

Quelques théorèmes phares autour de la compacité

Thomas CHEN

Soit (X, d) un espace métrique. On rappelle que X est dit compact lorsque pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$, si $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, alors il existe $i_1, \dots, i_n \in I$ vérifiant $X \subset \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$ (propriété de Borel-Lebesgue). X est dit séquentiellement compact lorsque toute suite de X admet une valeur d'adhérence (propriété de Bolzano-Weierstraß). On rappelle que X est compact si, et seulement si, X est séquentiellement compact.

Description des exercices

- Dans l'exercice 1, on démontre plusieurs théorèmes : le premier théorème de Dini (le deuxième est un peu plus compliqué), le théorème de Stone-Weierstraß (cas réel) et le cas particulier de Weierstraß.
 - Pour démontrer le théorème de Dini (objet de la question 1), on exploite la propriété de Borel-Lebesgue. La propriété de Bolzano-Weierstraß est légèrement plus compliquée et plus lourde.
 - On passe ensuite à un petit lemme préliminaire pour obtenir la valeur absolue.
 - La notion d'ensemble séparant ou réticulé n'est pas à retenir. Ce sont des lemmes techniques qui sont utiles au cas par cas. L'important est la technique de preuve (compliquée) de la question 4.
 - Pour démontrer le théorème de Weierstraß sans passer par Stone-Weierstraß, il existe essentiellement plusieurs preuves dont deux que je mets en exergue : une preuve par convolution (Voir Gourdon – Analyse), une preuve par les polynômes de Bernstein avec un ornement de probabilité via Bienaymé-Tchebychev si l'on veut. A mon avis, à défaut de connaître Stone-Weierstraß, cette preuve est simple et assez sympathique donc bien à connaître. L'exercice est en annexe.
- Dans l'exercice 2, plusieurs résultats phares sont démontrés. Déjà, l'équivalence des normes en dimension finie et la caractérisation des compacts en dimension finie. Attention à l'ordre dans lequel on démontre ces propriétés ! Il faut absolument éviter de se mordre la queue, chose que font la plupart des étudiants et des agrégatifs qui présentent ce résultat ! Ici, je présente une preuve un peu directe, il y a bien sûr d'autres tournures. Gourdon en fait une autre, il me semble. Ensuite, on regarde le théorème de compacité de Riesz, très joli théorème.
 - Dans la question 1, c'est des rappels de cours essentiellement.
 - Dans la question 2, on regarde un critère de compacité dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ (ici, la norme est primordiale !)
 - Avec ce résultat, on est capable de montrer l'équivalence des normes en dimension finie.
 - Seulement après, on est capable de caractériser les compacts dans n'importe quel EVN de dimension finie ! (et donc le choix de la norme ne joue pas !)
 - On démontre ensuite, de manière très jolie, le théorème de compacité de Riesz. Il existe une preuve par l'absurde dans la littérature. C'est en annexe

Exercice 1. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Stone-Weierstraß. Soit (X, d) un espace métrique compact non trivial (c'est-à-dire contient au moins deux éléments).

1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante¹ et qu'elle converge simplement vers une fonction de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ que l'on note f . Soit $\varepsilon > 0$.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega_n = \{x \in X : f_n(x) > f(x) - \varepsilon\}$. Montrer que $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ouverts.
 - (b) Écrire la définition de la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f avec des quantificateurs. Exploiter Ω_n pour alléger la définition.
 - (c) À l'aide de Borel-Lebesgue, en déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in X, f_N(x) > f(x) - \varepsilon.$$

Indication. On rappelle que si $(U_i)_{1 \leq i \leq N}$ est une suite croissante d'ensembles, alors $\bigcup_{i=1}^N U_i = U_N$.

- (d) Conclure que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f . C'est le premier théorème de Dini : une suite croissante de fonctions continues sur un compact qui converge simplement vers une fonction continue converge en réalité uniformément. *Il existe le second théorème de Dini qui, cette fois-ci, traite le cas d'une suite de fonctions croissantes.*
2. Soit $P_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x))$.
 - (a) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], 0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|.$$

