})$$

is an *alien derivation*, and so too are its graded components \mathbf{Dun}_ω . The components of \mathbf{Lur} (or \mathbf{Rul}) merely verify :

$$(A2.31) \quad \text{cop}(\mathbf{Lur}_\omega) \equiv \mathbf{1} \otimes \mathbf{Lur}_\omega + \mathbf{Lur}_\omega \otimes \mathbf{1} + \sum_{\omega_1 + \omega_2 = \omega} \mathbf{Lur}_{\omega_1} \otimes \mathbf{Lur}_{\omega_2}.$$

Whenever an alien operator \mathbf{Op} can be expressed in terms of another operator \mathbf{Op}^* , or rather of the latter's *graded components*, the expansion is necessarily unique :

$$(A2.32) \quad \mathbf{Op} := \sum \mathbf{Op}_\omega = \sum \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Op}^* \rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} \mathbf{Op}_{\omega_r}^* \cdots \mathbf{Op}_{\omega_2}^* \mathbf{Op}_{\omega_1}^*$$

and the scalar coefficients $\langle \mathbf{Op}, \mathbf{Op}^* \rangle^\omega$, depending as they do on a general sequence $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ of arbitrary length r , define what is known as a *mould* (see § A6). That mould, moreover, has a well-defined symmetry type (see § A6), which depends only on the nature of \mathbf{Op} and \mathbf{Op}^* . Indeed :

$$(A2.33) \quad \langle \text{derivation}, \text{derivation} \rangle^\bullet = \text{alternel}$$

$$(A2.34) \quad \langle \text{automorphism}, \text{derivation} \rangle^\bullet = \text{symmetral}$$

$$(A2.35) \quad \langle \text{derivation}, \text{automorphism} \rangle^\bullet = \text{alternel}$$

$$(A2.36) \quad \langle \text{automorphism}, \text{automorphism} \rangle^\bullet = \text{symmetrel}.$$

Operator multiplication corresponds to mould multiplication :

$$(A2.37) \quad \langle \mathbf{Op} \cdot \mathbf{Opp}, \mathbf{Op}^* \rangle^\bullet = \langle \mathbf{Opp}, \mathbf{Op}^* \rangle^\bullet \times \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Op}^* \rangle^\bullet$$

(but mark the reversal!) and a *change of basis* corresponds to *mould composition*, as defined in § A6 :

$$(A2.38) \quad \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Op}^{**} \rangle^\bullet = \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Op}^* \rangle^\bullet \circ \langle \mathbf{Op}^*, \mathbf{Op}^{**} \rangle^\bullet.$$

There are three main ways of representing any given *alien operator* \mathbf{Op} . We may characterize \mathbf{Op} by either of the so-called “lateral” moulds :

$$(A2.39) \quad \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Lur} \rangle^\bullet = \{ \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Lur} \rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} \}$$

$$(A2.40) \quad \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Rul} \rangle^\bullet = \{ \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Rul} \rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} \}$$

which relate \mathbf{Op} to the elementary operators \mathbf{Lur}_ω and \mathbf{Rul}_ω . Or we may use the “weights” (or “*natural coordinates*”) of \mathbf{Op} :

$$(A2.41) \quad \{ \mathbf{Op}^\varpi = \mathbf{Op}^{\varpi_1, \dots, \varpi_r} = \mathbf{Op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} \} \left(\varpi_i = (\omega_i, \varepsilon_i); \omega_i \in \mathbf{R}^+; \varepsilon_i \in \{+, -\} \right).$$

These “weights” \mathbf{Op}^ϖ are complex numbers indexed by sequences ϖ of positive real numbers ω_i alternating with plus or minus signs ε_i . They are subject to the “self-consistency” constraints :

$$(A2.42) \quad \sum_{\varepsilon_j = \pm} \mathbf{Op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} = \mathbf{Op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \omega_j + \omega_{j+1}, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} \quad (\forall j < r)$$

$$(A2.43) \quad \sum_{\varepsilon_r = \pm} \mathbf{Op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} = 0$$

and they may be *defined* by adding to these intrinsic constraints either (it doesn’t matter which) of the following conditions :

$$(A2.44) \quad \mathbf{Op}^{\omega_1, +, \dots, \omega_r, +} \equiv (-1)^r \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Rul} \rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r}$$

$$(A2.45) \quad \mathbf{Op}^{\omega_1, -, \dots, \omega_r, -} \equiv (-1)^r \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Lur} \rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r}$$

which equate *weights of constant signs* ε_i with the right-lateral or left-lateral moulds.

Setting $\mathbf{Op}^* = \mathbf{Lur}$ and $\mathbf{Op}^{**} = \mathbf{Rul}$ in (A2.38) and observing that, \mathbf{Lur} and \mathbf{Rul} being mutually inverse, their connection moulds are trivial :

$$(A2.46) \quad \langle \mathbf{Rul}, \mathbf{Lur} \rangle^\bullet = \langle \mathbf{Lur}, \mathbf{Rul} \rangle^\bullet = (1^\bullet + I^\bullet)^{-1} = 1^\bullet - I^\bullet + I^\bullet \times I^\bullet \dots$$

we see at once that the right- and left-lateral moulds of \mathbf{Op} are linked by :

$$(A2.47) \quad \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Rul} \rangle^\bullet = \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Lur} \rangle^\bullet \circ (1^\bullet + I^\bullet)^{-1}$$

$$(A2.48) \quad \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Lur} \rangle^\bullet = \langle \mathbf{Op}, \mathbf{Rul} \rangle^\bullet \circ (1^\bullet + I^\bullet)^{-1}$$

and so, whether we add the conditions (A2.44) or (A2.45) to the self-consistency constraints (A2.42) + (A2.43), we are led (inductively on r) to one and the same collection of weights \mathbf{Op}^ϖ .

Though the characterization of alien operators via their weights is highly redundant, it makes up for it by being quite flexible and capable of a simple interpretation (see (A3.2), (A3.3)). As for *operator multiplication*, its rendition in terms of weights involves the usual order reversal

$$(A2.49) \quad (\mathbf{Op} \mathbf{Opp})^{\varpi_1, \dots, \varpi_r} = \sum_{0 \leq j \leq r} \mathbf{Opp}^{\varpi_1, \dots, \varpi_j} \mathbf{Op}^{\varpi_{j+1}, \dots, \varpi_r}$$

(with factor sequences that turn empty when $j = 0$ or r).

The commutative algebra PSEUDO of pseudovariables.

As we just saw, ALIEN is an associative, non-commutative operator algebra, with a co-commutative co-product satisfying the compatibility condition :

$$(A2.50) \quad \text{cop}(\mathbf{Op} \mathbf{Opp}) = \text{cop}(\mathbf{Op})\text{cop}(\mathbf{Opp}).$$

A structure such as this is often called a *bi-algebra*, and the dual structure is a *commutative algebra* upon which the original operator algebra acts in a natural way. We shall denote PSEUDO the dual of ALIEN and refer to its elements as “pseudovariables”.

Let $\Delta = \sum \Delta_\omega$ be an alien derivation whose graded components Δ_ω generate ALIEN. To the corresponding “basis” of ALIEN :

$$(A2.51) \quad \{\Delta_\omega := \Delta_{\omega_1, \dots, \omega_r} := \Delta_{\omega_r} \cdots \Delta_{\omega_1} ; \text{ with } r \in \mathbf{N}^* ; \omega_i \in \mathbf{R}^+\}$$

there answers a dual “basis” of PSEUDO :

$$(A2.52) \quad \{Z^\omega := Z^{\omega_1, \dots, \omega_r} ; \text{ with } r \in \mathbf{N}^* ; \omega_i \in \mathbf{R}^+\}$$

with a natural multiplication :

$$(A2.53) \quad Z^{\omega'} Z^{\omega''} = \sum_{\omega} Z^\omega \quad (\omega \in \text{sh}(\omega', \omega''))$$

which mirrors the co-product :

$$(A2.54) \quad \text{cop}(\Delta_\omega) = \sum_{\omega', \omega''} \Delta_{\omega'} \otimes \Delta_{\omega''} \quad (\omega \in \text{sh}(\omega', \omega''))$$

($\text{sh}(\omega', \omega'')$) is the set of all sequences ω obtained by *shuffling* two sequences ω' and ω'').

We have a natural action of ALIEN on PSEUDO :

$$(A2.55) \quad \Delta_{\omega_0} Z^{\omega_1, \dots, \omega_r} = Z^{\omega_2, \dots, \omega_r} \quad \text{if } \omega_0 = \omega_1 \quad (\text{resp. } = 0 \text{ if } \omega_0 \neq \omega_1)$$

and there is also an action on PSEUDO of the natural derivation $\hat{\partial}$:

$$(A2.56) \quad \hat{\partial} Z^{\omega_1, \dots, \omega_r} = (\omega_1 + \dots + \omega_r) Z^{\omega_1, \dots, \omega_r}$$

which mirrors the commutation rules :

$$(A2.57) \quad [\hat{\partial}, \Delta_\omega] = \omega \Delta_\omega ; \quad [\hat{\partial}, \Delta_\omega] = \|\omega\| \Delta_\omega.$$

The space AVER of uniformizing averages.

A *uniformizing average* \mathbf{m} may be viewed :

(*) *either as a path-weightage*, i.e. as a set-additive fonction on the set of *all integration paths* Γ that follow the real half-axis \mathbf{R}^+ laterally, crossing it only at well-specified points.

(**) or as a uniformizing projection of the space RESUR(int) of locally integrable, *ramified* analytic functions over \mathbf{R}^+ into the space UNIF(int) of locally integrable, *uniform* functions on \mathbf{R}^+ .

Let us start with the first view-point. As long as we work with a given algebra RESUR($\mathbf{R}^+//\Omega$), relative to a fixed semi-group :

$$(A2.58) \quad \Omega = \{0; \eta_1 = \omega_1; \eta_2 = \omega_1 + \omega_2; \eta_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3; \dots\} \subset \mathbf{R}^+$$

we need only consider whether an integration path Γ makes a right or left half-turn around the i -th point η_i , in which case we set $\varepsilon_i = +$ or $-$ respectively.

Accordingly, a *path weightage* \mathbf{m} must allot a definite weight $\mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r}$ to the class of all integration paths Γ which share the same (initial) crossing pattern $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$. *Set-additivity* imposes the condition :

$$(A2.59) \quad \sum_{\varepsilon_r = \pm} \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} = \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{r-1}, \varepsilon_{r-1}}$$

and *compatibility with the natural embeddings* :

$$(A2.60) \quad \text{RESUR}(\mathbf{R}^+//\Omega_1) \subset \text{RESUR}(\mathbf{R}^+//\Omega_2) \quad \text{if } \Omega_1 \subset \Omega_2$$

imposes the further condition :

$$(A2.61) \quad \sum_{\varepsilon_j = \pm} \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} = \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \omega_j + \omega_{j+1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} \quad (\forall j < r).$$

Thus, we may think of a *uniformizing average* \mathbf{m} as a path weightage defined by *scalar weights* :

$$(A2.62) \quad \mathbf{m}^{\varpi} = \mathbf{m}^{\varpi_1, \dots, \varpi_r} = \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} \quad (\omega_j > 0 ; \varepsilon_j \in \{+, -\})$$

subject to the self-consistency constraints (A2.59), (A2.61).

But \mathbf{m} can also be interpreted as a *uniformizing projection* :

$$(A2.63) \quad \hat{\varphi} \in \text{RESUR}(\text{int}) \rightarrow \mathbf{m}\hat{\varphi} \in \text{UNIF}(\text{int})$$

$$(A2.64) \quad \hat{\varphi} \mapsto (\mathbf{m}\hat{\varphi})(\zeta) = \sum \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} \hat{\varphi}(\zeta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r})$$

with a sum \sum extending to all 2^r points $\zeta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r}$ on $\mathbf{R}^+//\Omega$ and over ζ .

We have in particular the *right-lateral* (resp. *left-lateral*) average \mathbf{mur} (resp. \mathbf{mul}), whose entire mass lies on the right-most (resp. left-most) branches :

$$(A2.65) \quad \mathbf{mur}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} = 1 \quad \text{if } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_r = + \quad (\text{resp.} = 0 \text{ otherwise})$$

$$(A2.66) \quad \mathbf{mul}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} = 1 \quad \text{if } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_r = - \quad (\text{resp.} = 0 \text{ otherwise}).$$

Despite being totally trivial, **mur** and **mul** are essential stepping stones in the study of uniformizing averages **m**. Indeed, they generate all **m** through post-composition with *alien operators* $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$.

Before proceeding any further, we must introduce the space RAMIF (which we may informally describe as containing all *forward-ramified functions over \mathbf{R}^+ , without any analyticity assumptions*) and a dual space RAMIF*. The reasons for so doing are many :

(i) we want to free *convolution* from the shackles of analyticity and analytic continuation, and exhibit an (interesting and canonical) *global convolution* on the space of ramified functions.

(ii) we want to streamline the notion of uniformization; more precisely, since the *target space* UNIF for uniformizing averages *cannot* consist of cohesive functions (i.e. functions “of one piece” - analytic or quasianalytic), we want to immerse the *source space* RESUR into a larger space RAMIF more congruent with the nature of UNIF and consisting, like UNIF, of non-cohesive functions.

(iii) we want to connect any two *uniformizing averages* **m**₁ and **m**₂ by an operator $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$ acting internally on the *source space*, and this too calls for an extension and “de-cohesification” of RESUR.

(iv) we want to replace the *alien operators proper*, which do not commute with the natural derivation $\hat{\partial}$, by “*stationary alien operators*”, which do commute with $\hat{\partial}$ and involve no “*point translations*” but only stationary “*branch reshuffles*”.

(v) we want to have a source space capacious enough to accommodate the so-called “ramified Diracs” (A2.79) which are highly convenient for characterizing most operations on ramified functions.

The convolution algebras $\mathbf{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\Omega)$.

For any fixed semi-group $\Omega \subset \mathbf{R}^+$ with *points* η_i and *increments* ω_i :

$$(A2.67) \quad \Omega = \{0; \eta_1 = \omega_1; \eta_2 = \omega_1 + \omega_2; \eta_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3; \dots\}$$

we denote by $\mathbf{R}^+//\Omega$ the connected topological space consisting of *one branch* over $[0, \eta_1]$, *two branches* over $[\eta_1, \eta_2] \dots, 2^j$ branches over $[\eta_j, \eta_{j+1}]$. Each one of the branches over $[\eta_j, \eta_{j+1}]$ is distinguished by its *address* $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$, consisting of + or - signs ε_i , but is regarded as homeomorphic to its base interval. The two branches with addresses $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j, +)$ and $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j, -)$ are viewed as the *right* and *left continuation* of the branch with address $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$, the end point of the latter being identified with the starting point of the former :

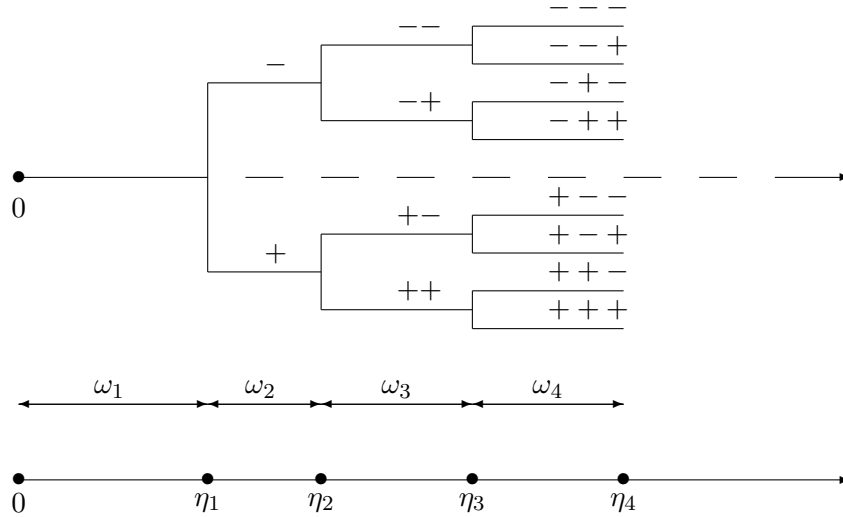


figure 2

(A2.68)

We have a natural inclusion :

$$(A2.69) \quad \text{RESUR}(\mathbf{R}^+//\Omega; \text{int}) \subset \text{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\Omega; \text{int})$$

of the space of locally integrable resurgent functions over \mathbf{R}^+ with singularities over Ω into the space $\text{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\Omega; \text{int})$ of locally integrable functions on $\mathbf{R}^+//\Omega$ (analytic or not). Moreover, relative to the topology of *uniform convergence on compact sets* (on $\mathbf{R}^+//\Omega$), the above inclusion is dense, and the convolution product $\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2$ on $\text{RESUR}(\mathbf{R}^+//\Omega; \text{int})$ is continuous in both arguments. This automatically induces a convolution on the space $\text{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\Omega; \text{int})$, which is still commutative-associative but which, *due to non-cohesiveness*, can no longer be deduced from *the local definition* (A2.7) *supplemented by analytic continuation*, but has to be expressed *globally*, by an integral of the form :

$$(A2.70) \quad (\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2)(\zeta) = \int C_{\zeta}^{\zeta_1, \zeta_2}(\Omega) \hat{\varphi}_1(\zeta_1) \hat{\varphi}_2(\zeta_2) d\zeta_1$$

$$(A2.70') \quad \zeta_1, \zeta_2, \zeta \in \mathbf{R}^+//\Omega ; \zeta_1 + \zeta_2 = \zeta ; 0 < \zeta_1 < \zeta ; 0 < \zeta_2 < \zeta.$$

Here, ζ_1, ζ_2, ζ are points of $\mathbf{R}^+//\Omega$ with projections $\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dot{\zeta}$ on \mathbf{R}^+ . The well-defined “structure tensor” $C_{\zeta}^{\zeta_1, \zeta_2}(\Omega)$ is *locally constant* in its three variables ; assumes *whole values* only (positive or negative) ; and vanishes unless $\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_2 = \dot{\zeta}$. Integration in (A2.70) is thus over a *compact set*, and makes sense as soon as $\hat{\varphi}_1$ and $\hat{\varphi}_2$ are locally integrable. For further information on the “structure tensor”, see § A4. **The inductive limit RAMIF and projective limit RAMIF*.**

For any pair $\Omega_1 \subset \Omega_2$ of comparable semi-groups, we have an obvious “embedding” of the smaller into the larger space :

$$(A2.71) \quad \begin{cases} embed : \text{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\Omega_1; \text{int}) \rightarrow \text{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\Omega_2; \text{int}) \\ \hat{\varphi}_1(\zeta_1) \rightarrow \hat{\varphi}_2(\zeta_2) := \hat{\varphi}_1(\zeta_1) \text{ for any } \zeta_1 \text{ under } \zeta_2 \quad (\zeta_i \in \mathbf{R}^+//\Omega_i) \end{cases}$$

and also a natural “collapse” of the larger into the smaller space :

$$(A2.72) \quad \begin{cases} coll : \text{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\Omega_2; \text{int}) \rightarrow \text{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\Omega_1; \text{int}) \\ \hat{\varphi}_2(\zeta_2) \rightarrow \hat{\varphi}_1(\zeta_1) := \sum \hat{\varphi}_2(\zeta_2) \text{ for all } \zeta_2 \text{ above } \zeta_1 \quad (\zeta_i \in \mathbf{R}^+//\Omega_i). \end{cases}$$

Clearly, *embed* and *coll* are *not* reciprocal maps and, considering larger and larger semi-groups Ω , we get two quite distinct limits, *inductive* and *projective* :

$$(A2.73) \quad \text{RAMIF}(\mathbf{R}^+; \text{int}) := \underset{(embed; \Omega)}{ind.lim} \text{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\Omega; \text{int})$$

$$(A2.74) \quad \text{RAMIF}^*(\mathbf{R}^+; \text{int}) := \underset{(coll; \Omega)}{proj.lim} \text{RAMIF}(\mathbf{R}^+//\Omega; \text{int})$$

with an obvious “duality”. For instance, the scalar product :

$$(A2.75) \quad \hat{\varphi}, \hat{\psi} \rightarrow (\hat{\varphi}, \hat{\psi}) := \int_{\mathbf{R}^+//\Omega} \hat{\varphi}(\zeta) \hat{\psi}(\zeta) d\zeta$$

is well-defined for $\hat{\varphi}$ in $\text{RAMIF}(\mathbf{R}^+; L_q - \text{int})$ and $\hat{\psi}$ in $\text{RAMIF}^*(\mathbf{R}^+; L_q - \text{int})$. The integral (A2.75) may be calculated on *any* space $\mathbf{R}^+//\Omega$ where $\hat{\varphi}(\zeta)$ is *uniform*, and the result won't depend on the choice of Ω .

Moreover, since *embed* (but not *coll*) respects convolution, the *inductive limit* RAMIF (contrary to the projective limit RAMIF^*) is *endowed with a natural convolution* *.

A function $\hat{\varphi}$ in RAMIF is known as soon as its restriction to one *large enough* space $\mathbf{R}^+//\Omega$ is known. By contrast, to know an element $\hat{\psi}$ of RAMIF^* , we must define its restriction to *each* space $\mathbf{R}^+//\Omega$, i.e. we must specify the values :

$$(A2.76) \quad \hat{\psi}(\zeta^{\omega_1, \varepsilon_1, \omega_2, \varepsilon_2, \dots, \omega_r, \varepsilon_r}) \quad (\omega_i \in \mathbf{R}^+; \varepsilon_i \in \{+, -\})$$

which $\hat{\psi}(\zeta)$ assumes on the branch of address $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ over the interval $[\eta_r, \eta_{r+1}] = [\omega_1 + \dots + \omega_r, \omega_1 + \dots + \omega_{r+1}]$. Moreover, these values must be consistent with invariance under the *collapse* :

$$(A2.77) \quad \sum_{\varepsilon_j = \pm} \hat{\psi}(\zeta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r}) = \hat{\psi}(\zeta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \omega_j + \omega_{j+1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \omega_r, \varepsilon_r}) \quad (\forall j < r)$$

$$(A2.78) \quad \sum_{\varepsilon_r = \pm} \hat{\psi}(\zeta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r}) = \hat{\psi}(\zeta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_{r-1}, \varepsilon_{r-1}).$$

Harking back to the “self-consistency” constraints (A2.42-43) and (A2.59-61), we see at once that the *weights* of an *alien operator* \mathbf{Op} or *uniformizing average* \mathbf{m} are nothing but *special elements* of RAMIF^* .

Ramified Diracs and their convolution product.

If we consider *measures* on $\mathbf{R}^+//\Omega$, we may define “ramified Diracs” :

$$(A2.79) \quad \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r, \omega'_{r+1}} \quad (\omega_1 > 0; \dots; \omega_r > 0; \omega_{r+1} > \omega'_{r+1} \geq 0; \varepsilon_j \in \{+, -\})$$

of unit mass concentrated at the point $\omega_1 + \dots + \omega'_{r+1}$ (or rather *immediately after* that point, to allow for the case $\omega'_{r+1} = 0$) on the branch of address $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$. Under the natural embedding (A2.71), these atomic measures automatically induce, on any space $\mathbf{R}^+//\Omega'$ more ramified than $\mathbf{R}^+//\Omega$, new measures, which are no longer atomic, but rather sums of atoms, due to the self-consistency relations :

$$(A2.80) \quad \sum_{\varepsilon_j = \pm} \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r, \omega_{r+1}} = \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_j + \omega_{j+1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \omega_{r+1}} \quad (\forall j \leq r).$$

The locally integrable functions being dense within the space of measures (for the weak topology), their own convolution extends to the ramified Diracs.

