Université Paris-Saclay

Master 2 Analyse, Arithmétique, Géométrie

Autour de l'intersection arithmétique

Mémoire de Master 2

Pablo Chenal

Encadré par Jean-Benoît Bost
Laboratoire de mathématiques d'Orsay

2024-2025

Table des matières

1 Introduction

La *géométrie d'Arakelov* s'est imposée comme un domaine fondamental au croisement de la géométrie algébrique, de la géométrie analytique et de la théorie des nombres. Introduite par Arakelov dans [Ara74] pour l'étude des variétés algébriques définies sur des anneaux d'entiers de corps de nombres, elle enrichit la géométrie algébrique classique en faisant intervenir aux places archimédiennes des données analytiques issues de la géométrie analytique complexe. Cette structure mixte permet de formuler et de démontrer des résultats arithmétiques profonds reliant aspects algébriques et analytiques.

Dans le cas particulier des *surfaces arithmétiques*, la théorie met en place une notion d'intersection combinant deux contributions complémentaires : une partie *algébrique*, analogue de l'intersection classique de diviseurs sur une surface algébrique sur un corps, et une partie *analytique*, exprimée via des fonctions de Green définies sur des surfaces de Riemann. Ce formalisme a conduit à des avancées majeures, telle que la démonstration par Faltings du théorème éponyme (anciennement conjecture de Mordell) [Fal83].

Plus récemment, Bost et Charles [BC] ont étendu cette théorie au cadre des *surfaces arithmétiques formelles-analytiques*. Leur approche introduit un nouvel invariant, le *débordement archimédien*. Cet invariant, défini à partir de fonctions de Green issues de la théorie du potentiel, a trouvé des applications notables en arithmétique : le travail de Calegari, Dimitrov et Tang [CDT24] sur l'indépendance rationnelle de valeurs spéciales de fonctions L ou de produits de logarithmes utilise de façon cruciale les *bornes d'holonomie* obtenues en étudiant le débordement de certains morphismes.

Dans une première partie, nous exposons la théorie classique de l'intersection d'Arakelov sur les surfaces arithmétiques, en détaillant les notions de diviseurs d'Arakelov, de fibrés en droites hermitiens et de l'accouplement bilinéaire symétrique qui s'en déduit.

Dans une seconde partie, nous nous plaçons dans un cadre purement analytique afin d'étudier le débordement pour des applications de disques dans des surfaces de Riemann compactes et connexes munies d'une métrique conforme. Nous y établissons des bornes explicites pour cet invariant, en exploitant une formule de Bost–Charles faisant intervenir une fonction de Green pour la diagonale, choisie comme l'inverse du Laplacien géométrique sur un espace de Sobolev $\mathrm{H}^{-1}(X)$.

Enfin, dans le cas particulier où la surface de Riemann est de genre $g \geq 2$ et où l'application considérée est l'uniformisation $\pi : \mathbb{D} \to X$ de cette surface par le disque de Poincaré, nous obtenons un encadrement asymptotique du débordement lorsque le rayon euclidien R tend vers 1 :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g-1} \cdot \log\left(\frac{1}{1-R}\right) \leq \ \mathrm{Ex}(\pi : (D(0,R),0) \to X) \ \leq \ \frac{1}{g-1} \cdot \log\left(\frac{1}{1-R}\right)$$

2 Petit formulaire de géométrie hyperbolique

On utilise dans ce mémoire certains résultats de géométrie hyperbolique appliqués aux surfaces de Riemann. Nous utilisons les modèles du disque de Poincaré

$$\mathbb{D} := \{w \in \mathbb{C}, |w| < 1\}$$

et du demi-plan supérieur de Poincaré

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

Il existe un biholomorphisme que l'on note $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ donné par

$$w \mapsto z = i\frac{1+w}{1-w}$$

d'inverse donné par

$$z \mapsto w = \frac{z-i}{z+i}$$

On munit ces variétés de métriques riemanniennes, dont les formes volumes associées sont données respectivement par

$$\mu_{\mathbb{H}} := \frac{dx \wedge dy}{y^2} \quad \text{et} \quad \mu_{\mathbb{D}} := \frac{4dx \wedge dy}{(1-x^2-y^2)^2}$$

En particulier, on a l'égalité entre 2-formes lisses $\varphi^* \mu_{\mathbb{H}} = \mu_{\mathbb{D}}$.

Les distances hyperboliques sur ces espaces sont données respectivement par

$$\operatorname{th}\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(w_1, w_2)\right) = \frac{|w_1 - w_2|}{|1 - \overline{w_1} w_2|}$$

$$\operatorname{ch}\big(d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)\big) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}$$

Si $0 < R < 1$ est un réel, alors le rayon hyperbolique R' du disque euclidien $B(0, R)$ vérifie

$$R' = \log\left(\frac{1+R}{1-R}\right)$$

son aire

$$A_{\mathbb{D}}(D(0, R)) = \frac{4\pi R^2}{1-R^2}$$

et son périmètre

$$P_{\mathbb{D}}(D(0, R)) = \frac{4\pi R}{1-R^2}$$

En particulier, on voit que quand R tend vers 1, l'aire hyperbolique et le périmètre hyperbolique sont du même ordre de grandeur.

3 Intersection d'Arakelov sur les surfaces arithmétiques

3.1 Analogie entre corps de nombres et corps de fonctions

La géométrie d'Arakelov est une généralisation en dimension supérieure de l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions. Nous discutons en premier du cas de la dimension 1 :

Définition 1.

1. *Un corps de nombres K est une extension finie de $\mathbb{Q}$, de degré $d := [K : \mathbb{Q}]$.*
2. *Un corps de fonctions K est une extension finie de $\mathbb{Q}(T)$, de degré $d := [K : \mathbb{Q}(T)]$.*

Les deux constructions suivantes sont analogues :
- Soit K un corps de nombres. On définit alors l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K comme la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K.
- Soit C une courbe lisse, projective, géométriquement connexe sur $\mathbb{Q}$. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \overset{o}{C} \arrow[r, hook] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \end{tikzcd}$$

  où $\overset{o}{C} = C \setminus \Delta$ est une courbe affine sur $\mathbb{Q}$ obtenue en retirant Δ l'ensemble fini des points de C au dessus de $\infty \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ à C. Alors on a des morphismes

$$\mathbb{Q}(T) \to \mathbb{Q}(C) \qquad \mathbb{Q}[T] \to \mathbb{Q}[\overset{o}{C}]$$

  induits sur les corps de fonctions et sur les sections globales, et avec $K := \mathbb{Q}(C)$, on a que $\mathbb{Q}[\overset{o}{C}]$ est la clôture intégrale de $\mathbb{Q}[T]$ dans K.

Ainsi, pour aller plus loin dans l'analogie, on considère $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$, correspondant à la courbe affine $\overset{o}{C}$, qui est complétée en la courbe projective C en ajoutant un nombre fini de points (les points à l'∞). Ces points à l'infini correspondent aux valeurs absolues archimédiennes sur K (comme le montre par exemple le cas de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$ auquel on ajoute "∞"). Il est donc naturel de compléter $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ en lui ajoutant des points à l'infini correspondant aux places archimédiennes de K.

Dans le cas de la dimension 2, les objets d'étude de l'analogie sont les *surfaces algébriques* et les *surfaces arithmétiques.* Une surface algébrique sur un corps k est un schéma projectif régulier sur k de dimension 2.

Définition 2. *Une surface arithmétique X est un schéma séparé, de type fini et plat sur $\mathbb{Z}$ de dimension relative* 1. *En particulier, on peut définir une surface arithmétique sur tout anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$ de corps de nombres K.*

En utilisant l'analogie de la dimension 1 entre corps de fonctions et corps de nombres, on complète X en un objet $\widehat{X} = (X, (X_\sigma)_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}})$ où pour tout σ plongement de K dans

$\mathbb{C}$, X_σ est une surface de Riemann vérifiant des conditions de compatibilité avec X. Ces objets sont les principaux objets de la géométrie d'Arakelov en dimension 2.

L'étude des surfaces algébriques passe par exemple par la compréhension des familles de courbes sur la surface (schémas de Hilbert, schémas de Picard,...) et donc de la théorie de l'intersection sur la "catégorie" des surfaces algébriques.

S'inspirant de l'analogie en dimension 1, il est naturel de développer les théories, théorèmes et conjectures connus en géométrie des surfaces algébriques classiques (résolution des singularités, programme du modèle minimal, théorème de Grothendieck-Riemann-Roch,...) dans le cadre de la géométrie d'Arakelov. Plusieurs théories de l'intersection sur les surfaces arithmétiques ont été développées, mêlant géométrie algébrique, arithmétique et géométrie analytique.

Ces théories font toutes intervenir une partie "algébrique" et une partie "analytique", qui se combinent bien grâce à des résultats de nature arithmétique. Ces théories diffèrent sur leur partie analytique : par exemple, Arakelov développe dans [Ara74] la théorie avec des fonctions de Green de classe C^∞, puis Bost dans [Bos99] avec des fonctions de Green appartenant à des espaces de Sobolev, théorie permettant d'avoir de meilleures propriétés fonctorielles.

L'objectif est de définir les diviseurs d'Arakelov et les fibrés Hermitiens sur $\widehat{X}$ et d'obtenir une théorie de l'intersection arithmétique ayant des propriétés semblables à l'intersection sur les surfaces algébriques, comme par exemple la commutativité du produit d'intersection et les propriétés de fonctorialité par rapport aux poussés en avant et aux tirés en arrières.

Dans la première partie, on introduit les degrés et hauteurs d'Arakelov permettant de définir la partie "algébrique" de l'intersection d'Arakelov. Dans la seconde partie, on introduit les fonctions de Green associées à des diviseurs sur une surface de Riemann, permettant de définir la partie "analytique" de l'intersection arithmétique. Dans la troisième partie, on définit les groupes de Chow arithmétiques ainsi que l'accouplement d'Arakelov sur les surfaces arithmétiques.

3.2 Degré d'Arakelov des 0-cycles et hauteur des 1-cycles

3.2.1 Degré d'Arakelov des 0-cycles

Soit X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{Z}$. Un 0-cycle Z sur X est une somme formelle finie de points fermés de X

$$Z = \sum_P n_P P$$

Le corps résiduel $k(P) = \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P$ est un corps fini (en tant qu'extension finie de $\mathbb{F}_p$ où p nombre premier tel que $f(P) = p$, avec f morphisme structurel de X sur $\mathbb{Z}$) et on peut donc définir le degré d'Arakelov de Z comme

$$\widehat{\deg}(Z) := \sum_P n_P \log |k(P)|$$

On note $Z^0(X)$ le groupe des 0-cycles sur X, et le degré d'Arakelov définit un morphisme de groupes

$$\widehat{\deg} : Z^0(X) \to \mathbb{R}$$

Proposition 3. *Soit $g : X \to Y$ un morphisme de schémas où Y est un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{Z}$. Alors*

$$g_* : Z^0(X) \to Z^0(Y)$$

est bien défini et

$$\widehat{\deg}(g_*(Z)) = \widehat{\deg}(Z) \tag{1}$$

Démonstration. Si $Z = \sum_P n_P P$, on définit

$$g_* Z := \sum_P n_p [k(P) : k(g(P))] \cdot g(P) \in Z^0(Y)$$

Cette application est bien définie si l'image d'un point fermé de X par g est encore fermé dans Y, ce qui est vrai car Y est de type fini sur $\mathbb{Z}$, et on a une factorisation sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ au dessus de P et $g(P)$, et donc on a l'inclusion

$$\mathbb{F}_p \subset k(g(P)) \subset k(P)$$

qui nous assure que $g(p)$ est bien un point fermé.

Pour l'égalité 1 sur les degrés, on calcule le degré

$$\begin{aligned}
\widehat{\deg}(g_* Z) &= \sum_P n_P [k(P) : k(g(P))] \log |k(g(P))| \\
&= \sum_P n_P \log \left| k(g(P))^{[k(P):k(g(P))]} \right| \\
&= \sum_P n_P \log |k(P)|
\end{aligned}$$

□

Dans le cas où $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, les 0-cycles sont de la forme

$$\mathrm{div}\ q = \sum_p v_p(q) \cdot p$$

pour un certain $q \in \mathbb{Q}^*$ et le degré vérifie

$$\widehat{\deg}\ \mathrm{div}\ q = \log |q| \tag{2}$$

Le degré d'Arakelov est donc uniquement déterminé par les propriétés 1 et 2.

La formule 2 admet la généralisation suivante quand on ne suppose plus que X est $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ mais seulement que X est propre sur $\mathbb{Z}$, intègre et de dimension absolue 1.

Proposition 4. *Soit C un schéma propre sur $\mathbb{Z}$, de dimension 1 et intègre. Alors C est de l'une de ces deux formes :*

1. *soit C est affine sur $\mathbb{Z}$, d'anneau de sections globales $\Gamma(C, \mathcal{O}_C)$ un ordre d'un corps de nombres K, normalisé par $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. On parlera de composante horizontale.*
2. *soit C est une courbe projective géométriquement intègre sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. On parlera de composante verticale.*

Démonstration.
On note $f : C \to \mathbb{Z}$ le morphisme structurel de C. Par propreté du morphisme f et intégrité de C, le schéma intègre associé au fermé $f(C) \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est soit $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, soit un point fermé $[p] \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Dans le premier cas, f est un morphisme surjectif et C est de dimension 1 donc le morphisme f est propre à fibres finies, donc fini. En particulier, C est affine et l'anneau $\Gamma(C, \mathcal{O}_C)$ est un ordre dans le corps de nombres $k(C)$.

