

Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$

Thomas CHEN

L'étude de marche aléatoire est extrêmement classique. Il y a plusieurs formes possibles. On étudie quelques propriétés. On utilise le lemme de Borel-Cantelli dont on rappelle l'énoncé de l'exercice ici.

Exercice 1. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite d'événements. On définit

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k}_{=: B_n}.$$

1. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que ω réalise $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$ si, et seulement si, $\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\}$ est de cardinal infini (dit en français, A_n est réalisé une infinité de fois).
(b) Lemme de Borel-Cantelli. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 0$.
2. Loi du zéro-un de Borel. On suppose que les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des événements indépendants. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n)$ vaut 0 ou 1 selon que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge ou diverge.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Rademacher de paramètre $p \in]0, 1[$ (c'est une loi de support $\{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p; \mathbb{P}(X = -1) = 1 - p$). On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour $n \geq 1$ et $S_0 = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\exists n \geq 1 : S_n = 0) = 1 \iff \mathbb{P}(\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geq k, S_n = 0) = 1$. Interpréter.
2. On note $T = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$ avec la convention $\inf(\emptyset) = +\infty$, $u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ et $f_n = \mathbb{P}(T = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n = \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k}$. En déduire que $\forall s \in [0, 1[, U(s) - 1 = U(s)F(s)$ avec U, F séries génératrices des suites u et f respectivement (donc $U(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n s^n$).
3. En déduire l'équivalence des trois assertions suivantes (i.o. = infinitely often = infiniment souvent) :
 - a) $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$ diverge.
 - b) $\mathbb{P}(\exists n \geq 1 : S_n = 0) = 1$.
 - c) $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ i.o.}) = 1$.

On pourra utiliser le lemme de Borel-Cantelli, exercice 1.

4. Montrer qu'il existe une seule valeur de p pour que la série diverge et que dans les autres cas, la série diverge. *Indication : on pourra regarder S_{2n} .*

Corrigé :

1. Montrons l'implication directe, la réciproque étant triviale. Notons R l'instant de la dernière visite en 0 (on pose $S_0 = 0$). On note $R = \sup\{n \geq 0 : S_n = 0\}$ et on souhaite montrer que $\mathbb{P}(R = +\infty) = 1$

Puisque R est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, il suffit de montrer que $\mathbb{P}(R = k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Fixons $k \in \mathbb{N}$. Par définition,

$$\mathbb{P}(R = k) = \mathbb{P}((S_k = 0) \cap (\forall n > k, S_n - S_k \neq 0)).$$

L'événement $(S_k = 0)$ est un événement qui ne dépend que des valeurs de $X_1, \dots, X_k$. L'événement $\left(\bigcap_{n>k} \{S_n - S_k \neq 0\}\right)$ ne dépend que des valeurs de $(X_n)_{n>k}$. Par le lemme des coalitions, ils sont indépendants.

On a donc

$$\mathbb{P}(R = k) = \mathbb{P}((S_k = 0) \cap (\forall n > k, S_n - S_k \neq 0)) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(\forall n > k, S_n - S_k \neq 0).$$

Or, on a l'égalité $(S_n - S_k)_{n>k} = (S_{n-k})_{n>k} = (S_n)_{n \geq 1}$ en loi (il suffit d'écrire les événements avec une intersection multi-indicée). Ainsi,

$$\mathbb{P}(\forall n > k, S_n - S_k \neq 0) = \mathbb{P}(\forall n \geq 1, S_n \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(\exists n \geq 1, S_n = 0) = 1 - 1 = 0.$$

De fait,

$$\mathbb{P}(R = k) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(\forall n > k, S_n - S_k \neq 0) = \mathbb{P}(S_k = 0) \times 0 = 0.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(R \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}) = 1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(R = k) + \mathbb{P}(R = +\infty) = 0 + \mathbb{P}(R = +\infty).$$

Ainsi, $\mathbb{P}(R = +\infty) = 1$. C'est ce qu'on voulait.

2. On remarque que $(S_n = 0) = \bigcap_{k=1}^n (S_n = 0 \cap T = k)$, que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si $T = k$, alors $S_k = 0$ et que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les événements $(S_n - S_k = 0)$ et $(T = k) = 0$ sont indépendantes puisque $S_n - S_k$ est une fonction de $X_{k+1}, \dots, X_n$ et $T = k$ une fonction de $X_1, \dots, X_k$ par le lemme des coalitions (alors que $S_n = 0$ et $T = k$ ne sont pas indépendants, d'où l'astuce machiavélique de retirer S_k (qui vaut 0 puisque $T = k$), et enfin, que $S_n - S_k$ et $S_n - k$ pour $n > k$ ont même loi. Ainsi,

$$u_n = \sum_{k=1}^n (\mathbb{P}(S_n = 0 \cap T = k)) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(S_n - S_k = 0) \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k}.$$

Ainsi,

$$U(s) - 1 = \sum_{n \geq 1} u_n s^n = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k} s^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n f_k u_{n-k} s^n = U(s)F(s)$$

par produit de Cauchy.

3. On a donc $U(s)(1 - F(s)) = 1$ pour $0 \leq s < 1$. En faisant tendre s vers 1^- on a $U(1)(1 - F(1)) = 1$ (il y a convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque U et F sont croissantes (théorème de la limite monotone)). Par définition, on a, toujours dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) \right) (1 - \mathbb{P}(\exists n \geq 1 : S_n = 0)) = 1.$$

Passons maintenant à la preuve de l'équivalence.

Pour (1) implique (2), la divergence de la série entraîne, vu que le produit vaut 1, que le deuxième terme est nul *i.e.* $\mathbb{P}(\exists n \geq 1 : S_n = 0) = 1$ ce qui est (2).

Pour (2) implique (3), on l'a montré question 1.

Pour (3) implique (1), montrons que $\neg(1)$ implique $\neg(3)$. $\neg(1)$ est la série converge. Par Borel-Cantelli (exercice 1), on sait alors que $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ i. o.}) = 0$ (petit jeu d'écriture) ce qui implique que $\neg(1)$.

4. Déjà,

$$\forall k \in \llbracket -n, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{\alpha} p^\alpha (1-p)^\beta$$

avec α le nombre de $+1$ et β le nombre de -1 dans les valeurs prises par $X_1, \dots, X_n$. Ainsi, $\alpha = \frac{n+k}{2}$ et $\beta = \frac{n-k}{2}$. De fait,

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} (p(1-p))^n \sim \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Pour $p \neq 1/2$, la série converge, pour $p = 1/2$, la série diverge par comparaison.