LEMMA (A2.80). *The convolution of ramified Diracs is entirely deducible from the rules :*

$$(A2.81) \quad \delta^{\omega_1} * \delta^{\omega_2} = \delta^{\omega_1 + \omega_2}$$

$$(A2.82) \quad \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} * \delta^{\omega_{r+1}} = \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r, \omega_{r+1}}$$

and from the *symmetrelness* of the mould $R\delta^\bullet$ constructed from the *right-lateral Diracs* :

$$(A2.83) \quad R\delta^{\omega_1, \dots, \omega_r} := (-1)^r \delta^{\omega_1, +, \omega_2, +, \dots, \omega_r, +}$$

or, equivalently, from the *symmetrelness* of the mould $L\delta^\bullet$ constructed from the *left-lateral Diracs* :

$$(A2.84) \quad L\delta^{\omega_1, \dots, \omega_r} := (-1)^r \delta^{\omega_1, -, \omega_2, -, \dots, \omega_r, -}.$$

Indeed, (A2.82) enables us to eject the last index ω_{r+1} from the general ramified Dirac (A2.79) and the self-consistency relations (A2.80) make it possible to decompose any ramified Dirac (pruned of its last index) into a sum of right or left-lateral Diracs. For the precise work-out, see § A4. In the most elementary cases, we get :

$$\begin{aligned} \delta^{\omega_1, +} * \delta^{\omega_2, +} &\equiv \delta^{\omega_1, +, \omega_2, +} - \delta^{\omega_2, -, \omega_1, +} \equiv \delta^{\omega_2, +, \omega_1, +} - \delta^{\omega_1, -, \omega_2, +} \\ \delta^{\omega_1, +} * \delta^{\omega_2, -} &\equiv \delta^{\omega_1, +, \omega_2, -} + \delta^{\omega_2, -, \omega_1, +} \end{aligned}$$

REMARK (A2.85). The ramified Diracs should be viewed as (measure-valued) elements of RAMIF , not RAMIF^* . Indeed, the values (A2.76) of a function $\hat{\psi}$ in RAMIF^* may be regarded as scalar products of type (A2.75) with $\hat{\varphi} = \delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r, \omega_{r+1}}$.

REMARK (A2.86). The convolution algebra spanned by the *ramified Diracs*, after quotientation by the ideal generated by the *unramified Diracs* δ^{ω_0} , becomes isomorphic to the multiplicative algebra of pseudovarieties, under the canonical correspondance :

$$(A2.87) \quad R\delta^{\omega_1, \dots, \omega_r} \rightarrow RZ^{\omega_1, \dots, \omega_r}$$

$$(A2.88) \quad LZ^{\omega_1, \dots, \omega_r} \rightarrow LZ^{\omega_1, \dots, \omega_r}$$

with the pseudovariables $RZ^{\omega_1, \dots, \omega_r}$ (resp. $LZ^{\omega_1, \dots, \omega_r}$) orthogonal to **Rul** (resp. **Lur**).

Proper and stationary alien operators.

There are two ways in which ALIEN can act on RAMIF : the *proper action* and the *stationary action*. The quickest definition is to show how they affect the ramified Diracs :

DEFINITION (A2.89). *Proper action of an alien operator* **Op**.

$$\mathbf{Op}(\delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r, \omega_{r+1}}) := \sum_{0 \leq j \leq r} \mathbf{Op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_j, \varepsilon_j} \delta^{\omega_{j+1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \omega_{r+1}}.$$

DEFINITION (A2.90). *Stationary action of an alien operator* **op**

$$\mathbf{op}(\delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r, \omega_{r+1}}) := \sum_{0 \leq j \leq r} \mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_j, \varepsilon_j} \delta^{\omega_1 + \dots + \omega_j} * \delta^{\omega_{j+1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \omega_{r+1}}.$$

To tell them apart, *proper alien operators* will henceforth be capitalized (**Op**, **Lur**, **Rul**, **Dun**, etc...), while their stationary counterparts will be written small (**op**, **lur**, **rul**, **dun**, etc...).

The *proper action* of ALIEN is simply the natural extension, by density, of ALIEN's proper (and only) action on RESUR. It involves *backward translations* and *doesn't commute with the natural derivation* $\hat{\partial}$.

The *stationary action* has no equivalent on RESUR ; it involves *no translations* (due to convolution by $\delta^{\omega_1 + \dots + \omega_j}$ in (A2.90)) but only a *reshuffling of branches* ; and it *commutes with the natural derivation* $\hat{\partial}$.

There is yet another difference : whereas a *proper alien operator* $\mathbf{Op} = \sum \mathbf{Op}_\omega$ with an infinity of graded components can be made to act only on *strict subspaces* of RESUR or RAMIF, the corresponding *stationary operator* $\mathbf{op} = \sum \mathbf{op}_\omega$ acts, quite unproblematically, on the whole of RAMIF.

The price to pay for these improvements is, of course, the surrender of cohesiveness.

Uniformizing averages and connection automorphisms.

The uniformizing averages **m** were interpreted in (A2.64) as projections of RESUR *into* UNIF. By density, they induce projections of RAMIF *onto* UNIF, which are best described in terms of their action on the ramified Diracs :

$$(A2.91) \quad \mathbf{m}(\delta^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r, \omega_{r+1}}) = \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} \delta^{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{r+1}}.$$

But the chief gain of working with RAMIF rather than RESUR is that any two averages **m**₁ and **m**₂ may now be connected by a well-defined endomorphism $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$, which is a *stationary alien operator*, whose weights are determined by those of **m**₁ and **m**₂, with the usual order reversal :

$$(A2.93) \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{m}_2^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} = \sum_{0 \leq j \leq r} \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_j, \varepsilon_j} \mathbf{m}_1^{\omega_{j+1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \omega_r, \varepsilon_r}.$$

Note the presence of empty sequences \emptyset , in the above sum, for $j = 0$ or r . Note, too, that under the induction (A2.93), the self-consistency relations (A2.59) (A2.61) for the weights of **m**₁ and **m**₂ automatically ensure the self-consistency relations (A2.42) (A2.43) for the alien operator $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$.

Thus we find :

$$(A2.94) \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{array} \right)^\emptyset \equiv 1 ; \quad \left(\begin{array}{c} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{array} \right)^{\omega_1, \varepsilon_1} \equiv \mathbf{m}_2^{\omega_1, \varepsilon_1} - \mathbf{m}_1^{\omega_1, \varepsilon_1} \\ \left(\begin{array}{c} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{array} \right)^{\omega_1, \varepsilon_1, \omega_2, \varepsilon_2} \equiv \mathbf{m}_2^{\omega_1, \varepsilon_1, \omega_2, \varepsilon_2} - \mathbf{m}_2^{\omega_1, \varepsilon_1} \mathbf{m}_1^{\omega_2, \varepsilon_2} + \mathbf{m}_1^{\omega_1, \varepsilon_1} \mathbf{m}_1^{\omega_2, \varepsilon_2} - \mathbf{m}_1^{\omega_1, \varepsilon_1, \omega_2, \varepsilon_2} \end{array} \right.$$

etc... In particular, the connection operators between the right-lateral and left-lateral averages **mur** and **mul** are none other than the stationary alien operators **rul** and **lur** associated with **Rul** and **Lur** :

$$(A2.95) \quad \mathbf{rul} = \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{lur} = \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}.$$

More generally, the induction (A2.93) shows that the operators connecting a general average **m** to the left or right-lateral average **mul** or **mur**, have simple right or left-lateral weights (mark the inversion !) :

$$(A2.96) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}^{\omega_1, +, \dots, \omega_r, +} = \mathbf{m}^{\omega_1, +, \dots, \omega_r, +}$$

$$(A2.97) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}^{\omega_1, -, \dots, \omega_r, -} = \mathbf{m}^{\omega_1, -, \dots, \omega_r, -}.$$

In combination with the self-consistency rules (A2.59), (A2.61), this readily yields the other weights, for arbitrary sign sequences.

Reductions of ALIEN. Active alien algebras.

For any integer ν , let $\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]]$ be the algebra of formal power series in x_1, \dots, x_ν with coefficients in \mathbf{C} , and let

$$(A2.62) \quad E_\nu := \text{Endo } \mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]]$$

be the bialgebra of *all* linear endomorphisms of $\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]]$, including the *derivations*, *automorphisms*, etc... E_ν has a natural topology, a natural gradation, a natural product and coproduct - just like ALIEN - but it is far “smaller” than ALIEN. So it makes much sense to consider the “reductions” of ALIEN, i.e. the continuous homomorphisms of the graded bialgebra ALIEN into the graded bialgebras E_ν . Note that a *reduction* has to respect the *full structure*. In concrete terms, it can be defined as follows :

Fix any *alien derivation* $\Delta = \sum \Delta_\omega$ whose graded components Δ_ω generate ALIEN. Any *reduction* *red* of ALIEN into E_ν is fully determined as soon as we specify the images $\text{red}(\Delta_\omega)$ for all ω in \mathbf{R}^+ . Only a countable number of $\text{red}(\Delta_\omega)$ may differ from 0, for indexes ω running through a finitely generated semi-group Ω :

$$(A2.98) \quad \Omega = \lambda_1 \mathbf{N} \oplus \lambda_2 \mathbf{N} \oplus \dots \oplus \lambda_\nu \mathbf{N} \quad (\lambda_i \in \mathbf{R}^+)$$

$$(A2.99) \quad \omega = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + \dots + n_\nu \lambda_\nu \quad (n_i \in \mathbf{N})$$

and these non-vanishing $\text{red}(\Delta_\omega)$ must be of the form :

$$(A2.100) \quad \text{red}(\Delta_\omega) \equiv x^{n(\omega)} \left\{ A_\omega^1 x_1 \partial_{x_1} + \dots + A_\omega^\nu x_\nu \partial_{x_\nu} \right\}$$

$$(A2.100 \text{ bis}) \quad A_{\omega}^i \in \mathbf{C} ; x^{n(\omega)} := x_1^{n_1(\omega)} x_2^{n_2(\omega)} \dots x_{\nu}^{n_{\nu}(\omega)}$$

with arbitrary constants A_{ω}^i and an arbitrary additive function $\omega \rightarrow n(\omega)$ of $\mathbf{\Omega}$ into \mathbf{N}^{ν} . The above information then enables one to construct the image $\text{red}(\mathbf{Op})$ of any operator \mathbf{Op} , simply by using its expansion as a series of products $\Delta_{\omega_r} \dots \Delta_{\omega_1}$.

Of course, a reduction *red* turns any *alien derivation* into an *ordinary* (first order) *partial derivation*, and any *alien automorphism* into a *substitution automorphism* F of $\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_{\nu}]]$:

$$(A2.101) \quad F : \varphi(x_1, \dots, x_{\nu}) \rightarrow \varphi(f_1(x_1, \dots, x_{\nu}), \dots, f_{\nu}(x_1, \dots, x_{\nu})).$$

What makes *reductions* so important is this. Consider some fixed resurgence algebra $A \subset \text{RESUR}$ generated by one or several resurgent functions of natural origin and their alien derivations. Then consider the ideal $\text{nil}(A) \subset \text{ALIEN}$ of all alien operators which annihilate A . The quotient :

$$(A2.102) \quad \text{act}(A) = \text{ALIEN}/\text{nil}(A)$$

deserves to be called the *active alien algebra* of A because, as far as their action on A is concerned, alien operators behave as members, not of the *huge* and *free* algebra ALIEN , but of the much *smaller* and *far-from-free* algebra $\text{act}(A)$.

Now, in practically all instances of *natural resurgence* known so far, the active algebra $\text{act}(A)$ turns out to be isomorphic to some reduction $\text{red}(\text{ALIEN})$. So we might say that, in actual life, ALIEN usually *makes itself felt at one remove only* - through its various reductions. But this applies only when we focus on a *particular problem*, and it would be quite wrong to completely forget about ALIEN , because only this universal algebra can give us a conceptual command of the *general situation*.

Materializations of PSEUDO. Resurgence monomials.

The pseudovariabes in PSEUDO are *symbols* which may be *added*, *multiplied*, and subjected to *alien* or *ordinary differentiation*. Accordingly, a *materialization* of PSEUDO means a homomorphism *mat* of PSEUDO into RESUR , i.e. a map which changes the “symbolic” *pseudovariabes* into solid *resurgent functions*, while respecting the full structure - or very nearly so.

Fix, once more, an alien derivation $\Delta = \sum \Delta_{\omega}$ whose graded components Δ_{ω} generate ALIEN and, as in (A2.52), consider the pseudovariabes $Z^{\omega_1, \dots, \omega_r}$ *orthogonal* to Δ . Then a *materialization* :

$$(A2.103) \quad \text{mat} : \text{PSEUDO} \rightarrow \text{ALIEN}$$

is defined by assigning images to these pseudovariabes :

$$(A2.104) \quad \text{mat} : Z^{\omega_1, \dots, \omega_r} \rightarrow \tilde{U}^{\omega_1, \dots, \omega_r}(z) \in \text{RESUR} \text{ (formal model).}$$

The “*resurgent monomials*” \tilde{U}^{ω} must multiply according to :

$$(A2.105) \quad \tilde{U}^{\omega^1}(z) \tilde{U}^{\omega^2}(z) = \sum_{\omega \in \text{sh}(\omega^1, \omega^2)} \tilde{U}^{\omega}(z) \text{ (formal model)}$$

$$(A2.106) \quad (\hat{U}^{\omega^1} * \hat{U}^{\omega^2})(\zeta) = \sum_{\omega \in \text{sh}(\omega^1, \omega^2)} \hat{U}^{\omega}(\zeta) \text{ (convolutive model)}$$

and their *alien derivatives* must be given by :

$$(A2.107) \quad \Delta_{\omega_0} \mathcal{U}^{\omega_1, \dots, \omega_r} = \mathcal{U}^{\omega_2, \dots, \omega_r} \text{ if } \omega_0 = \omega_1 \text{ (resp } = 0 \text{ if } \omega_0 \neq \omega_1).$$

Only the action (A2.56) of the natural z -differentiation cannot be faithfully reproduced, for that would compel the resurgent monomials $\tilde{U}^\omega(z)$ to be mere exponentials - which of course, as elements of RESUR (formal model), *they cannot be*. So we must relax (A2.56) and be content with relations of the form :

$$(A2.108) \quad \partial_z \tilde{U}^\omega(z) = \sum \tilde{U}^{\omega^1}(z) \tilde{U}^{\omega^2}(z) \quad (\omega^1 \omega^2 = \omega)$$

short for :

$$(A2.109) \quad \partial_z \tilde{U}^{\omega_1, \dots, \omega_r}(z) = \sum \tilde{U}^{\omega_1, \dots, \omega_j}(z) \tilde{U}^{\omega_{j+1}, \dots, \omega_r}(z) \quad (0 \leq j \leq r)$$

with well-defined “resurgence constants” $\tilde{U}^\omega(z)$, i.e. plain *convergent power series* of z^{-1} (all of whose alien derivatives vanish).

The $\tilde{U}^\omega(z)$ are dubbed “*resurgence (or : resurgent) monomials*”, because they behave as elementarily under alien differentiation as ordinary monomials do under ordinary differentiation. They are of prime importance to (integral) “*alien calculus*” and “*object synthesis*”.

REMARK (A2.110). Once a materialization $Z^\omega \rightarrow \tilde{U}^\omega$ is known, all other *materializations* $Z^\omega \rightarrow \tilde{W}^\omega$ may be derived from it by *mould multiplication* :

$$(A2.111) \quad \tilde{W}^\omega(z) = \sum_{\omega^1 \omega^2 = \omega} \tilde{U}^{\omega^1}(z) \tilde{C}^{\omega^2}(z)$$

with *resurgence constants* \tilde{C}^ω that must obey the same multiplication rule (A2.105) as \tilde{U}^ω and \tilde{W}^ω .

REMARK (A2.112). We shouldn’t lament the impossibility for *materializations* to completely respect the action of the natural differentiation, for it is alien differentiation which matters most in this context. Nor should we worry about the relations (A2.108) while constructing a materialization, because these relations are automatic consequences of the rules (A2.105) for *multiplication* and of the rules (A2.107) for *alien differentiation*. That said, the precise knowledge of the *resurgence constants* $\tilde{U}^\omega(z)$ attached to a given materialization (under (A2.108)) is essential in all problems of “object synthesis”. (See § D4, § D5 and chap. F.)

A3. Some highly desirable properties that one may look for in a uniformizing average ; an alien derivation ; or a family of resurgent monomials. Conflicting nature of the main demands.

Leaving aside the pseudovariabes, which are mere symbols, we have so far come across four classes of objects with genuine analytic substance, namely :

- (**Auto**) *alien automorphisms* : RAMIF \rightarrow RAMIF
- (**Deri**) *alien derivations* : RAMIF \rightarrow RAMIF
- (**Aver**) *uniformizing averages* : RAMIF \rightarrow UNIF
- (**Mono**) *materializations of pseudovariabes (or systems of res. mono.)* :

All these objects bear directly on resummation theory, but they attain maximal usefulness only when vested with some additional properties, which may be regrouped under six headings :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{(P1) Multiplicativity} & \text{(P2) Realness} & \text{(P3) Proper growth} \\ \text{(P4) Scale invariance} & \text{(P5) Positivity} & \text{(P6) Splittability.} \end{array} \right.$$

Of these, properties P1, P2, P3 are the ones that really count, and any object that verifies them will be declared “*well-behaved*”. The remaining properties P4, P5, P6 matter only marginally, as a means of sorting out the finest among well-behaved objects.

These “desirable properties” are, unfortunately, somewhat difficult to reconcile - even the first three. Before explaining why, we must spell out their precise *meaning* and seek convenient *analytical criteria* for their fulfilment.

Auto₁ : *multiplicativity*.

A (stationary) alien operator **op** is an automorphism :

$$(A3.1) \quad \mathbf{op}(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2) \equiv \mathbf{op}(\hat{\varphi}_1) * \mathbf{op}(\hat{\varphi}_2) \quad (\forall \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \in \text{RAMIF})$$

if and only if the connection moulds $\langle \mathbf{op}, \mathbf{lur} \rangle^\bullet$ and $\langle \mathbf{op}, \mathbf{rul} \rangle^\bullet$:

$$(A3.2) \quad \langle \mathbf{op}, \mathbf{lur} \rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} := (-1)^r \mathbf{op}^{\omega_1, +, \dots, \omega_r, +}$$

$$(A3.3) \quad \langle \mathbf{op}, \mathbf{rul} \rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} := (-1)^r \mathbf{op}^{\omega_1, -, \dots, \omega_r, -}$$

are *symmetrel* (see § A6). In fact, due to (A2.48-49), if one is *symmetrel*, so is the other. Automorphisms are easy to inverse. Indeed, if

$$(A3.4) \quad \mathbf{op} \cdot \mathbf{opp} = 1 \quad (\mathbf{op} \text{ and } \mathbf{opp} \text{ automorphisms})$$

then the connection moulds are simply exchanged, with a reversal of the indexing sequences :

$$(A3.5) \quad \langle \mathbf{op}, \mathbf{lur} \rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} \equiv \langle \mathbf{opp}, \mathbf{rul} \rangle^{\omega_r, \dots, \omega_1}.$$

In view of the self-consistency rules, this implies :

$$(A3.6) \quad \mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \omega_2 \varepsilon_2, \dots, \omega_{r-1}, \varepsilon_{r-1}, \omega_r, \varepsilon_r} \equiv \mathbf{opp}^{\omega_r, \bar{\varepsilon}_r, \omega_{r-1}, \bar{\varepsilon}_{r-1}, \dots, \omega_2, \bar{\varepsilon}_2, \omega_1, \bar{\varepsilon}_1}.$$

As usual, ε_i and $\bar{\varepsilon}_i$ denote opposite signs. Note that, in general, neither (A3.5) nor (A3.6) hold if the mutually inverse operators **op**, **opp** are *not* automorphisms.

Deri₁ : *multiplicativity*.

A (stationary) alien operator **op** is a derivation :

$$(A3.7) \quad \mathbf{op}(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2) \equiv (\mathbf{op} \hat{\varphi}_1) * \hat{\varphi}_2 + \hat{\varphi}_1 * (\mathbf{op} \hat{\varphi}_2)$$

if and only if the connection moulds $\langle \mathbf{op}, \mathbf{lur} \rangle^\bullet$ and $\langle \mathbf{op}, \mathbf{rul} \rangle^\bullet$, defined exactly as in (A3.2-3), are *alternel*. In fact, if one is *alternel*, so is the other.

Aver₁ : *multiplicativity*.

A uniformizing average \mathbf{m} is said to *respect convolution* if it acts as an algebra homomorphism of RAMIF into UNIF :

$$(A3.8) \quad \mathbf{m}(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2) \equiv (\mathbf{m}\hat{\varphi}_1) * (\mathbf{m}\hat{\varphi}_2) \quad (\forall \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \in \text{RAMIF}).$$

The trivial lateral averages **mur** and **mul** *do* respect convolution.

If two averages \mathbf{m}_1 and \mathbf{m}_2 respect convolution, then the connection operator $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$ is also a (convolution respecting) automorphism of RAMIF. Conversely, if $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$ respects convolution, and if one of the averages \mathbf{m}_i respects it too, so does the other.

In practical terms, the simplest way to check that an average \mathbf{m} respects convolution is to show that *one* (and therefor *all*) of the four basic *connection operators* :

$$(A3.9) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$$

is an automorphism. But in view of (**Auto₁**), this amounts to checking that *one* (and therefore all) of the eight basic *connection moulds* listed below are *symmetrical* :

$$(A3.10) \quad \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} = (-1)^r \mathbf{m}^{\omega_1, +, \dots, \omega_r, +} =: \mathbf{Rm}^{\omega_1, \dots, \omega_r}$$

$$(A3.11) \quad \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} = (-1)^r \mathbf{m}^{\omega_1, -, \dots, \omega_r, -} =: \mathbf{Lm}^{\omega_1, \dots, \omega_r}$$

$$(A3.12) \quad \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} = (-1)^{r-1} \mathbf{m}^{\omega_1, +, \dots, \omega_{r-1}, +, \omega_r, -}$$

$$(A3.13) \quad \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} = (-1)^{r-1} \mathbf{m}^{\omega_1, -, \dots, \omega_{r-1}, -, \omega_r, +}$$

$$(A3.14) \quad \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} = (-1)^r \mathbf{m}^{\omega_r, +, \dots, \omega_1, +}$$

$$(A3.15) \quad \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} = (-1)^r \mathbf{m}^{\omega_r, -, \dots, \omega_1, -}$$

$$(A3.16) \quad \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} = (-1)^{r-1} \mathbf{m}^{\omega_r, +, \dots, \omega_2, +, \omega_1, -}$$

$$(A3.17) \quad \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{\omega_1, \dots, \omega_r} = (-1)^{r-1} \mathbf{m}^{\omega_r, -, \dots, \omega_2, -, \omega_1, +}$$

Of these, the first two moulds, \mathbf{Rm}^\bullet and \mathbf{Lm}^\bullet , are of special importance. They are called the *right* and *left-lateral moulds*, and are connected under the involution :

$$(A3.18) \quad \mathbf{Lm}^\bullet = ((\mathbf{Rm}^\bullet) \circ (1^\bullet + I^\bullet)^{-1}) \times (1^\bullet + I^\bullet)^{-1} \quad (\text{see } \S \text{ A6})$$

$$(A3.19) \quad \mathbf{Rm}^\bullet = ((\mathbf{Lm}^\bullet) \circ (1^\bullet + I^\bullet)^{-1}) \times (1^\bullet + I^\bullet)^{-1} \quad (\text{see } \S \text{ A6})$$

which of course preserves symmetrelity (because mould multiplication and composition also preserve it, and because $(1^\bullet + I^\bullet)$ is itself symmetrel).