Dans le second cas, C se factorise en une courbe propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et on a le résultat. □

On calcule maintenant le degré d'Arakelov d'un diviseur principal pour chacun de ces deux cas :

1. Dans le premier cas, si $r \in k(C)^*$, alors on a

$$\widehat{\deg}\ \mathrm{div}\ r = \sum_{\sigma : k(C) \hookrightarrow \mathbb{C}} \log |\sigma(r)| \tag{3}$$

En effet, on a par définition de la norme et du poussé en avant

$$f_*\ \mathrm{div}\ \mathrm{r} = \mathrm{div}\ N_{k(C)/\mathbb{Q}}(r)$$

et comme par la formule du produit on a $|N_{k(C)/\mathbb{Q}}(r)| = \prod_\sigma |\sigma(r)|$, on obtient par 1 et 2 que

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}\ \mathrm{div}\ r &= \widehat{\deg}\ (f_*\ \mathrm{div}\ r) \\ &= \log \left(\prod_\sigma |\sigma(r)| \right)\end{aligned}$$

2. Dans le second cas, on a

$$\widehat{\deg}\ \mathrm{div}\ r = 0 \tag{4}$$

En effet, C est une courbe projective sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ et le degré géométrique $\deg_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{div}\ r)$ comme défini par Fulton dans [Ful98] est relié au degré d'Arakelov par la formule

$$\widehat{\deg}\ \mathrm{div}\ r = \log q\ \cdot \deg_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{div}\ r) \tag{5}$$

Or dans la théorie de l'intersection classique sur des schémas propres sur un corps, le groupe des diviseurs principaux est le noyau du morphisme défini par le degré, d'où le résultat.

Remarque 5. *La relation 3 est très importante, elle montre que si on enlève au degré d'Arakelov les contributions archimédiennes, alors le degré est invariant par équivalence rationnelle, ce qu'on utilise par la suite pour définir la hauteur des* 1*-cycles.*

3.2.2 Fibrés en droites hermitiens et hauteur des 1-cycles

On fixe X un schéma réduit, séparé et de type fini sur $\mathbb{Z}$ (que l'on appelle schéma arithmétique par définition).

Définition 6. *Un fibré en droites hermitien* $\overline{L} := (L, ||.||)$ *sur* X *est un fibré en droites algébrique sur* X *muni d'une métrique hermitienne* $||.||$ *sur* $\pi_{\mathbb{C}}^{an} : L_{\mathbb{C}}^{an} \to X_{\mathbb{C}}^{an}$.

On va définir pour tout 1-cycle C sur X la hauteur de ce cycle par rapport à $\overline{L}$ fibré en droites hermitien sur X. On suppose dans un premier temps que C est un sous-schéma de X, avec les hypothèses que C est propre sur $\mathbb{Z}$, intègre et de dimension 1.

Soit $\overline{L}$ un fibré en droites hermitien sur X. On considère $L_{|C}$ le fibré en droite L restreint à C, et soit s une section rationnelle de $L_{|C}$ non nulle, ainsi que div s son diviseur associé. Alors on définit $\mathrm{ht}_{\overline{L}}(C)$ comme :

1. Dans le cas d'une composante horizontale, on a une inclusion d'ensembles $C(\mathbb{C}) \subset X(\mathbb{C})$ qui permet d'avoir une métrique $||.||_\sigma$ induite par $\overline{L}$ sur chaque point complexe σ de C, et on peut définir

$$\mathrm{ht}_{\overline{L}}(C) := \widehat{\deg}\ \mathrm{div}\ s - \sum_{\sigma \in C(\mathbb{C})} \log ||s(\sigma)||_\sigma \tag{6}$$

Cette formule ne dépend pas de la section s. Si $s' = r \cdot s$ est une autre section rationnelle non nulle de $L_{|C}$ où r est dans $k(C)^*$, alors

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}\ \mathrm{div}\ s' - \sum_{\sigma \in C(\mathbb{C})} \log \|s'(\sigma)\|_\sigma = \widehat{\deg}\ \mathrm{div}\ s - \sum_{\sigma \in C(\mathbb{C})} \log \|s(\sigma)\|_\sigma \\ + \widehat{\deg}\ \mathrm{div}\ r - \sum_{\sigma \in C(\mathbb{C})} \log |\sigma(r)|\end{aligned}$$

où d'après 3

$$\widehat{\deg}\ \mathrm{div}\ r - \sum_{\sigma \in C(\mathbb{C})} \log |\sigma(r)| = 0$$

2. Dans le cas d'une composante verticale, avec les mêmes notations, on pose

$$\widehat{\deg}(\overline{L}_{|C}) := \widehat{\deg} \text{ div } s$$

qui ne dépend pas de la section s car d'après 4, si r est dans $k(C)^*$, alors le degré d'Arakelov du diviseur div r est nul.

On notera désormais $\widehat{\deg}(\overline{L}|C)$ la hauteur de C horizontale ou verticale par rapport au fibré hermitien $\overline{L}$.

Définition 7. *Pour tout* 1*-cycle* C *sur* X *s'écrivant comme une somme finie* $C := \sum_i n_i C_i$ *où chaque* C_i *est un sous-schéma de* X *intègre, propre sur* $\mathbb{Z}$ *et de dimension* 1*, on étend la définition de hauteur en*

$$\widehat{\deg}(\overline{L}|C) := \sum_i n_i \widehat{\deg}(\overline{L}|C_i)$$

Proposition 8. *Soient* $\overline{L}_1$ *et* $\overline{L}_2$ *deux fibrés en droite hermitiens sur* X*. Alors*

$$\widehat{\deg}(\overline{L}_1 \otimes \overline{L}_2|C) = \widehat{\deg}(\overline{L}_1|C) + \widehat{\deg}(\overline{L}_2|C)$$

Démonstration. On peut supposer que C est horizontale ou verticale, puis utiliser la linéarité pour le cas général d'un 1-cycle.

1. Dans le cas d'une composante horizontale, on utilise le fait qu'une section du produit des fibrés est donnée par la multiplication d'une section du premier avec une section du deuxième, et par donc par propriétés du logarithme on a l'égalité.
2. Dans le cas d'une composante verticale, c'est une propriété générale du degré géométrique des fibrés des schémas sur un corps.

□

On a la formule de projection suivante :

Proposition 9. *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme de schémas réduits, séparés, de type fini sur* $\mathbb{Z}$*. Alors pour tout* 1*-cycle* C *sur* X *de support propre sur* $\mathbb{Z}$ *et tout fibré hermitien* $\overline{L}$ *sur* Y*, on a l'égalité suivante*

$$\widehat{\deg}(f^*\overline{L}|C) = \widehat{\deg}(\overline{L}|f_*C) \tag{7}$$

Démonstration. On peut supposer que C est horizontale ou verticale. Alors dans le cas vertical, on a toujours la formule 5 reliant le degré d'Arakelov au degré géométrique et alors cette formule est la formule de projection de la proposition 2.5.c de Fulton dans [Ful98]. Dans le cas horizontal, en utilisant le fait que les sections de $f^*L_{|C}$ s'écrivent comme f^*s où s est une section de $L_{|f(C)}$ et la définition 6 de la hauteur, on a bien l'égalité. □

3.3 Fonctions de Green et produit de convolution

3.3.1 Fonctions de Green et métriques associées

On veut considérer des fibrés hermitiens sur la surface arithmétique X et donc on a besoin de métriques "naturelles" associées aux diviseurs sur la surface de Riemann $X(\mathbb{C})$. On considère pour cela les fonctions de Green pour un diviseur D sur une surface de Riemann M. On fixe donc D un diviseur sur M une surface de Riemann.

Définition 10. *Une fonction de Green g_D à régularité C^∞ associée à D sur M est une fonction C^∞ sur $M \setminus |D|$, à singularités logarithmiques sur le support de D : pour tout P dans $|D|$, pour toute coordonnée locale z, il existe U voisinage de P et h fonction C^∞ sur U tels que sur U*

$$g_D(z(Q)) - \log |z(P) - z(Q)|^{-1} = h(z(Q)) \tag{8}$$

Remarque 11.

1. *La singularité logarithmique sur les points du support de D permet de définir une métrique hermitienne sur le fibré $\mathcal{O}_M(D)$ en posant*

$$||\mathbb{1}_D||_{g_D} = e^{-g}$$

où $\mathbb{1}_D$ est la section canonique de $\mathcal{O}_M(D)$.

2. *L'équation 8 montre qu'une fonction de Green est localement L^1 sur M et que la distribution qu'elle définit satisfait localement l'égalité de courants*

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\ g_{D_{|U}} + \delta_{D_{|U}} = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}h \tag{9}$$

où $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}h$ est une 2-forme de classe C^∞ sur U. On note

$$w(g_D) := \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\ g_D + \delta_D \tag{10}$$

la 2-forme C^∞ sur M définit par la fonction de Green g_D.

3. *Réciproquement, par ellipticité de l'opérateur $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$, si un courant T sur M satisfait l'équation 10 (et en particulier, que $w(T)$ est une 2-forme C^∞), alors il est défini par une fonction de Green à régularité C^∞ sur M associée au diviseur défini par le support du dirac qui apparaît dans l'équation.*

Si $\overline{L}$ est un fibré hermitien sur M, on note $c_1(\overline{L})$ sa première classe de Chern. C'est une 2-forme de classe C^∞ sur M localement définie par l'égalité

$$c_1(\overline{L}) := \frac{1}{2i\pi}\overline{\partial}\partial \log ||s||^2 \tag{11}$$

où s est une section analytique complexe non nulle de L. Alors dans le cas des fonctions de Green, on a la proposition :

Proposition 12. *Avec $\overline{L} = (\mathcal{O}_M(D), ||.||_{g_D})$, on a l'égalité entre 2-formes C^∞*

$$c_1(\overline{L}) = w(g_D)$$

Démonstration. Par définition de la première classe de Chern et par définition de la métrique associée à une fonction de Green, on a :

$$\begin{aligned}
c_1(\overline{L}) &= \frac{1}{2i\pi}\overline{\partial}\partial \log ||\mathbb{1}_D||^2_{g_D} \\
&= -\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} \log ||\mathbb{1}_D||_{g_D} \\
&= \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\ g_D + \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} \sum_{P\in|D|} n_P \log|z(Q)-z(P)| \\
&= \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\ g_D + \delta_D
\end{aligned}$$

□

Remarque 13. *En géométrié algébrique, les classes de Chern apparaissent dans la théorie de l'intersection classique, et donc il est naturel de les retrouver en développant une théorie de l'intersection arithmétique. On verra qu'on définira l'intersection des diviseurs "principaux" d'Arakelov via l'intégration des classes de Chern.*

La métrique associée à une fonction de Green permet aussi de définir un produit hermitien sur les espaces tangents de M aux points du support du diviseur associé à la fonction de Green. Soit P un point de M, et soit g une fonction de Green associée au point P.

Définition 14. *On appelle métrique capacitaire et on note $||.||_g^{cap}$ la métrique sur T_pM déduite de la métrique $||.||_g$ en P sur $\mathcal{O}_M(P)_{|P}$ via l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension* 1

$$T_P(M) \simeq \mathcal{O}_M(P)_{|P}$$

Si g s'écrit localement comme dans 9, on a

$$||\frac{\partial}{\partial z}_{|P}||_g^{cap} = e^{-h(P)}$$

où $\frac{\partial}{\partial z}$ est un champ de vecteurs holomorphe défini localement au voisinage de P, image de $\mathbb{1}_P$ via l'isomorphisme précédent.

3.3.2 Produit de convolution des fonctions de Green et fonctorialité

On fixe dans cette section D_1 et D_2 deux diviseurs sur M, munis de g_1 et g_2 deux fonctions de Green associées. On suppose de plus que les supports de ces diviseurs sont disjoints.

