

Intégrale de FRESNEL

Thomas CHEN

L'intégrale de FRESNEL est moins étudiée mais l'étude reste très intéressante. Elle fait aussi travailler l'intégration complexe.

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{it-xt}}{\sqrt{t}} dt.$$

1. Justifier l'existence de $f(x)$.
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} . Trouver une équation linéaire homogène d'ordre 1 satisfaite par f sur \mathbb{R}^{+*} .
3. Déterminer la limite de $\sqrt{x}f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Calculer f .
5. Montrer que f est continue en 0.
6. Déterminer $\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du$.

Corrigé :

1. Pour $x > 0$, j'ai :

$$\left| \frac{e^{it}e^{-xt}}{\sqrt{t}} \right| = \frac{e^{-xt}}{t} \begin{cases} \in O_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \\ \in o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right) \end{cases}.$$

Par ailleurs,

$$t \mapsto \frac{e^{it}e^{-xt}}{\sqrt{t}} \text{ est continue sur }]0, +\infty[.$$

En effet,

$$\forall t > 0, \forall x > 0, \frac{e^{it}e^{-xt}}{\sqrt{t}} = \frac{\cos(t)e^{-xt}}{\sqrt{t}} + i \frac{\sin(t)e^{-xt}}{\sqrt{t}}.$$

On voit clairement que la partie réelle et la partie imaginaire sont continues à x fixé en tant que fonction de la variable t . D'où la continuité de la fonction à valeurs complexes. Donc f est bien définie pour $x > 0$. Étudions le cas $x = 0$.

$$\int_0^\alpha \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$$

est bien définie pour $\alpha > 0$. Par ailleurs :

$$\int_1^\alpha \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt = \left[\frac{1}{t} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} \right]_1^\alpha - \frac{i}{2} \int_1^\alpha \frac{e^{it}}{t^{3/2}} dt.$$

On obtient facilement la convergence du membre de droite lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. Donc l'intégrande est intégrable au voisinage de $+\infty$. Elle est aussi intégrable au voisinage de 0 car elle appartient à un $O(1/\sqrt{t})$. Par continuité de cette fonction, $f(0)$ est bien définie.

2. On note dans toute la suite

$$\varphi(t, x) = \frac{e^{(i-x)t}}{\sqrt{t}}.$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, x \mapsto \varphi(t, x) \in \mathcal{C}^1.$$

Je peux donc calculer les dérivées partielles :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{it} \times -te^{-xt} = \sqrt{t} e^{(i-x)t}.$$

De plus, $\forall x \geq 0, t \mapsto \varphi(x, t) \in L^1(\mathbb{R}^{+*})$ **Domination.** J'ai

$$\forall a > 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{+*} \times [a, +\infty[, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) \right| \leq \sqrt{t} e^{-at} := g(t)$$

Alors : $g(t) \in O_{t \rightarrow 0}(1)$ et $g(t) \in o_{t \rightarrow +\infty}(1/t^2)$. Comme g est continue, elle devient intégrable sur \mathbb{R}^{+*} et par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, j'ai donc que $f \in \mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, et ce, pour tout $a > 0$. Donc $f \in \mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = - \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{(i-x)t} dt.$$

Puis, par une intégration par parties, j'ai donc :

$$\int_\varepsilon^\alpha -\sqrt{t} e^{(i-x)t} dt = \left[\frac{1}{1-x} \sqrt{t} e^{(i-x)t} \right]_\varepsilon^\alpha + \frac{1}{2(i-x)} \int_\varepsilon^\alpha \frac{e^{(i-x)t}}{\sqrt{t}} dt.$$

L'égalité passe à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0, \alpha \rightarrow +\infty$ en

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{2(i-x)} f(x).$$

3. Je pose $u = xt$. Alors $\sqrt{u} = \sqrt{x}\sqrt{t}$ et $du = xdt$. J'ai donc :

$$\forall x > 0, xf(x) = \sqrt{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\sqrt{u}/\sqrt{x}} du.$$

Je fixe $u > 0$. Alors

$$\frac{e^{-iu}}{u} \cdot e^{-u} = \frac{e^{-u}}{u}$$

Domination :

$$\forall x \geq 0, \forall u > 0, \left| \frac{e^{-u}}{u} \right| \leq \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \in L^1(\mathbb{R}^{+*}).$$

Par le théorème de convergence dominée, j'ai donc que

$$xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

4. Par la question 2, je peux résoudre l'équation différentielle vérifiée par f , ce qui me donne

$$\exists C \in \mathbb{C}, \forall x > 0, f(x) = C \exp\left(\int_0^x \frac{1}{2(i-t)} dt\right).$$

Calculons cette intégrale. J'ai

$$\int_0^x \frac{1}{i-t} dt = - \left(\int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt + i \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) - i \arctan(x).$$

Ainsi,

$$\forall x > 0, f(x) = C \frac{\exp(-\frac{i}{2} \arctan(x))}{(1+x^2)^{1/4}}.$$

Déterminons la constante C . J'ai :

$$\sqrt{x} f(x) = C \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^{1/4}} \exp(-\frac{i}{2} \arctan(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} C e^{-i\pi/4} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Donc :

$$C = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{i\pi/4}.$$

Immédiatement, en en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = C.$$

5. Ce que nous souhaitons, c'est

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(t-x)t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Il faut donc justifier l'interversion. Alors pour tout $x \geq 0$, $t \mapsto e^{(t-x)t}/\sqrt{t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Ainsi, f est continue en 0, et on a

$$f(0) = C = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{i\pi/4} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt.$$

6. Par le changement de variable $t = u^2$, j'ai donc

$$2 \int_0^{+\infty} e^{iu^2} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Par culture générale,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

En particulier :

$$\int_0^{+\infty} \cos(u^2) du = \int_0^{+\infty} \sin(u^2) du = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$