Mono₁ : *multiplicativity*.

For resurgent monomials $\tilde{U}^{\omega_1, \dots, \omega_r}$ orthogonal to an *alien derivation* Δ , the condition (A2.105) amounts to demanding that the mould \tilde{U}^\bullet be *symmetrel*. For monomials $\tilde{U}_r^{\omega_1, \dots, \omega_r}$ (or $\tilde{U}^{\ell^{\omega_1, \dots, \omega_r}}$) orthogonal to an *alien automorphism* like **Lur** (or **Rul**), multiplicativity amounts to demanding that the mould \tilde{U}_r^\bullet (or \tilde{U}^{ℓ^\bullet}) be *symmetrel*.

Auto₂, Deri₂, Aver₂ : Realness and its preservation.

Realness, for a function $\hat{\varphi}$ of RESUR or RAMIF, means assuming *real values* on the first branch (issuing at the origin) and *complex conjugate values* on conjugate branches, i.e. branches with addresses $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ and $(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_r)$. (As usual, ε_i and $\bar{\varepsilon}_i$ are opposite signs).

Preserving realness, for an alien operator **op**, is clearly equivalent to having pair-wise conjugate weights :

$$(A3.20) \quad \mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} = \text{conj}(\mathbf{op}^{\omega_1, \bar{\varepsilon}_1, \dots, \omega_r, \bar{\varepsilon}_r})$$

or, equivalently, conjugate lateral moulds :

$$(A3.21) \quad \langle \mathbf{op}, \mathbf{lur} \rangle^\bullet = \text{conj} \langle \mathbf{op}, \mathbf{rul} \rangle^\bullet \quad (\text{conj} = \text{complex conjugacy}).$$

A uniformizing average **m** *preserves realness* if it turns “real” (i.e. self-conjugate) elements of RESUR or RAMIF into real (in the ordinary sense) elements of UNIF. This clearly means :

$$(A3.22) \quad \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} = \text{conj}(\mathbf{m}^{\omega_1, \bar{\varepsilon}_1, \dots, \omega_r, \bar{\varepsilon}_r})$$

which is equivalent to :

$$(A3.23) \quad R\mathbf{m}^\bullet = \text{conj}(L\mathbf{m}^\bullet) \quad (\text{see (A3.10 – 11)})$$

or, more generally, to the pair-wise conjugacy of the eight moulds (A3.10-17) (for pairs equivalent under the exchange **mur** \leftrightarrow **mul**).

Whether we deal with *alien operators* or *uniformizing averages*, we must carefully distinguish the property of *respecting realness* (which means having pair-wise conjugate weights) and that of *having real weights* (which, in the absence of pair-wise conjugacy, carries no special significance).

Mono₂ : *Realness*.

A materialization **mat** of the pseudovariabls is said to be *real* if for *one* (and therefore *any real* basis $\{Z^{\omega_1, \dots, \omega_r}\}$ of PSEUDO (e.g. a basis orthogonal to a *realness-preserving* operator $\mathbf{op} = \sum \mathbf{op}_\omega$), the resurgence monomials **mat** ($Z^{\omega_1, \dots, \omega_r}$) are *real*.

Auto₃, Deri₃ : *Proper growth*.

To define “*absolute analyticity*” directly in ALIEN by imposing on the alien operators **op** the growth condition :

$$(A3.24) \quad |\mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r}| \leq C_0(C_1)^{\|\omega\|} \left(C_0, C_1 = \text{const}; \|\omega\| = \sum \omega_i \right)$$

would be totally unsuitable for applications, because far too restrictive. There is, however, a well-trying and quite satisfactory notion of *relative analyticity* in ALIEN, based on the notion of reduction. First, an internal operator on $\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]]$ is declared *analytic* if it respects the subalgebra $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$ of convergent power series. Then, for any two operators **op₁** and **op₂** in ALIEN, **op₂** is said to be *more*

analytic (in the inclusive sense of : *no less analytic*) than \mathbf{op}_1 if, under any reduction red of ALIEN into $E_\nu := \text{Endo}(\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]])$ $red(\mathbf{op}_2)$ is analytic as soon as $red(\mathbf{op}_1)$ is. Similarly, \mathbf{op}_1 and \mathbf{op}_2 are said to be *equianalytic* if, under any reduction, $red(\mathbf{op}_1)$ and $red(\mathbf{op}_2)$ are simultaneously analytic or non-analytic.

Now, for nearly all natural resurgence algebras $A \subset \text{RESUR}$, not only is the *active resurgence algebra* $act(A)$ isomorphic to some well-defined reduction $red(\text{ALIEN})$, but under that reduction the images $red(\mathbf{lur})$ and $red(\mathbf{rul})$ of the two basic alien automorphisms (“left-to-right” and “right-to-left”) are *analytic*. (Of course, if $red(\mathbf{lur})$ is analytic, so is $red(\mathbf{rul})$, since both are inverse *substitution automorphisms* of $\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_\nu]]$). So what matters in practice is the *relative analyticity* of an alien operator \mathbf{op} compared to the (equianalytic) pair \mathbf{lur} and \mathbf{rul} . Accordingly, we shall say that \mathbf{op} has *proper growth* if it is *more analytic* (i.e. *no less analytic*) than \mathbf{lur} or \mathbf{rul} .

Aver₃ : *Proper growth.*

We shall also say that a uniformizing average \mathbf{m} has *proper growth* if any one of the four connection automorphisms $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ - it doesn't matter which - *is more* (i.e. *no less*) *analytic* than the basic automorphisms $\mathbf{lur} = \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ and $\mathbf{rul} = \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$. More pictorially, if more vaguely, we may say that *proper growth* commits a uniformizing average to respecting the *lateral growth* of all natural resurgent functions $\hat{\varphi}(\zeta)$. It means, in particular, that whenever the right and left determinations $\mathbf{mur} \hat{\varphi}(\zeta)$ and $\mathbf{mul} \hat{\varphi}(\zeta)$ display (at most) exponential growth, so does the multipath average $\mathbf{m} \hat{\varphi}(\zeta)$ - even though, as is usually the case in non-linear problems, the function $\hat{\varphi}(\zeta)$ grows faster-than-exponentially on oft-crossing paths.

Mono₃ : *Proper growth.*

We say that a materialization \mathbf{mat} of PSEUDO into RESUR has *proper growth* if, for *one* (and so for *any*) *properly growing* (in the sense of **Deri₃**) alien derivation $\Delta = \sum \Delta_\omega$, \mathbf{mat} turns the pseudo-variables $Z^{\omega_1, \dots, \omega_r}$ orthogonal to Δ into resurgence monomials $\mathcal{U}_c^{\omega_1, \dots, \omega_r}$ that depend on a parameter c and admit uniform bounds of type :

$$(A3.25) \quad c_1 e^{\|\omega\|(c_2|z|+c_3-c)}/r! \quad (\text{multiplicative model})$$

$$(A3.26) \quad c_4 e^{\|\omega\|(c_5|\zeta|+c_6-c)}/r! \quad (\text{convolutive model}).$$

Here, $\|\omega\|$ is the *sum* $\sum \omega_i$ of the sequence ω and r is its *length*. The main, very stringent demand is of course *factorial decrease* in r . It is not whimsical, but meant *to ensure the actual convergence* (in the space of resurgent functions, and for large enough values of c) *of the formal solutions of resurgence equations* (or systems of such equations). We shall make these definitions more precise in § C5 and § D6 and construct several materializations - one of them *canonical* - that fulfill them. But for the moment we may observe that, although the notion of proper growth for materializations *builds* (in its very formulation) on the corresponding notion for alien operators, it also *adds* new and seemingly daunting requirements of its own.

Auto₄, Deri₄, Aver₄, Mono₄ : *Scale invariance.*

This is simply invariance under homothetical rescalings $\zeta \rightarrow t\zeta$ of \mathbf{R}^+ . For *alien operators* and *uniformizing averages* it means :

$$(A3.27) \quad \mathbf{op}^{t\omega_1, \varepsilon_1, \dots, t\omega_r, \varepsilon_r} \equiv \mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} \quad (\forall t > 0)$$

$$(A3.28) \quad \mathbf{m}^{t\omega_1, \varepsilon_1, \dots, t\omega_r, \varepsilon_r} \equiv \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r} \quad (\wp t \geq 0)$$

but for *resurgence monomials*, the only sensible definition must take into account both the parameter c and the variable z (or ζ) :

$$(A3.29) \quad \tilde{\mathcal{U}}_c^{t\omega_1, \varepsilon_1, \dots, t\omega_r, \varepsilon_r}(z) = \tilde{\mathcal{U}}_{tc}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r}(tz) \quad (\text{multiplicative model})$$

$$(A3.30) \quad \hat{\mathcal{U}}_c^{t\omega_1, \varepsilon_1, \dots, t\omega_r, \varepsilon_r}(\zeta) \equiv (1/t)\hat{\mathcal{U}}_{tc}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r}(\zeta/t) \quad (\text{convolutive model}).$$

Aver₅ : *Positiveness*.

Positiveness is specially relevant for uniformizing averages. There are actually two degrees : *weak* and *strong*. *Weak positiveness* simply means that all weights $\mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r}$ are ≥ 0 . *Strong positiveness* means that the (finite or infinite) coproducts of \mathbf{m} :

$$(A3.31) \quad \mathbf{m}(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2) \equiv \sum \Gamma^{j_1, j_2}(\mathbf{m}_{j_1} \hat{\varphi}_1) * (\mathbf{m}_{j_2} \hat{\varphi}_2)$$

$$(A3.32) \quad \mathbf{m}(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2 * \hat{\varphi}_3) \equiv \sum \Gamma^{j_1, j_2, j_3}(\mathbf{m}_{j_1} \hat{\varphi}_1) * (\mathbf{m}_{j_2} \hat{\varphi}_2) * (\mathbf{m}_{j_3} \hat{\varphi}_3)$$

etc... may be written down in such a way as to involve only (*weakly*) *positive* averages \mathbf{m}_{j_n} . We may note that the positiveness of the basic, second-order coproduct (A3.31) is not enough. But itself, it doesn't guarantee the positiveness of higher-order coproducts. For a *convolution-respecting average*, in view of (A3.8), being *weakly positive* is clearly the same as being *strongly so*, but otherwise there is a chasm between the two notions.

Auto₆, Deri₆, Aver₆ : *Splittability and secability*.

These notions make sense only in relation to a *fixed* ramified space $\mathbf{R}^+//\Omega$. We shall assume $\Omega = \mathbf{N}$ for simplicity and follow the convention (see § A4) of dropping the unit increments ($\omega_i \equiv 1$) when writing down the weights. We then have four basic shift operators att^\pm (*attach* \pm) and det^\pm (*detach* \pm) acting on ALIEN in this way :

$$(A3.33) \quad (att^{\varepsilon_0} \mathbf{op})^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} = \mathbf{op}^{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} \quad (\varepsilon_i = \pm)$$

$$(A3.33') \quad (det^{\varepsilon_0} \mathbf{op})^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} = \mathbf{op}^{\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r} \quad \text{if } \varepsilon_0 = \varepsilon_1 \text{ (resp. } 0 \text{ if } \varepsilon_0 \neq \varepsilon_1)$$

$$(A3.33'') \quad (det^{\varepsilon_0} \mathbf{op})^\emptyset = 0.$$

The action on AVER, or rather $\mathbf{C} \times \text{AVER}$, obeys the same rules, except that (A3.33'') must be replaced by $(det^{\varepsilon_0} \mathbf{m})^\emptyset = \mathbf{m}^\emptyset$ for consistency. *Shift operators* are simply polynomials in att^\pm and det^\pm . Apart from the very special shifts :

$$(A3.34) \quad (det^+ - det^-)det^{\varepsilon_r - 1} \dots det^{\varepsilon_1}$$

which amount to postcomposition by an elementary alien operator, shifts usually do not preserve the finiteness of the coproduct. But whenever an alien operator \mathbf{op} or uniformizing average \mathbf{m} and *all its shifts* (or at least *one* of them, not of the special form (A3.34)) have finite coproducts, we say that \mathbf{op} or \mathbf{m} is *splittable*. *Secability* is a weakened form of splittability, relative to the shifts $att^+ det^+$ and $att^- det^-$.

Aver₇ : *Normativity*.

Normativity makes real sense only for positive, convolution-respecting averages \mathbf{m} . Such an average is said to be *normative* if the subspace of RAMIF consisting of functions $\hat{\varphi}(\zeta)$ whose absolute values $|\hat{\varphi}(\zeta)|$ have an (at most) exponentially growing average $\mathbf{m}(|\hat{\varphi}(\zeta)|)$, is *closed under convolution*.

Conflicting nature of the main demands P_1, P_2, P_3 .

The properties P_1, P_2, P_3 , which an object must possess to qualify as “well-behaved”, *tend* to be mutually exclusive. Let us show, in the case of averages, why this is so.

LEMMA (A3.35). *If a uniformizing average \mathbf{m} respects convolution (**Aver₁**) and realness (**Aver₂**), then, for each $k \in \mathbf{N}$, it necessarily loads at least two branches reached after k crossings (thus making it harder for \mathbf{m} to respect lateral growth (**Aver₃**)).*

Proof. We say that a branch of $\mathbf{R}^+//\Omega$ is *reached after k crossings* if its address $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ displays exactly k sign changes. It suffices to prove the lemma for semi-groups Ω with one generator and, in fact, for $\Omega = \mathbf{N}$. So we may work on $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$ and set :

$$(A3.36) \quad \mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} := \mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}(\mathbf{N}) := \mathbf{m}^{1, \varepsilon_1, 1, \varepsilon_2, \dots, 1, \varepsilon_r} \quad (\varepsilon_i \in \{+, -\}).$$

If \mathbf{m} is to respect convolution (**Aver₁**), its weights \mathbf{m}^ε must verify a multiplication table of the form :

$$(A3.37) \quad \mathbf{m}^{\varepsilon'} \mathbf{m}^{\varepsilon''} = \sum_{\varepsilon} T_{\varepsilon}^{\varepsilon', \varepsilon''} \mathbf{m}^\varepsilon \quad (\forall \varepsilon', \varepsilon'').$$

Here, the sign sequences $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ have lengths r, r', r'' (with $r = r' + r''$) and their number of sign changes $\text{ch}(\varepsilon), \text{ch}(\varepsilon'), \text{ch}(\varepsilon'')$ verify :

$$(A3.38) \quad \text{ch}(\varepsilon) \geq \sup(\text{ch}(\varepsilon'), \text{ch}(\varepsilon''))$$

$$(A3.39) \quad \text{ch}(\varepsilon) > \sup(\text{ch}(\varepsilon'), \text{ch}(\varepsilon'')) \quad \text{if } \varepsilon' \neq \varepsilon''_1 \text{ and } \varepsilon''_r \neq \varepsilon''_{r'}.$$

Indeed, using the explicit formula (A4.42) for the structure tensor, we can see that, for any fixed pair $\varepsilon', \varepsilon''$, all the sign sequences ε present on the right-hand side of (A3.39) and *having the least possible number* of sign changes, can be obtained by a simple *shuffling* of ε' and ε'' (the procedure for constructing the “more alternate” sequences ε is of course different and more complex) so that the overall number of sign changes *cannot decrease*, as in (A3.38), and must even *increase*, as in (A3.39), when the factor sequences ε' and ε'' both *begin* and *end* differently.

Assume now that \mathbf{m} also respects realness (**Aver₂**) but *loads* only branches reached after k sign changes at most. Let ε' be the address of such a branch, and let ε'' be that of the conjugate branch (with opposite signs). Then, due to **Aver₂**, we have

$$(A3.40) \quad \mathbf{m}^{\varepsilon'} = \text{conj}(\mathbf{m}^{\varepsilon''}) \neq 0 \quad (\text{conj} = \text{complex conjugacy})$$

but due to **Aver₁** we also have (A3.37) along with (A3.39), since ε' and ε'' begin, and end, with opposite signs. So the left-hand side of (A3.37) is $\neq 0$, but the right-hand side is $= 0$, since it involves only addresses ε with at least $k + 1$ sign changes and so, under our assumption, carries only vanishing weights \mathbf{m}^ε . This contradiction establishes the lemma and shows that any uniformizing average of

type P_1, P_2 must load at least *some* integration paths which cross \mathbf{R}^+ infinitely often. There is even worse to come :

LEMMA (A3.41). *If, on top of \mathbf{Aver}_1 and \mathbf{Aver}_2 , we impose \mathbf{Aver}_4 , that is, if we demand that all the weights \mathbf{m}^ε be ≥ 0 , then in fact $\mathbf{m}^\varepsilon > 0$.*

So here \mathbf{m} must load *all* paths. For a proof, see § G2.

The above lemmas seem to bode ill of our quest for well-behaved averages, in view of *the prevalence*, already hinted at, of *faster-than-exponential growth on oft-crossing paths*. Ultimately, this phenomenon is tied up with the nature of the *acting alien algebras*, as we shall see in Chapter E, when discussing examples and applications. But even now we may produce a striking instance of a most elementary resurgent function with faster-than-exponential growth.

LEMMA (A3.42). *Fix k in \mathbf{N} and a in \mathbf{C}^* and consider the resurgent functions :*

$$(a3.43) \quad \tilde{\varphi}_k(z) = z^{-k} \tilde{\mathcal{U}}(z) \left(1 - \tilde{\mathcal{U}}(z)\right)^{-1} \quad (\text{formal model})$$

$$(A3.44) \quad \hat{\varphi}_k(\zeta) = \left\{ \zeta^{k-1} / (k-1)! \right\} * \left\{ \sum_{m \geq 1} (\hat{\mathcal{U}})^{*m}(\zeta) \right\} \quad (\text{convolutive model})$$

constructed from the resurgent monomial :

$$(A3.45) \quad \tilde{\mathcal{U}}(z) = -(e^a / 2\pi i) \sum_{n \geq 0} n! z^{-1-n} \quad (\text{formal model})$$

$$(A3.46) \quad \hat{\mathcal{U}}(\zeta) = +(e^a / 2\pi i) (\zeta - 1)^{-1} \quad (\text{convolutive model})$$

Then, for $k \geq 1$ (resp. $k \geq 2$), $\hat{\varphi}_k(\zeta)$ is locally integrable on $\mathbf{R}^+ // \mathbf{N}$ (resp. continuous of class $\mathcal{C}^{\|\cdot\| - \varepsilon}$) but, even for k large, it admits no uniform bounds significantly better than :

$$(A3.47) \quad |\hat{\varphi}_k(\zeta)| \leq C_k \exp(|a| + |\log \zeta|) |\zeta|$$

Proof : Based on the asymptotic behaviour of the load $ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *)$. See §A4.

A4. Complement : convolution algebras with fixed singular points.

Fixing the semi-group Ω .

In this section, we shall take a closer look at the convolution functions whose singular points are all located over a given Ω . So let us fix some discrete additive semi-group Ω with points $0 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \eta_3 \dots$ and *increments* $\omega_i = \eta_i - \eta_{i-1}$ ($i \geq 1$). Fixing the base space $\mathbf{R}^+ // \Omega$ brings with it an essential *discreteness*, which makes life easier. For one thing, most function spaces on $\mathbf{R}^+ // \Omega$ have functionals which are also supported by $\mathbf{R}^+ // \Omega$, and this does away with the discrepancy between RAMIF and RAMIF*. Fixing Ω also ensures that each ramification point of $\mathbf{R}^+ // \Omega$ has only a finite number of *natural antecedents* and, as we shall see, this gives rise to several interesting arithmetical functions. On the concrete side, knowing Ω allows us to drop the increments when writing down the weights of *alien operators* or *uniformizing averages* :

$$(A4.1) \quad \mathbf{op}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}(\Omega) := \mathbf{op}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r}; \mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}(\Omega) := \mathbf{m}^{\omega_1, \varepsilon_1, \dots, \omega_r, \varepsilon_r}.$$

In particular :

$$(A4.2) \quad \mathbf{op}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}(\mathbf{N}) := \mathbf{op}^{1, \varepsilon_1, \dots, 1, \varepsilon_r}; \mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}(\mathbf{N}) := \mathbf{m}^{1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}.$$

The semi-groups Ω most often encountered in relation to convolution are :

- (i) $\Omega = \mathbf{N}$
- (ii) $\Omega = \lambda_1 \mathbf{N} + \dots + \lambda_2 \mathbf{N} + \dots + \lambda_\nu \mathbf{N} \quad (\lambda_i > 0)$
- (iii) $\Omega = \log \mathbf{N} = \bigoplus_{p \text{ prime}} (\log p) \mathbf{N}.$

For simplicity, we shall concentrate here on the case $\Omega = \mathbf{N}$, but the case of finitely generated semi-groups hardly differs. The case $\Omega = \log \mathbf{N}$, on the other hand, presents additional, and largely unexplored, arithmetical aspects. It occurs mainly in the study of *multiplicative convolution* :

$$(A4.3) \quad \hat{\Phi}_1 \star \hat{\Phi}_2(\xi) \equiv \int_1^\xi \hat{\Phi}_1(\xi_1) \hat{\Phi}_2(\xi/\xi_1) (d\xi_1/\xi_1) \quad (\xi \text{ close to } 1)$$

with factor functions $\hat{\Phi}_i(\xi)$ whose singularities lie over \mathbf{N} . Under the change of variable $\hat{\varphi}_i(\zeta) \stackrel{def}{=} \hat{\Phi}_i(\exp \zeta)$, multiplicative convolution \star reduces to ordinary additive convolution $*$, but the singularities move from \mathbf{N} to $\log \mathbf{N}$.

The SSSS paths and their asymptotics. “Stretch” and “twist”.

Unlike *local convolution*, which is quite straightforward (we integrate on straight intervals), *global convolution* calls for intricate, carefully chosen paths.

A *self-symmetrical* path on $\mathbf{C} \setminus \Omega$ is a path Γ which goes from the origin 0 to some end-point ζ and admits $\zeta/2$ as a symmetry centre. Let $\tilde{\Gamma}$ be the lift of Γ to the universal covering space $\widetilde{\mathbf{C} \setminus \Omega}$, and let $\tilde{\zeta}$ be the end-point of $\tilde{\Gamma}$. Usually, Γ and $\tilde{\Gamma}$ cannot be continuously shrunk to 0 through *self-symmetrical deformations* but, when they can, Γ and $\tilde{\Gamma}$ are declared *self-symmetrically shrinkable*. If we now allow $\tilde{\Gamma}$ to touch the ramification points of $\widetilde{\mathbf{C} \setminus \Omega}$, then each point $\tilde{\zeta}$ on $\widetilde{\mathbf{C} \setminus \Omega}$ (including ramification points) becomes the end-point of a unique *shortest self-symmetrically shrinkable path*, or *SSSS path* for short. This SSSS path $\tilde{\Gamma}(\tilde{\zeta})$ is clearly a broken line, with (at least) half its vertices over Ω .