Définition 15. *On définit le produit de convolution de f_1 et f_2 en tant que distribution par la formule*

$$g_1 * g_2 := g_1\delta_{D_2} + g_2\delta_{D_1} + g_1 \cdot \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}g_2 \tag{12}$$

De plus, quand l'intersection des supports des fonctions de Green g_1 et g_2 est compacte, on peut considérer l'intégrale

$$\int_M g_1 * g_2 \tag{13}$$

Proposition 16. *Le produit 13 est symétrique pour les fonctions de Green d'intersection des supports compacte.*

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\int_M g_1 \cdot \frac{i}{\pi} \partial\overline{\partial} g_2 = \int_M g_2 \cdot \frac{i}{\pi} \partial\overline{\partial} g_1$$

Mais cette formule est une conséquence de la formule de Green

$$\int_M \varphi \frac{i}{\pi} \partial\overline{\partial}\psi = -\frac{i}{\pi} \int_M \partial\varphi \wedge \overline{\partial}\psi = -\frac{i}{\pi} \int_M \overline{\partial}\varphi \wedge \partial\psi = \int_M \psi \frac{i}{\pi} \partial\overline{\partial}\varphi$$

valable pour toutes fonctions de Green dont l'intersection des supports est compacte. □

On voit apparaître l'expression $\frac{i}{\pi} \int_M \partial\varphi \wedge \overline{\partial}\psi$, qui est en fait le produit scalaire de Dirichlet, défini par exemple sur l'espace de Sobolev $L_1^2(M)/\{\text{constantes}\}$ que l'on verra dans la partie 4.2. On a donc l'expression

$$\int_M g_1 * g_2 = \int_M g_1 \delta_{D_2} + \int_M g_2 \delta_{D_1} - < g_1, g_2 >_{Dir} \tag{14}$$

Proposition 17. *La forme symétrique définie par l'intégrale du produit de convolution est uniquement déterminée par les deux propriétés suivantes :*

1. *Si les supports de g_1 et g_2 sont disjoints, alors $\int_M g_1 * g_2 = 0$*
2. *Si f_1 et f_2 sont deux fonctions C^∞ telles que les intersections des supports de f_1 et g_2, f_2 et g_1, f_1 et f_2 soient compactes, alors*

$$\int_M (g_1 + f_1) * (g_2 + f_2) = \int_M g_1 * g_2 + \int_M f_1 w(g_2) + \int_M f_2 w(g_1) - < f_1, f_2 >_{Dir}$$

Les fonctions de Green à régularité C^∞ ont la bonne propriété suivante de fonctorialité par rapport aux tirés en arrières :

Proposition 18. *Soit $f : N \to M$ une application entre surfaces de Riemann. Soit D un diviseur sur M et g une fonction de Green pour D. Alors f^*g est une fonction de Green C^∞ pour le diviseur f^*D sur N et on a l'égalité*

$$w(f^*g) = f^*w(g)$$

En revanche, les propriétés de fonctorialité des poussés en avant sont moins bonnes. En effet, le poussé en avant d'une fonction C^∞ n'est pas nécessairement une fonction C^∞ et il y a une condition en plus sur f pour avoir de la fonctorialité (en plus de la condition de propreté habituelle) :

Proposition 19. *Soit $f : N \to M$ une application entre surfaces de Riemann. Soit E un diviseur sur N et h une fonction de Green pour E. On suppose de plus que $f_{|\mathrm{supp}(h)}$ est propre, et que $w(h)$ est nulle sur un voisinage du lieu de ramification de f. Alors f_*h définit comme un courant sur M est une fonction de Green C^∞ pour f_*E sur M, et on a l'égalité*

$$f_*(w(h)) = w(f_*h)$$

Remarque 20. *Comme le support de h contient le support de E, le diviseur f_*E est bien défini. De plus, $w(h)$ s'annulant au voisinage du lieu de ramification de f, on peut pousser en avant la 2-forme lisse $w(h)$ sur N pour avoir une 2-forme lisse $f_*w(h)$ sur M.*

Enfin, dans le cas où les hypothèses des deux propriétés précédentes sont vérifiées, on a également une formule de projection :

Proposition 21. *On suppose que les conditions supplémentaires suivantes sont vérifiées :*

$$f^{-1}(|D|) \cap |E| = \emptyset \quad \textit{et} \quad \mathrm{supp}(g) \cap f(\mathrm{supp}(h)) \ \textit{est compacte}$$

Alors on a :

$$\int_N (f^*g) * h = \int_M g * (f_*h) \tag{15}$$

3.4 Intersection d'Arakelov sur les surfaces arithmétiques

3.4.1 Diviseurs d'Arakelov et fibrés hermitiens

Le but de cette section est de définir un accouplement entre les diviseurs d'Arakelov et les fibrés en droites hermitiens sur une surface arithmétique X. On considère X une surface arithmétique projective, régulière et intègre. En particulier, $X(\mathbb{C})$ est une surface de Riemann compacte et le groupe des diviseurs de Weil sur X est égal au groupe des diviseurs de Cartier sur X : on parlera simplement de diviseurs.

Définition 22. *Un diviseur d'Arakelov sur X est une paire (D, g) où D est un diviseur sur X et g est une fonction de Green de classe C^∞, invariante par conjugaison complexe, pour $D_\mathbb{C}$ sur $X(\mathbb{C})$.*

On rappelle qu'à chaque fonction de Green g pour un diviseur D est associée une métrique hermitienne sur le fibré en droites $\mathcal{O}_M(D)$. En particulier, si (D, g) est un diviseur d'Arakelov, on lui associe naturellement un fibré en droite hermitien sur X que l'on note

$$\overline{\mathcal{O}}_X(D, g) := (\mathcal{O}_X(D), ||.||_g)$$

On note $\overline{Z}^1(X)$ le groupe des diviseurs d'Arakelov sur X. Comme dans le cas de l'intersection sur une surface algébrique, on définit un morphisme de groupes abéliens

$$\overline{\mathrm{div}} : k(X)^* \to \overline{Z}^1(X)$$

tel que si $f \in k(X)^*$,

$$\overline{\mathrm{div}}(f) := (\mathrm{div}(f), -\log|f_\mathbb{C}|) \in \overline{Z}^1(X)$$

L'ensemble des diviseurs d'Arakelov pouvant s'écrire comme $(D, g) = \overline{\mathrm{div}}(f)$ pour un élément f non nul dans le corps des fonctions de X est l'ensemble des *diviseurs rationnellement équivalents à* 0, et le conoyau du morphisme $\overline{\mathrm{div}}$

$$\overline{CH}^1(X) := \mathrm{Coker}(\overline{\mathrm{div}}) = \overline{Z}^1(X)/\overline{\mathrm{div}}(k(X)^*)$$

est le groupe d'Arakelov-Chow de X (ou groupe de Chow arithmétique) des diviseurs d'Arakelov modulo équivalence rationnelle sur X.

Définition 23. *Un isomorphisme entre fibrés en droites hermitiens munis d'une métrique C^∞ est un isomorphisme φ de fibrés en droites algébriques sur X tel que φ induise des isomorphismes d'espaces hilbertiens sur les fibres munies de leur métriques respectives. On note*

$$\overline{\mathrm{Pic}}(X)$$

le groupe abélien des classes d'isomorphisme de fibrés en droites hermitiens munis d'une métrique lisse sur X.

Proposition 24. *On a un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\widehat{\mathrm{c}_1} : \overline{\mathrm{Pic}}(X) \simeq \overline{\mathrm{CH}}^1(X)$$

définit par

$$\widehat{\mathrm{c}_1}(\overline{L}) := (\mathrm{div}(s), -\log||s_\mathbb{C}||)$$

où s est une section algébrique non nulle de L sur X, de réciproque $\widehat{\mathrm{c}_1}^{-1}$ définie par

$$\widehat{\mathrm{c}_1}^{-1}(D, g) = \left[\overline{\mathcal{O}}_X(D, g)\right]$$

Démonstration. Les applications $\widehat{c}_1$ et $\widehat{c}_1^{-1}$ sont bien définies :

1. Si $\overline{L}_1 \simeq \overline{L}_2$, alors une section rationnelle s_1 de $\overline{L}_1$ diffère d'une section rationnelle s_2 de $\overline{L}_2$ d'un élément $s \in k(X)^*$, et donc comme par définition du groupe de Chow $\widehat{c}_1\left(\overline{\mathcal{O}}_X(\mathrm{div}(s), -\log|s_{\mathbb{C}}|)\right) = 0$, l'application $\widehat{c}_1$ est bien définie et ne dépend pas du représentant de la classe d'isomorphisme du fibré en droite hermitien $\overline{L}$.
2. Il suffit de montrer que si $f \in k(X)^*$, alors $\widehat{c}_1^{-1}(\overline{\mathrm{div}}(f)) = \overline{\mathcal{O}}_X(\mathrm{div}(f), -\log|f_{\mathbb{C}}|)$ est isomorphe à $\overline{\mathcal{O}}_X$. Comme f est un élément du corps de fonctions de X, on a bien l'isomorphisme $\mathcal{O}_X(\mathrm{div}(f)) \simeq \mathcal{O}_X$ entre fibrés en droites algébriques donné par la multiplication par l'élément f sur les sections globales de ces fibrés, et par définition de la métrique associée à une fonction de Green, on a bien $||g_x||_{-\log|f_{\mathbb{C}}|} = ||g_x f_x||_0$ pour g_x germe de fonction en $x \in X$.

Ces applications sont bien inverses l'une de l'autre par le même type d'arguments que pour la bonne définition de ces applications. $\square$

3.4.2 Produit d'intersection arithmétique : définitions et propriétés

On peut maintenant définir l'intersection d'Arakelov sur la surface arithmétique X :

Soit $\overline{L}$ un fibré en droites hermitien sur X et soit (D, g) un diviseur d'Arakelov sur X. On définit leur produit d'intersection d'Arakelov comme étant le nombre réel

$$\overline{L} \cdot (D, g) := \widehat{\deg}(\overline{L}|D) + \int_{X(\mathbb{C})} g \ \ c_1(\overline{L_{\mathbb{C}}}) \tag{16}$$

L'intégrale de droite est bien définie car on suppose que la surface arithmétique X est projective, donc le support de la fonction de Green g est compacte.

On définit également un produit d'intersection $\overline{Z}^1(X) \times \overline{Z}^1(X) \to \mathbb{R}$ par la formule

$$(D', g') \cdot (D, g) := \overline{\mathcal{O}}_X(D', g') \cdot (D, g) \tag{17}$$

L'objectif de la fin de cette section est de montrer que le produit 17 définit un produit bilinéaire symétrique

$$\overline{CH}^1(X) \times \overline{CH}^1(X) \to \mathbb{R}$$

On a par construction que le produit est bilinéaire et passe à l'équivalence rationnelle sur le premier facteur :

Proposition 25. *Soit $f \in k(X)^*$. Alors pour tout diviseur d'Arakelov (D,g),*

$$\overline{\mathrm{div}}(f) \cdot (D, g) = 0$$

Démonstration. Par définition du produit d'intersection,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{div}}(f) \cdot (D, g) &= \widehat{\deg}(\overline{\mathcal{O}}_X(\mathrm{div}(f))|D) + \int_{X(\mathbb{C})} g \ \ c_1(\overline{\mathcal{O}}_{X(\mathbb{C})}(\mathrm{div}(f_{\mathbb{C}}))) \\ &= 0 + 0\end{aligned}$$

Le premier terme est nul par définitions 6 et 4 du degré d'Arakelov des 1-cycles : c'est la formule du produit sur le corps de nombres $\mathbb{Q}$.

Le second terme est nul car les classes de Chern sont les mêmes sur chaque classe d'isomorphisme de fibrés en droites hermitiens sur X et que la première classe de Chern de $\overline{\mathcal{O}}_X$ est triviale. $\square$

On a donc un produit d'intersection

$$\overline{CH}^1(X) \times \overline{Z}^1(X) \to \mathbb{R}$$

Pour obtenir la descente au groupe de Chow arithmétique sur le 2^e facteur, on va montrer que le produit

$$\overline{Z}^1(X) \times \overline{Z}^1(X) \to \mathbb{R}$$

est symétrique en interprétant la formule 17 avec le produit de convolution des fonctions de Green et l'intersection classique des diviseurs sur un schéma algébrique.

La proposition suivante relie les degrés d'intersections arithmétiques de deux diviseurs d'Arakelov quand on translate les fonctions de Green par des fonctions de classe C^∞, formule qui nous sera utile par la suite :

Proposition 26. *Soient (D, g) et (D', g') dans $\overline{Z}^1(X)$, et soient f et f' deux fonctions C^∞ sur $X(\mathbb{C})$, invariantes par conjugaison complexe. Alors*

$$(D, g+f)\cdot(D', g'+f') = (D, g)\cdot(D', g')+\int_{X(\mathbb{C})} f \;\; w(g')+\int_{X(\mathbb{C})} f' \;\; w(g) - < f, f' >_{Dir} \quad (18)$$

Démonstration. Par bilinéarité du produit d'intersection, on a

$$(D, g + f) \cdot (D', g' + f') = (D, g) \cdot (D', g') + (D, g) \cdot (0, f') + (0, f') \cdot (D', g') + (0, f) \cdot (0, f')$$

donc il suffit de montrer que

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & (0, f) \cdot (0, f') = -\langle f, f' \rangle_{\text{Dir}} \\ \text{(ii)} & (D, g) \cdot (0, f') = \displaystyle\int_{X(\mathbb{C})} f' \;\; w(g) \\ \text{(iii)} & (0, f) \cdot (D', g') = \displaystyle\int_{X(\mathbb{C})} f \;\; w(g') \end{array}$$

Pour (i), on a

$$\begin{aligned} (0, f) \cdot (0, f') &= \widehat{\deg}(\overline{0}_f|0) + \int_{X(\mathbb{C})} f' \;\; w(f) \\ &= -\frac{i}{\pi} \int_{X(\mathbb{C})} \partial f \wedge \overline{\partial} f' \\ &= -\langle f, f' \rangle_{\text{Dir}} \end{aligned}$$

car $w(f) = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} f$ et par la formule de Green.

Pour (ii), on a

$$\begin{aligned} (D, g) \cdot (0, f') &= \widehat{\deg}(D|0) + \int_{X(\mathbb{C})} f' \, w(g) \\ &= \int_{X(\mathbb{C})} f' \, w(g) \end{aligned}$$

où on utilise que $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{O}}_X(D,g)_{\mathbb{C}}) = \mathrm{c}_1(\mathcal{O}_{X(\mathbb{C})}(D_{\mathbb{C}}), ||.||_g)$.

Pour (iii), on a

$$\begin{aligned}(0,f)\cdot(D',g') &= \widehat{\deg}\big(\mathrm{div}(\mathbb{1}_0|D')\big) - \sum_{\sigma\in D'_{\mathbb{C}}} \log\|\mathbb{1}_0(\sigma)\|_f + \int_{X(\mathbb{C})} g'\, w(f)\\ &= \sum_{\sigma\in D'_{\mathbb{C}}} f(\sigma) + \int_{X(\mathbb{C})} g'\,\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} f\\ &= \int_{X(\mathbb{C})} f\left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} g' + \delta_{D'_{\mathbb{C}}}\right)\end{aligned}$$

où on utilise la définiton de la métrique associée à la fonction de Green à la 2^{e} égalité et où on utilise deux fois la formule de Green.

□

Remarque 27. *Soient D et D' deux diviseurs sur X. Alors l'intersection géométrique*

$$D\cdot D'$$

est un 0-cycle sur $|D|\cap|D'|$ tel que

$$D\cdot D' = D'\cdot D \; + \mathrm{div}(f)$$

où $|\mathrm{div}(f)| \subset |D|\cap|D'|$.

