Différentielle du déterminant

Thomas CHEN

On présente ici le calcul de la différentielle du déterminant.

Exercice 1. Montrer que le déterminant $\det : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M) \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle.

Corrigé : On utilise ici la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [1].

On calcule la différentielle de det en I_n. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors $\det(I_n + tH) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i)$, où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(H)$, donc

$$\det(I_n + tH) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i) = 1 + t \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}_{=\mathrm{tr}(H)} + o_{t\to 0}(t)$$

donc $d\det_{I_n}(H) = \mathrm{tr}(H)$.

On calcule la différentielle de det en $P \in \mathrm{GL}_(\mathbb{R})$. Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\det(P + H) &= \det\Big(P\Big(I_n + P^{-1}H\Big)\Big) = \det(P)\det(I_n + P^{-1}H) \\
&= \det(P)\Big(1 + \mathrm{Tr}(P^{-1}H) + o(H)\Big) \\
&= \det(P) + \det(P)\mathrm{Tr}(P^{-1}H) + o(H) \\
&= \det(P) + \mathrm{Tr}(\det(P)P^{-1}H) + o(H)) \\
&= \det(P) + \mathrm{Tr}([\mathrm{Com}(P)]^T H) + o(H)
\end{aligned}$$

quand $H \to 0$ car $P[\mathrm{Com}(P)]^T = \det(P)I_n$. Ainsi, $d\det_P(H) = \mathrm{tr}((\mathrm{Com}(P))^T H)$.

On calcule la différentielle de det en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit une suite de matrices M_p inversibles tel que $M_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} M$. Alors

$$d\det_{M_p}(H) = \mathrm{tr}((\mathrm{Com}(M_p))^T H).$$

Par continuité de la comatrice, par continuité de la différentielle du déterminant, on a donc

$$d\det_M(H) = \mathrm{tr}((\mathrm{Com}(M))^T H).$$

1. Ce n'est pas dur. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(M + xI_n)$ est polynômiale en x donc n'a qu'un nombre fini de racines. Soit alors x_0, la racine de module la plus petite. On considère alors la suite $(1/p)_{p\geq p_0}$ tel que $|1/p_0| < |x_0|$. On construit ainsi $(M + \frac{1}{p}I_n)_{p\geq p_0}$ suite de matrices inversibles qui tend vers M en $+\infty$.