SSSS paths may be constructed by means of the following ideal-mechanical device. Visualize \mathbf{C} as a horizontal wooden board and mark each point η_i in Ω with an upwards-pointing nail. Also imagine a graded ruler, which carries its own nails (pointing downwards) at the points $O^* = 0$, $\eta_1^* = -\eta_1$, $\eta_2^* = -\eta_2$ etc... and which may glide one centimeter above the board, parallel to the \mathbf{R}^+ axis. Next, pick some point $\tilde{\zeta}$ on $\widetilde{\mathbf{C} \setminus \Omega}$ and some path $\tilde{\Gamma}_0$ from 0 to $\tilde{\zeta}$ ($\tilde{\Gamma}_0$ must keep clear of the ramification points). Then connect the mobile nail at O^* to the fixed nail at 0 by an ideal elastic thread. Finally, let the ruler glide sideways, parallel to the \mathbf{R}^+ axis, and gently remove O^* from 0, along the projection Γ_0 of $\tilde{\Gamma}_0$, all the way to the projection ζ of $\tilde{\zeta}$. Since Γ_0 avoids Ω , the mobile nail O^* avoids all fixed nails and since Ω is closed under addition, this automatically precludes any collision between fixed and mobile nails. At any stage of this continuous motion, our ideally taut thread Γ assumes the form of a *self-symmetrical broken line*, caught between the fixed and mobile nails. And after completion of the motion, when O^* reaches ζ , Γ coincides, in projection, with the SSSS path from 0 to ζ .

The relevance of this construction to *global convolution* is immediate : for any point ζ on $\mathbf{R}^+ // \Omega$ (we now drop the tilda), the convolution integral (A2.7) may be calculated along the SSSS path $\Gamma(\zeta)$ from 0 to ζ , which of course wholly lies on $\mathbf{R}^+ // \Omega$. The path's *self-symmetry* allows ζ_1 and $(\zeta - \zeta_1)$

to follow it simultaneously, each from a different end, and its *shrinkability* ensures that the global convolution integral is indeed the analytic continuation of the local integral.

So far, so good. Unfortunately, the SSSS paths become impossibly complicated as soon as the address $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ of the end-point exceeds five or six signs ε_i - especially for strongly alternating sequences. This should be plain from the examples reproduced at the end of this section, on figure (A4.152). It should be even plainer from the rate at which the *stretch* of these paths (i.e. their total *length*, with overlapping segments counted severally) and their *twist* (i.e. the number of straight segments in the broken line $\Gamma(\zeta)$) increase when the end-point ζ moves away from the origin. Indeed, consider the case $\Omega = \mathbf{N}$ and denote $\text{str}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *)$ and $\text{tw}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *)$ the *stretch* and *twist* of the SSSS path ending at the ramification point of $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$ which lies over r at the address $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *)$. (We affix the star $*$ to get the required length r). If we now add one sign ε_r to the address and carefully analyse the corresponding path deformations, in the ideal scheme just mentioned, for the case $\varepsilon_{r-1} = \varepsilon_r$ and $\varepsilon_{r-1} \neq \varepsilon_r$, we find the induction rule :

$$(A4.4) \quad \begin{bmatrix} \text{str}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, *) \\ \text{tw}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, *) \end{bmatrix} = H_{\varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r} \begin{bmatrix} \text{str}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *) \\ \text{tw}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *) \end{bmatrix}$$

with initial conditions $\text{str}(\ast) = \text{tw}(\ast) = 1$, and with matrices :

$$(A4.5) \quad H_{+,+} = H_{-,-} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eigenvalues} : 1, 1)$$

$$(A4.6) \quad H_{+,-} = H_{-,+} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{eigenvalues} : 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$$

$$(A4.7) \quad (1/4)(H_{+,+} + H_{+,-} + H_{-,+} + H_{-,-}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{eigenvalues} : 2, 0).$$

From this induction rule, we may calculate the *mean value* (resp. *maximum*) of the *stretch* and *twist* of all SSSS paths with end-point over r . We find :

$$(A4.8) \quad \text{mean stretch} = 2^{r-1} ; \text{mean twist} = 2^{r-2}$$

$$(A4.9) \quad \text{max stretch} = a_r + b_r ; \text{max twist} = a_r$$

with integers a_r, b_r defined by $a_r + b_r\sqrt{2} \equiv (1 + \sqrt{2})^{r-1}$.

Thus, although in theory the SSSS paths hold all the information necessary to master *convolution-in-the-large* and to figure out how the various singularities at the various ramification points interact, in practice these paths stretch, twist, wriggle, and overlap so frantically as to be of no real use. So we must turn to other tools - mainly the *alien operators* and *structure tensors* - to handle the situation.

The discretized algebras ALIEN, PSEUDO, AVER. Some notations.

Henceforth, we shall assume $\Omega = \mathbf{N}$ for definiteness. The *proper points* (resp. *ramification points*) of $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$ will be denoted ζ^ε (resp. $\zeta^{\varepsilon,*}$) with $r(\varepsilon) < \zeta < r(\varepsilon) + 1$ (resp. $r(\varepsilon, *) = \zeta$). As usual, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ and $\varepsilon^* = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *)$.

The discretized bialgebra ALIEN = ALIEN(\mathbf{N}) has a natural basis consisting of proper (resp. stationary) alien operators D_{ε^*} (resp. d_{ε^*}) which involve only pair-wise differences. Locally, their action on resurgent functions is :

$$(A4.10) \quad (D_{\varepsilon^*}\hat{\varphi})(\zeta) = \hat{\varphi}((\zeta + r)^{\varepsilon,+}) - \hat{\varphi}((\zeta + r)^{\varepsilon,-}) \quad (0 < \zeta < 1; \varepsilon^* = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *))$$

and it can then be continued analytically to the whole of $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$.

The discretized co-algebra $\text{AVER} = \text{AVER}(\mathbf{N})$ contains a basis of “finitary” elements $\text{mur}_{\varepsilon,-}$ and $\text{mul}_{\varepsilon,+}$ which, rather than taking true averages, retain only the value of $\hat{\varphi}(\zeta)$ which lies on the path $(\varepsilon, -, +, +, +, \dots)$ or $(\varepsilon, +, -, -, -, \dots)$. (ε is any finite sequence).

The discretized algebra $\text{PSEUDO} = \text{PSEUDO}(\mathbf{N})$ of pseudovariables has a natural basis $\{Z^{\varepsilon*}\}$ dual to $\{D_{\varepsilon*}\}$.

The discretized algebra $\text{POST} = \text{POST}(\mathbf{N})$ of post-ramification Diracs has a natural basis $\{\delta^\varepsilon\}$ of Diracs with unit mass concentrated on the point $(r+0)^\varepsilon$, i.e. immediately *after* the ramification.

The discretized algebra $\text{PRE} = \text{PRE}(\mathbf{N})$ of pre-ramification Diracs has a natural basis $\{\delta^{\varepsilon*}\}$ of Diracs with unit mass concentrated on the point $(r-0)^{\varepsilon*}$, i.e. immediately *before* the ramification.

Thanks to the canonical homomorphism :

$$(A4.11) \quad \delta^{\varepsilon*} \rightarrow \delta^{\varepsilon,+} + \delta^{\varepsilon,-} \quad (\text{PRE} \rightarrow \text{POST}).$$

PRE may be viewed as a subalgebra of POST. In fact, PRE then becomes an *ideal* of POST and we have the isomorphism :

$$(A4.12) \quad \text{PSEUDO}(\text{with multiplication}) \simeq \text{POST}/\text{PRE}(\text{with convolution}).$$

In the natural basis of ALIEN, operator multiplication is totally elementary :

$$(A4.13) \quad D_{\mathbf{b}*} D_{\mathbf{a}*} = D_{\mathbf{a},+,\mathbf{b},*} - D_{\mathbf{a},-,\mathbf{b},*}$$

$$(A4.13 \text{ bis}) \quad d_{\mathbf{b}*} d_{\mathbf{a}*} = d_{\mathbf{a},+,\mathbf{b},*} - d_{\mathbf{a},-,\mathbf{b},*}$$

and so is the *proper action* of ALIEN on the algebras PSEUDO, POST, PRE :

$$(A4.14) \quad D_{\mathbf{a}*} Z^{\varepsilon*} = \varepsilon_0 Z^{\mathbf{b}*} \text{ if } \varepsilon = (\mathbf{a}, \varepsilon_0, \mathbf{b}, *) \text{ (and 0 otherwise)}$$

$$(A4.15) \quad D_{\mathbf{a}*} \delta^\varepsilon = \varepsilon_0 \delta^{\mathbf{b}} \text{ if } \varepsilon = (\mathbf{a}, \varepsilon_0, \mathbf{b}) \text{ (and 0 otherwise)}$$

$$(A4.16) \quad D_{\mathbf{a}*} \delta^{\varepsilon*} = \varepsilon_0 \delta^{\mathbf{b}*} \text{ if } \varepsilon = (\mathbf{a}, \varepsilon_0, \mathbf{b}, *) \text{ (and 0 otherwise).}$$

There is no *stationary action* of ALIEN on PSEUDO, but only on POST and PRE, and there we have the simple rule :

$$(A4.17) \quad d_{a_1, \dots, a_{r-1}, *} = (\delta_r) * (D_{a_1, \dots, a_{r-1}, *})$$

where δ_r denotes the *non-ramified Dirac* over r . We may view δ_r as an element of POST or PRE :

$$(A4.18) \quad \delta_r = \sum_{\varepsilon_1=\pm, \dots, \varepsilon_r=\pm} \delta^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} \in \text{POST}$$

$$(A4.19) \quad \delta_r = \sum_{\varepsilon_1=\pm, \dots, \varepsilon_{r-1}=\pm} \delta^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *} \in \text{PRE}$$

and in both cases convolution by δ_r is a very simple affair :

$$(A4.20) \quad \delta^{\mathbf{a}} * \delta_r = \delta_r * \delta^{\mathbf{a}} = \sum_{\varepsilon_i=\pm} \delta^{\mathbf{a}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} \quad (\text{in POST})$$

$$(A4.21) \quad \delta^{\mathbf{a}*} * \delta_r = \delta_r * \delta^{\mathbf{a}*} = \sum_{\varepsilon_i=\pm} \delta^{\mathbf{a}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *} \quad (\text{in PRE}).$$

All this is fairly trivial. What is less so, is the co-multiplicative structure of ALIEN and AVER, and the multiplicative structure of PSEUDO, POST and PRE. To describe the latter, and above all to investigate their “asymptotic” aspects, we require four *structure tensors*.

The structure tensors \mathbf{S} and \mathbf{T} .

The first structure tensor $S = \{S_{\mathbf{c}^*}^{\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*}; r(\mathbf{c}^*) = r(\mathbf{a}^*) + r(\mathbf{b}^*)\}$ simultaneously describes the coproduct of ALIEN and the product of PSEUDO :

$$(A4.22) \quad D_{\mathbf{c}^*}(\hat{\varphi} * \hat{\psi}) = \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} S_{\mathbf{c}^*}^{\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*} (D_{\mathbf{a}^*} \hat{\varphi}) * (D_{\mathbf{b}^*} \hat{\psi})$$

$$(A4.23) \quad Z^{\mathbf{a}^*} Z^{\mathbf{b}^*} = \sum_{\mathbf{c}} S_{\mathbf{c}^*}^{\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*} Z^{\mathbf{c}^*}.$$

The second structure tensor $T = \{T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}}; r(\mathbf{c}) = r(\mathbf{a}) + r(\mathbf{b})\}$ describes the convolution of post-ramification Diracs :

$$(A4.24) \quad \delta^{\mathbf{a}} * \delta^{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{c}} T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \delta^{\mathbf{c}}$$

as well as that of pre-ramification Diracs :

$$(A4.25) \quad \delta^{\mathbf{a}^*} * \delta^{\mathbf{b}^*} = \sum_{\mathbf{c}'} T_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \delta^{\mathbf{c}'} \quad (\text{with } \mathbf{c}' = (c_1, \dots, c_{r-1}) \text{ if } \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_r)).$$

In fact, it even describes the *global convolution* on $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$:

$$(A4.26) \quad \hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2(\zeta) = \int C_{\zeta}^{\zeta_1, \zeta_2}(\mathbf{N}) \hat{\varphi}_1(\zeta_1) \hat{\varphi}_2(\zeta_2) d\zeta_1 \quad (\zeta, \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbf{R}^+//\mathbf{N}; \zeta = \zeta_1 + \zeta_2)$$

since the locally constant structure tensor $C_{\zeta}^{\zeta_1, \zeta_2}$ reduces to

$$(A4.27) \quad C_{\zeta}^{\zeta_1, \zeta_2} = T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \quad (\text{resp. } T_{\mathbf{c}'}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \quad \text{if } E(\zeta_1) + E(\zeta_2) - E(\zeta) = 0 (\text{resp. } = 1).$$

Here, ζ_1, ζ_2, ζ are of course points of $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$ with addresses $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ and projections $\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dot{\zeta}$ on \mathbf{R}^+ . $E(\zeta)$ denotes the largest integer $\leq \zeta$ and \mathbf{c}' is the sequence \mathbf{c} deprived of its last term c_r .

LEMMA (A4.28). *Inductive calculation of S and T . The structure tensors may be calculated from the initial conditions :*

$$(A4.29) \quad \mathbf{S}_{\emptyset}^{\emptyset, \emptyset} = S_{\mathbf{a}^*}^{\mathbf{a}^*, \emptyset} = S_{\mathbf{b}^*}^{\emptyset, \mathbf{b}^*} = 1; S_{+^*}^{*, *} = -S_{-^*}^{*, *} = 1$$

$$(A4.30) \quad T_{\emptyset}^{\emptyset, \emptyset} = T_{\mathbf{a}}^{\mathbf{a}, \emptyset} = T_{\mathbf{b}}^{\emptyset, \mathbf{b}} = 1$$

and the “forward” induction :

$$(A4.31) \quad S_{\mathbf{c}^*}^{\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*} = kr^{\tilde{a}_1, \tilde{c}_1} S_{\mathbf{c}'^*}^{\mathbf{a}'^*, \mathbf{b}^*} + kr^{\tilde{b}_1, \tilde{c}_1} S_{\mathbf{c}'^*}^{\mathbf{a}^*, \mathbf{b}'^*} - kr^{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2} kr^{\tilde{b}_1, \tilde{c}_2} S_{\mathbf{c}''^*}^{\mathbf{a}'^*, \mathbf{b}'^*}$$

$$(A4.32) \quad T_c^{a,b} = kr^{\tilde{a}_1, \tilde{c}_1} T_{c'}^{a', b} + kr^{\tilde{b}_1, \tilde{c}_1} T_{c'}^{a, b'} - kr^{\tilde{a}_1, \tilde{c}_1} kr^{\tilde{b}_1, \tilde{c}_1} T_{c''}^{a', b'}$$

or, alternatively, from the “backward” induction :

$$(A4.33) \quad S_{c^*}^{a^*, b^*} = kr^{a_1, c_1} S_{c^*}^{a^*, b^*} + kr^{b_1, c_1} S_{c^*}^{a^*, b^*} - kr^{a_1, c_2} kr^{b_1, c_2} S_{c^*}^{a^*, b^*}$$

$$(A4.34) \quad T_c^{a,b} = kr^{a_1, c_1} T_c^{a, b} + kr^{b_1, c_1} T_c^{a, b} - kr^{a_1, c_2} kr^{b_1, c_2} T_c^{a, b}.$$

Here, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ (resp. $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots$) denote the first, second... (resp. last, last but one,...) term in the sign sequence ε . Similarly, ε' , “ $\varepsilon \dots$ (resp. ε' , $\varepsilon'' \dots$)” denote the sequence ε deprived of its first, first two ... (resp. last, last two...) terms. Lastly, the Kronecker symbol $kr^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ is 1 if $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ and 0 if not.

As for the proof, (A4.24) shows that knowing T is the same as knowing the multiplication rule for the post-ramification Diracs. That rule, however, is completely determined by the symmetrelness of the mould $R\delta^\bullet$ and $L\delta^\bullet$ on the one hand (see (A2.83, 84)) and the self-consistency rule (A2.79) on the other. So it simply becomes a matter of checking the compatibility of the above induction for T with the Diracs’ multiplication table. The same line of reasoning also applies to S .

COROLLARY (A4.35). *Some useful identities. Link between S and T .*

$$(A4.36) \quad S_{c^*}^{\tilde{a}^*, \tilde{b}^*} = S_{c^*}^{a^*, b^*} \quad (\text{but } T_{\tilde{c}}^{\tilde{a}, \tilde{b}} \neq T_c^{a, b} \text{ in general})$$

$$(A4.37) \quad S_{c^*}^{a^*, b^*} = T_{c^+}^{a^+, b^+} = -T_{c^-}^{a^-, b^-}$$

$$(A4.38) \quad T_{c^+}^{a^+, b^+} + T_{c^-}^{a^-, b^-} = 0$$

$$(A4.39) \quad T_{c'}^{a, b} = T_c^{a, b^+} + T_c^{a, b^-} = T_c^{a^+, b} + T_c^{a^-, b}$$

$$(A4.40) \quad \sum_{\varepsilon_i = \pm} T_{c^{\varepsilon_1, b^{\varepsilon_2}}}^{a^{\varepsilon_1, b^{\varepsilon_2}}} = T_{c'}^{a, b}.$$

Here, as usual, $\tilde{\varepsilon}$ is the sequence ε written in reverse. The invariance (A4.36) of S (but not T) under sequence reversals simply reflects the symmetry of the forward and backward inductions for S (but not T). The last identity (A4.40) simply expresses the fact that the injection (A4.11) is an algebra homomorphism of PRE into POST.

LEMMA (A4.41). *Direct expression of S and T .*

Both tensors are integer-valued with trivial signs :

$$(A4.42) \quad \text{sign}(S_{c^*}^{a^*, b^*}) = \text{sign}(T_c^{a, b}) = (\prod a_i)(\prod b_j)(\prod c_k)$$

and with absolute values given by :

$$(A4.43) \quad |T_c^{a, b}| \neq \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} = \mathbf{a}^1 \dots \mathbf{a}^s ; \mathbf{b} = \mathbf{b}^1 \dots \mathbf{b}^s \\ \mathbf{c} = \mathbf{a}^1 \mathbf{b}^1 \dots \mathbf{a}^s \mathbf{b}^s \\ \text{end}(\underline{\mathbf{a}}^i) \neq \text{beginning}(\underline{\mathbf{b}}^i) \forall i \end{array} \right\}.$$

(The expression for S is analogous; see (A4.37)).

Here, the factor sequences \mathbf{a}^i and \mathbf{b}^i are $\neq \emptyset$, except perhaps for the extreme factors \mathbf{a}^1 and \mathbf{b}^s . Each $\underline{\mathbf{a}}^i$ is identical with \mathbf{a}^i , except perhaps for the last sign, denoted $end(\mathbf{a}^i)$, which we *maintain* (resp. *change*) if it differs from (resp. coincides with) the first sign of \mathbf{b}^i , denoted $beginning(\mathbf{b}^i)$. If $\mathbf{b}^s = \emptyset$, we take $\underline{\mathbf{a}}^s = \mathbf{a}^s$.

The formula (A4.43) may be established by showing its compatibility with the induction (A4.32). It is noteworthy that the expression (A4.43) *does not* reflect the symmetry $T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a},\mathbf{b}} = T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b},\mathbf{a}}$.

Asymptotics of the structure tensors \mathbf{S} and \mathbf{T} .

We collect in this subsection a number of identities which, from various angles, shed light on the asymptotic behaviour of the structure tensors and will later be instrumental in proving the key theorem about the *need for compensations in the uniform averages of ramified functions* (see § A5).

Since these identities are rather direct consequences of the induction rules (A4.28) or the formula (A4.43), we omit all proofs.

LEMMA (A4.44). *Complexity of the product and co-product.*

$$(A4.45) \quad \sum_{\mathbf{c}} |S_{\mathbf{c}^*}^{\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*}| = \frac{(r(\mathbf{a}^*) + r(\mathbf{b}^*))!}{r(\mathbf{a}^*)!r(\mathbf{b}^*)!} \quad (\forall \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$(A4.46) \quad \sum_{\mathbf{c}} |T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a},\mathbf{b}}| = \frac{(r(\mathbf{a}) + r(\mathbf{b}))!}{r(\mathbf{a})!r(\mathbf{b})!} \quad (\forall \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$(A4.47) \quad \sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} |S_{\mathbf{c}^*}^{\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*}| = 1 + str(\mathbf{c}^*) \quad (\forall \mathbf{c})$$

$$(A4.48) \quad \sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} |T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a},\mathbf{b}}| = str(\mathbf{c}^*) \quad (\forall \mathbf{c}).$$

As usual, the *stretch* $str(\mathbf{c}^*)$ is the length of the SSSS path from 0 to the ramification point with address \mathbf{c}^* .

LEMMA (A4.49). *Peak values of $|S|$ and $|T|$.*

For given sequence lengths, the tensors $|S|$ and $|T|$ attain their maximum for alternate sequences $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Alternate sequences are of course sequences of the form $\pm \mp \pm \dots$. They yield the maxima of $|S|$ and $|T|$ because they prevent sign compensations in the inductive identities (A4.31) (A4.32).

LEMMA (A4.50). *Values of S and T for alternate sequences.*

For sequences $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ of the form $\pm \mp \pm \dots$, we have :

$$(A4.51) \quad S_{\mathbf{c}^*}^{\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*} = \text{sign}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \frac{(P+Q)!}{P!Q!}$$

with $\text{sign}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\prod a_i)(\prod b_j)(\prod c_k)$ and :

$$(A4.52) \quad P = \left(\frac{1}{2}\right)r(\mathbf{a}) + \left(\frac{1}{4}\right)(1 + a_1\tilde{a}_1)b_1c_1 = \left(\frac{1}{2}\right)r(\mathbf{a}) + \left(\frac{1}{4}\right)(1 + a_1\tilde{a}_1)\tilde{b}_1\tilde{c}_1$$

$$(A4.53) \quad Q = \left(\frac{1}{2}\right)r(\mathbf{b}) + \left(\frac{1}{4}\right)(1 + b_1\tilde{b}_1)a_1c_1 = \left(\frac{1}{2}\right)r(\mathbf{b}) + \left(\frac{1}{4}\right)(1 + b_1\tilde{b}_1)\tilde{a}_1\tilde{c}_1.$$

Similarly :

$$(A4.54) \quad T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \text{sign}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\frac{(P+Q)!}{P!Q!}$$

with $\text{sign}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ as above, and :

$$(A4.55) \quad \gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0(\text{resp. } 1) \text{ if } \text{end}(\mathbf{a}) \neq \text{end}(\mathbf{c}); \text{end}(\mathbf{b}) \neq \text{end}(\mathbf{c})(\text{resp. otherwise})$$

$$(A4.56) \quad P = \left(\frac{1}{2}\right)(r(\mathbf{a}) - 1) + \left(\frac{1}{4}\right)(1 - a_1\tilde{a}_1)b_1c_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(r(\mathbf{a}) - 1) + \left(\frac{1}{4}\right)(1 - a_1\tilde{a}_1)\tilde{b}_1\tilde{c}_1$$

$$(A4.57) \quad Q = \left(\frac{1}{2}\right)(r(\mathbf{b}) - 1) + \left(\frac{1}{4}\right)(1 - b_1\tilde{b}_1)a_1c_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(r(\mathbf{b}) - 1) + \left(\frac{1}{4}\right)(1 - b_1\tilde{b}_1)\tilde{a}_1\tilde{c}_1.$$

As usual, ε_1 and $\tilde{\varepsilon}_1$ denote the first and last element of ε , and $r(\varepsilon)$ is its length. Due to alternateness, there are 5 (not 6) degrees of liberty in the choice of the first and last signs of \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , so that the numbers P and Q , contrary to appearances, are always *whole*.