Si de plus $|D|\cap|D'|$ est propre sur $\mathbb{Z}$ (ce qui est le cas avec notre hypothèse de projectivité) et

$$|D_{\mathbb{Q}}|\cap|D'_{\mathbb{Q}}| = \emptyset$$

alors $|D|\cap|D'|$ est une union finie de points fermés (intersection des supports en degré 0) et de composantes verticales (composantes en degré 1 en commun au dessus de corps finis, que la condition $|D_{\mathbb{Q}}|\cap|D'_{\mathbb{Q}}| = \emptyset$ ne voit pas).

Le degré d'Arakelov $\widehat{\deg}(D\cdot D')$ du 0-cycle $D\cdot D'$ est bien défini et vérifie

$$\widehat{\deg}(D\cdot D') = \widehat{\deg}(D'\cdot D) + \widehat{\deg}(\mathrm{div}(f)) = \widehat{\deg}(D'\cdot D) \tag{19}$$

car d'après 4, le degré d'Arakelov des 0-cycles rationnellement équivalents à 0 sur une composante verticale est nul.

Proposition 28. *Soient (D,g) et (D',g') dans $\overline{Z}^1(X)$ tels que $|D_{\mathbb{Q}}|\cap|D'_{\mathbb{Q}}| = \emptyset$. Alors*

$$(D',g')\cdot(D,g) = \widehat{\deg}(D'\cdot D) + \int_{X(\mathbb{C})} g' * g \tag{20}$$

Démonstration. La condition $|D_{\mathbb{Q}}|\cap|D'_{\mathbb{Q}}| = \emptyset$ implique que $|D_{\mathbb{C}}|\cap|D'_{\mathbb{C}}| = \emptyset$ et que le produit de convolution des fonctions de Green est bien défini.

On peut supposer que

$$D = \sum_i n_i C_i$$

où chaque C_i est horizontale ou verticale. On peut faire la même chose avec D', et par bilinéarité du produit d'intersection, il n'y a que 2 cas à considérer :

1. Si les deux composantes sont verticales, alors les diviseurs sont de la forme (V, f) et (V', f') où V et V' sont des courbes projectives sur des corps finis et f et f' sont des fonctions C^∞ sur $X(\mathbb{C})$. On a donc d'après la formule 18

$$\begin{aligned}(V, f) \cdot (V', f') &= (V, 0) \cdot (V', 0) + \int_{X(\mathbb{C})} f\, w(0) + \int_{X(\mathbb{C})} f'\, w(0) - \langle f, f' \rangle_{\mathrm{Dir}} \\ &= (V, 0) \cdot (V', 0) - \langle f, f' \rangle_{\mathrm{Dir}}\end{aligned}$$

Donc si on a la formule pour $(V, 0)$ et $(V', 0)$, alors on l'a pour (V, f) et (V', f') car

$$\int_{X(\mathbb{C})} f * f' = - < f, f' >_{Dir}$$

d'après la formule de Green. Mais on a l'égalité

$$(V, 0) \cdot (V', 0) = \widehat{\deg}(V|V') = \widehat{\deg}(V \cdot V')$$

par définition des degrés d'intersections géométriques et d'Arakelov, ce qui conclut le premier cas.

2. Dans le second cas, une des composantes n'est pas verticale, et en vue des hypothèses les diviseurs D et D' s'intersectent proprement sur X, i.e. sont d'intersection un nombre fini de points fermés. Alors on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned}(D, g) \cdot (D', g') &= \widehat{\deg}\left(\overline{\mathcal{O}}_X(D, g)|D'\right) + \int_{X(\mathbb{C})} g'\, w(g) \\ &= \widehat{\deg}\left(\mathbb{1}_{D|D'}\right) - \sum_{\sigma \in D'_{\mathbb{C}}} \log \left\|\mathbb{1}_{D|D'}\right\|_g + \int_{X(\mathbb{C})} g'\, w(g) \\ &= \widehat{\deg}(D \cdot D') - \sum_{\sigma \in D'_{\mathbb{C}}} g(\sigma) + \int_{X(\mathbb{C})} g'\, w(g) \\ &= \widehat{\deg}(D \cdot D') + \int_{X(\mathbb{C})} \left[g'\, w(g) + g\, \delta_{D'_{\mathbb{C}}}\right]\end{aligned}$$

où on utilise la définition du degré d'Arakelov à la seconde égalité et la définition de la norme associée à la fonction de Green à la troisième égalité.

□

Ainsi, l'expression 20 nous donne la proposition suivante :

Proposition 29. *Le produit d'intersection $\overline{Z}^1(X) \times \overline{Z}^1(X) \to \mathbb{R}$ est symétrique.*

Démonstration. Soient (D, g) et (D', g') deux diviseurs d'Arakelov sur X. Alors comme dans la proposition précédente, par bilinéarité du produit d'intersection, si toute intersection de composantes verticale-horizontale, verticale-verticale, horizontale-verticale ou horizontale-horizontale commute, alors le produit d'intersection est commutatif. Mais dans chacun de ces cas là, on peut se ramener à l'un des deux cas suivants :

1. $(D, g) = (D', g')$
2. $|D_{\mathbb{Q}}| \cap |D'_{\mathbb{Q}}| = \emptyset$

En effet, en utilisant le fait que le produit d'intersection descend au groupe d'Arakelov-Chow sur le premier facteur du produit, on peut bouger la composante de gauche par un diviseur d'Arakelov rationnellement équivalent à 0 pour se ramener au cas 2 dès que (D, g) est différent de (D', g'). On peut alors appliquer la proposition 20 et utiliser la commutativité du produit de convolution et la formule 19. □

Par symétrie du produit $\overline{Z}^1(X) \times \overline{Z}^1(X) \to \mathbb{R}$ et par la proposition 25, on obtient donc un accouplement d'Arakelov bilinéaire et symétrique sur toute surface arithmétique

$$\overline{CH}^1(X) \times \overline{CH}^1(X) \to \mathbb{R} \tag{21}$$

Cet accouplement est à la base de la théorie d'Arakelov. On peut citer :

— la preuve du théorème de Faltings (anciennement conjecture de Mordell pendant 60 ans) par Faltings qui utilise l'intersection d'Arakelov sur des modèles de courbes, voir [Fal83]

— théorème de Riemann-Roch arithmétique et théorèmes de stabilité de fibrés vectoriels par Bost-Gillet-Soulé, voir [BGS94]

— théorèmes de positivité en géométrie arithmétique par Zhang, voir [Zha92]

3.5 Théories de l'intersection arithmétique plus générales

La théorie de l'intersection arithmétique développée dans la section précédente utilise les fonctions de Green de classe C^∞. Cette théorie a la bonne propriété suivante de fonctorialité :

Proposition 30. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de surfaces arithmétiques projectives. L'application $f^* : \overline{\mathrm{Pic}}(Y) \to \overline{\mathrm{Pic}}(X)$ induit une application $f^* : \overline{CH}^1(Y) \to \overline{CH}^1(X)$ compatible avec l'intersection d'Arakelov, ie :*

$$f^*D \cdot f^*D' = \deg(f)\ D \cdot D'$$

Le degré de f est nul si f n'est pas dominant, et vaut le degré de l'extension de corps définie par les corps de fonctions de Y et X sinon.

En revanche, il n'y a pas de bonne propriété de fonctorialité de poussé en avant : on a vu à la remarque 20 que si $f_{\mathbb{C}}$ est une application analytique entre surfaces de Riemann qui est ramifiée, alors on ne peut pas pousser en avant sans hypothèses supplémentaires une fonction de Green C^∞ sur X et récupérer une fonction de Green C^∞ sur Y.

Dans certaines situations, il est aussi très intéressant de travailler avec des fonctions de Green et des métriques ayant des singularités (comme par exemple des métriques singulières aux pointes des courbes modulaires).

Bost développe dans [Bos99] une théorie de l'intersection avec des fonctions de Green à régularité L^2_1 : ce sont des fonctions f dans L^2 de dérivée df encore dans L^2. Il obtient un accouplement

$$\overline{CH}^1(X)^{L^2_1} \times \overline{CH}^1(X)^{L^2_1} \to \mathbb{R}$$

satisfaisant les mêmes propriétés que l'accouplement 21, mais possède des propriétés de fonctorialité pour les poussés en avant. L'accouplement vérifie la formule

$$(D, g) \cdot (D', g') = \widehat{\deg}(D \cdot D') + \int_{X(\mathbb{C})} g * g'$$

quand l'intersection des supports des fibres génériques des diviseurs est vide, où $g * g'$ ne fait pas sens mais où $\int_{X(\mathbb{C})} g * g'$ est bien défini.

Pour cette raison, Bost et Charles développent dans [BC] une théorie de l'intersection à mi-chemin entre les théories C^∞ et L^2_1 en terme de régularité : la classe de fonctions $C^{b\Delta}$. Avec cette théorie, la formule du produit d'intersection

$$(D, g) \cdot (D', g') = \widehat{\deg}(D|D') + \int_{X(\mathbb{C})} g'\ \ w(g) \tag{22}$$

est valide et les propriétés de fonctorialités sont bonnes.

Définition 31. *Soit f une fonction continue sur $X(\mathbb{C})$ à valeurs réelles. Alors f est de classe $C^{b\Delta}$ si le courant $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}f$ est une mesure de Radon sur $X(\mathbb{C})$.*
Soit μ une mesure de Radon réelle sur $X(\mathbb{C})$. Alors μ est dans l'espace $M^{cp}(X(\mathbb{C}))$ si elle s'écrit localement comme $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}g$ où g est une fonction continue sur $X(\mathbb{C})$.

Le chapitre 4 de la monographie [BC] traite la théorie de l'intersection sur une surface arithmétique pour la régularité $C^{b\Delta}$. En particulier, des énoncés analytiques analogues à ceux des théories C^∞ et L_1^2 sont démontrés : la formule 22 ne fait pas sens dans la théorie L_1^2 mais fait sens dans la théorie $C^{b\Delta}$, et les propriétés de fonctorialités de la théorie L_1^2 qui ne sont pas vérifiées dans la théorie C^∞ sont valides dans le cadre de la théorie $C^{b\Delta}$.

Enfin, les fonctions de Green associées à la théorie du potentiel sur une surface de Riemann compacte à bord non vide sont dans cet espace $C^{b\Delta}$ de fonctions. Ces fonctions de Green provenant de la théorie du potentiel sont essentielles dans la définition et l'étude du *débordement*, un invariant associé à une application entre surfaces de Riemann introduit par Bost et Charles dans [BC].

Le *débordement* apparaît dans l'étude des *surfaces arithmétiques formelles-analytiques* : ces surfaces sont munies de fibrés hermitiens canoniques auxquels sont attachés des fonctions de Green provenant de la théorie du potentiel. Plus précisement, cet invariant apparaît dans l'étude du degré des morphismes entre ces surfaces (qui sont dans l'analogie corps de nombres/corps de fonctions les analogues de germes de surfaces analytiques le long d'une section) et les surfaces arithmétiques.

La partie suivante traite du débordement d'un point de vue purement analytique, bien qu'il ne faille pas oublier qu'il apparaît naturellement dans le cadre de la géométrie d'Arakelov des *surfaces arithmétiques formelles-analytiques*.

4 Débordement archimédien et surfaces de Riemann compactes connexes

4.1 Généralités sur le débordement

4.1.1 Fonctions de Green et théorie du potentiel sur les surfaces de Riemann compactes à bord non vide

Une classe particulière de fonctions de Green sur un domaine (Ω, P) de $\mathbb{C}$, pointé, compact, et à bord non vide est la classe des fonctions de Green satisfaisant les conditions du problème de Dirichlet pour (Ω, P).

Ce sont les fonctions harmoniques sur $\overset{o}{\Omega}\setminus\{P\}$, continues sur $\overline{\Omega}\setminus\{P\}$, nulles sur le bord et à singularité logarithmique en P. Il existe une généralisation naturelle aux surfaces de Riemann.

Définition 32. *1. Une surface de Riemann à bord (V, V^+) est une paire constituée d'un germe de surface de Riemann V^+ le long d'une sous-variété à bord C^∞ fermée V de V^+, avec V de codimension 0 dans V^+.*

2. (V, V^+) est compacte si V est compacte.

3. On note $\partial V := V^+ \setminus V$ le bord de V, qui est une courbe compacte lisse.

4. On note $\overset{o}{V}$ l'intérieur de V, qui est une surface de Riemann.

5. On écrira simplement V pour désigner une surface de Riemann à bord (V, V^+), et par $\alpha : V^+ \to M$ une application entre V et une surface de Riemann M, analytique jusqu'au bord.

Soit maintenant V une surface de Riemann, connexe, compacte, à bord non vide, et soit P un point de son intérieur.

Proposition 33. *Il existe une unique fonction $g_{V,P} : V^+ \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *$g_{V,P}$ est continue sur $V^+ \setminus \{P\}$, nulle sur $V^+ \setminus \overset{o}{V}$*
2. *$g_{V,P}$ est harmonique sur $\overset{o}{V} \setminus \{P\}$*
3. *$g_{V,P}$ est à singularité logarithmique en P,i.e. $g_{V,P} - \log|z|^{-1}$ est bornée sur un voisinage pointé de P, où z est une coordonnée locale en P.*

Une démonstration est donnée dans [Bos99]. On appelle cette fonction $g_{V,P}$ *fonction de Green associée à* (V, P). En particulier, on en déduit de la propriété que

$$g_{V,P} : \overset{o}{V} \to \mathbb{R}$$

est une fonction de Green C^∞ pour le diviseur P sur la surface de Riemann $\overset{o}{V}$. Son support est inclus dans V, et elle est positive sur $\overset{o}{V}$.