- (b) À l'aide du premier théorème de Dini (question 1), montrer qu'il existe une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément vers la fonction valeur absolue.
3. Soit H une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ (donc un sous-anneau qui contient la fonction constante égale à 1 et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$). On suppose que H est séparante, i.e. pour tout $(x, y) \in X^2$, si $x \neq y$, alors il existe $h \in H$ tel que $h(x) \neq h(y)$.
 - (a) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$; $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$.
 - (b) Montrer que pour tout $f \in H$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(f) \in H$. En déduire à l'aide de la question précédente que si $f \in H$, alors $|f| \in \overline{H}$ et si de plus $g \in H$, alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont dans $\overline{H}$. *On veillera à montrer que $\sup(f, g) = \max(f, g)$.* Un tel espace $\overline{H}$ est dit **réticulé**.
 - (c) Montrer qu'il existe x_1, x_2 distincts et $h \in H$ tel que la matrice $\begin{pmatrix} h(x_1) & 1 \\ h(x_2) & 1 \end{pmatrix}$ soit inversible. En déduire qu'il existe α_1, α_2 deux réels tels que la fonction $u = \lambda h + \mu$ vérifie $u(x_1) = \alpha_1$ et $u(x_2) = \alpha_2$.
 - (d) En déduire que pour tout couple $(x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2)$ avec $x_1 \neq x_2$, il existe $u \in H, u(x_1) = \alpha_1, u(x_2) = \alpha_2$.
4. On garde les hypothèses de la question 3. Soit $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.
 - (a) Soit $x \in X$ et $y \neq x$. Par la question 3d), il existe $u_y \in \overline{H}$ tel que $u_y(x) = f(x), u_y(y) = f(y)$. Soit $O_y = \{x' \in X : u_y(x') > f(x') - \varepsilon\}$. Montrer que $X = \bigcup_{y \neq x} O_y$.
 - (b) En déduire qu'il existe $y_1, \dots, y_N$ tous différents de x tel que $X = \bigcup_{i=1}^N O_{y_i}$.
 - (c) Soit donc $v_x = \sup(u_{y_1}, \dots, u_{y_N})$. Montrer que $v_x \in \overline{H}$.
 - (d) Montrer que $\forall x' \in X, v_x(x') > f(x') - \varepsilon$. *On veillera à garder l'inégalité stricte et on pourra séparer le cas $x' = x$ et $x' \neq x$.*

1. Attention : ce n'est pas une suite de fonctions croissantes, mais une suite croissante de suite.

- (e) Pour chaque $x \in X$, on note $\Omega_x = \{x' \in X : v_x(x') < f(x') + \varepsilon\}$. Reprendre la même stratégie de preuve pour construire un $v \in \overline{H}$ vérifiant

$$\forall x \in X, f(x) - \varepsilon \leq v(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

v sera l'infimum d'une famille de fonctions de la forme v_x .

5. En déduire le théorème de Stone-Weierstraß : si H est une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ séparante, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
6. En déduire le théorème de Weierstraß : toute fonction continue sur $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes réels.

Exercice 2. On va montrer le théorème d'équivalences des normes en dimension finie ainsi que le théorème de compacité de Riesz.

1. (a) Rappeler pourquoi une partie compacte de $(E, \|\cdot\|)$ est fermée et bornée.
 (b) On munit $\mathbb{K}^n$ de la norme infinie. Soit A une partie fermée bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $A \subset B_f(0, M)$ (boule pour la norme infinie).
 (c) i. Rappeler pourquoi $[-M, M]$ est compact.
 ii. Montrer qu'un produit fini de compacts est compact. *C'est le théorème de Tychonov version finie.* En déduire que $B_f(0, R)$ est compact.
 iii. En déduire que $B_f(0, M)$ est compact.
 (d) En déduire que les compacts de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés.
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit φ définie par

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) &\rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{k=1}^n x_k e_k \end{aligned}$$

- (a) Montrer que φ est une isométrie.
- (b) En déduire que φ est un homéomorphisme.
- (c) Qui sont les compacts de $(E, \|\cdot\|_\infty)$?
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On munit E de la norme infinie à savoir, pour tout $x \in E$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |e_i^*(x)| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ où $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E .
 (a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x\| \leq \alpha \|x\|_\infty$. On pourra écrire $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.
 (b) On note $S = \{x \in E : \|x\|_\infty = 1\}$. Montrer que $\|\cdot\|$ admet un minimum sur S notée m .
 (c) Montrer que $m > 0$ et que $\forall x \in X, m \|x\|_\infty \leq \|x\|$.
4. Conclure qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Qui sont ses compacts ?
6. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $B_f(0, 1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ supposée compacte. On veut montrer que E est de dimension finie.
 (a) Montrer qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in E$ tel que

$$B_f(0, 1) \subset \bigcup_{i=1}^n B\left(x_i, \frac{1}{2}\right).$$

- (b) Soit $V = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Rappeler pourquoi V est fermée.
- (c) Soit $x \in F \setminus \{0\}$. On veut montrer que $x \in V$.

- i. Expliquer pourquoi il suffit de montrer le résultat pour $x \in B_f(0, 1)$. On considère alors $x \in B_f(0, 1)$.
- ii. Montrer qu'il existe une suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \|x - y_k\| \leq \frac{1}{2^k}$. *On pourra procéder par récurrence et exploiter la question 5a).*
- iii. Conclure que $x \in V$.

En déduire que $(E, \|\cdot\|)$ est de dimension finie si, et seulement si, $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est compact : c'est le théorème de compacité de Riesz.

Annexe

Weierstraß via les probabilités

Exercice 3. On souhaite démontrer le théorème de Weierstraß. Pour cela, soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$ et considérons les polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Bernstein associés à f , c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f(k/n).$$

On fixe $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit X , une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n, p)$.