For example, when all three sequences \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} have even length and begin with the same sign, say +, we have :

$$(A4.58) \quad T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \frac{(P+Q)!}{P!Q!} \quad (\mathbf{a} = (+-)^P ; \mathbf{b} = (+-)^Q ; \mathbf{c} = (+-)^{P+Q}).$$

Compare this with the identity

$$(A4.59) \quad T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a},\mathbf{b}} = 1 \quad (\mathbf{a} = (+-)^P ; \mathbf{b} = (+-)^P ; \mathbf{c} = (++--)^P)$$

which follows directly from (A4.43) but has far-reaching consequences.

The “height” of ramification points and their natural order.

A ramification point of address \mathbf{a}^* is said to be *antecedent* to another ramification point of address \mathbf{c}^* if the operator $D_{\mathbf{a}^*}$ effectively appears in the coproduct $\text{cop}(D_{\mathbf{c}^*})$, that is to say, if there exists a ramification point \mathbf{b}^* such that $S_{\mathbf{c}^*}^{\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*} \neq 0$. If $D_{\mathbf{a}^*}$ appears in the main (second-order) coproduct, it automatically appears in the higher-order coproducts :

$$(A.4.60) \quad \text{cop}_s(D_{\mathbf{c}^*}) = \sum S_{\mathbf{c}^*}^{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^s} D_{\mathbf{a}^1} \otimes D_{\mathbf{a}^2} \otimes \dots \otimes D_{\mathbf{a}^s}$$

“Antecedence”, therefore, endows the set of ramification points of $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$ with a partial *order* whose analytic meaning is clear : to know the singular behaviour of a convolution product at a given ramification point, one has to know the singular behaviour of the convolution factors *at all the antecedent points*. Or again, in purely geometric terms : \mathbf{a}^* is antecedent to \mathbf{c}^* if and only if \mathbf{a}^* lies on the SSSS path from 0 to \mathbf{c}^* .

Let $ht(\mathbf{c}^*)$ be the “*height*” of the ramification point of address \mathbf{c}^* , i.e. the total number of its antecedents, including the origin 0 and the point itself. Since SSSS paths tend to severely self-overlap, we must expect the *height* to be significantly less than the *stretch*. However, in order to derive a workable induction rule, we must introduce the modified *height* $ht^+(\mathbf{c}^*)$ (resp. $ht^-(\mathbf{c}^*)$), which is the number of ramification points \mathbf{a}^* such that \mathbf{a}^* , but *not* $\mathbf{a} + *$ (resp. *not* $\mathbf{a} - *$) is *antecedent* to \mathbf{c}^* .

LEMMA A.4.61 *We have the simple induction :*

$$(A.4.62) \quad \begin{bmatrix} ht(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, *) \\ ht^+(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, *) \\ ht^-(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, *) \end{bmatrix} = K_{\varepsilon_r} \begin{bmatrix} ht(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *) \\ ht^+(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *) \\ ht^-(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *) \end{bmatrix}$$

with initial conditions $ht(*) = 2$, $ht^+(*) = 0$, $ht^-(*) = 0$ and with matrices :

$$(A.4.63) \quad K_+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad K_- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The rule (A.4.62) may be derived either from the induction (A.4.31) or from a careful examination of SSSS path deformations. Our matrices have the following eigenvalues :

$$(A.4.64) \quad \begin{aligned} sp(K_{\pm}) &= (1, 1, 1) \\ sp(K_{\pm}K_{\mp}) &= (1, (3 + \sqrt{5})/2, (3 - \sqrt{5})/2) \\ sp(K_+ + K_-) &= (2, 3, 1) \end{aligned}$$

Thus we can see that, for ramification points over r , the mean value of the *height* grows roughly like $(3/2)^r$ instead of 2^r for the *stretch*; and the maximum of the *height* grows like $((3 + \sqrt{5})/2)^{r/2}$ instead of $(1 + \sqrt{2})^r$ for the *stretch*.

The “load” of ramification points and the asymptotics of convolution powers.

We should expect the multiplication of pseudovariabes and the convolution of ramified Diracs to give us valuable clues about the asymptotics of *all* convolution powers and, more important still, about the growth pattern of *all* convolution inverses. So let us pick the simplest pseudovariabes there is, namely Z^* (it represents the ramification at 1) and the simplest post-ramified Dirac, namely $(\delta^+ - \delta^-)/2$ (it loads the two points immediately after 1 : we take the difference for the sake of symmetry ; the sum $\delta^+ + \delta^-$, being “non-ramified”, would be useless) and let us expand their r -th powers :

$$(A.4.65) \quad \underbrace{(Z^*) \dots (Z^*)}_{r \text{ times}} = \sum_{\varepsilon_i = \pm} ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *) Z^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *}$$

$$(A.4.66) \quad \underbrace{((\delta^+ - \delta^-)/2) * \dots * ((\delta^+ - \delta^-)/2)}_{r \text{ times}} = \sum_{\varepsilon_i = \pm} ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \delta^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}$$

The coefficient $ld(\varepsilon^*)$ (resp. $ld(\varepsilon)$) clearly belongs to \mathbf{N} (resp. $2^{-r}\mathbf{N}$) and is known as the *load* of the ramification point ε^* (resp. of the branch ε). From the induction rule (A.4.28) valid for the structure tensors, we derive the following induction for the *load* :

$$(A.4.67) \quad ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *) = \varepsilon_{r-1} ld(\varepsilon_1, \dots, \hat{\varepsilon}_{r-1}, *) + \sum_{1 \leq i \leq r-2} (1/2)(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) ld(\varepsilon_1, \dots, \hat{\varepsilon}_i, \dots, \varepsilon_{r-1}, *)$$

$$(A.4.68) \quad ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) = (1/2)\varepsilon_r ld(\varepsilon_1, \dots, \hat{\varepsilon}_r) + \sum_{1 \leq i \leq r-1} (1/2)(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) ld(\varepsilon_1, \dots, \hat{\varepsilon}_i, \dots, \varepsilon_r)$$

$\hat{\varepsilon}_i$ means that we *omit* ε_i . Of course, whenever ε_i occurs as a variable inside a polynomial, it should be considered as ± 1 rather than \pm . There being no scope for sign compensations in (A.4.67) or (A.4.68), we find :

LEMMA A.4.69 *Inductive calculation of the load :*

$$(A.4.70) \quad \text{sign}(ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *)) = \prod \varepsilon_i ; \text{sign}(ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)) = \prod \varepsilon_i$$

$$(A.4.71) \quad |ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *)| = |ld(\varepsilon_1, \dots, \hat{\varepsilon}_{r-1}, *)| + \sum_{\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}} |ld(\varepsilon_1, \dots, \hat{\varepsilon}_i, \dots, \varepsilon_{r-1}, *)| \quad (1 \leq i \leq r-2)$$

$$(A.4.72) \quad |ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)| = (1/2) |ld(\varepsilon_1, \dots, \hat{\varepsilon}_r)| + \sum_{\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}} |ld(\varepsilon_1, \dots, \hat{\varepsilon}_i, \dots, \varepsilon_r)| \quad (1 \leq i \leq r-1)$$

LEMMA A.4.73 *Load sums :*

$$(A.4.74) \quad \sum_{\varepsilon_r = \pm} |ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)| = |ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *)|$$

$$(A.4.75) \quad \sum_{\varepsilon_i = \pm} |ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *)| = \sum_{\varepsilon_i = \pm} |ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)| = r!$$

LEMMA A.4.76 *Direct expression of the load :*

$$(A.4.77) \quad |ld(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *)| = r! 2^{1-r} \left\{ 1 + \sum_{s \geq 1} \sum_{n_i \geq 2} e_{n_1} \dots e_{n_s} H_{n_1, \dots, n_s}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *} \right\}$$

with coefficients e_n of Bernoulli type :

$$(A.4.78) \quad e_{2n+1} \equiv 0 ; (-1)^n e_{2n} > 0 ; \sum_{n \geq 0} e_{2n} t^{2n} = t^{-1} \frac{(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})}$$

and with elementary sign-sums $H_{n_1, \dots, n_s}^{\bullet}$ that vanish when $s + n_1 + \dots + n_s > r$ and otherwise are equal to :

$$(A.4.79) \quad H_{n_1, \dots, n_s}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *} = \sum \left(\prod_{p_1 \leq j_1 < p_1 + n_1} \varepsilon_{j_1} \right) \dots \left(\prod_{p_s \leq j_s < p_s + n_s} \varepsilon_{j_s} \right)$$

the summation extending to all sequences (p_1, \dots, p_s) such that :

$$(A.4.80) \quad 1 \leq p_1 < p_1 + n_1 < p_2 < p_2 + n_2 < \dots < p_s < p_s + n_s \leq r$$

So each product $\prod \varepsilon_j$ is separated from its neighbours by at least one missing ε_i . Thus :

$$\begin{aligned} |ld(\varepsilon_1, *)| &= 1 ; |ld(\varepsilon_1 \varepsilon_2 *)| = (3/2) - (1/2) \varepsilon_1 \varepsilon_2 ; |ld(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 *)| = 3 - (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3) ; \\ |ld(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 *)| &= (15/2) - (5/2)(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_4) + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4) ; \\ |ld(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 *)| &= (75/2) - (15/2)(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_4 + \varepsilon_4 \varepsilon_5) \\ &\quad + (5/2)(\varepsilon_1 \varepsilon_2)(\varepsilon_4 \varepsilon_5) + 3(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5) \end{aligned}$$

Proof : To establish this last lemma, we iterate the induction rule (A.4.67) and infer the existence of an expression of type (A.4.77) with $H_{n_1, \dots, n_s}^{\bullet}$ as in (A.4.79). Then we determine the coefficients e_n by examining the elementary case of uni-sign sequences ($\varepsilon_i = +$). For these we clearly have :

$$(A.4.81) \quad ld(\varepsilon^*) \equiv 1 ; H_{n_1, \dots, n_s}^{\varepsilon^*} = \frac{(r-n)!}{s!(r-n-s)!} (\varepsilon^* = (+)^{r-1} *) ; n = \sum n_i$$

LEMMA A.4.82 *Peak values of the load. Over any given point r , the load attains its maximum for alternate sequences $\pm \mp \pm \dots$. More precisely, if we set :*

$$(A.4.83) \quad \begin{aligned} ld_1 &= |ld(*)| ; \quad ld_2 = |ld(+*)| ; \\ ld_3 &= |ld(+ - *)| ; \quad \dots ; \quad ld_r = |ld(+ - + \dots *)| \end{aligned}$$

we get the following generating function :

$$(A.4.84) \quad \sum_{r \geq 1} (2^{r-1}/r!) ld_r t^r = (\sin(t))(\cos(t) - \sin(t))^{-1}$$

so that ld_r grows roughly as $(\pi/8)^r r!$.

Proof : Applying the formula (A.4.77) to alternate sequences ε , we find :

$$(A.4.85) \quad H_{n_1, \dots, n_s}^{\varepsilon*} = (-1)^{n/2} \frac{(r-n)!}{s!(r-n-s)!} \quad (r(\varepsilon*) = r ; \quad n = \sum n_i \in 2\mathbf{N})$$

This is the same as in (A.4.81) except for the factor $(-1)^{n/2}$, but this factor is enough to prevent all cancellations in (A.4.77) and to lead to a load of magnitude $(\pi/8)^r r!$.

In the same way, formula (A.4.77) yields generating functions and precise asymptotic estimates for the *loads* of more weakly alternating sequences like $\varepsilon = + + - - + + - - \dots$. However, in most applications, the following coarser bounds are quite sufficient :

LEMMA A.4.86 *Fix an integer k and consider all sequences ε which are k -alternate in the sense that they contain no subsequences of $k+1$ identical signs. When the length r of such a sequence increases, the corresponding loads admit the universal bounds :*

$$(A.4.87) \quad A_k \left(\frac{\pi}{8k} \right)^r r! \leq |ld(\varepsilon*)| \leq B_k \left(\frac{\pi}{8} \right)^r r!$$

$$(A.4.88) \quad A_k \left(\frac{\pi}{8k} \right)^r r! \leq |ld(\varepsilon)| \leq B_k \left(\frac{\pi}{8} \right)^r r!$$

Proof : The upper bounds are a consequence of Lemma (A.4.82), while the lower bounds may be derived directly from the induction rule of Lemma (A.4.69) or from a repeated use of the inequality :

$$(A.4.89) \quad |ld(\mathbf{c})| \geq |ld(\mathbf{a})| |ld(\mathbf{b})|$$

with sequences \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} as in (A.4.43). We didn't bother to determine the best possible constants A_k , B_k but the term $(\pi/8)^r$ in the upper bound *is* sharp, while $(\pi/8k)^r$ in the lower bound also *seems to be* sharp.

The *loads* are of paramount importance to the study of ramified convolution because :

- (i) they permit a renormalization of the tensor structure.
- (ii) they command the ramified growth pattern of all natural resurgent functions.

Both facts are of course closely interrelated.

LEMMA A.4.90 *Renormalization of the tensor structure. If we set :*

$$(A.4.91) \quad S_{\mathbf{c}^*}^{\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*} := \frac{ld(\mathbf{a}^*)ld(\mathbf{b}^*)}{ld(\mathbf{c}^*)} S_{\mathbf{c}^*}^{\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*} > 0$$

$$(A.4.92) \quad T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} := \frac{ld(\mathbf{a})ld(\mathbf{b})}{ld(\mathbf{c})} T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} > 0$$

and if we fix two integers r_1, r_2 with sum $r_1 + r_2 = r$, we have :

$$(A.4.93) \quad \sum_{r(\mathbf{a}^*)=r_1; r(\mathbf{b}^*)=r_2} S_{\mathbf{c}^*}^{\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*} = 1 \quad (r = r(\mathbf{c}^*))(\forall \mathbf{c})$$

$$(A.4.94) \quad \sum_{r(\mathbf{a})=r_1; r(\mathbf{b})=r_2} T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = 1 \quad (r = r(\mathbf{c}))(\forall \mathbf{c})$$

and by way of consequence :

$$(A.4.95) \quad \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} S_{\mathbf{c}^*}^{\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*} = r \quad (r = r(\mathbf{c}^*))(\forall \mathbf{c})$$

$$(A.4.96) \quad \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = r \quad (r = r(\mathbf{c}))(\forall \mathbf{c})$$

Proof : The positivity of the renormalized tensors trivially follows from the sign rules (A.4.42) and (A.4.70). To establish the identities (A.4.93) and (A.4.94), we write (A.4.65) and (A.4.66) with the power r_1 , then with the power r_2 , and we multiply. The renormalized identities (A.4.93) and (A.4.94) differ from the earlier identities (A.4.47) and (A.4.48) by the absence of absolute values and of the hard-to-control *stretch factor*.

We now propose to show how even the most innocuous operations may turn smooth exponential growth into a much wilder growth pattern governed by the *load*. We shall reason at first on the discretized algebras PSEUDO and POST, which faithfully mirror phenomena in RAMIF. In order to denote POST multiplicatively (just like PSEUDO), we replace the “ramified Diracs” δ^ε by “pseudo-exponentials” E^ε , subject to the same multiplication table (A4.24) and the same action (A4.15) of ALIEN. Thus, we deal with general objects of the form :

$$(A.4.97) \quad Z = c + \sum c_{\varepsilon^*} Z^{\varepsilon^*} \in PSEUDO \quad (c \text{ and } c_{\varepsilon^*} \text{ in } \mathbf{C} ; \varepsilon^* = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *))$$

$$(A.4.98) \quad E = c + \sum c_\varepsilon E^\varepsilon \in POST \quad (c \text{ and } c_\varepsilon \text{ in } \mathbf{C} ; \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r))$$

Z is said to be ramified if it doesn't reduce to the constant c . E is said to be ramified if there is at least one ε such that $c_{\varepsilon+} \neq c_{\varepsilon-}$, i.e. if E has a ramified image Z under the natural algebra homomorphism of POST into PSEUDO :

$$(A.4.99) \quad E^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} \mapsto \varepsilon_r Z^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, *}$$

The index ρ of “raw exponential growth” is defined as :

$$(A.4.100) \quad \rho(Z) := \limsup |c_{\varepsilon^*}|^{1/r} ; \rho(E) := \limsup |c_\varepsilon|^{1/r}$$

while the index ρ^* of “loaded exponential growth” is :

$$(A.4.101) \quad \rho^*(Z) := \limsup |c_{\varepsilon^*}/ld(\varepsilon^*)|^{1/r} ; \rho^*(E) := \limsup |c_\varepsilon/ld(\varepsilon)|^{1/r}$$

LEMMA A.4.102 Let Z_i and E_i be elements of PSEUDO and POST with their indices ρ_i and ρ_i^* for raw and loaded growth. Then, if $Z_1 Z_2 = Z_3$ or $E_1 E_2 = E_3$, the sharp inequalities hold :

$$(A.4.103) \quad \rho_3 \leq (1 + \sqrt{2}) \sup(\rho_1, \rho_2)$$

$$(A.4.104) \quad \rho_3^* \leq \sup(\rho_1^*, \rho_2^*)$$

Proof : (A.4.103) results from the link (A.4.47), (A.4.48) between the *structure tensors* and the *stretch*, in combination with the earlier asymptotic estimates (A.4.8), (A.4.9) for the *stretch*. (A.4.104) results from the relations (A.4.95), (A.4.96) for the same tensor structures, but *after* normalization by the *load*. Lastly, the inequalities are sharp, because choosing coefficients c_{ε^*} or c_ε of sign $\prod \varepsilon_i$ precludes any possibility of sign compensation.

LEMMA A.4.105 If Z or E are finite sums, ramified, and invertible (i.e. $c \neq 0$), the inverses have (strict) loaded, but never raw exponential growth :

$$(A.4.106) \quad \rho(1/Z) = +\infty ; \rho(1/E) = +\infty \text{ (although } \rho(Z) = \rho(E) = 0)$$

$$(A.4.107) \quad 0 < \rho^*(1/Z) < +\infty ; 0 < \rho^*(1/E) \text{ (compare with } \rho^*(Z) = \rho^*(E) = 0)$$

Proof : For $Z = 1 + c_* Z^*$ and $E = 1 + c_+ E^+ + c_- E^-$ ($c_+ = -c_- \neq 0$), this follows directly from the definition of the load. For general, finite sums, this is a nice exercise, which we leave to the reader.

LEMMA A.4.108 If a power series $f(t) = \sum f_n t^n$ with coefficients in \mathbf{C} has finite, non-zero radius of convergence R , and if Z or E begins with a small enough constant term ($|c| < R$), then Z and E can be substituted to t in $f(t)$ but, whenever Z or E are finite, ramified sums, we get once again strict loaded growth :

$$(A.4.109) \quad \rho(f(Z)) = +\infty ; \rho(f(E)) = +\infty$$

$$(A.4.110) \quad 0 < \rho^*(f(Z)) < +\infty ; 0 < \rho^*(f(E)) < +\infty$$

These results still hold, but are more difficult to prove, when $R = +\infty$ and $f(t)$ sums up to an entire function of finite order (like, say, $f(t) = \exp(t^\alpha)$, $\alpha > 0$).

LEMMA A.4.111 We keep f as in the above lemma, but consider now a general Z or E defined by infinite sums (A.4.97) or (A.4.98). Then applications like :

$$(A.4.112) \quad Z \mapsto 1/Z ; Z \mapsto \exp(Z) ; Z \mapsto f(Z) \text{ (PSEUDO} \rightarrow \text{PSEUDO)}$$

$$(A.4.113) \quad E \mapsto 1/E ; E \mapsto \exp(E) ; E \mapsto f(E) \text{ (POST} \rightarrow \text{POST)}$$

usually destroy raw exponential growth, but always preserve loaded growth.

LEMMA A.4.114 With convolution in place of multiplication, all three above lemmas extend to the algebras of locally integrable, ramified functions over $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$ (whether analytic or not).

Of course, in this switch from *PSEUDO* or *POST* to *RAMIF*, the clause (for Z or E) of “being a finite sum” translates, for a function $\hat{\varphi}(\zeta)$ on $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$ into “having a finite number of ramification points” – and not at all into “having compact support on $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$ ”, for that would exclude analytic functions.

This covers in particular the elementary resurgent function $\hat{\varphi}_k(\zeta)$ of our much earlier lemma (A.3.41).

The last lemmas of this subsection were adduced only for their illustrative and motivational value. Their proofs, which are rather straightforward and rely on the asymptotics of the *load* and *structure tensors*, are left to the reader.

The flat moulds \mathbf{Fm}^\bullet and \mathbf{Fop}^\bullet . A new characterization for convolution averages, automorphisms, and derivations.

