Feuille de TD n° 8

Exercice 1. Soit X_1, X_2, X_3 trois v.a. i.i.d. selon $\mathbb{P}(X_1 = \pm 1) = 1/2$, et $Y_i = \prod_{j \in \{1,2,3\} \setminus \{i\}} X_j$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

1. Montrer que les variables Y_1, Y_2, Y_3 sont 2 à 2 indépendantes.
2. Montrer que les variables Y_1, Y_2, Y_3 ne sont pas indépendantes.

Exercice 2. Soit $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$, $X = \sin(2\pi U)$ et $Y = \cos(2\pi U)$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. (On dit que X et Y ne sont pas corrélées)
2. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 3. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements indépendants définis sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On suppose $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = 1$. Montrer que $\mathbb{P}(A_1) = 1$ ou $\mathbb{P}(A_2) = 1$.
2. On suppose $\mathbb{P}(A_n) < 1$ pour tout $n \geq 1$, et $\mathbb{P}(\bigcup A_n) = 1$. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On suppose $X_n \longrightarrow X$ p.s.. Montrer que $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} X$.
2. On suppose que $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} X$.
   (a) Soit ω_0 tel que $\mathbb{P}(\{\omega_0\}) > 0$, et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,
   $$|X_n(\omega_0) - X(\omega_0)| \leq \varepsilon.$$
   (b) On suppose Ω dénombrable et $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties de Ω. Montrer que $X_n \longrightarrow X$ p.s.

Exercice 5. Pour X, Y deux variables aléatoires, on pose $d(X, Y) = \mathbb{E}[|X - Y| \wedge 1]$.

1. Montrer que d est une distance sur l'ensemble des variables aléatoires (considérées à égalité p.s. près).
2. Montrer que $d(X_n, X) \to 0$ ssi $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} X$.
3. Supposons $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} X$ et $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} Y$. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

Exercice 6. Soit $\alpha \geq 0$, $(A_n)_{n\geq 1}$ des événements indépendants. On pose pour $n \geq 1$, $U_n = n^\alpha \mathbf{1}_{A_n}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\geq 1}$ pour que

1. $U_n \longrightarrow 0$ p.s.
2. $U_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
3. $U_n \xrightarrow{L^p} 0$.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. qui converge dans L^2 vers X : $\mathbb{E}[(X_n - X)^2] \to 0$.

1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$.
2. Montrer [1] que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[X^2]$.

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 > 0) = 1$, $\mathbb{P}(X_1 = 1) < 1$, $\mathbb{E}[X_1] = 1$ et $\mathbb{E}[\log(X_1)|] < \infty$. On pose $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$.

1. Vérifier [2] que $\mathbb{E}[\log(X_1)] < 0$.
2. Montrer que $\log(Y_n)/n \longrightarrow \mathbb{E}[\log(X_1)]$ p.s..
3. En déduire $Y_n \longrightarrow 0$ p.s.

1. on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy Schwarz
2. on notera que $\log(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$ avec égalité ssi $x = 1$

4. La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle[3] dans L^1 ?

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n\geq 1} \sim \mathrm{Unif}(0,1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. selon la loi uniforme sur $[0,1]$, et pour $n \geq 1$, $M_n = \min_{1\leq i\leq n} X_i$. Montrer que :

1. $M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
2. $M_n \longrightarrow 0$ p.s.
3. $n \cdot M_n \xrightarrow{(loi)} \mathrm{Exp}(1)$[4].

Exercice 10. Soit $X_n \sim \mathrm{Geom}_{\mathbb{N}}(p_n)$ avec $np_n \to \lambda > 0$. Montrer que $X_n/n \xrightarrow{(loi)} \mathrm{Exp}(\lambda)$

3. on pourra calculer $\mathbb{E}[Y_n]$
4. penser a la fonction de répartition