Ce document est constitué de trois problèmes : une étude sur **l'intégrale de** WALLIS

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta$$

et deux applications. Premièrement, le calcul de **l'intégrale de** GAUSS

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}$$

et deuxièmement, la **formule de** STIRLING

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Problème : Intégrales de Wallis

On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}$. On réalise le changement de variable affine $\theta = \dfrac{\pi}{2} - t$. On a alors

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{\pi/2}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-1)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t$$

car $\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.

2. Calculer W_0, W_1 et W_2.

Solution: On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$. Ensuite,

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta = [\sin(\theta)]_0^{\pi/2} = 1.$$

Enfin,

$$W_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\theta) - 1}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Montrer que $(W_n)_n$ décroît et est positive.

Solution: Soit $\theta \in [0, \pi/2]$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $0 \leq \cos(\theta) \leq 1$ et par positivité de $\cos^n(\theta)$, on a

$$0 \leq \cos^{n+1}(\theta) \leq \cos^n(\theta).$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$0 \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

La suite $(W_n)_n$ décroît donc bien et est positive.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $W_n > 0$.

Solution: C'est l'intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle donc $W_n > 0$.

5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Puisque cos et $\cos^{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elles vérifient en particulier les hypothèses du théorème d'intégration par parties. On a donc, en dérivant $\cos^{n+1}$ et en intégrant cos,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta &= \underbrace{\left[\cos^{n+1}(\theta)\sin(\theta)\right]_0^{\pi/2}}_{=0-0=0} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^2(\theta)\cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(\theta))\cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta - (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

6. En déduire les valeurs de W_{2n} et W_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution: Soit $k \in \mathbb{N}$. Par la question 5, on a

$$(2k+2)W_{2k+2} = (2k+1)W_{2k}.$$

Par la question 4, $W_{2k} > 0$ donc

$$\frac{W_{2(k+1)}}{W_{2k}} = \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Par produit télescopique, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{W_{2n}}{W_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{W_{2(k+1)}}{W_{2k}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} 2(k+1)}.$$

Au numérateur, on a le produit des impairs de 0 à $2n-1$. On a donc

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Au dénominateur, par décalage d'indice, on retrouve le dénominateur précédent donc finalement,

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} W_0 \underset{Q2}{=} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

De même,

$$(2k+3)W_{2k+3} = (2k+2)W_{2k+1}$$

donne

$$\frac{W_{2n+1}}{W_1} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{W_{2k+3}}{W_{2k+1}} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k+2}{2k+3} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+3)}.$$

Le numérateur est déjà calculé : il vaut, par décalage d'indice, $2^n n!$. Quant au dénominateur, il s'agit du produit des impairs de 3 à $2n+1$ donc de 1 à $2n+1$: en raisonnant comme précédemment, on en déduit que

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+3) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+3)\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

Ainsi,

$$W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} W_1 \underset{Q2}{=} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Remarque 1.
- On aurait pu faire par récurrence en intuitant la formule générale.
- On exprime parfois ce résultat avec des coefficients binomiaux grâce à l'identité

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2}.$$

7. Montrer que $((n+1)W_{n+1}W_n)_n$ est une suite constante. Déterminer cette valeur.

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_n W_{n+1}$$

par la question 5. Ainsi, $((n+1)W_{n+1}W_n)_n$ est constante, déterminée par son premier terme qui est, en vertu de 2, $W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

8. En déduire un encadrement de la suite $(nW_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ puis montrer que cette suite converge vers $\dfrac{\pi}{2}$.

Solution: Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Par 3, la suite $(W_n)_n$ décroît et est positive. Ainsi, $W_n \geq W_{n+1} \geq 0$ donc en multipliant par $(n+1)W_n \geq 0$, on a

$$(n+1)W_n^2 \geq (n+1)W_nW_{n+1} \underset{Q7}{=} \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que
$$nW_n^2 \geq \frac{\pi}{2}\frac{n}{n+1}.$$

De plus, en multipliant cette fois-ci par $(n+1)W_{n+1}$, on a

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)W_nW_{n+1} \geq (n+1)W_{n+1}^2.$$

Ceci étant vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$\frac{\pi}{2} \geq nW_n^2$$

pour $n \in \mathbb{N}$. Finalement,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\pi}{2}\frac{n}{n+1} \leq nW_n^2 \leq \frac{\pi}{2}.$$
Par le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite $(nW_n^2)_n$ converge et

$$nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

9. Dans la suite, x est dans $]0,1[$.
   (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} W_k x^k = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta - R_n$$
   avec $R_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(x\cos(\theta))^{n+1}}{1-x\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$\sum_{k=0}^{n} W_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\pi/2} \cos^k(\theta)\mathrm{d}\theta x^k.$$
Par linéarité de l'intégrale,
$$\sum_{k=0}^{n} W_k x^k = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^{n} (\cos(\theta)x)^k \mathrm{d}\theta.$$
Pour $x \in]0,1[$, $\cos(\theta)x \in]-1,1[$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ donc $\cos(\theta)x \neq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi,
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} (\cos(\theta)x)^k = \frac{1-(\cos(\theta)x)^{n+1}}{1-\cos(\theta)x}.$$
Ainsi,
$$\sum_{k=0}^{n} W_k x^k = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{(x\cos(\theta))^{n+1}}{1-x\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta}_{=R_n}.$$

   (b) Montrer que $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} W_k x^k$.