We have already characterized convolution-preserving averages \mathbf{m} as well as alien derivations or automorphisms \mathbf{op} with the help of their right or left-lateral moulds, whose general definition reads :

$$(A.4.115) \quad \mathbf{Rm}^\bullet = \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{array} \right) \right\rangle^\bullet ; \quad \mathbf{Lm}^\bullet = \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{array} \right) \right\rangle^\bullet$$

$$(A.4.116) \quad \mathbf{Rop}^\bullet = \langle \mathbf{op}, \mathbf{rul} \rangle^\bullet ; \quad \mathbf{Lop}^\bullet = \langle \mathbf{op}, \mathbf{lur} \rangle^\bullet$$

In the special case of $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$, these moulds have whole indices n_i and can be directly expressed in terms of the weights :

$$(A.4.117) \quad \mathbf{Rm}^{n_1, \dots, n_r} = (-1)^r \sum^+ \mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \quad (n = \sum n_i ; \varepsilon_i = \pm)$$

$$(A.4.118) \quad \mathbf{Lm}^{n_1, \dots, n_r} = (-1)^r \sum^- \mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \quad (n = \sum n_i ; \varepsilon_i = \pm)$$

$$(A.4.119) \quad \mathbf{Rop}^{n_1, \dots, n_r} = (-1)^r \sum^+ \mathbf{op}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \quad (n = \sum n_i ; \varepsilon_i = \pm)$$

$$(A.4.120) \quad \mathbf{Lop}^{n_1, \dots, n_r} = (-1)^r \sum^- \mathbf{op}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \quad (n = \sum n_i ; \varepsilon_i = \pm)$$

where we calculate \sum^+ (resp. \sum^-) by taking $\varepsilon_j = +$ (resp. $-$) whenever j is of the form $n_1, n_1 + n_2, n_1 + n_2 + n_3, \text{etc.}$, and by summing over $\varepsilon_j = \pm$ for all other indices. We recall our earlier criteria :

$$(A.4.121) \quad (\mathbf{m} \text{ respects convolution}) \Leftrightarrow (\mathbf{Rm}^\bullet \text{ symmetrel}) \Leftrightarrow (\mathbf{Lm}^\bullet \text{ symmetrel})$$

$$(A.4.122) \quad (\mathbf{op} \text{ is an alien automorphism}) \Leftrightarrow (\mathbf{Rop}^\bullet \text{ symmetrel}) \Leftrightarrow (\mathbf{Lop}^\bullet \text{ symmetrel})$$

$$(A.4.123) \quad (\mathbf{op} \text{ is an alien derivation}) \Leftrightarrow (\mathbf{Rop}^\bullet \text{ alternel}) \Leftrightarrow (\mathbf{Lop}^\bullet \text{ alternel})$$

We shall now give new criteria, based on moulds \mathbf{Fm}^\bullet and \mathbf{Fop}^\bullet of a quite different nature. They have their indices x_i in \mathbf{R} (not \mathbf{N}), but are locally constant or “flat” (\mathbf{F} stands for “flat”). Their definition is as follows :

$$(A.4.124) \quad \mathbf{Fm}^{x_1, \dots, x_r} := \sum \varepsilon_1 \dots \varepsilon_r \mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} \quad (x_i \in \mathbf{R} ; \varepsilon_i = \pm)$$

$$(A.4.125) \quad \mathbf{Fop}^{x_1, \dots, x_r} := \sum \varepsilon_1 \dots \varepsilon_r \mathbf{op}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} \quad (x_i \in \mathbf{R} ; \varepsilon_i = \pm)$$

with

$$(A.4.126) \quad \varepsilon_1 = \text{sign}(x_1 - x_2), \dots, \varepsilon_{r-1} = \text{sign}(x_{r-1} - x_r), \varepsilon_r = \text{sign}(x_r)$$

LEMMA A.4.127

$$(A.4.128) \quad (\mathbf{m} \text{ respects convolution}) \Leftrightarrow (\mathbf{Fm}^\bullet \text{ symmetrical})$$

$$(A.4.129) \quad (\mathbf{op} \text{ is an alien automorphism}) \Leftrightarrow (\mathbf{Fop}^\bullet \text{ symmetrical})$$

$$(A.4.130) \quad (\mathbf{op} \text{ is an alien derivation}) \Leftrightarrow (\mathbf{Fop}^\bullet \text{ alternal})$$

Proof : We first deal with \mathbf{op} and associate to the mould \mathbf{Fop}^\bullet its right-side (resp. left-side) Laplace transform \mathbf{RFop}^\bullet (resp. \mathbf{LFop}^\bullet) :

$$(A.4.131) \quad \mathbf{RFop}^{y_1, \dots, y_r} = \int_0^{+\infty} \mathbf{Fop}^{x_1, \dots, x_r} e^{-(x_1 y_1 + \dots + x_r y_r)} dx_1 \dots dx_r \quad (y_i > 0)$$

$$(A.4.132) \quad \mathbf{LFop}^{y_1, \dots, y_r} = \int_0^{-\infty} \mathbf{Fop}^{x_1, \dots, x_r} e^{-(x_1 y_1 + \dots + x_r y_r)} dx_1 \dots dx_r \quad (y_i < 0)$$

$$(A.4.133) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Rop}^\bullet & & \mathbf{RFop}^\bullet \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbf{op} \rightarrow \mathbf{Fop}^\bullet & \\ & \nearrow & \searrow \\ \mathbf{Lop}^\bullet & & \mathbf{LFop}^\bullet \end{array}$$

Recalling the definition of \mathbf{Fop}^\bullet in terms of \mathbf{op} and that of \mathbf{op} in terms of \mathbf{Rop}^\bullet , or \mathbf{Lop}^\bullet , we can express \mathbf{RFop}^\bullet and \mathbf{LFop}^\bullet directly in terms of \mathbf{Rop}^\bullet and \mathbf{Lop}^\bullet . A straightforward calculation yields :

$$(A.4.134) \quad \mathbf{RFop}^{y_1, \dots, y_r} = (-1)^r \sum_{y^1 \dots y^s = y} \mathbf{Rop}^{r_1, \dots, r_s} Sa^{y^1} \dots Sa^{y^s}$$

$$(A.4.135) \quad \mathbf{LFop}^{y_1, \dots, y_r} = (-1)^r \sum_{y^1 \dots y^s = y} \mathbf{Lop}^{r_1, \dots, r_s} Sa^{y^1} \dots Sa^{y^s}$$

with the usual mould notation (see §A.5) and in particular :

$$(A.4.136) \quad Sa^{y_1, \dots, y_r} := \prod_{i=1}^r (y_i + \dots + y_r)^{-1}$$

The sums \sum in (A.4.134), (A.4.135) extend to all factorizations of the sequence $y = (y_1, \dots, y_r)$ and r_i is the number of terms in the factor sequence y^i . Since Sa^\bullet is *symmetrical*, we have the equivalences :

$$(A.4.137) \quad \{\mathbf{RFop}^\bullet \text{ or } \mathbf{LFop}^\bullet \text{ symmetrical}\} \Leftrightarrow \{\mathbf{Rop}^\bullet \text{ or } \mathbf{Lop}^\bullet \text{ symmetrical}\}$$

$$(A.4.138) \quad \{\mathbf{RFop}^\bullet \text{ or } \mathbf{LFop}^\bullet \text{ alternal}\} \Leftrightarrow \{\mathbf{Rop}^\bullet \text{ or } \mathbf{Lop}^\bullet \text{ alternal}\}$$

But by linearity of the Laplace transform, it is quite obvious that \mathbf{Fop}^\bullet is symmetrical (resp. alternal) if and only if \mathbf{RFop}^\bullet and \mathbf{LFop}^\bullet are symmetrical (resp. alternal). Combining this with (A.4.137), (A.4.138), we transform the earlier criteria (A.4.122), (A.4.123) into those of Lemma (A.4.127). The argument for uniformizing averages \mathbf{m} is the same.

Remark 1 : There does exist, however, a slight difference between the case of averages \mathbf{m} and alien operators \mathbf{op} : when defining \mathbf{Fm}^\bullet , we have no option but to take $\varepsilon_r = \text{sign}(x_r)$, as in (A.4.126), while

in the definition for \mathbf{Fop}^\bullet we may take anything, in particular $\varepsilon_r = \text{sign}(x_r - x_1)$, since $\mathbf{op}^{\varepsilon^+} + \mathbf{op}^{\varepsilon^-} = 0$.

Remark 2 : We defined our flat moulds \mathbf{Fm}^\bullet and \mathbf{Fop}^\bullet “almost everywhere”, i.e. outside the hyperplanes $\{x_i = x_{i+1}\}$. They actually admit a *unique extension* there that respects symmetries (symmetry or alternality), but it involves fractionnal coefficients and is of no concern to us here.

Remark 3 : We may also establish the criteria of Lemma (A.4.127) without any calculation, by observing that, due to $\mathbf{op}^{\varepsilon^+} + \mathbf{op}^{\varepsilon^-} = 0$, all arrows in the diagram (A.4.133) respect *mould multiplication*, and that the criteria themselves are stable under suitable mould products or brackets, so that it is enough to check them for a family of *alien derivation* that generate *ALIEN*. We get such a family by checking that the criteria hold (trivially) for $\mathbf{op} = \mathbf{lur}$ and \mathbf{rul} , and then by going over to the logarithm \mathbf{dun} and its homogeneous components, etc. But using the neat formulas (A.4.134), (A.4.135) gives a more clear-cut exposition, even if it involves a modicum of calculations.

COROLLARY A.4.139 *Split-up of circular permutations.*

Let \mathbf{m} be any convolution-respecting average. Fix some sign sequence $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ and consider the circular permutations :

$$(A.4.140) \quad \text{Perm}^\varepsilon := \sum_{i=1}^r \mathbf{m}^{\varepsilon_i, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}}$$

Then, unless all signs ε_i are the same, Perm^ε “factors up” and can be expressed in terms of the earlier weights $\mathbf{m}^{\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_s}$ ($s < r$).

Proof : Since the weights \mathbf{m}^ε (which are numbers) multiply exactly as the *pseudoexponentials* E^ε of *POST* (which are symbols), we may reason on the latter, for there is a natural action of *ALIEN* on these. Indeed, if we define $\text{Per}E^\varepsilon$ exactly like Perm^ε , checking that $\text{Per}E^\varepsilon$ splits up reduces to checking that, for any alien derivation $\mathbf{op} = \sum \mathbf{op}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}$ of homogeneous degree r , \mathbf{op} annihilates $\text{Per}E^\varepsilon$. But :

$$(A.4.141) \quad \mathbf{op} \text{Per}E^\varepsilon = \sum_{\text{circ}} \mathbf{op}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_r \sum_{\text{circ}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_r \mathbf{op}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}$$

and, unless all ε_i are the same, we may always find pairwise distinct points x_i in \mathbf{R} such that :

$$(A.4.142) \quad \text{sign}(x_1 - x_2) = \varepsilon_1, \dots, \text{sign}(x_{r-1} - x_r) = \varepsilon_{r-1}, \text{sign}(x_r - x_1) = \varepsilon_r$$

(Empowered by the Remark 1 above, we have taken the liberty of redefining ε_r). Therefore, we may calculate the flat mould \mathbf{Fop}^\bullet for these values of x_i . We get :

$$(A.4.143) \quad \mathbf{op} \text{Per}E^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r) \sum_{\text{circ}} \mathbf{Fop}^{x_1, \dots, x_r}$$

But by the criterion (A.4.130), \mathbf{Fop}^\bullet is alternal, and so the circular sum on the right-hand side of (A.4.143) *vanishes* (This is a classical property for alternal moulds). Therefore $\text{Per}E^\varepsilon$, and by the same token Perm^ε , “splits up”. Examples :

$$(A.4.144) \quad \text{Perm}^{+-} := \mathbf{m}^{+-} + \mathbf{m}^{-+} = \mathbf{m}^+ \mathbf{m}^-$$

$$(A.4.145) \quad \text{Perm}^{++-} := \mathbf{m}^{++-} + \mathbf{m}^{+-+} + \mathbf{m}^{-++} = \mathbf{m}^{++} \mathbf{m}^-$$

$$\text{Perm}^{+++} := 2(\mathbf{m}^{+++} + \mathbf{m}^{-+++})$$

$$(A.4.146) \quad = 2(\mathbf{m}^+ \mathbf{m}^{-+-} + \mathbf{m}^- \mathbf{m}^{++-} - \mathbf{m}^{+-} \mathbf{m}^{-+})$$

The complexity of the formulas greatly increases with the length of ε , but for sequences ε of length $r = pq$ and with a subperiod of length p (like in (A.4.146) with $r = 4, p = q = 2$), the split-up is of a very peculiar nature, and involves only terms $\mathbf{m}^{\varepsilon'}$ with the same subperiod. See §B.6. This has far-reaching implications, as it produces *lower bounds* for the weights \mathbf{m}^ε of all convolution- and realness-preserving averages, and thus rules out the existence of “magic averages” capable of killing off the “load” by brute force – i.e. without compensations.

The structure tensors R and L .

For any finite sign sequence \mathbf{c} ending with $c_r = -$, we define $\mathbf{mur}_{\mathbf{c}}$ as being the “one-path average” (never mind the contradiction in terms!) whose weights $\mathbf{mur}_{\mathbf{c}}^\varepsilon$ are 1 (resp. 0) if $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ is a cut-off of the endless sequence $\mathbf{c}^* = (c_1, \dots, c_{r-1}, -, +, +, +, \dots)$ (resp. if ε is not of that form). Reversing the roles of $+$ and $-$, for any sequence \mathbf{c} ending with $c_r = +$, we define $\mathbf{mul}_{\mathbf{c}}$ as the “average” which loads only the path of address $\mathbf{c}^* = (c_1, \dots, c_{r-1}, +, -, -, -, \dots)$. For coherence, we set $\mathbf{mur}_{\emptyset} = \mathbf{mur}$ and $\mathbf{mul}_{\emptyset} = \mathbf{mul}$. These trivial “averages” $\mathbf{mur}_{\mathbf{c}}$ (resp. $\mathbf{mul}_{\mathbf{c}}$) correspond to integration paths that cross the \mathbf{R}^+ axis a finite number of times at most and end up on its right (resp. left) side.

LEMMA A.4.147 (*The co-algebra of integration paths.*)

The finitary averages $\mathbf{mur}_{\mathbf{c}}$ and $\mathbf{mul}_{\mathbf{c}}$ are the only “one-path averages” which admit a finite co-product. That co-product is characterized by two new structure tensors R and L :

$$(A.4.148) \quad \text{cop}(\mathbf{mur}_{\mathbf{c}}) = \sum R_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \mathbf{mur}_{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{mur}_{\mathbf{b}}$$

$$(A.4.149) \quad \text{cop}(\mathbf{mul}_{\mathbf{c}}) = \sum L_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \mathbf{mul}_{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{mul}_{\mathbf{b}}$$

which in turn are wholly determined by the initial conditions :

$$(A.4.150) \quad R_{\emptyset}^{\emptyset, \emptyset} = 1 ; L_{\emptyset}^{\emptyset, \emptyset} = 1$$

and the very same “backward induction” as S and T (see (A.4.33), (A.4.34)) except that, each time the induction rules produce earlier terms $R_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ (resp. $L_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$) with one-term sequences $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ of the form $+$ (resp. $-$), these must be collapsed to the empty sequence \emptyset .

This natural collapse rule produces tensors $R_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ and $L_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ which automatically vanish only when $r(\mathbf{a}) + r(\mathbf{b}) > r(\mathbf{c})$, i.e. less often than the tensors $S_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ and $T_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$, which vanish as soon as $r(\mathbf{a}) + r(\mathbf{b}) \neq r(\mathbf{c})$. Thus we find :

$$\text{cop}(\mathbf{mur}_{-}) = \mathbf{mur}_{-} \otimes \mathbf{mur} + \mathbf{mur} \otimes \mathbf{mur}_{-} - \mathbf{mur} \otimes \mathbf{mur}$$

$$\begin{aligned} \text{cop}(\mathbf{mur}_{--}) &= \mathbf{mur}_{--} \otimes \mathbf{mur} + \mathbf{mur} \otimes \mathbf{mur}_{--} + \mathbf{mur}_{-} \otimes \mathbf{mur}_{-} \\ &\quad - \mathbf{mur}_{-} \otimes \mathbf{mur} - \mathbf{mur} \otimes \mathbf{mur}_{-} \end{aligned}$$

Similarly, with \mathbf{c} short for $\mathbf{mur}_{\mathbf{c}}$ and $(\mathbf{a} \parallel \mathbf{b})$ short for $\mathbf{mur}_{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{mur}_{\mathbf{b}}$:

$$\begin{aligned} \text{cop}(-+-) &= (-+- \parallel \emptyset) + (\emptyset \parallel -+-) \\ &\quad + (+- \parallel -) + (- \parallel +-) - (- - \parallel -) - (- \parallel - -) \\ &\quad + 2(- \parallel -) - (+- \parallel \emptyset) - (\emptyset \parallel +-) + (- - \parallel \emptyset) + (\emptyset \parallel - -) \\ &\quad - 2(- \parallel \emptyset) - 2(\emptyset \parallel -) + (\emptyset \parallel \emptyset) \end{aligned}$$

Proof : To establish Lemma (A.4.147), it is enough to check the compatibility of three things :

(*) the backward induction for R and L .

(**) the backward induction for S .

(***) the action of *ALIEN* on *AVER*.

Remark 1 : R and L have much the same asymptotic behaviour as S and T .

Remark 2 : Of all “one-path averages”, the only ones that preserve convolution are $\mathbf{mur}_\emptyset = \mathbf{mur}$ and $\mathbf{mul}_\emptyset = \mathbf{mul}$. If $\mathbf{c} \neq \emptyset$, the right-hand side of (A.4.148) or (A.4.149) contains at least *two terms*, namely $\mathbf{mur} \otimes \mathbf{mur}_\mathbf{c}$ and $\mathbf{mur}_\mathbf{c} \otimes \mathbf{mur}$, or $\mathbf{mul} \otimes \mathbf{mul}_\mathbf{c}$ and $\mathbf{mul}_\mathbf{c} \otimes \mathbf{mul}$.

Remark 3 : The main relevance of the co-products is of course to the Laplace transform \mathcal{L} . Thus (A.4.148) becomes :

$$(A.4.151) \quad \mathcal{L}\mathbf{mur}_\mathbf{c}(\hat{\phi} * \hat{\psi}) \equiv \sum \mathcal{R}_\mathbf{c}^{a,b}(\mathcal{L}\mathbf{mur}_a\hat{\phi}) (\mathcal{L}\mathbf{mur}_b\hat{\psi})$$

A5. Complement : what exactly does “exponential growth” mean for a ramified function ?

There is no hesitation about the right notion of *exponential growth inside a singularity-free sector* $\{\theta_1 \leq \arg \zeta \leq \theta_2\}$ or $\{\theta_1 < \arg \zeta < \theta_2\}$: it always means uniform exponential growth on the whole sector (if it is closed) or on each closed subsector thereof. It might also, conceivably, mean : exponential growth on each ray $\arg \zeta = \theta$, but this condition, on its own, doesn’t imply any global restriction on non-straight paths from 0 to ∞ , and so is thoroughly worthless.

But *exponential growth above a ramified axis* (say \mathbf{R}^+) is a much trickier notion to define. Indeed, two new difficulties arise here :

(*) the many-branchedness and *tendency toward faster-than-exponential growth on oft-crossing paths* (which of course presupposes an infinity of ramification points over \mathbf{R}^+).

(**) the possible presence of *explosive (non-integrable) local singularities*, which may obscure an underlying, quite regular growth pattern at infinity.

Though the two difficulties may occur simultaneously, they are quite distinct in nature and call for a separate treatment. We shall mainly deal with the first, which is more serious, and more directly relevant to our present investigation. So let us for the time being restrict our attention to functions $\hat{\varphi}(\zeta)$ which may have any number of singularities over \mathbf{R}^+ , but are *locally integrable*, or even *continuous*, at any one of them¹. This being understood, we reel off right away six natural conditions which any satisfactory notion of “ramified exponential growth” (REG for short) ought to verify :

(C1) Stability under convolution.

(C2) Stability under the taking of the convolution inverse (If we want to stick with local integrability even at 0, then the convolution inverse never exists, and so the condition should be rephrased as : $\hat{\varphi}_1$ in REG and $\hat{\varphi}_3$ in REG imply that $\hat{\varphi}_2$ in REG as soon as $\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2 = \hat{\varphi}_3$).

(C3) Stability under all *proper* alien derivations (and, preferably, under the solving of all natural systems of alien equations or systems).

(C4) There should exist at least *one* (and preferably many) *fixed* uniformizing average \mathbf{m} that preserves convolution and realness and such that, for any $\hat{\varphi}$ in REG, the uniform function $\mathbf{m}\hat{\varphi}$ should have exponential growth on \mathbf{R}^+ .

(C5) REG should cover all those resurgent functions $\hat{\varphi}$ of *natural origin* (i.e. arising from local analytic data) which are obvious candidates for inclusion in so far as they display uniform exponential growth inside their singularity-free sectors (even though they may, and usually do, grow at a far worse rate on their singularity-carrying axes).

1. This is essentially the same, because dividing $\varphi(z)$ by z is equivalent to integrating $\hat{\varphi}(\zeta)$, which turns integrable singularities into continuous ones

(C6) REG should include all functions $\hat{\varphi}$, “*natural*” or not, which possess uniform exponential growth on all their branches above \mathbf{R}^+ .

We shall now examine four such notions REG_i ($i = 1, 2, 3, 4$) of “ramified exponential growth”, of increasing strength, but of which only REG_3 meets all six conditions.

REG_1 : Weak exponential growth.

There are actually two variants. The *first* merely asks for exponential growth separately on each path that crosses \mathbf{R}^+ only a finite number of times (without any uniform growth restriction embracing all such paths). The *second, slightly stronger* variant imposes exponential growth (again separately, not uniformly) on all paths which cross \mathbf{R}^+ either a finite number of times, or “very seldom”, the critical condition being that the number of crossings prior to ζ should be of the form $O(\log \zeta)$.

Both notions seem natural enough. They verify the three stability conditions C1, C2, C3. For the weaker variant, this follows directly from the finiteness of the coproducts (A.4.148) and (A.4.149). For the stronger variant, this is slightly more difficult to establish (the condition about $O(\log \zeta)$ cannot be relaxed without forfeiting C1, C2, C3). Both notions also verify C5 and C6 (obviously!). But they fail miserably in regard to condition C4. This follows from the Proposition (A.5.5) below, which implies that any convolution and realness preserving average cannot load only the finitely-crossing paths, or even only the rarely-crossing paths (condition $O(\log \zeta)$!), but must necessarily load the two ever-crossing paths ($+ - + - \dots$) and ($- + - + \dots$).

REG_2 : Loaded exponential growth.

We say that $\hat{\varphi}(\zeta)$ satisfies REG_2 if there is some additive semi-group $\Omega \subset \mathbf{R}^+$ (containing all singular points of $\hat{\varphi}$ over \mathbf{R}^+ , but possibly larger than the semi-group generated by them) such that, on each branch of $\mathbf{R}^+//\Omega$, $|\hat{\varphi}(\zeta)|$ is bounded by the *load of that branch* multiplied by some uniform factor $C_1 \exp(C_2 |\zeta|)$ (We discussed the *load* notion only on $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$, but there are similar definitions and results on any $\mathbf{R}^+//\Omega$).

This definition is appealing. It meets the three stability conditions C1, C2, C3 (see the properties of the load in §A.4) as well as the comprehensiveness condition C5 : it covers all naturally arising growth patterns – and only them. It obviously meets C6. So is this the sought-after “proper” notion? Not at all, because it doesn’t fulfill condition C4. Indeed :

PROPOSITION A.5.1 (*Non-existence of “magic averages”.*)

Even on $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$, there exists no magic uniformizing average \mathbf{m} such that, for any $\hat{\varphi}(\zeta)$ with loaded exponential growth, the uniform function $\mathbf{m}\hat{\varphi}(\zeta)$ should have (ordinary) exponential growth.

For any given average, no matter what the signs of its weights (or their arguments, if we are dealing with complex weights), there exist ramified functions $\hat{\varphi}(\zeta)$ on $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$ which avoid all sign compensations in $\mathbf{m}\hat{\varphi}(\zeta)$ – even, by density, in the case of analytic or cohesive functions. So we can find a function $\hat{\varphi}(\zeta)$ with loaded growth and such that, on each interval $[r, r + 1]$, the integral $\int_r^{r+1} |\mathbf{m}\hat{\varphi}(\zeta)| d\zeta$ is about as large as :

$$(A.5.2) \quad load(\mathbf{m}; r) := \sum_{\varepsilon_i = \pm} |\mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}| |load(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)|$$

Therefore, to prove the Proposition, we must show that, for every convolution- and realness-respecting average \mathbf{m} , $load(\mathbf{m}; r)$ has faster than exponential growth as r goes to $+\infty$. This fact will result from the even more precise Proposition (A.5.5) below, which says that in fact $load(\mathbf{m}; r)$ grows faster than $(r!)^{1-\delta}$ ($\forall \delta > 0$). So, painful as it is, we must lay REG_2 to rest.

REG₃ : Crypto-exponential growth.