La mesure associée
$$w(g_{V,P}) := \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} g_{V,P} + \delta_P := \mu_{V,P}$$
est appelée mesure harmonique associée au point P sur V. Elle est supportée sur la courbe lisse compacte ∂V, et est définie par une densité C^∞ d'intégrale 1.

Exemple 34. *Pour $0 < R < 1$, on considère la surface de Riemann compacte, connexe, à bord non vide $\left(\overline{D}(0,R), 0\right)$ définie par la sous variété à bord $\overline{D}(0,R)$ d'intérieur $D(0,R)$, pointée en 0. Alors la fonction de Green associée est*

$$\begin{aligned} g_R : \quad \overline{D}(0,R) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ z &\longmapsto \log^+\left(\frac{R}{|z|}\right) \end{aligned}$$

où $\log^+ |z|^{-1} = \log |z|^{-1}$ si $|z| \leq 1$ et 0 sinon.

La mesure associée μ_R est la mesure de Haar sur $S(0,R) \subset \mathbb{D}$.

4.1.2 Le débordement archimédien

La formule définissant le débordement archimédien fait sens pour une classe de fonction plus grande que les fonctions de Green provenant de la théorie du potentiel, les fonctions de Green à régularité $C^{b\Delta}$. Cette classe de fonction est étudiée en détail dans [BC], et nous nous contenterons ici des fonctions de Green provenant de la théorie du potentiel.

Soit (V, P) une surface de Riemann compacte, connexe, de bord non vide, P un point de l'intérieur de V, et $(g_{V,P}, \mu_{V,P})$ la fonction de Green du potentiel pour le diviseur P.

Soit M une surface de Riemann quelconque et $\alpha : V \to N$ une application analytique non constante. On note e l'indice de ramification de α en P.

Définition 35. *Le débordement archimédien de α en P est définie par*

$$\mathrm{Ex}(\alpha : (V,P) \to N) := \int_V g_{V,P}\, \delta_{\alpha^*\alpha_*(P)-e(P)} \;+\; \int_V g_{V,P}\, \alpha^*\alpha_*\mu_{V,P}$$

Remarque 36. *Le membre de gauche est bien défini car $g_{V,P}$ est C^∞ en dehors de P, et $\delta_{\alpha^*\alpha_*(P)-e(P)}$ est supportée en dehors de P par définition de l'indice de ramification e. Le membre de droite est bien défini par les propriétés générales de fonctorialité de la classe de fonctions $C^{b\Delta}$. Cette expression montre aussi que le débordement est un réel positif, car $g_{V,P}$ et $\mu_{V,P}$ sont positives.*

Une expression équivalente qui permet d'interpréter le débordement archimédien dans le cadre de l'intersection arithmétique est donnée par la proposition suivante :

Proposition 37. *Avec les notations précedentes, on a l'égalité :*

$$\mathrm{Ex}(\alpha : (V,P) \to N) = \int_V g_{V,P} * (\alpha^*\alpha_* g_{V,P} - e g_{V,P})$$

Démonstration. Par définition de la fonction de Green du potentiel d'équilibre, $g_{V,P}\mu_{V,P}$ est la mesure nulle sur V. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_V g_{V,P} * (\alpha^*\alpha_* g_{V,P} - e g_{V,P}) &= \int_V g_{V,P}\, \delta_{\alpha^*\alpha_* P - eP} + \int_V (\alpha^*\alpha_* g_{V,P} - e g_{V,P})\, w(g_{V,P}) \\ &= \int_V g_{V,P}\, \delta_{\alpha^*\alpha_* P - eP} + \int_V (\alpha^*\alpha_* g_{V,P})\, \mu_{V,P} + e\int_V g_{V,P}\, \mu_{V,P} \\ &= \int_V g_{V,P}\, \delta_{\alpha^*\alpha_* P - eP} + \int_V g_{V,P}\, \alpha^*\alpha_*\mu_{V,P}\end{aligned}$$

où on utilise la symétrie du produit de convolution des fonctions de Green à la première égalité, et les propriétés de fonctorialité des poussés en avant et tirés en arrière des fonctions et mesures de classe $C^{b\Delta}$. □

Remarque 38. *Si l'application α est algébrisable, on peut interpréter le débordement archimédien comme la partie "analytique" de l'intersection d'Arakelov de deux diviseurs sur une surface arithmétique. En effet, supposons que (D, g) soit un diviseur d'Arakelov sur X tel que $(D_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}}) = (P, g_{V,P})$. On considère un morphisme de surfaces arithmétiques projectives régulières $f : X \to Y$ tel que $f_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ soit α. Alors avec $(D', g') := (f^*f_*D - eD, f^*f_*g - eg)$, on a*

$$(D, g) \cdot (D', g') = \widehat{\deg}(D \cdot D') + \int_V g_{V,P} * (\alpha^*\alpha_* g_{V,P} - e g_{V,P})$$

$$= \widehat{\deg}(D \cdot D') + \mathrm{Ex}(\alpha : (V, P) \to N)$$

Définition 39. *Une application analytique complexe α est dite finie si elle est propre et à fibres finies. On appelle aussi ces applications des revêtements ramifiés. Elle est dite totalement ramifiée en un point P si elle est finie et de degré le degré de ramification de α en P.*

La proposition suivante justifie le terme de débordement, et est démontrée dans [BC] :

Proposition 40. *Une application $\alpha : (V, P) \to N$ est de débordement nul si et seulement si l'application analytique complexe $\alpha_{|\overset{o}{V}} : \overset{o}{V} \to \alpha(\overset{o}{V})$ est totalement ramifiée en P.*

Remarque 41.

1. *Si α est étale, alors le débordement est nul si et seulement si α est un plongement ouvert.*
2. *En fixant $\alpha : \mathbb{D} \to N$ application étale où N surface de Riemann quelconque, alors avec les notations de 23,* $\mathrm{Ex}(\alpha, R)$ *est nul tant que $\alpha|_{D(0,R)}$ est une carte de N, et devient strictement positif dès qu'il y a du "débordement" sur les autres "domaines fondamentaux" de N via α.*

4.1.3 Fonction de Green pour la diagonale et débordement

Les différentes expressions du débordement montrent que le débordement d'un morphisme $\alpha : (V, P) \to N$ se calcule à partir d'une fonction de Green sur V. Le théorème 5.4.1 de Bost-Charles dans [BC] exprime le débordement de α à partir d'une *fonction de*

Green pour la diagonale de N. Cette expression laisse la liberté de choisir une fonction de Green particulière pour chaque surface de Riemann N à l'arrivée.

Soit donc N une surface de Riemann, et β une 2-forme réelle de classe C^∞.

Définition 42. *On définit* une fonction de Green pour la diagonale *de N associée à la forme β comme une fonction*

$$g_N : N \times N \to]-\infty; +\infty]$$

telle que :

1. *g_N est symétrique : pour tout $(P,Q) \in N \times N$, $g_N(P,Q) = g_N(Q,P)$*
2. *g_N est C^∞ en dehors de la diagonale Δ_N, à singularités logarithmiques le long de la diagonale : pour toute coordonnée locale z sur U ouvert de $N \times N$, il existe $h \in C^\infty(U)$ telle que pour tout $(P,Q) \in U$,*

$$g_N(P,Q) - \log\ |z(P) - z(Q)|^{-1} = h(P,Q)$$

Cette propriété montre que la fonction g_N est localement L^1 sur $N \times N$ et que le courant qu'elle définit

$$w(g_N) := \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} g_N + \delta_{\Delta_N} =: \gamma$$

est une 2-forme C^∞ sur $N \times N$.

3. *La forme $\gamma - p_1^*\beta - p_2^*\beta$ est nulle sur les fibres de p_1 et p_2, où p_1 et p_2 sont les projections du premier et deuxième facteur de $N \times N$ sur N.*

Remarque 43. *La propriété* 3 *de la définition 42 implique que pour tout $P \in N$, $g_N(-,P)$ est une fonction de Green à régularité C^∞ pour le diviseur P sur N dont la 2-forme associée est β :*

$$w(g_N(-,P)) = (Id_N, P)^* w(g_N) = (Id_N, P)^*(p_1^*\beta + p_2^*\beta) = \beta + 0$$

et donc

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} g_N(-,P) + \delta_P = \beta$$

On note $||.||^{cap}_{g_N}$ la métrique capacitaire $||.||^{cap}_{g_N(-,P)}$ sur $T_P N$, qui vérifie

$$||\frac{\partial}{\partial z}_{|P}||^{cap}_{g_N(-,P)} = e^{-h(P,P)}$$

pour tout $P \in U$, avec les notations de la définition.

Un exemple crucial dans ce travail est le cas des surfaces de Riemann compactes et connexes. Dans [BC], une construction de *fonction de Green pour la diagonale* pour N est expliquée pour chaque forme réelle C^∞ d'intégrale 1 sur N.

Exemple 44. *Soit N une surface de Riemann compacte et connexe, de genre g, et soit β une $2-$forme réelle de classe C^∞ satisfaisant*

$$\int_N \beta = 1$$

Soit $(\omega_k)_{1\leq k\leq g}$ une base orthonormée de $\Omega^1(N)$ pour le produit hilbertien

$$\langle \alpha, \omega\rangle := \frac{i}{2}\int_N \alpha\wedge\overline{\omega}$$

On considère γ la $2-$forme réelle, fermée, C^∞ sur $N\times N$ définie par

$$\gamma := p_1^*\beta + p_2^*\beta + \sum_{1\leq k\leq g}(p_1^*\omega_k\wedge p_2^*\overline{\omega}_k - p_1^*\overline{\omega_k}\wedge p_2^*\omega_k)$$

Cette forme définit la même classe de cohomologie que le courant associé à la diagonale δ_{Δ_N}.

Par le $\partial\overline{\partial}-$ lemma appliqué à la variété kählérienne compacte $N\times N$, il existe une unique (à constante additive près) distribution réelle g_N telle que

$$\gamma - \delta_{\Delta_N} = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}g_N$$

ie

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}g_N + \delta_{\Delta_N} = \gamma$$

Par propriétés d'ellipticité de l'opérateur $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$, g_N est définie par une fonction C^∞ en dehors de la diagonale à singularité logarithmique sur la diagonale, symétrique, et telle que $w(g_N(-,P)) = \beta$ pour tout $P\in N$.

Remarque 45.

1. *Réciproquement, étant donnée une 2-forme réelle lisse β sur N, l'existence d'une fonction de Green pour la diagonale donne la condition de normalisation : si $P\in N$,*
$$\int_N\beta = \int_N\delta_P + \frac{i}{\pi}\int_N\partial\overline{\partial}g_N(-,P) = 1+0$$
2. *Dans la partie suivante, nous choisirons la constante définissant l'unicité de la distribution réelle pour que $\int_N g_N(-,P) = 0$ pour tout $P\in N$, condition qui donnera l'unicité d'une telle fonction associée à β.*
3. *Nous verrons aussi que lorsque β est la forme volume normalisée associée à une métrique riemannienne conforme sur N, alors g_N coincide avec la fonction de Green usuelle qui inverve le Laplacien géométrique sur la variété riemanienne (N,β).*

On revient maintenant au débordement. Soit V une surface de Riemann compacte, connexe, de bord non vide ∂V, et P un point de son intérieur. On considère aussi (N,β) une surface de Riemann munie d'une 2-forme réelle lisse β, et g_N une *fonction de Green pour la diagonale*. Soit $\alpha : V^+\to N$ une application non constante. Le théorème suivant de [BC] permet de relier le débordement à la fonction de Green pour la diagonale :

Théorème 46. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$Ex\,(\alpha:(V,P)\to N) = 2\int_V g_{V,P}\ \alpha^*\beta - \int_{\partial V^2} g_N(\alpha(z),\alpha(z'))\ d\mu_{V,P}(z)d\mu_{V,P}(z') - \log||\alpha^{[e]}(P)||^{cap}_{g_N}$$

Démonstration. On a les égalités suivantes de courants sur V^+ :

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}g_{V,P} = \mu_{V,P} - \delta_P$$
$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}g_N = \gamma - \delta_{\Delta_N}$$

où γ est une 2-forme lisse telle que

$$\forall Q \in N, \quad (Id_N, Q)^*\gamma = \beta.$$

Pour tout $x \in V$, on a l'égalité suivante de courants sur V^+ :

$$\begin{aligned}\alpha^*\alpha_*\delta_x &= (\alpha, \alpha(x))^*\delta_{\Delta_N} \\ &= (\alpha, \alpha(x))^*(\gamma - \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}g_N) \\ &= \alpha^*\beta - \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}(\alpha, \alpha(x))^*g_N\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in V \setminus \alpha^{-1}(\alpha(P))$, on a :

$$\begin{aligned}\int_V g_{V,P}\,\alpha^*\alpha_*\delta_x &= \int_V g_{V,P}\,\alpha^*\beta - \int_{V^+} g_{V,P}\,\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}(\alpha, \alpha(x))^*g_N \\ &= \int_V g_{V,P}\,\alpha^*\beta - \int_{V^+} (\alpha, \alpha(x))^*g_N\,\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}g_{V,P} \\ &= \int_V g_{V,P}\,\alpha^*\beta - \int_{V^+} (\alpha, \alpha(x))^*(\mu_{V,P} - \delta_P) \\ &= \int_V g_{V,P}\,\alpha^*\beta - \int_{y\in\partial V} g_N(\alpha(y), \alpha(x))\,d\mu_{V,P}(y) + g_N(\alpha(P), \alpha(x))\end{aligned}$$

où on utilise la formule de Green dans la seconde égalité.

