

Exercices sur la compacité

Thomas CHEN

1 Rappels très rapides sur la compacité dans un EVN

1.1 Généralités

Définition : Une partie K de E est compacte lorsqu'elle vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass. Autrement dit, K est compacte lorsque toute suite bornée de K admet une valeur d'adhérence dans K .

Proposition : Un compact est fermé et borné.

Proposition : L'image d'un compact par une fonction continue est un compact.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$, K compact non vide. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Proposition : Soit $K_1, \dots, K_n$, n compacts de E . Alors $K_1 \times \dots \times K_n$ est compact de E^n .

Proposition : Une fonction continue sur un compact est uniformément continue sur ce compact.

Proposition : Si K est un compact de E et F un fermé dans E , alors $K \cap F$ est un compact de E .

Proposition : Une suite dans un compact converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

1.2 Cas de la dimension finie

Proposition : Si E est de dimension finie, K est un compact si, et seulement si, K est fermé et borné.

Proposition : Si E est de dimension finie, une boule fermée est compacte.

Proposition : Si E est de dimension finie, toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

Proposition : Soit E de dimension infinie et F de dimension finie. Alors F est un fermé dans E .

2 Exercices

Exercice 1. Soit $E = C([0, 2\pi])$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = e^{inx}$.

- (a) Calculer $\|f_n - f_p\|_2$ pour $p, n \in \mathbb{N}$.
- (b) En déduire que $B(0, 1)$ n'est pas compacte.

Exercice 2. Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E contenu dans la boule unité ouverte. Démontrer qu'il existe $r < 1$ tel que K soit contenu dans $B(0, r)$.

Exercice 3. Soient K, L deux compacts disjoints non vides d'un espace vectoriel normé E . Démontrer que

$$d(K, L) := \inf_{x \in K, y \in L} \|y - x\| > 0.$$

Exercice 4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Démontrer qu'il existe toujours une suite exhaustive de compacts $(K_j)_{j \geq 1}$, c'est-à-dire une suite de compacts qui vérifie :

- (i) $\forall j \geq 1, K_j \subset K_{j+1}^\circ \subset \Omega$
- (ii) $\forall j \geq 1, K_j \subset K_{j+1}$
- (iii) $\Omega = \bigcup_{j \geq 1} K_j$

- Exercice 5.** (a) Soit A une partie non vide de E . Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue sur E .
(b) Soit K un compact non vide inclus dans un ouvert U . Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \quad B(x, \alpha) \subset U.$$

- Exercice 6.** Soient K un compact non vide d'un espace normé E et $f : K \rightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

- (a) Montrer que f possède au plus un point fixe.
(b) Justifier qu'il existe $c \in K$ tel que

$$\forall x \in K, \|f(x) - x\| \geq \|f(c) - c\|.$$

- (c) En déduire que f admet un point fixe.

- Exercice 7.** Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum.

- Exercice 8.** Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est localement bornée : pour tout $x \in A$, il existe $r > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $y \in B(x, r) \cap A$, $|f(y)| \leq M$. Démontrer que f est bornée sur A tout entier.

- Exercice 9.** Soit E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \rightarrow F$ une application continue bijective. Montrer que si E est compact, alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est continue.