We say that $\hat{\varphi}$ satisfies *REG₃* if, for any compact set K of uniformizing averages \mathbf{m} of type P1 (convolution-preserving) and P3 (with proper growth) but not necessarily P2 (realness-preserving), the averaged function $\mathbf{m}\hat{\varphi}(\zeta)$ should have exponential growth with \mathbf{m} -uniform bounds :

$$(A.5.3) \quad |\mathbf{m}\hat{\varphi}(\zeta)| \leq C_0(K)e^{C_1(K)\zeta} \quad (\forall \mathbf{m} \in K ; K \text{ compact})$$

This time, all six conditions are fulfilled, and we hold the elusive “right notion”. But caution is in order : *REG₃* actually has two main variants, of which *only the second ensures condition C6*.

In the first variant, the *proper growth* condition P3 on \mathbf{m} is defined as in §A.2, relatively to the reduction of *ALIEN* into *Endo* $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$ (see (A2.62)) and the *compactness* of K is also interpreted in the “reduction topology” : a set K of averages \mathbf{m} (of whatever description) is looked upon as compact if its image under any reduction is compact (in the dual of $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$). This sounds quite alright, but with P3 and compactness thus understood, we don’t always have the bounds :

$$(A.5.4) \quad \mathbf{m}(r) := \sum_{\varepsilon_1=\pm} |\mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}| \leq (Const)^r$$

so that condition C6 clearly fails.

We might of course ensure C6 by imposing P4 (positive weights) but this would be an artificial, even crippling limitation.

We must, rather, turn to the *second variant* of *REG₃* : we now interpret P3 (“proper growth”) for \mathbf{m} as the slightly stronger notion of “*intrinsic analyticity*”, defined directly in *ALIEN* and *AVER*, with the help of *arborification*, without any reference to reductions : see §C.6 for a detailed treatment. And the compactness of K is also re-interpreted accordingly (see §C.6). Now, the bounds (A.5.4) are automatically ensured ; condition C6 is met ; and we don’t have to limit ourselves to positive averages.

So we shall abide by this second variant of *REG₃*. We are confident that this is indeed the “optimal notion” for ramified exponential growth – or very close to it. Formally, it is strikingly similar to “exponential growth in a sector” : like it, it crucially involves a uniformness condition, with compact sets K of averages now replacing the compact subsectors.

We may note that *REG₃* *does imply* a definite growth restriction on each path : this is the so-called “*burdened growth*” (see Lemma A.5.42), which is assuredly *no slower* than the “*loaded growth*” (see Lemma A.5.48) and probably equivalent to it (see Conjecture A.5.54). However, the vital part in *REG₃* is *not* the growth restriction, but the *branch-to-branch compensations* (implicit in (A.5.3)) which restore the “*essentially*” *exponential growth hidden* behind the façade of the much wilder “*burdened growth*”. Hence the phrase of *crypto-exponentiality*.

REG₄ : Strong exponential growth.

REG₄ asks for exponential growth on *all* paths, with a single uniform bound $|\hat{\varphi}(\zeta)| \leq C_0 \exp(C_1 \zeta)$. Condition C6 is met (in fact, *REG₄* is just C6 under another name) and so are C1 and C4, but not C2 nor C3 nor C5 – simply because, as we observed repeatedly, even the simplest operations tend to destroy (ramified) uniform exponential growth.

So much for *REG₃* and its inadequate competitors *REG₁*, *REG₂*, *REG₄*. We must now substantiate the various claims we have made.

PROPOSITION A.5.5 (*Absolute necessity of branch-to-branch compensations.*)

If a uniformizing average \mathbf{m} respects convolution (P1) and realness (P2), then for each $\delta > 0$, the expression :

$$(A.5.6) \quad \text{load}(\mathbf{m}; r) := \sum_{\varepsilon_i = \pm} | \mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} | | \text{load}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) |$$

grows faster than $(\Gamma(r))^{1-\delta}$.

This key result, which shows that even the most powerful averages cannot operate by brute force, will result from the following four lemmas :

LEMMA A.5.7 For any fixed $k \geq 1$, we say that a sign-sequence ε is k -alternating if $\varepsilon_i = +$ (resp. $-$) when $i = k$ (resp. 0) mod $2k$. For other values of i , ε_i may be anything. Then there exists a universal $C_k > 0$ such that :

$$(A.5.8) \quad | \text{load}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) | \geq (C_k)^r r!$$

for all k -alternating sequences.

Since “ k -alternating” is a special case of “ k -alternate”, this is in fact a special case of Lemma (A.4.86). But for periodic sequences, there is another way to derive the bounds (A.5.8). Consider for instance the sign sequences :

$$(A.5.9) \quad \varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{2n}) = (+ - + - \dots + -)$$

$$(A.5.10) \quad \varepsilon'' = (\varepsilon''_1, \dots, \varepsilon''_{4n}) = (+ + - - \dots + + - -)$$

$$(A.5.11) \quad \varepsilon''' = (\varepsilon'''_1, \dots, \varepsilon'''_{6n}) = (+ + + - - - \dots + + + - - -)$$

etc... Then, applying the rule (A.4.43), we see at once that :

$$(A.5.12) \quad 1 = T_{\varepsilon''}^{\varepsilon'; \varepsilon'} = T_{\varepsilon'''}^{\varepsilon'; \varepsilon'; \varepsilon'} = T_{\varepsilon''''}^{\varepsilon'; \varepsilon'; \varepsilon'; \varepsilon'} ; \text{ etc...}$$

where $T_c^{a,b}$ denotes the usual, first-order structure tensor of *POST* ; and $T_d^{a;b;c}$ etc... its higher-order equivalents. In view of the renormalization (A.4.92), (A.4.94), we have :

$$(A.5.13) \quad 0 < | \frac{\text{load}(\varepsilon') \text{load}(\varepsilon')}{\text{load}(\varepsilon'')} | | T_{\varepsilon''}^{\varepsilon'; \varepsilon'} | < 1$$

$$(A.5.14) \quad 0 < | \frac{\text{load}(\varepsilon') \text{load}(\varepsilon') \text{load}(\varepsilon')}{\text{load}(\varepsilon''')} | | T_{\varepsilon'''}^{\varepsilon'; \varepsilon'; \varepsilon'} | < 1$$

etc... (We could in fact dispense with the absolute values). In combination with (A.5.12) and the sharp inequality :

$$(A.5.15) \quad | \text{load}(\varepsilon') | \geq (C_1)^r r! \quad (r = 2n = \text{length of } \varepsilon')$$

(with $C_1 = \pi/8$; see (A.4.84)), the relations (A.5.13), (A.5.14) etc... produce analogous, higher-order inequalities :

$$(A.5.16) \quad | \text{load}(\varepsilon'') | \geq (C_2)^r r! \quad (r = 4n = \text{length of } \varepsilon'')$$

$$(A.5.17) \quad | \text{load}(\varepsilon''') | \geq (C_3)^r r! \quad (r = 6n = \text{length of } \varepsilon''')$$

etc... with $C_2 = (C_1)^2 2^{-r}$; $C_3 = (C_1)^3 3^{-r}$; etc...

LEMMA A.5.18 (*Oddness of $kross(\mathbf{m}; t)$.*)

Let \mathbf{m} be any convolution-preserving uniformizing average and consider the generating functions :

$$(A.5.19) \quad cross^+(\mathbf{m}; t) := 1 + \mathbf{m}^+t + \mathbf{m}^{+-}t^2 + \mathbf{m}^{++}t^3 + \dots$$

$$(A.5.20) \quad cross^-(\mathbf{m}; t) := 1 + \mathbf{m}^-t + \mathbf{m}^{-+}t^2 + \mathbf{m}^{--}t^3 + \dots$$

$$(A.5.21) \quad kross(\mathbf{m}; t) := cross^+(\mathbf{m}; t)cross^-(\mathbf{m}; -t)$$

Then $kross(\mathbf{m}; t)$ is always of the form $1 +$ an odd power series of t . Moreover, if \mathbf{m} preserves realness by having real weights, then :

$$(A.5.22) \quad kross(\mathbf{m}; t) \equiv 1$$

Lastly, if \mathbf{m} preserves realness by having pair-wise conjugate weights, then :

$$(A.5.23) \quad kriss(\mathbf{m}; t) := kross(\mathbf{m}; it) = 1 + \sum a_{2n+1}t^{2n+1} \text{ with } a_{2n+1} \in \mathbf{R}$$

Proof : Once again, we mentally substitute the pseudoexponentials E^ε for the weights \mathbf{m}^ε . This gives us the license to alien-differentiate the *coefficients* of our generating functions. Relative to any complete family $\{\Delta_n\}$ of (proper) alien derivations (we may take the standard family), we find :

$$(A.5.24) \quad \Delta_{2n}cross^+(\mathbf{m}; t) \equiv A_{2n}t^{2n}cross^+(\mathbf{m}; t)$$

$$(A.5.25) \quad \Delta_{2n}cross^-(\mathbf{m}; t) \equiv -A_{2n}t^{2n}cross^-(\mathbf{m}; t)$$

$$(A.5.26) \quad \Delta_{2n+1}cross^+(\mathbf{m}; t) \equiv A_{2n+1}t^{2n+1}cross^-(\mathbf{m}; t)$$

$$(A.5.27) \quad \Delta_{2n+1}cross^-(\mathbf{m}; t) \equiv -A_{2n+1}t^{2n+1}cross^+(\mathbf{m}; t)$$

for some non-zero constants A_n depending solely on the family $\{\Delta_n\}$. Therefore :

$$(A.5.28) \quad \Delta_{2n}kross(t) = 0$$

$$(A.5.29) \quad \Delta_{2n+1}kross(t) = A_{2n+1}t^{2n+1}\{cross^+(t)cross^+(-t) + cross^-(t)cross^-(-t)\}$$

$$(A.5.30) \quad \Delta_n(kross(t) + kross(-t)) = 0$$

Therefore :

$$(A.5.31) \quad kross(t) + kross(-t) \equiv 2$$

which is the announced oddness result. Under the added assumption of *real* (resp. *pair-wise conjugate*) weights, we have :

$$(A.5.32) \quad cross^+(t) \equiv cross^-(t) \text{ (resp. } cross^+(t) \equiv conj\ cross^-(t)\text{)}$$

which in combination with the oddness result leads to (A.5.22) (resp. (A.5.23)).

By the way, the “criss-cross functions” of all the main averages to be constructed in this investigation may be found in §B.6 infra.

LEMMA A.5.33 *If a uniformizing average \mathbf{m} respects convolution (P1) and realness (P2), then for each $\delta > 0$:*

$$(A.5.34) \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} (\Gamma(r))^{1+\delta} | \mathbf{m}^{\pm\mp\pm\pm\dots\pm r} | = +\infty$$

If \mathbf{m} has *real weights*, then (A.5.22) combined with (A.5.32) shows that :

$$(A.5.35) \quad \text{cross}^+(t)\text{cross}^+(-t) \equiv \text{cross}^-(t)\text{cross}^-(-t) \equiv 1$$

So either the power series $\text{cross}^\pm(t)$ have finite or zero radius of convergence, or they are of the form $\exp(S(t))$, where $S(t)$ is an odd polynomial or some odd power series with infinite convergence radius. In all cases, the estimates (A.5.34) readily follow.

If on the other hand \mathbf{m} merely has *pair-wise conjugate complex weights*, it is advisable to work with the *real* series $\text{kriss}(t)$ rather than $\text{kross}(t)$. If $\text{kriss}(t)$ has zero or finite convergence radius, the estimates (A.5.34) are obvious. That leaves the case when the series $\text{kriss}(t)$ sums up to an entire function. We observe first that $\text{kriss}(0) = 1$ and that $\text{kriss}(t)$ remains within the interval $[0, 2]$ when t runs through \mathbf{R} . To see this, it is enough, due to the oddness of $\text{kriss}(t) - 1$, to show that kriss has no real zero of *odd* order on \mathbf{R} . But this follows from the factorization :

$$(A.5.36) \quad \text{kriss}(t) = \text{cross}^+(it)\overline{\text{cross}^+(it)}$$

which allows only real zeroes of *even* order, which clearly permits no crossing of the real axis. That being so, if (A.5.34) didn't hold, $\text{kriss}(t)$ would be an entire function of *strictly subexponential type*, expressible by an (uncorrected) Hadamard product. It is well-known, however, that such functions are unbounded on any straight line. This contradicts the fact that $0 \leq \text{kriss}(t) \leq 2$ for t real, and establishes the Lemma (A.5.33).

LEMMA A.5.37 *For any uniformizing average \mathbf{m} we set :*

$$(A.5.38) \quad \text{alt}(\mathbf{m}; k, r) = \sup_{\varepsilon_i = \pm} |\mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}| \quad (\varepsilon_{2nk+1} = +; \varepsilon_{2nk} = -; \forall n)$$

the sup being taken over all k -alternating sequences $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ of length r . (“ k -alternating” has the same meaning as in Lemma (A.5.7)). Then, if the average \mathbf{m} respects convolution and realness, we have the asymptotic estimate :

$$(A.5.39) \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} (\Gamma(r/k))^{1+\delta} \text{alt}(\mathbf{m}; k, r) = +\infty \quad (\forall \delta > 0; \forall k \text{ fixed})$$

Proof : For $k = 1$, this is simply the relation (A.5.34). For $k \geq 2$, we may reason as follows. We associate with \mathbf{m} the k -dilated average $\text{dil}^k \mathbf{m}$ defined via the weights :

$$(A.5.40) \quad (\text{dil}^k \mathbf{m})^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} := \sum_{a_j = \pm}^* \mathbf{m}^{a_1, \dots, a_{kr}} \quad (\varepsilon_j = \pm; a_j = \pm)$$

with $a_{ki} = \varepsilon_i$ ($\forall i$) and a sum \sum^* extending to all a_j of index $j \neq 0 \pmod k$.

Like the original \mathbf{m} , the dilated object $\text{dil}^k \mathbf{m}$ is clearly a *uniformizing average* which respects *convolution* and *realness* (P1+P2), and to which the estimates of Lemma (A.5.33) may be applied. However, since the sum \sum^* in (A.5.40) contains exactly $2^{(k-1)r}$ terms, we have :

$$(A.5.41) \quad |(\text{dil}^k \mathbf{m})^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}| \leq 2^{(k-1)r} \text{alt}(\mathbf{m}; k, kr)$$

If we now take the relation (A.5.34) with $dil^k \mathbf{m}$ in place of \mathbf{m} and rk in place of r , and combine this with (A.5.41), we find :

$$(A.5.42) \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} (\Gamma(r))^{1+\delta} alt(\mathbf{m}; k, kr) = +\infty \quad (\forall \delta > 0; \forall k \text{ fixed})$$

which is the same as (A.5.39) with (k, rk) in place of (k, r) .

To wind up the proof of Proposition (A.5.5), we now return to the sum (A.5.6). We then fix some k and concentrate on the contribution of the k -alternating sequences $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$. For *each one of these*, the corresponding $load(\varepsilon)$ is bounded from below by (A.5.8); while for at least *some of them* the weights \mathbf{m}^ε are asymptotically bounded from below by (A.5.39). Therefore, for any $\delta' > 0$ and $\delta'' > 0$, the expression $load(\mathbf{m}; r)$ grows faster than $(\Gamma(r))^{1-\delta'} (\Gamma(r/k))^{-1-\delta''}$ as r goes to $+\infty$. This holding for any fixed k , $load(\mathbf{m}; r)$ in fact grows faster than $(\Gamma(r))^{1-\delta}$ for any $\delta > 0$, which completes the proof.

Remark : Mismatch between “loads” and “weights”.

The gist of Proposition (A.5.5) is that the *rate of decrease* of the weights of even the best averages can never match the *rate of increase of the load*. This deserves some consideration, because the first appearances are deceptive : if we focus only on the ever-crossing paths $\pm \mp \pm \dots$, the weights \mathbf{m}^ε of the “finest” averages (like the organic average **mon**, see §B.2, or more generally the averages induced by pseudodiffusions, see §C.2) decrease like $1/r!$, whereas the load increases like $r!$. So *here* the two seem to match perfectly. But as soon as the ratio $cr(r)/r$ of crossings $cr(r)$ per interval length r remains strictly less than 1, or even goes to 0, this appearance is shattered and there opens a yawning gap between the two. We saw this in detail for k -alternating paths, where the load keeps growing like $r!$, whereas even in the most favourable cases the weights cannot decrease faster than $(r/k)!$. This was enough to prove Proposition (A.5.5), but the discrepancy actually gets worse when the crossing ratio decreases still further, e.g. when $cr(r) \sim r^\alpha$ with $0 < \alpha < 1$. The reader may easily check this fact by evaluating, for such moderately-crossing paths, the asymptotics of the load (by resorting to the induction (A.4.72)) and compare this with the asymptotics of the weights **mon** $^\varepsilon$ of the organic average.

Only when the crossing ratio decreases still further, does this discrepancy begin to fade away, and it disappears altogether when $cr(r) \sim Const \times \log r$. Thus, strangely enough, although the rate of increase of the load is fiercest on ever-crossing paths, from the point of view of matching loads and weights, the worst case corresponds to moderate crossing rates, neither too high nor too low.

The long and the short of it, once again, is that there can exist no “magic” averages and that we must make do with “well-behaved” ones, whose effectiveness is inescapably bound up with the presence of branch-to-branch compenstions.

LEMMA A.5.43 “Burdened growth”.

Each ramified function $\hat{\varphi}(\zeta)$ with crypto-exponential growth (REG_3) is ipso facto subject to universal growth restrictions :

$$(A.5.44) \quad |\hat{\varphi}(\zeta)| < burden(\varepsilon) \times C_0 \times e^{C_1 \zeta}$$

on each branch of address ε . (The constants C_0, C_1 depend on $\hat{\varphi}$.)

Proof : We reason on $\mathbf{R}^+ // \mathbf{N}$ for simplicity. We fix some path $\Gamma_{\mathbf{a}}$ of infinite address $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ and consider the corresponding “one-path average” $\mathbf{m}_{\mathbf{a}}$, which of course does not respect convolution.

Nonetheless, for each large enough compact set K of averages of type P1 and P3 (see REG_3) and for each finite cut-off $\varepsilon = (a_1, \dots, a_r)$ od \mathbf{a} , there exist finite decompositions of the form :

$$(A.5.45) \quad \mathbf{m}_\varepsilon = \sum c_\varepsilon^i \mathbf{m}_i \quad (m_i \in K; c_\varepsilon^i \in \mathbf{C}; \varepsilon = (a_1, \dots, a_r))$$

such that \mathbf{m}_ε and $\mathbf{m}_\mathbf{a}$ coincide upto $\zeta = r + 1$, in the sense that :

$$(A.5.46) \quad (\mathbf{m}_\mathbf{a} \hat{\varphi})(\zeta) = (\mathbf{m}_\varepsilon \hat{\varphi})(\zeta) \text{ if } 0 \leq \zeta \leq r + 1 \quad (\forall \hat{\varphi})$$

So, by (A.5.3) and for ζ in $[0, r + 1]$:

$$(A.5.47) \quad |(\mathbf{m}_\mathbf{a} \hat{\varphi})(\zeta)| \leq \left(\sum_i |c_\varepsilon^i| \right) C_0(K) e^{C_1(K)\zeta}$$

But $(\mathbf{m}_\mathbf{a} \hat{\varphi})(\zeta)$ is simply the value of $\hat{\varphi}(\zeta)$ on the path $\Gamma_\mathbf{a}$, so that (A.5.47) yields a universal growth restriction of type (A.5.44) with :

$$(A.5.48) \quad \text{burden}(\varepsilon) \leq \sum_i |c_\varepsilon^i|$$

LEMMA A.5.49 “Burdened growth” is no slower than “loaded growth”.

Proof : We work in $POST$ (noted multiplicatively) and apply *any* convolution-preserving average \mathbf{m} to the identity :

$$(A.5.50) \quad A.B = 1 \text{ with } A = 1 + (t/2)(E^+ - E^-) = B^{-1} \quad (A, B \in POST; t \in \mathbf{C})$$

Due to P1 we get :

$$(A.5.51) \quad \mathbf{m}(A)\mathbf{m}(B) = 1$$

and also, in view of (A.4.66) :

$$(A.5.52) \quad \mathbf{m}(A) = 1 + (t/2)(\mathbf{m}^+ - \mathbf{m}^-)$$

$$(A.5.53) \quad \mathbf{m}(B) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n t^n \sum_{\varepsilon_i = \pm} \mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \text{load}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

So clearly :

$$(A.5.54) \quad \sum_{\varepsilon_i = \pm} \mathbf{m}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \text{load}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (1/2)^n (\mathbf{m}^+ - \mathbf{m}^-)^n$$

Thus the element B of $POST$, and so too all the functions $\hat{\varphi}(\zeta)$ akin to B (like the functions $\hat{\varphi}_k(\zeta)$ of Lemma (A.3.41)) have, on the one hand, *strict loaded growth* and, on the other hand, in view of (A.4.53), they satisfy the axioms REG_3 of crypto-exponentiality, which automatically imply *burdened growth* (Lemma (A.5.49)). So *burdened growth* cannot be a stronger condition (i.e. it cannot be a slower type of growth) than *loaded growth*. In fact, all the indications are that :

CONJECTURE A.5.55 *Burdened growth is the same as loaded growth.*

Annexe D

Conclusion de l'article "Well-behaved uniformizing averages and their applications to real resummation".

G6. Twenty-point conclusion.

Point 1. Three related challenges.

The present investigation addresses, and claims to solve, three problem complexes rooted in *resummation theory* and the study of *local analytic objects*.

The first challenge is that of *real resummation* : how to assign a real sum $\varphi(z)$ to a real, divergent series $\tilde{\varphi}(z)$ of natural, but possibly non-linear origin ? This usually forces us to Borel-transform $\tilde{\varphi}(z)$ into $\hat{\varphi}(\zeta)$ and then to Laplace-sum $\hat{\varphi}(\zeta)$ over \mathbf{R}^+ . It may also be necessary to carry out a finite number of acceleration transforms – which again calls for integration over \mathbf{R}^+ . The trouble is that $\hat{\varphi}(\zeta)$ may have infinitely many of ramification points over \mathbf{R}^+ , in which case it usually grows at faster-than-exponential rate on most paths from 0 to ∞ which cross \mathbf{R}^+ often enough. So, instead of the multivalued function $\hat{\varphi}(\zeta)$, we must integrate some proper average $\mathbf{m}\hat{\varphi}(\zeta)$, whereby the *uniformizing average* \mathbf{m} must be so chosen as to respect convolution (P_1), realness (P_2) and lateral growth (P_3). That latter clause means that $\mathbf{m}\hat{\varphi}(\zeta)$ must reproduce the moderate growth of $\hat{\varphi}(\zeta)$ on both sides of \mathbf{R}^+ , rather than its abnormal, doped-up growth on oft-crossing paths. Averages \mathbf{m} which manage to reconcile these antagonistic demands are declared *well-behaved*. Additional properties such as scale-invariance (P_4), having positive weights (P_5), or being splittable (P_6) etc..., are welcome, but not strictly necessary.