Comme $\alpha^{-1}(\alpha(P))$ et ∂V sont d'intersection finie, et que $\mu_{V,P}$ est définie par une densité continue, on a :

$$\mu_{V,P}(\alpha^{-1}(\alpha(P))) = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_V g\,\alpha^*\alpha_*\mu_{V,P} &= \int_{\partial V}\left(\int_V g\,\alpha^*\alpha_*\delta_x\right)d\mu_{V,P}(x) \\ &= \int_V g\,\alpha^*\beta - \int_{\partial V^2} g_N(\alpha(x), \alpha(y))\,d\mu_{V,P}(x)d\mu_{V,P}(y) + \int_V g_N(\alpha(P), \alpha(x))\,d\mu_{V,P}(x)\end{aligned}$$

Pour le calcul de l'autre terme, on a aussi :

$$\begin{aligned}\delta_{\alpha^{-1}(\alpha(P))-eP} &= \alpha^*\alpha_*\delta_P - e\delta_P \\ &= (\alpha, \alpha(P))^*\delta_{\Delta_N} - e\delta_P \\ &= (\alpha, \alpha(P))^*(\gamma - \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}g_N) - e(-\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}g_{V,P} + \mu_{V,P}) \\ &= \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi + \alpha^*\beta - e\mu_{V,P}\end{aligned}$$

où on a posé

$$\varphi := eg_{V,P} - (\alpha, \alpha(P))^*g_N,$$

qui est continue sur un voisinage de P par comparaison des singularités logarithmiques et par définition de l'indice de ramification e. Sa valeur en P est :

$$\varphi(P) = \log \left\| \alpha^{[e]}(P) \right\|_e^{\mathrm{cap}} .$$

Comme $g_{V,P}$ est nul sur $V^+ \setminus \overset{\circ}{V}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_V g_{V,P}\, \delta_{\alpha^{-1}(\alpha(P))-eP} &= \int_{V^+} g_{V,P}\, \frac{i}{\pi} \partial\overline{\partial}\varphi + \int_V g_{V,P}\, \alpha^*\beta \\
&= \int_{V^+} \varphi\, \frac{i}{\pi} \partial\overline{\partial} g_{V,P} + \int_V g_{V,P}\, \alpha^*\beta \\
&= \int_{V^+} \varphi\, (\mu_{V,P} - \delta_P) + \int_V g_{V,P}\, \alpha^*\beta \\
&= -\varphi(P) - \int_{\partial V} (\alpha, \alpha(P))^* g_N \, d\mu_{V,P} + \int_V g_{V,P}\, \alpha^*\beta
\end{aligned}$$

En sommant les deux expressions obtenues pour les deux membres du débordement, on obtient le résultat voulu. $\square$

4.2 Débordement pour les surfaces de Riemann compactes connexes

4.2.1 Fonction de Green pour la diagonale d'une surface de Riemann compacte connexe

Soit (X, h) une surface de Riemann compacte, connexe, munie d'une métrique conforme h. On note β la forme volume associée, qui s'écrit localement

$$\beta = k(z)dz \wedge \overline{dz}$$

où k est une fonction lisse strictement positive.

On fixe également un morphisme de surfaces de Riemann non constant $\alpha : \mathbb{D} \to X$. L'objectif de cette partie est d'exprimer le débordement

$$\mathrm{Ex}(\alpha, R) := \mathrm{Ex}(\alpha_{|D(0,R)^+} : (\overline{D}(0, R), 0) \to X) \tag{23}$$

pour R entre 0 et 1 en utilisant une *fonction de Green pour la diagonale* de X.

Dans 44, on a vu qu'il existait une unique (à constante additive prêt) fonction de Green G_X pour la diagonale associée à β, et on a mentionné dans 45 que l'on pouvait choisir la constante telle que pour tout P dans X,

$$\int_X G_X(-, P) \;\; \beta = 0. \tag{24}$$

Proposition 47. *L'intégrale* $\int_X G_X(-, P) \;\; \beta$ *ne dépend pas de* P *et la fonction de Green pour la diagonale associée à* β *vérifiant* 24 *est uniquement déterminée par* β.

Démonstration. La fonction $I_G : P \mapsto \int_X G_X(-, P)\, \beta$ est de classe C^∞, et la distribution qu'elle définit coïncide avec $p_{1*}(G_X\, p_2^*\beta)$:

$$\begin{aligned}
\forall f \in C^\infty(X), \quad \int_X f\, p_{1*}\left(G_X\, p_2^*\beta\right) &= \int_{X^2} (p_1^* f)\, G_X\, p_2^*\beta \\
&= \int_{X^2} f(x)\, G_X(x, y)\, (p_2^*\beta)_{(x,y)} \\
&= \int_X f(x) \left(\int_X G_X(x, y)\, \beta_y \right) \\
&= \int_X f\, I_G
\end{aligned}$$

Mais la distribution $p_{1*}(G_X\, p_2^*\beta)$ est harmonique, donc coïncide avec une fonction constante. En effet :

$$\begin{aligned}
\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\left(p_{1*}(G_X\, p_2^*\beta)\right) &= p_{1*}\left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}G_X \wedge p_2^*\beta\right) \\
&= p_{1*}\left((\gamma - \delta_{\Delta_X}) \wedge p_2^*\beta\right) \\
&= p_{1*}(\gamma \wedge p_2^*\beta) - \beta
\end{aligned}$$

Car pour tout $f \in C^\infty(X)$,

$$\begin{aligned}
\int_X f\, p_{1*}(\delta_{\Delta_X} \wedge p_2^*\beta) &= \int_{X^2} f(x)\, \delta_{\Delta_X} \wedge p_2^*\beta \\
&= \int_X f(x)\, (p_2^*\beta)_{(x,x)} \\
&= \int_X f\, \beta
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
p_{1*}(\gamma \wedge p_2^*\beta) &= p_{1*}(p_1^*\beta \wedge p_2^*\beta) \\
&= \left(\int_X \beta \right) \beta
\end{aligned}$$

Et comme $\int_X \beta = 1$, on a bien :

$$\frac{i}{\pi} \partial\overline{\partial}\, (p_{1*}(G_X\, p_2^*\beta)) = 0$$

□

Dans notre cas où β est la forme volume associée à la métrique conforme h, G_X est aussi la fonction de Green associée au Laplacien géométrique Δ.

On note $L^2(X, \beta) := \{f : X \to \mathbb{C}\ ,\ \int_X |f|^2\ \ \beta\ \ < +\infty\}$. C'est un espace de Hilbert muni du produit hermitien L^2 usuel, et cet espace de Hilbert ne dépend pas de β : X est compacte et connexe donc tous les espaces $(L^2(X, \mu), ||.||_{L^2})$ sont isométriques. On notera maintenant $L^2(X)$ cet espace de Hilbert.

On note aussi $L^2((p, q))$ l'espace de Hilbert des formes de type (p, q) sur X à coefficients L^2, munis des produits hermitiens

$$\forall\ (w, w') \in L^2((1, 0))\ ,\ < w, w' >_{(1,0)} := \frac{i}{2} \int_X w \wedge \overline{w'}$$

$$\forall\ (w, w') \in L^2((0, 1))\ ,\ < w, w' >_{(0,1)} := -\frac{i}{2} \int_X w \wedge \overline{w'}$$

Définition 48. *Le laplacien géométrique associé à (X, h) est l'opérateur différentiel sur $L^2(X)$ de domaine $C^\infty(X)$ qui s'écrit en coordonnées locales*

$$\Delta := -\frac{1}{k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Remarque 49. *On a la relation*

$$\frac{i}{\pi} \partial\overline{\partial} f = -\frac{1}{2\pi} \Delta f\ \beta$$

pour toute f de classe C^∞ sur X.

Définition 50. *1. On définit l'espace de Sobolev $L^2_1(X)$ comme*

$$L^2_1(X) := \{f \in L^2(X)\ ,\ \partial f \in L^2((1,0))\}$$

et on le munit du produit scalaire

$$||f||^2_{L^2_1} := ||f||^2_{L^2} + \frac{i}{\pi}\int_X \partial f \wedge \overline{\partial f}$$

2. On définit $L^2_{-1}(X)$ comme le dual Hilbertien de $L^2_1(X)$, qui est donc muni de la norme $||T||_{L^2_{-1}} := \sup\ \{\ |T(f)|\ ,\ f \in L^2_1\ ,\ ||f||_{L^2_1} \leq 1\}$.

Proposition 51. *L'opérateur Δ est essentiellement auto-adjoint : on peut l'étendre en un opérateur auto-adjoint encore noté $\Delta : L^2(X) \to L^2(X)$ où pour f et g dans L^2_1*

$$\Delta f\ (g) :=< \partial f, \partial g >_{L^2(1,0)}$$

On peut alors appliquer le théorème spectral à Δ et on a :

1. $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in C^\infty(X)$, $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^+$, telles que $\Delta\phi_i = \lambda_i\phi_i$
2. La suite de valeurs propres vérifie $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n < ...$ et $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i^\sigma} < +\infty$ dès que $\sigma > 1$.

On voudrait maintenant inverser Δ pour un obtenir un opérateur de Hilbert-Schmidt défini par une fonction G, mais il faut pour cela considérer la restriction de Δ à $L^2_1(X)/\mathrm{Ker}(\Delta)$. $\mathrm{Ker}(\Delta)$ est constitué des fonctions constantes, on introduit donc $L^2_1(X)/\mathbb{C}$ muni du produit scalaire de Dirichlet

$$< f, g >_{Dir} := \frac{i}{\pi}\int_X \partial f \wedge \overline{\partial g}$$

C'est un espace de Hilbert intrinsèque.

Pour inverser le laplacien en prenant sa restriction à $L^2_1(X)/\mathrm{Ker}(\Delta)$, on plonge $L^2_1(X)/\mathbb{C}$ dans $L^2_1(X)$. On a une suite exacte scindée car on a choisi β comme étant une forme volume sur X

$$0 \to \mathrm{Ker}\left(\int_X -\ \beta\right) \to L^2_1(X) \to \mathbb{C} \to 0$$

qui permet de plonger $L^2_1(X)/\mathrm{Ker}(\Delta)$ dans $L^2_1(X)$ via l'isomorphisme suivant :

Proposition 52. *On a un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels entre* $\mathrm{Ker}\left(\int_X -\ \beta\right)$ *et $L^2_1(X)/\mathbb{C}$ qui permet de plonger $L^2_1(X)/\mathbb{C}$ dans $L^2_1(X)$.*

Démonstration. On pose

$$\psi : \mathrm{Ker}\left(\int_X -\ \beta\right) \to L^2_1(X)/\mathbb{C}$$

$$f \longmapsto [f]$$

Son inverse est donné par

$$\psi^{-1} : L_1^2(X)/\mathbb{C} \to \text{Ker}\left(\int_X - \ \beta\right)$$

$$[f] \mapsto f - \int_X f \ \ \beta$$

Cette application est bien définie : si $f = f' + cst$, $f - \int_X f \ \ \beta = f' - \int_X f' \ \ \beta$.

Si $f \in \text{Ker}\left(\int_X - \ \beta\right)$, alors

$$\psi^{-1} \circ \psi \ (f) = f - \int_X f \ \ \beta = f$$

et si $[f] \in L_1^2(X)/\mathbb{C}$, alors

$$\psi \circ \psi^{-1} \ ([f]) = [f]$$

On a donc une injection

$$i : L_1^2(X)/\mathbb{C} \to L_1^2(X)$$

$$[f] \mapsto f - \int_X f \ \ \beta$$

et une projection

$$f \mapsto f - \int_X f \ \ \beta$$

□

Remarque 53. *Ce n'est pas un isomorphisme d'espace de Hilbert car le produit de Dirichlet n'est pas préservé via ψ :*

$$||i([f])||^2_{L_1^2(X)} = ||f||^2_{Dir} + ||f||^2_{L^2} - \left|\int_X f\right|^2 \geq ||[f]||^2_{Dir}$$

avec égalité si et seulement si $[f] = 0$.

On considère la restriction $\Delta \circ i$ de Δ à $L_1^2(X)/\mathbb{C}$ qui définit un opérateur inversible encore noté

$$\Delta : L_1^2(X)/\mathbb{C} \to L^2_{-1,\int_X=0}(X)$$

où

$$L^2_{-1,\int_X=0}(X) := \left\{T \in L^2_{-1}(X) \ , \ \int_X T := < T, 1 >= 0\right\}$$

est le dual de Hilbert de $L_1^2(X)/\mathbb{C}$.

Notons

$$\mathrm{H}^1 := L_1^2(X)/\mathbb{C},$$
$$\mathrm{H}^{-1} := L^2_{-1,\int_X=0}(X).$$

ainsi que

$$C_G : \mathrm{H}^{-1} \to \mathrm{H}^1$$

l'inverse de Δ.