1. Montrer que $P_n(p) = \mathbb{E}[f(X/n)]$.
2. Calculer $f(\mathbb{E}(X/n))$.
3. Conclure à l'aide de Bienaymé-Tchebychev et Heine.
4. En déduire le cas où f est continue sur $[a, b]$.

Corrigé :

1. Par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}[f(X/n)] = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) f(k/n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f(k/n) = P_n(p).$$

2. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}[X/n] = \frac{1}{n} \mathbb{E}[X] = np/n = p.$$

Donc $f(\mathbb{E}[X/n]) = f(p)$.

3. Puisqu'elle est continue sur $[0, 1]$, elle est uniformément continue par Heine. Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé. Donnons-nous un η tel que $\forall x, y \in [0, 1], |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On souhaite regarder la quantité

$$|P_n(p) - f(p)| = |\mathbb{E}[f(X/n) - f(p)]| \leq \mathbb{E}|f(X/n) - f(p)|.$$

Ainsi, lorsque l'événement $|X/n - p| \leq \eta$ est réalisé, on obtient une majoration convenable. On écrit alors

$$\begin{aligned} |f(X/n) - f(p)| &= |(f(X/n) - f(p))(\mathbf{1}_{|X/n-p| \leq \eta} + \mathbf{1}_{|X/n-p| \geq \eta})| \\ &\leq \underbrace{|f(X/n) - f(p)|}_{\leq \varepsilon} \mathbf{1}_{|X/n-p| \leq \eta} + \underbrace{|f(X/n) - f(p)|}_{\leq 2\|f\|_\infty} \mathbf{1}_{|X/n-p| \geq \eta}. \end{aligned}$$

Par croissance et linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}|f(X/n) - f(p)| \leq \varepsilon \underbrace{\mathbb{P}(|X/n - p| \leq \eta)}_{\leq 1} + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|X/n - p| \geq \eta).$$

Par Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|X/n - p| \geq \eta) \leq \frac{\text{Var}(X/n)}{\eta^2} = \frac{p(1-p)}{\eta^2 n} \leq \frac{1}{4\eta^2 n}.$$

Donc pour n assez grand,

$$\mathbb{E}|f(X/n) - f(p)| \leq 2\varepsilon.$$

Au bout du compte,

$$|P_n(p) - f(p)| \leq 2\varepsilon$$

à partir d'un certain rang indépendant de p . Donc $P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{unif.}} f$.

4. Soit f continue sur $[a, b]$ et $g : x \in [0, 1] \mapsto f(a + (b - a)x)$. Soit $(P_n)_n$, suite de polynômes approchant uniformément g . Alors la suite de polynômes $(Q_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = P_n\left(\frac{X - a}{b - a}\right)$ approche uniformément f .

Pour plus de détails, notamment sur la vitesse de convergence, on peut consulter Qu  ffelec-Zuily : Analyse pour l'agrégation.

Théorème de compacité de Riesz via Bolzano-Weierstra  

On rappelle le résultat suivant. Soit E , un espace vectoriel normé. Soit F sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors $d(x, F) := \inf_{y \in F} \|x - y\|$ est atteinte.

Exercice 4. Soit E , un espace vectoriel normé. Montrer que sa sphère unité fermée est compacte si, et seulement si, E est de dimension finie. *Indication : On pourra regarder un vecteur unitaire u vérifiant $d(u, F) = 1$ pour F , un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , et construire une suite d'éléments de $B_f(0, 1)$ sans valeur d'adhérence.*

Corrigé :

Si E est de dimension finie, c'est clair. Si E est de dimension infinie, pour F de dimension finie de E , on sait qu'il existe $y \in F$, vérifiant $d(x, F) = \|x - y\|$ pour tout $x \in E \setminus F$. Posons donc $u = \frac{x - y}{\|x - y\|}$. Alors u est unitaire, donc $d(u, F) \leq \|u\| = 1$. Par ailleurs,

$$\forall z \in F, \|u - z\| = \frac{1}{\|x - y\|} \|x - (y + \|x - y\|z)\|.$$

De plus, $\|x - \underbrace{(y + \|x - y\|z)}_{\in F}\| \leq d(x, F) = \|x - y\|$. Donc $\|u - z\| \geq 1$, et ce, pour tout $z \in F$. Donc $d(u, F) = 1$ au final.

Considérons maintenant une suite u à valeurs dans $B_f(0, 1)$ vérifiant $\forall n, p \in \mathbb{N}^2, n \neq p \implies \|u_n - u_p\| \geq 1$. Cela signifie que u n'a pas de valeur d'adhérence, contredisant la compacité de la boule fermée de E .

On considère u_0 , un élément unitaire quelconque. Supposons $u_0, \dots, u_{n-1}$ construit. L'espace $\text{Vect}(u_0, \dots, u_{n-1})$ étant de dimension finie, le début de la preuve assure un élément u_n vérifiant $d(u_n, F_n) = 1$. Alors $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \|u_n - u_k\| \geq 1$. D'où la construction de u_n . On construit ainsi une suite u satisfaisante.