Point fixe dans un compact

Thomas Chen

C'est un petit exercice sur la compacité.

Exercice 1. Soit E, un espace vectoriel normé. Soit K, un compact non vide de E. Soit $f : K \to K$ vérifiant $\forall x \neq y \in \mathbb{K}, \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Montrer que f admet un unique point fixe. Montrer que ce dernier est obtenu par limite d'une suite vérifiant $u_0 \in X, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Corrigé : Soit $g : x \in K \mapsto \|f(x) - x\| \in \mathbb{R}^+$. g est clairement continue sur K donc par le théorème des bornes atteintes, g admet un minimum sur K compact. Notons-le α. Alors si $f(\alpha) \neq \alpha$), on a $g(f(\alpha)) = \|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\| < \|f(\alpha) - \alpha\| = g(\alpha)$, ce qui est absurde. Donc α est bien point fixe. Pour l'unicité, si α, β sont deux points fixes, on a $\|\alpha - \beta\| = \|f(\alpha) - f(\beta)\| < \|\alpha - \beta\|$. Cela signifie que $\alpha = \beta$.

Considérons maintenant la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $d_n = \|x_n - \alpha\|$ (α est point fixe de f). Alors d est une suite décroissante, minorée par 0, donc converge, disons vers ℓ. Par compacité de K, x admet une valeur d'adhérence, disons ξ. Par passage à la limite, on en déduit $\ell = \|\xi - \alpha\|$. En appliquant la même chose à $d_{n+1} = \|x_{n+1} - \alpha\| = \|f(x_n) - f(\alpha)\|$ et par continuité de f, on a $\ell = \|f(\xi) - f(\alpha)\|$. Donc $\xi = \alpha$. Ainsi, x admet une unique valeur d'adhérence qui est α : elle est donc convergente, et ce, vers α.