C_G étant l'inverse de Δ, par le théorème spectral appliqué à Δ, c'est un opérateur compact, auto-adjoint dont la série des carrés des valeurs propres converge. C'est donc un opérateur de Hilbert-Schmidt et il existe G dans $L^2(X \times X)$ modulo constante telle que

$$\forall\, T \in \mathrm{H}^{-1},\ \forall\, z \in X\ ,\ C_G(T)(z) = \int_X G(-,z)\ T$$

En particulier,

$$\forall\, [f] \in\ L_1^2(X)/\mathbb{C}\ ,\ C_G\left(\Delta\ [f]\right) = [f]$$

i.e. via le plongement 52

$$\forall\, f \in\ L_1^2(X)\ ,\ C_G\left(\Delta\ \left(f - \int_X f\ \beta\right)\right) = f - \int_X f\ \beta$$

qui se réécrit par la formule de Green

$$\forall\, f\ \in L_1^2(X)\ ,\ \forall\, z \in X\ ,\ \int_X f \cdot \Delta G(-,z)\ \beta = f(z) - \int_X f\ \beta$$

Ainsi, pour tout z dans X, G satisfait l'égalité entre distributions

$$\Delta G(-,z) = \delta_z - \beta$$

Par ellipticité, on en déduit que $G(-z)$ est C^∞ en dehors de z, à singularité logarithmique (non normalisée) en z, et par propriétés générales des opérateurs de Hilbert-Schmidt, $G(-,-)$ est symétrique. Par construction, on peut choisir $\int_X G(-,P)\ \beta$ car on définit G sur l'espace des courants d'intégrale nulle sur les constantes, donc on a bien le choix de la constante $\int_X G(-,P)\ \beta$ pour relever G en une fonction dans $L^2(X \times X)$.

Il reste à normaliser multiplicativement G pour avoir la bonne singularité logarithmique. On pose pour tout (z,z') dans $X^2 \setminus \Delta_X$,

$$G_X(z,z') := 2\pi G(z,z')$$

Proposition 54. *G_X est la fonction de Green associée à β.*

Démonstration. On rappelle qu'on a

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} = -\frac{1}{2\pi}\Delta\ \beta$$

Ainsi, en tant que courants, pour tout z dans X, G_X vérifie

$$\begin{aligned}\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}G_X(-,z) &= 2i\partial\overline{\partial}G(-,z)\\ &= -\Delta G(-,z)\\ &= \beta - \delta_z\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}G_X(-,z) + \delta_z = \beta$$

□

Ainsi, G_X ainsi construite comme inversant l'opérateur $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$ sur l'espace H^{-1} est *la fonction de Green pour la diagonale* associée à β et on peut appliquer le théorème 46 qui nous donne une expression pour le débordement de l'application α en fonction de G_X :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}(\alpha, R) = 2\int_{D(0,R)} \log\left(\frac{R}{|z|}\right)\, \alpha^*\beta - \int_{S(0,R)^2} G_X(\alpha(z), \alpha(z'))\, d\mu_R(z)\, d\mu_R(z') \\ - \log \left\|\alpha^{[e]}(0)\right\|_{G_X}^{\mathrm{cap}} \end{aligned} \tag{25}$$

Remarque 55. *Le fait que G_X inverse l'opérateur $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$ est important car il va nous permettre dans la partie suivante d'interpréter le second terme comme une norme, nous donnant la négativité de ce second terme.*

4.2.2 Une première borne sur le débordement pour une application générale

On veut maintenant étudier la formule précédente 25 pour en déduire un encadrement pour le débordement de α restreinte à un plus petit disque. On notera pour la suite G_X l'opérateur défini par la fonction G_X.

1. Le premier terme est un terme de la théorie de Nevanlinna, que l'on note comme dans [BC]
$$T_\alpha(R) := \int_{D(0,R)} \log\left(\frac{R}{|z|}\right)\ \alpha^*\beta$$
et qui est plus facile à controler que le second terme.
2. Le 3^e terme est de la forme $K - \log R$, où $K = \lim_{z\to 0}(G_X(\alpha(z), \alpha(0)) - \log|z|^{-1})$.

Nous allons montrer que le second terme peut s'écrire comme

$$-\int_{S(0,R)^2} G_X(\alpha(z), \alpha(z'))\ d\mu_R(z)d\mu_R(z') = -||\alpha_*\mu_R - \beta||^2_{H^{-1}}$$

de telle sorte que le débordement se réécrive

$$\mathrm{Ex}(\alpha, R) = 2\cdot T_\alpha(R) - ||\alpha_*\mu_R - \beta||^2_{H^{-1}} + K - \log R$$

On note $\alpha^* : L^2(X) \to L^2_{loc}(\mathbb{D})$ l'application de "tiré en arrière". On peut définir de même une application de tiré en arrière sur les espaces de distributions $C^{-\infty}(X)$ et $C_c^{-\infty}(\mathbb{D})$, espaces sur lesquels agissent les opérateurs ∂ , $\overline{\partial}$ et $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$.

Proposition 56. *L'application $\alpha^* : L^2(X) \to L^2_{loc}(\mathbb{D})$ commute avec les opérateurs ∂ , $\overline{\partial}$ et $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$.*

On a donc une application induite entre espaces de Sobolev encore notée

$$\alpha^* : L^2_1(X) \to L^2_{1,loc}(\mathbb{D})$$

Cette application induit par dualité une application de poussé en avant

$$\alpha_* : L^2_{-1,\ c}(\mathbb{D}) \to L^2_{-1}(X)$$

définie par

$$\forall\, T \in L^2_{-1,\ c}(\mathbb{D})\ ,\ \forall\, g \in L^2_1(X)\ ,\ <\alpha_* T, g> := <T, \alpha^* g>$$

Proposition 57. *On peut écrire la mesure μ_R vue comme un courant à support compact sur $\mathbb{D}$ comme*

$$\mu_R = -\overline{\partial}\left(\mathbb{1}_{D(0,R)}(z)\ \frac{dz}{z}\right)$$

.

Démonstration. En utilisant la formule de Stokes, on a bien que pour toute f dans $C_c^\infty(\mathbb{D})$,

$$<\mathbb{1}_{D(0,R)}\ \frac{dz}{z}\ , \overline{\partial} f> = \int_{S(0,R)} f\ \ \mu_R$$

□

Par ailleurs, on a l'inclusion d'espaces

$$\overline{\partial}\left(L^2_{loc,\ c}(1,0)(\mathbb{D})\right) \subset L^2_{-1,\ c}(\mathbb{D})$$

qui permet de voir μ_R comme un élément de $L^2_{-1,\ c}(\mathbb{D})$, et donc $\alpha_*\mu_R$ comme un élément de $L^2_{-1}(X)$. En projettant $L^2_{-1}(X)$ sur H^{-1}, on a

$$\alpha_*\mu_R - \beta \in \mathrm{H}^{-1}$$

Proposition 58. *On a l'égalité*

$$\int_{S(0,R)^2} G_X(\alpha(z), \alpha(z'))\ \ d\mu_R(z) d\mu_R(z') = ||\alpha_*\mu_R - \beta||^2_{\mathrm{H}^{-1}}$$

Démonstration. On utilise le fait que $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$ est isométrique, donc on a :

$$||G_X(\alpha_*\mu_R - \beta)||_{Dir} = ||\alpha_*\mu_R - \beta||_{\mathrm{H}^{-1}}$$

donc il suffit de montrer que

$$||G_X(\alpha_*\mu_R - \beta)||^2_{Dir} = \int_{S(0,R)^2} G_X(\alpha(z), \alpha(z'))\ \ d\mu_R(z) d\mu_R(z')$$

On a

$$\begin{aligned}\|G_X(\alpha_*\mu_R - \beta)\|^2_{\mathrm{Dir}} &= \frac{i}{\pi}\int_X \partial G_X(\alpha_*\mu_R - \beta) \wedge \overline{\partial G_X(\alpha_*\mu_R - \beta)} \\ &= \frac{i}{\pi}\int_X \left[\left(\int_X \frac{\partial}{\partial z} G_X(z, z')\, \alpha_*\mu_R(z')\right)\left(\int_X \frac{\partial}{\partial \overline{z}} G_X(z, z'')\, \alpha_*\mu_R(z'')\right)\right] dz \wedge \overline{dz}\end{aligned}$$

car G_X est à valeurs réelles et pour tout P dans X,

$$\int_X G_X(-, P)\ \ \beta = 0 \tag{26}$$

donc en intervertissant les intégrales en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli (tout est à minima L^2), on a

$$\begin{aligned}
\|G_X(\alpha_*\mu_R-\beta)\|^2_{Dir} &= \int_{X^2}\left[\int_X \partial_z G_X(z,z'')\wedge\frac{i}{\pi}\overline{\partial_z}G_X(z,z'')\right]\alpha_*\mu_R(z')\alpha_*\mu_R(z'') \\
&= -\int_{X^2}\left[\int_X G_X(z,z')\,\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}_z G_X(z,z'')\right]\alpha_*\mu_R(z')\alpha_*\mu_R(z'') \\
&= -\int_{X^2}\left[\int_X G_X(z,z')\,(\beta-\delta_{z''})\right]\alpha_*\mu_R(z')\alpha_*\mu_R(z'') \\
&= \int_{X^2} G_X(z',z'')\,\alpha_*\mu_R(z')\alpha_*\mu_R(z'')
\end{aligned}$$

en utilisant à la dernière égalité la symétrie de G_X et la normalisation 26. □

Remarque 59. *On peut donc exprimer la double intégrale comme*

$$||\alpha_*\mu_R-\beta||^2_{\mathrm{H}^{-1}} = Sup\left\{\left|\int_X f\ \ \alpha_* d\mu_R - \int_X f\ \ \beta\right|\ ,\ ||f||_{Dir}\leq 1\right\}$$

Dans le cas de l'uniformisation, en fonction de la classe de fonctions C sur laquelle est pris le sup, il existe des résultats d'équiditributions effectives qui donnent des majorations uniformes des termes $\left|\int_X f\ \ \alpha_* d\mu_R - \int_X f\ \ \beta\right|$ en fonction seulement de R et de $||f||_C$.

La proposition 28 montre qu'on a l'expression suivante du débordement

$$\mathrm{Ex}(\alpha,R) = 2\cdot T_\alpha(R) - ||\alpha_* d\mu_R-\beta||^2_{H^{-1}} + K - \log R \tag{27}$$

Par positivité du débordement, on obtient donc :

Proposition 60. *On a le développement suivant quand R tend vers 1 :*

$$\mathrm{Ex}(\alpha,R) \underset{R\to 1}{=} O(T_\alpha(R))$$

Remarque 61.

1. *Le débordement $\mathrm{Ex}(\alpha,R)$ ne dépend pas du choix de la fonction de Green pour la diagonale sur X, mais le terme $T_\alpha(R)$ lui dépend de la forme β sur X. On peut donc choisir la forme β de façon à minimiser $T_\alpha(R)$ pour obtenir une borne optimale par cette méthode sur $\mathrm{Ex}(\alpha,R)$.*
2. *La proposition 60 donne une borne qui dépend de $T_\alpha(R)$: dans le cas où α est une carte de X, le débordement est nul et donc cette borne n'est pas adaptée. En revanche, dans le cas de l'uniformisation, le calcul explicite de cette fonction de croissance nous donne l'ordre de grandeur du débordement quand R tend vers 1.*

4.3 Le cas de l'uniformisation

Dans cette partie, on fixe X une surface de Riemann compacte connexe de genre $g \geq 2$. On note $\alpha : \mathbb{D} \to X$ la composée du biholomorphisme φ (défini dans le petit formulaire de géométrie hyperbolique) avec l'application d'uniformisation $\pi : \mathbb{H} \to X$

$$\mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H} \longrightarrow \Gamma\backslash\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} X$$

où $\pi_1(X) \simeq \Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$ est le groupe fondamental de X et où Γ agit par transformations de Moebius sur $\mathbb{H}$, et Γ' le groupe correspondant à Γ qui uniformise X par $\mathbb{D}$.

Alors les différents termes de l'expression 27 ont une expression simplifiée quand on utilise la fonction de Green pour la diagonale associée à la forme hyperbolique normalisée β sur X. Il est possible d'obtenir une expression explicite du terme de croissance de Nevanlinna pour obtenir une majoration simple du débordement, et d'en obtenir une minoration via le premier terme de la définiton 35 du débordement

$$\int_V g_{V,P}\, \delta_{\alpha^*\alpha_*(P)-e(P)}$$

On rappelle qu'on a l'expression

$$\text{Ex}(\alpha, R) = 2 \cdot T_\alpha(R) - ||\alpha_* d\mu_R - \beta||^2_{H^{-1}} + K - \log R$$

Alors on obtient la majoration suivant :

Proposition 62. *Pour tout* $0 < R < 1$*, on a*

$$\text{Ex}(\pi : (D(0,R), 0) \to X) \;\leq\; \frac{1}{g-1} \cdot \log\left(\frac{1}{1-R}\right) + K - \log\; R$$

Démonstration.