An inexhaustible source of divergent-resurgent series is the category of *analytic local objects*, chiefly : local vector fields and diffeomorphisms, but also germs of differential, difference, functional,..., equations or systems. Our *second problem* has to do with *object analysis*, i.e. the calculation and study of the analytic invariants attached to such objects. Whenever the analytic invariants happen to be holomorphic as well (i.e. holomorphic functions of the object \mathbf{Ob}), which roughly is the case with “resonant objects” of all description, then these invariants A_ω can always be read off the Bridge Equation which, in each of its possible formulations, connects the *alien derivatives* $\Delta_\omega\hat{\varphi}$ of some resurgent functions $\tilde{\varphi}$ (functorially linked to be object \mathbf{Ob}) to *ordinary differential operators* A_ω , which are the sought invariants. This works fine with any choice of alien derivations Δ_ω , but only for astutely chosen systems $\{\Delta_\omega\}$ do the corresponding operators $\{A_\omega\}$ admit a transparent characterization *in terms of their sole growth pattern* (in ω). So the challenge here is to construct such “well-behaved” systems of alien derivations Δ_ω .

The *third problem*, *object synthesis*, is the reverse of object analysis : we start from a given set of operators A_ω with the proper growth pattern (see above) and ask for an object \mathbf{Ob} (as simple as possible and, ideally, canonical) admitting the A_ω as its invariants. The prime requirement here is for a system of *well-behaved resurgence monomials*, i.e. a collection of elementary resurgent functions which must be (i) easy to multiply, differentiate and alien-differentiate ; (ii) numerous enough to generate all other resurgent functions ; (iii) subject to very stringent growth restrictions (that’s really the difficult part).

Though our three problems would seem to be quite distinct, they can in fact be dealt with in parallel, especially the first pair. The third problem calls for extra inputs, but solving it is particularly rewarding, because in so doing we stumble upon the existence - which could in no way be taken for granted - of an unmistakably *canonical* solution, the so-called *paralogarithmic* (or *spherical*) *synthesis*, with many fascinating properties.

Point 2. Proper notion of ramified exponential growth.

We begin with a detailed investigation of the *algebra* of resurgent functions over \mathbf{R}^+ ; the *bi-algebra* of alien derivations over \mathbf{R}^+ ; and the *co-algebra* of uniformizing averages over \mathbf{R}^+ . It turns out that four *structure tensors* and a number of *structure constants* attached to the ramification points (*stretch*; *twist*; *height*; *load*; *burden*) command the whole picture. We show that even the most run-of-the-mill operations tend to destroy uniform exponential growth (on all paths over \mathbf{R}^+) and to change it into a fiercer growth type, the so-called *loaded growth*. Loaded growth itself is perfectly stable but - here lies the crux - not amenable to *brute-force resummation*. In other words, there can be no *magic* averages, but only *well-behaved* ones, which have to rely on branch-to-branch compensations. Accordingly, we introduce what we hold to be the proper notion of “ramified exponential growth” (REG₃) as “*orthogonality*” to all *well-behaved averages*, plus some natural uniformness condition.

Point 3. The “uniform” family.

The *uniform average* **mun** (which formerly we used to call *median average*) and the *uniform alien derivation* **dun** (whose homogeneous components \mathbf{dun}_ω are none other than the standard alien derivations Δ_ω) are *uniquely simple* in that their weights don’t depend on the increments ω_i , but only on the crossing pattern, or rather a rough abstract of it, namely the number of pluses and minuses among the address signs ε_i . However, this simplicity is of little avail, because **mun** and **dun** don’t verify the condition P_3 .

Point 4. The “organic” family.

The *organic average* **mon** and *alien derivation* **don** (as well as the closely related derivations **dor** and **dol**) do depend on the increments ω_i , but with an optimally simple, i.e. rational dependence. Moreover, they combine all desirable properties : they respect convolution (P_1), realness (P_2), lateral growth (P_3), are scale-invariant (P_4) and have positive weights (P_5). Their weights achieve the fastest possible rate of decrease on oft-crossing paths. Yet another distinction is that all “passage moulds” (connecting any pair of operators in the organic family) are given by neat, explicit formulae. So **mon** and **don** are emphatically the best choice for most problems.

Point 5. The “Catalan” family.

The *Catalan average* **man** and *alien derivation* **dan** (plus a host of related objects) were discovered while searching for *splittable* operators (i.e. operators which retain a finite co-product even after being split along two different carrier-sets). Though defined for all real positive increments ω_i , they are specially simple for integer-valued ω_i , because in that case their weights are rational (essentially : products of Catalan numbers) and depend only on the size of the various clusters of address signs ε_i . **man** and **dan** are well-behaved (P_1, P_2, P_3 , also P_5 and P_6) but they lack scale-invariance (P_4). Their main asset is “splittability” (and “secability”) but they are also quite useful as a stepping-stone to the study of the “Brownian” average.

Point 6. The “Bernouilly” family.

The *Bernouilly average* **men** and *alien derivation* **den** stand in a class apart. They are the exact opposite of **mun** and **dun** in so far as the absolute values of their weights do not depend on the address signs ε_i , but only on the increments ω_i . They are well-behaved (P_1, P_2, P_3 , but subject to a diophantine condition) and give rise to simple “passage moulds”, but they lack P_4, P_5, P_6 etc... and have only limited usefulness, apart from providing an instance of a well-behaved average which has *pairwise complex-conjugate* (rather than *real*) weights and which is neither scale-invariant, nor capable of being made so by dilatation.

Point 7. The “hyperlogarithmic” family.

The *hyperlogarithmic average* **min** has little intrinsic importance, but the related *alien derivation* **din** and *resurgence monomials* are quite relevant to object synthesis, and generate a fascinating type of resurgence (“unilateral synthesis resurgence”). The hyperlogarithmic average **min** and *alien derivation* **din** are also remarkable in that they provide an example of alien operators which fail to be well-behaved, but only by a hair’s breadth : they are strictly “more analytic” than **mun** and **dun**, but strictly “less analytic” than **rul** and **lur** (the right-to-left and left-to-right alien automorphisms).

Point 8. Generation by diffusions ; prodiffusions ; pseudodiffusions.

There exists a systematic procedure for producing well-behaved averages and, although in theory only a tiny fraction of all well-behaved averages can be generated in this way, that tiny fraction happens to include most of the really important cases. The procedure relies on one-dimensional “diffusion” processes, with *distribution* $\text{foe}_\omega(x)$ (the probability density around x at the time ω) and with *co-distribution* $\text{goe}_\omega(y)$ (the Fourier transform of foe_ω). We write “diffusion” within inverted commas, because there is no strict need here for foe_ω to be ≥ 0 . It is enough that $\{\text{foe}_\omega\}$ (resp. $\{\text{goe}_\omega\}$) be a convolution (resp. multiplicative) semi-group, with the normalization $\int \text{foe}_\omega(x)dx \equiv 1$ (resp. $\text{goe}_\omega(0) \equiv 1$).

To any such “diffusion” one may associate, via the weights, a uniformizing average **moen** and an alien derivation **doen**, which are automatically P_1 and P_3 . For a symmetrical “diffusion” (i.e. with even distributions : $\text{foe}_\omega(x) \equiv \text{foe}_\omega(-x)$) **moen** and **doen** are also P_2 , and therefore *well-behaved*.

Prodiffusions are a special instance of “diffusions”, but with distributions extending analytically to a whole half-plane. In other words, the pair $(\text{foe}_\omega, \text{goe}_\omega)$ of Fourier-Fourier transforms is replaced by a pair $(\text{fo}_\omega, \text{ge}_\omega)$ of Borel-Laplace transforms.

Pseudodiffusions may be derived from “diffusions” by changing the time-one distribution $\text{foe}_1(x)dx$ into $\text{foe}_1(x^n)dx^n$ (n odd) and going over to the limit $n = \infty$. Alternatively, *pseudodiffusions* may be viewed as special “diffusions”, whose distributions $\text{foe}_\omega(x)$ are spread, not over the *real*, but *surreal* axis (in the sense of Knuth’s, Conway’s, and Kruskal’s *surreal numbers*).

Point 9. Remarkable averages re-assessed in the light of “diffusion”.

The diffusion-induced averages which respect realness (P_2) and are scale-invariant (P_4), depend on a single parameter τ ($0 < \tau < \infty$) and correspond to co-distributions of the form $\text{goe}_\omega(y) \equiv \exp(-\omega | y |^\tau)$. They constitute the important family of “homogeneous” averages τ **moun**, which not only encompasses the Cauchy average **mayn** ($\tau = 1$) and Brownian average **mown** ($\tau = 2$) as special cases, but also the organic average **mon** ($\tau = 0$) and uniform average **mun** ($\tau = \infty$) as limit-cases.

Although the Catalan average **man** and its satellites **mran**, **mlan**, etc..., lack scale-invariance, they too can be generated by suitable diffusions.

The organic average **mon**, apart from being a limit-case (for $\tau = 0$) of the diffusion-induced, homogeneous averages, can also be directly generated by a pseudodiffusion. It even has the property of being induceable by any *symmetrical* pseudodiffusion, whatever its distribution.

Even the Bernoulli and hyperlogarithmic averages **men** and **min** can be made to fit into this framework, provided we slightly relax the definitions. However, these small infringements are enough to rob **men** and **min** of the full regularity of diffusion-induced averages : **men** is well-behaved only

conditional on some diophantine condition, and **min**, too, falls short of the target, though by a small margin.

It may be noted that our main averages enjoy *universality properties* which enhance their status : **mun** is a universal *decelerate*; **mon** a universal *accelerate*; and **mown** a universal *dilatate*. Which simply means that, under repeated application of these general operations (deceleration; acceleration; dilatation) any uniformizing average P_1, P_2 picked at haphazard tends, under quite generic conditions, to produce **mun, mon, mown**.

Although most of the “remarkable” averages turn out to be induced by some form or other of “diffusion”, this is not the case - not by a long shot - for “random” averages. There are even precise theorems to the effect that, in the space of all well-behaved averages (P_1, P_2, P_3) , those induced by diffusions or pseudodiffusions are very thinly spread out, and that well-behaved averages are themselves exceptional among the general ones (even of type P_1, P_2).

Point 10. Can arborification be bypassed ?

As already pointed out, all diffusion-induced uniformizing averages are well-behaved, but so far the only method capable of establishing the key property P_3 (growth condition) in all cases is based on the so-called *arborification technique*, which changes mould expansions indexed by *totally ordered sequences* into expansions indexed by *partially ordered, arborescent sequences*. It is as yet an open question whether arborification is strictly indispensable. To date, short cuts to P_3 are available only in special instances, i.e. for **man** and **mown**; for averages induced by pseudodiffusions; and for a few other averages simply related to these.

Point 11. Uniformizing averages and pseudovisible materializations.

To any system of resurgence monomials or, more accurately, to any pseudovisible materialization (i.e. to any full-structure representation of the symbolic pseudovisibles in the algebra of resurgent functions) one may associate a well-defined uniformizing average which in some sense is orthogonal to it. On the other hand, any prodiffusion $(\text{feo}_\omega(x), \text{geo}_\omega(y))$ jointly induces a pseudovisible materialization and a uniformizing average, the latter being the ortho-associate of the former, with automatic transmission of P_1, P_2, P_3 . All this underscores the interrelatedness of the pivotal notions in the present investigation.

Point 12. Hyperlogarithmic and paralogarithmic resurgence monomials.

To the choices $\text{geo}_\omega(y) \equiv \exp(-\omega y)$ and $\text{geo}_\omega(y) \equiv \exp(-\omega y - \bar{\omega}c^2/y)$ there answer respectively the *hyperlogarithmic* and *paralogarithmic* resurgence monomials, so-called because their dependence on the increments ω_i is indeed of hyperlogarithmic, resp. “compensated” hyperlogarithmic type. The uniformizing averages produced in this way are not particularly useful, but the related *alien derivations* and *resurgence monomials* are supremely so.

Point 13. Properties of the hyperlogarithms.

The hyperlogarithmic resurgence monomials have been around for a long time, but (for want of absolute convergence in $\int \text{feo}_\omega(x)dx$) they lack P_3 (“proper growth”) and are poorly suited for *object synthesis*. Typically, object synthesis with them is possible only exceptionally and, when possible, there tend to exist countably many determinations, all on the same footing. Nonetheless, the hyperlogarithms deserve special attention because (i) they are a limit-case (for $c = 0$) of the paralogarithms (ii) they represent the latter’s “transcendent” or “ramified” core (iii) the associated *scalar* hyperlogarithms U^\bullet

and V^\bullet provide two dual bases for expressing the classical hyperlogarithms à la Lappo-Danilewsky, and display an interesting dualness between their *differential* and *ramification* properties.

Point 14. Properties of the paralgorithms.

The paralogarithmic resurgence monomials are of recent introduction, but one may safely predict an active career for them. They are not only “well-behaved”, but ideally suited for object synthesis : all the relevant generating series made of them *converge*, for c positive and large enough.

It may be shown that the presence of the “canonicity parameter” c is not a blemish, but a bare necessity. So too is the non-algebraic nature of the factor $\exp(-\bar{\omega}c^2/y)$ by which the paralogarithmic differ from the hyperlogarithmic monomials.

In the *geometric model*, the paralogarithmic monomials are defined on the whole Riemann sphere, with a remarkable involution (the *antipodal involution*) linking their behaviour at the poles $z = \infty$ and $z = 0$.

Point 15. Well-behaved uniformizing averages applied to real resummation.

The natural field of application for well-behaved averages is quite vast : it covers more or less all situations characterized by a combination of (i) divergence (ii) realness (iii) non-linearity. We name here but a few instances :

- (A) The real normalization of real resonant vector fields.
- (B) The real normalization of unitary or real resonant diffeomorphisms.
- (C) The real resummation and parametrization of the formal solutions of singular differential (or difference) equations or systems, both on the “good side” (which is easy) and on the “bad side” (which is not).
- (D) The well-behaved uniformizing averages also lead to a simplification of the resummation-theoretical proof of the non-accumulation theorem for limit-cycles (“Dulac’s conjecture”).

Point 16. An apologia for the well-behaved averages.

There are precise constraints on any real-resummation procedure worth the name. The first and most obvious requirements are *comprehensiveness* (the method should apply to as many natural situations as possible) and *constructiveness* (which rules out those Platonic resummation theories like [II] which rest content with the assurance of a one-to-one correspondence between the “formal” and “geometric” sides, without bothering about the implementation). Next, there is *exactness* : the sum $\varphi(z)$ should be defined *exactly*, not up to some ideal, however small. Then comes what we might call *universality* or *non-adhocism* : the procedure should in no way depend on the origin of the divergent series $\tilde{\varphi}(z)$ to be resummed, not only because we may be ignorant of that origin, but also because we want the procedure to apply uniformly to all “superpositions” (sums ; products ; composition products ; derivatives ; etc...) of series of various origin, known or unknown. Closely connected with universality are *linearity* and *multiplicativeness* and, more generally, the property of commuting with the four operations $(+, \times, 0, \partial)$.

The next demand, *uniqueness*, tends to be surrounded by a lot of muddled thinking. It is legitimate in the trite sense (*uniqueness 1*) that a given resummation procedure, once chosen, should ascribe one and only one sum $\varphi(z)$ to each resummand $\tilde{\varphi}(z)$. It is also legitimate in the stronger sense (*uniqueness 2*) that, whenever there happens to be one clear geometric candidate $\varphi(z)$, then *any* proper resummation procedure, when applied to $\tilde{\varphi}(z)$, should yield precisely that candidate and no other. But the exorbitant demand (*uniqueness 3*) for *one* “true” or “best” sum $\varphi(z)$ to any natural

divergent series $\tilde{\varphi}(z)$, *even when geometry imposes none and suggests none*, is not only unnecessary (there is nothing wrong, in that case, with different procedures producing different sums ; see Chapter E) but also radically incompatible with the earlier, more legitimate demands, such as exactness, linearity, and multiplicativeness. This hankering after the “one true sum” seems to be the motive power behind a lot of recent mathematical work, but we strongly feel that it is a wild-goose chase. So we remorselessly expunge “uniqueness 3” from our list of requirements.

We may, however, formulate one last demand, *optimality*, which avoids the pitfalls of “uniqueness 3”, while taking on board the rightful worries over “arbitrariness”, from which “uniqueness 3” derives its spurious appeal. The thing is to shift our ground, and to turn from a *case-oriented* (based on the particular problem or equation in hand) to an *apparatus-oriented* selection. Now, as we took great pains to show in this paper, the first demands (up to “optimality”) allow only Borel-Laplace resummation (or accelero-summation in tougher cases) with respect to some *fixed* uniformizing average of well-behaved type (P_1, P_2, P_3) . In view of this, the last issue, “optimality”, can only be settled through a *beauty contest* between the various well-behaved averages, assessed in their own abstract space AVER, on the strength of their intrinsic merits P_4, P_5, \dots . And, as we saw, in any such contest, the crown must go to the organic average **mon**, as the simplest and smoothest of all well-behaved averages.

Point 17. Well-behaved alien derivations applied to object analysis.

Apart from the multiplicative condition P_1 (in this case : “being an alien derivation”), what matters here is *proper growth* (P_3) rather than *realness* (P_2), which is only a nice extra. The best choices are either the “neutral” organic derivations **don** $_{\omega}$ (with P_1, P_2, P_3) or their “laterally tilted” counterparts **dor** $_{\omega}$ and **dol** $_{\omega}$ (with P_1, P_3 only, but with simpler weights).

The Bridge Equation, when expressed relatively to these well-behaved derivations, yields analytic-cum-holomorphic invariants A_{ω} which are easiest to characterize - namely through a mere *growth condition* (in ω) and nothing more. This simplification is welcome in itself, and it clears the way for *object synthesis*.

Point 18. The paralogarithms applied to canonical object synthesis.

The prime tools here are the paralogarithms (i.e. the paralogarithmic resurgence monomials and their scalar counterparts) along with their antipodal involution and closed system of partial differential equations (in c and the increments ω_i). The *convergence theorem* (which again relies on the technique of arborification) guarantees that all objects *formally* synthesized with the help of the paralogarithms *actually exist* for all large enough values of c . In fact, due to the antipodal involution, two objects are being synthesized at once : the “direct” or “podal” object, and its “antipodal reflection”. Both depend on a natural *shift parameter* t (which may be anything) and on the *canonicity constant* c (which has to be large enough).

The very same tools (the paralogarithms and their EDP) also render the study of *iso-invariant* or *iso-resurgent deformations* quite easy - in both linear and non-linear problems, and whether we choose to vary the canonicity constant c , or the shift parameter t , or the formal class (via the “residue” ρ) or the resurgence lattice Ω , etc...

There is no avoiding the shift parameter t (it is already there in the invariants A_{ω}) nor the canonicity parameter c : it may be shown that no one-parameter family can work (which incidentally condemns the hyperlogarithmic family to inadequacy). So paralogarithmic synthesis is most economical, and it tends to produce objects which are not just *local*, but as “*global*” as the invariants allow - with no

other a priori singularities than ∞ and 0 on the Riemann sphere. Its claims to canonicity rest on this combination of *economy* and *globalness*, as well as on the *closedness* of the associated system of PDE, which finds a nice reflection in the study of object deformations. True, there is some small latitude left in the implementation of *canonical synthesis* (also called *paralogarithmic* or *spherical*), but no more no less than in “formal synthesis” (i.e. in the selection of formal normal forms for local objects).

Lastly, the old dichotomy which plagued hyperlogarithmic synthesis (depending on the overlapping pattern of the invariant connectors, there was either no synthesis at all, or a countable infinity) is now overcome, although it re-emerges elsewhere, in a quite harmless form : depending on the overlapping pattern of the invariants, there may, or may not, exist an effective connection, via analytic continuation, between the “podal” and “antipodal” synthesis.

Point 19. New questions raised by spherical synthesis.

While it settles the long-standing problems of canonical synthesis and iso-invariant deformations, spherical synthesis brings with it a train of stimulating new questions, mainly four :

(A) *Can we dispense with arborification?* We already came across that question for the diffusion-induced averages, but for them it would make little practical difference (see § C3). For the paralogarithms, however, it would simplify the implementation of spherical synthesis, because non-arborified expansions are easier to program and calculate.

(B) How can we derive the *singular locus* of the objects produced by spherical synthesis from the sole data, i.e. the invariants? Is there a simple link with the singular locus of the invariant connectors?

(C) When exactly do the “podal” and “antipodal” objects link up through effective analytic continuation?

(D) What regularity does an object inherit that is being synthesized from *rational* (or *algebraic*, or *algebraic-differential*, etc...) invariant connectors?

Point 20. No alternatives.

Despite these temporary question-marks, the picture which we see emerging is truly heart-warming. Three vast problems turn out to be capable of a unified, neatly conceptualized treatment and solution :

(i) *Real resummation* becomes possible thanks to the *well-behaved uniformizing averages*, and in no other way.

(ii) *Object analysis*, at least within the confines of resonance, is solved by the Bridge Equation, which should preferably be written down relatively to a system of *well-behaved alien derivations*.

(iii) *Object synthesis* becomes feasible (constructively so) with the help of *well-behaved resurgence monomials* and it even admits a *canonical solution*, the so-called *paralogarithmic synthesis*, with nice extras like globalness, sphericity, and the podal-antipodal duality.

A standing feature with these methods is the recourse to the convolutive ζ -plane or *Borel plane* : it is there and there only that the obstacles to resummation can be identified (in the form of - usually ramified - singularities), isolated, and overcome; there and there only that all the work and all the proving takes place. More than that : the farther one probes into these matters, the clearer it becomes that the truly serious difficulties arise from the presence of an infinite number of singularities over fixed axes $\arg \zeta = \theta_0$ and that it is imperative to understand what occurs between these ramified singularities, on paths which cross the axis an infinite number of times. Such an understanding is beyond the reach of the so-called “geometric” approach, which presumes to avoid the Borel plane

altogether, and to derive everything from the study of the regularity sectors (together with their boundaries and mutual intersections) in the multiplicative z -plane. Only the coarser features of a situation can be captured in this way, but there is not a whiff of a chance that problems such as those dealt with in this paper might yield to the geometric method, or even be formulated within its framework.

Bibliographie

- [1] Louis COMTET. *Analyse Combinatoire*, volume 1. P.U.F., 1970.
- [2] Noel CRESSIE. A note on the behaviour of stable distributions for small index α . *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 33 :61–64, 1975.
- [3] Jean ECALLE. Well-behaved convolution averages and their applications to real resummation. à paraître.
- [4] Jean ECALLE. *Les fonctions résurgentes*, volume 2. Publications mathématiques d’Orsay, 1981.
- [5] Jean ECALLE. Singularités non abordables par la géométrie. *Annales de l’institut Fourier*, 42 :73–164, 1992.
- [6] Jean ECALLE et Frédéric MENOUS. Well-behaved convolution averages and the non-accumulation theorem for limit-cycles. *Prépublications d’Orsay.*, 1995.
- [7] N. ARONSZAJN et K.T. SMITH. Theory of Bessel potentials. *Annales de l’institut Fourier*, 11, 1961.
- [8] P.L. BUTZER et R.J. NESSEL. *Fourier analysis and Approximation*, volume 1. Birkhäuser Verlag, 1971.
- [9] I.A. IBRAGIMOV et Yu.V. LINNIK. *Independent and stationary sequences of random variables*. Wolters-Noordhoff series of monographs and textbooks on pure and applied mathematics. Wolters-Noordhoff publishing, 1971.
- [10] H.M. FINUCAN. Some elementary aspects of the Catalan numbers. In *Combinat. Math. IV*, volume 560 of *LNM*, pages 41–45. Springer, 1975.
- [11] E.C. TITCHMARSH. *Introduction to the theory of Fourier integrals*. Oxford University Press, 1948.