D'après 27, on a déjà

$$\text{Ex}(\alpha, R) \leq 2 \cdot T_\alpha(R) + K - \log(R)$$

donc il suffit de calculer $T_\alpha(R)$ dans le cas de l'uniformisation :

Proposition 63. *Pour tout* $0 < R < 1$*, on a*

$$T_\alpha(R) = \frac{1}{2g-2} \cdot \log\left(\frac{1}{1-R}\right) - \frac{1}{2g-2} \cdot \log(1+R)$$

Démonstration. On a les expressions suivantes en coordonnées locales sur $\mathbb{H}$ pour $\pi^*\beta$ et sur $\mathbb{D}$ pour $\alpha^*\beta$:

$$\beta = \frac{1}{4\pi(g-1)} \frac{1}{y^2}\, dx\, dy \qquad \alpha^*\beta = \frac{1}{4\pi(g-1)} \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}\, dx\, dy$$

Donc :

$$\begin{aligned}
T_\alpha(R) &= \frac{1}{4\pi(g-1)} \int_{D(0,R)} \log\left(\frac{R}{|z|}\right) \frac{4}{(1-|z|^2)^2}\, dz\, d\bar{z} \\
&= \frac{2}{g-1} \int_0^R \log\left(\frac{R}{r}\right) \frac{r}{(1-r^2)^2}\, dr \\
&= \frac{1}{2g-2} \int_0^{R^2} \log\left(\frac{R^2}{t}\right) \frac{dt}{(1-t)^2} \\
&= \frac{1}{2g-2} \left(\left[\log\left(\frac{R^2}{t}\right) \cdot \frac{t}{1-t} \right]_0^{R^2} - \int_0^{R^2} \frac{dt}{1-t} \right) \\
&= -\frac{1}{2g-2} \log(1-R^2)
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}(\alpha, R) &\leq 2T_\alpha(R) + K - \log(R) \\
&= \frac{1}{g-1} \cdot \log\left(\frac{1}{1-R}\right) - \frac{1}{g-1} \cdot \log(1+R) + K - \log(R) \\
&\leq \frac{1}{g-1} \cdot \log\left(\frac{1}{1-R}\right) + K - \log(R)
\end{aligned}$$

□

Remarque 64. *Dans la démonstration de 62, on obtient la majoration plus fine*

$$\mathrm{Ex}(\alpha, R) \leq \frac{1}{g-1} \cdot \log\left(\frac{1}{1-R}\right) + K - \log R - \frac{1}{g-1} \cdot \log(1+R)$$

1. *Si $K < \frac{1}{g-1} \cdot \log 2$, alors au voisinage de 1 on a l'inégalité*

$$\mathrm{Ex}(\alpha, R) \leq \frac{1}{g-1} \cdot \log\left(\frac{1}{1-R}\right)$$

2. *Si $K \geq \frac{1}{g-1} \cdot \log 2$, alors on ne peut pas directement majorer par $\frac{1}{g-1} \cdot \log\left(\frac{1}{1-R}\right)$ car le "reste" est strictement positif.*

Par ailleurs, on peut estimer le terme

$$\int_{D(0,R)} \log\left(\frac{R}{|z|}\right) \ \delta_{\alpha^*\alpha_*(0)-(0)}$$

quand R tend vers 1 qui apparaît dans l'expression

$$\mathrm{Ex}(\alpha, R) = \int_{D(0,R)} \log\left(\frac{R}{|z|}\right) \ \delta_{\alpha^*\alpha_*(0)-(0)} + \int_{D(0,R)} \log\left(\frac{R}{|z|}\right) \ \alpha^*\alpha_*\, d\mu_R \tag{28}$$

On va utiliser le théorème suivant expliqué dans [EM93] par Eskin et McMullen, conséquence d'un théorème plus général publié par Margulis dans [Mar69] :

Théorème 65. *Avec $d_{\mathbb{H}}$ la distance hyperbolique sur $\mathbb{H}$, ρ un réel positif et*

$$N_{\mathbb{H}}(z,\rho) := \mathrm{Card}\ \{z' \in \mathbb{H},\quad d_{\mathbb{H}}(z',z) < \rho\} \cap \Gamma \cdot z\ ,$$

On a

$$N_{\mathbb{H}}(z,\rho) \underset{\rho\to\infty}{\sim} \frac{1}{4(g-1)} e^{\rho}$$

On obtient le résultat asymptotique :

Proposition 66. *On a l'équivalent*

$$\int_{D(0,R)} \log\left(\frac{R}{|z|}\right)\ \delta_{\alpha^*\alpha_*(0)-(0)} \underset{R\to 1}{\sim} \frac{1}{2g-2} \cdot \log\left(\frac{1}{1-R}\right)$$

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned}\int_{D(0,R)} \log\left(\frac{R}{|z|}\right)\ \delta_{\alpha^*\alpha_*(0)-(0)} &= \sum_{\substack{0<|\gamma'.0|<R\\ \gamma'\in\Gamma'}} \log\left(\frac{R}{|\gamma'.0|}\right)\\ &= (N(R)-1)\log(R) + \sum_{\substack{0<|\gamma'.0|<R\\ \gamma'\in\Gamma'}} \log|\gamma'.0|^{-1} \qquad (29)\end{aligned}$$

où $N(R) := \mathrm{Card}\,(D(0,R) \cap \Gamma' \cdot 0)$ est le nombre de points de $D(0,R)$ dans l'orbite de 0 pour l'action de Γ'.

Proposition 67. *On a l'équivalent*

$$N(R) \underset{R\to 1}{\sim} \frac{1}{2g-2} \cdot \frac{1}{1-R}$$

Démonstration. On applique le théorème de Margulis :

Comme

$$\begin{aligned}B(0,R) &= B_{\mathbb{D}}\left(0,\ \log\left(\frac{1+R}{1-R}\right)\right)\\ &= B_{\mathbb{H}}\left(i,\ \log\left(\frac{1+R}{1-R}\right)\right)\end{aligned}$$

car

$$\forall\ z \in\ \mathbb{D},\ d_{\mathbb{D}}(z,0) = d_{\mathbb{H}}(\varphi(z), i)$$

on a :

$$\begin{aligned}N(R) &= N_{\mathbb{D}}\left(0,\ \log\left(\frac{1+R}{1-R}\right)\right)\\ &= N_{\mathbb{H}}\left(i,\ \log\left(\frac{1+R}{1-R}\right)\right),\end{aligned}$$

et donc :

$$N(R) \underset{R\to 1}{\sim} \frac{1}{2g-2} \cdot \frac{1}{1-R}.$$

□

On doit donc estimer le deuxième terme de 29, le premier terme étant borné au voisinage de 1.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $0 < R_0 < 1$ tel que pour tout $R_0 < R < 1$, on ait

$$\frac{1-\epsilon}{2g-2} \cdot \frac{1}{1-R} \leq N(R) \leq \frac{1+\epsilon}{2g-2} \cdot \frac{1}{1-R}$$

Or $x \mapsto \log|x|^{-1}$ est strictement positive, décroissante et de classe C^1 sur $]R_0\,;1[$ donc

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{R_0<|\gamma'.0|<R\\ \gamma'\in\Gamma'}} \log|\gamma'.0|^{-1} &= \int_{R_0}^{R} \log r^{-1}\, dN(r) \\ &= N(R_0)\log R_0 - N(R)\log R + \int_{R_0}^{R} \frac{N(r)}{r}\, dr\end{aligned}$$

par intégration par parties discrète et on a

$$\begin{aligned}&N(R_0)\log R_0 - N(R)\log R + \frac{1-\epsilon}{2g-2}\int_{R_0}^{R} \frac{1}{r(1-r)}\, dr \\ &\leq \sum_{\substack{R_0<|\gamma'.0|<R\\ \gamma'\in\Gamma'}} \log|\gamma'.0|^{-1} \\ &\leq N(R_0)\log R_0 - N(R)\log R + \frac{1+\epsilon}{2g-2}\int_{R_0}^{R} \frac{1}{r(1-r)}\, dr\end{aligned}$$

or

$$\int_{R_0}^{R} \frac{1}{r(1-r)}\, dr = \log R + \log\left(\frac{1}{1-R}\right) - \log R_0 - \log\left(\frac{1}{1-R_0}\right)$$

D'où l'encadrement

$$f(R) + \frac{1-\epsilon}{2g-2}\log\left(\frac{1}{1-R}\right) \leq \sum_{\substack{0<|\gamma'.0|<R\\ \gamma'\in\Gamma'}} \log\left(\frac{R}{|\gamma'.0|}\right) \leq g(R) + \frac{1+\epsilon}{2g-2}\log\left(\frac{1}{1-R}\right)$$

où on a posé

$$\begin{aligned}f(R) &= A(R_0) + \frac{1-\epsilon}{2g-2}\log R - \log R, \\ g(R) &= B(R_0) + \frac{1+\epsilon}{2g-2}\log R - \log R \\ A(R_0) &= \sum_{\substack{0<|\gamma'.0|<R_0\\ \gamma'\in\Gamma'}} \log|\gamma'.0|^{-1} + N(R_0)\log R_0 + \frac{1-\epsilon}{2g-2}\left(-\log R_0 - \log\left(\frac{1}{1-R_0}\right)\right), \\ B(R_0) &= \sum_{\substack{0<|\gamma'.0|<R_0\\ \gamma'\in\Gamma'}} \log|\gamma'.0|^{-1} + N(R_0)\log R_0 + \frac{1+\epsilon}{2g-2}\left(-\log R_0 - \log\left(\frac{1}{1-R_0}\right)\right).\end{aligned}$$

Les fonctions f et g sont bornés au voisinage de 1, donc il existe $R'_0 > R_0$ tel que si $R'_0 < R < 1$, alors

$$\frac{f(R)}{\frac{1}{2g-2}\log\left(\frac{1}{1-R}\right)} \geq -\epsilon$$

$$\frac{g(R)}{\frac{1}{2g-2}\log\left(\frac{1}{1-R}\right)} \leq \epsilon$$

et donc

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ R' \in]0;1[,\ \forall\ R' < R < 1,\ \left|\frac{\int_{D(0,R)}\log\left(\frac{R}{|z|}\right)\ \delta_{\alpha^*\alpha_*(0)-(0)}}{\frac{1}{2g-2}\log\left(\frac{1}{1-R}\right)} - 1\right| \leq 2\epsilon$$

$\square$

On rappelle l'expression 28 du débordement

$$\mathrm{Ex}(\alpha, R) = \int_{D(0,R)} \log\left(\frac{R}{|z|}\right)\ \delta_{\alpha^*\alpha_*(0)-(0)} + \int_{D(0,R)} \log\left(\frac{R}{|z|}\right)\ \alpha^*\alpha_*\, d\mu_R$$

où les deux termes sont positifs, et qui donc vérifie

$$\mathrm{Ex}(\alpha, R) \geq \int_{D(0,R)} \log\left(\frac{R}{|z|}\right)\ \delta_{\alpha^*\alpha_*(0)-(0)}$$

On obtient

Théorème 68. *Soit X surface de Riemann compacte, connexe, de genre $g \geq 2$ et soit $\alpha : \mathbb{D} \to X$ son uniformisation par le disque. Alors pour $0 < R < 1$,*

$$m(R) \leq \mathrm{Ex}(\alpha, R) \leq M(R)$$

où

$$m(R) \underset{R\to 1}{\sim} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g-1} \cdot \log\left(\frac{1}{1-R}\right)$$

$$M(R) \underset{R\to 1}{\sim} \frac{1}{g-1} \cdot \log\left(\frac{1}{1-R}\right)$$

Remarque 69. *Dans la démonstration de la formule 46 de l'expression du débordement par une fonction de Green pour la diagonale, on voit qu'on peut écrire les deux termes positifs apparaissant dans la définition du débordement comme*

$$\int_{D(0,R)} \log\left(\frac{R}{|z|}\right)\ \delta_{\alpha^*\alpha_*(0)-(0)} = T_\alpha(R) - G(R) + K - \log R \tag{30}$$

$$\int_{D(0,R)} \log\left(\frac{R}{|z|}\right)\ \alpha^*\alpha_*\, d\mu_R = T_\alpha(R) + G(R) - \|\alpha_* d\mu_R - \beta\|^2_{H^{-1}} \tag{31}$$

où

$$G(R) := \int_{S(0,R)} G_X(\alpha(0), \alpha(z)) \ d\mu_R$$

On a donc d'après 63 et 66

$$G(R) \underset{R\to 1}{=} o\left(\log\left(\frac{1}{1-R}\right)\right)$$

et on voit que les contributions au débordement de l'intérieur du disque et du bord du disque (toutes les deux positives et dont la somme est exactement le débordement) sont données respectivement par

$$T_\alpha(R) \underset{R\to 1}{\sim} \frac{1}{2g-2} \cdot \log\left(\frac{1}{1-R}\right)$$

et

$$T_\alpha(R) - ||\alpha_*\mu_R - \beta||^2_{H^{-1}}$$

Un équivalent du débordement quand R tend vers 1 avec cette méthode dépend donc uniquement d'un développement asymptotique du terme $||\alpha_*\mu_R - \beta||_{\mathrm{H}^{-1}}$, ce que l'on voit déjà sur la formule 25.

Remarque 70. *D'après les formules du petit formulaire de géométrie hyperbolique, on voit que le rapport entre le logarithme de l'aire hyperbolique de $D(0,R)$ et le débordement $\mathrm{Ex}(\alpha, R)$ est borné quand R tend vers 1. Il en est de même pour le rapport entre le rayon hyperbolique et le débordement quand R tend vers 1.*

Références

[Ara74] S. Ju. Arakelov. An intersection theory for divisors on an arithmetic surface. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 38 :1179–1192, 1974.

[BC] J.-B. Bost and F. Charles. Quasi-projective and formal-analytic arithmetic surfaces. arXiv :2206.14242v2 [math.AG], 189 pages, 2022. A paraître dans Annals of Math. Studies, Princeton University Press.

[BGS94] J.-B. Bost, H. Gillet, and C. Soulé. Heights of projective varieties and positive Green forms. *J. Amer. Math. Soc.*, 7(4) :903–1027, 1994.

[Bos99] J.-B. Bost. Potential theory and Lefschetz theorems for arithmetic surfaces. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 32 :241–312, 1999.

[CDT24] F. Calegari, V. Dimitrov, and Y. Tang. The linear independence of 1, $\zeta(2)$, and $L(2, \chi_{-3})$, 2024.

[EM93] A. Eskin and C.-T. McMullen. Mixing, counting, and equidistribution in lie groups. *Duke Mathematical Journal*, 71(1) :181–209, 1993.

[Fal83] G. Faltings. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. Math.*, 73(3) :349–366, 1983.

[Ful98] W. Fulton. *Intersection theory. 2nd ed.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. 2. Berlin : Springer, 1998.

[Mar69] G. A. Margulis. Certain applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 3(4) :89–90, 1969.

[Zha92] S. Zhang. Positive line bundles on arithmetic surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 136(3) :569–587, 1992.