Solution: On a

$$0 \leq |R_n| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{|x|^{n+1}}{|1-x\cos(\theta)|}\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{\pi/2} \frac{|x|^{n+1}}{K}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2K}|x|^{n+1},$$

en utilisant successivement $|\cos^{n+1}\theta| \leq 1$ et je peux trouver un K tel que $|1-x\cos(\theta)| \geq K$ pour tout $\theta \in [0, \pi/2[$: par exemple, je peux prendre $|1-x|$. Par théorème d'encadrement, R_n tend vers 0. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} W_k x^k = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

(c) (Question de cours) Soit θ un réel et $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Montrer que

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ ; \ \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \ ; \ \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Solution: C'est du cours !

(d) A l'aide du théorème de changement de variables, montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

Solution: On fait le changement de variable $u = \tan(\theta/2)$ et $\mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$. En utilisant $\cos(\theta) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta = \int_0^1 \frac{1}{1-x\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2-x(1-u^2)} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\frac{1+x}{1-x}u^2+1} \frac{1}{1-x}.$$

On réalise le changement de variable $\zeta = u\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1-x\cos(\theta)} &= \frac{2}{1-x}\int_0^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\zeta^2+1}\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\int_0^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^2+1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).
\end{aligned}$$

Problème : Intégrales de Gauss

Ce problème utilise un résultat sur l'intégrale de Wallis ! Il s'agit de la limite trouvée en question 8.

L'objectif de ce problème est d'établir que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi/2}.$$

On définit alors

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t. \end{array}$$

1. (Question de cours). Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.

Solution: C'est du cours !

2. Montrer que F est croissante.

Solution: Soit $x, y \in \mathbb{R}, x \geq y$. Par la relation de Chasles puis par positivité de l'intégrale,

$$F(y) - F(x) = \int_x^y e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \geq 0$$

donc F est bien croissante.

3. Montrer que pour tout $x\geq 0$, $e^{-x} \leq \dfrac{1}{1+x}$. En déduire que F converge en $+\infty$. On note C cette limite.

Solution: Puisque $\forall x \geq 0, e^x \geq 1+x \geq 1$, par décroissance de la fonction inverse sur $[1,+\infty[$, on a

$$\forall x\geq 0, e^{-x} = \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{1+x}.$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$, on a

$$e^{-t^2/2} \leq \frac{1}{1+t^2/2} = \frac{1/\sqrt{2}}{1+t^2/2}\sqrt{2}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \leq \sqrt{2}\int_0^x \frac{1/\sqrt{2}}{1+t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\arctan(x/\sqrt{2}) \leq \sqrt{2}\frac{\pi}{2}$$

puisque arctan est une fonction croissante qui tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ en $+\infty$. On en déduit que F est majorée. Étant croissante, F converge en $+\infty$.

4. Justifier pourquoi $(F(\sqrt{n}))_n$ converge et donner sa limite.

Solution: Puisque $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que F est définie sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que $(F(\sqrt{n}))_n$ converge, et ce, vers C.

5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que

$$W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(\theta))^{n/2} \sin'(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{n/2} \mathrm{d}t.$$

Solution: On écrit

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\underset{\star}{=} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)(\sqrt{1-\sin^2(\theta)})^n \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(\theta))^{n/2}\cos(\theta)\mathrm{d}\theta \qquad = \int_0^{\pi/2}(1-\sin^2(\theta))^{n/2}\sin'(\theta)\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

et on justifie $\star$ car cos et sin sont positives sur $[0, \pi/2]$ donc l'égalité $\cos^2 + \sin^2 = 1$ entraîne $\sin = \sqrt{1-\cos^2}$. On fait le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$.

$$W_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n/2}\mathrm{d}t.$$

Pour conclure, réalisons le changement de variable affine $u = t\sqrt{n}$. Alors $\mathrm{d}u = \sqrt{n}\mathrm{d}t$ donc

$$W_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^{n/2} \mathrm{d}u.$$

(b) Montrer que

$$F(\sqrt{n}) \geq \sqrt{n} W_{n+1}.$$

En déduire que $C \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Solution: Il s'agit donc, en vertu de 5a, de montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \geq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{n/2} \mathrm{d}t.$$

Fixons $t \in [0, \sqrt{n}]$. On rappelle alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x.$$

Ainsi,

$$e^{-t^2/n} \geq 1 - \frac{t^2}{n}$$

donc en élevant cette inégalité à la puissance $n/2$ (possible car $t \in [0, \sqrt{n}]$ entraîne que $1 - t^2/n \geq 0$), on obtient

$$e^{-t^2/2} \geq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{n/2}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc, grâce à 5a,

$$F(\sqrt{n}) \geq \sqrt{n} W_{n+1}.$$

Or,
$$\sqrt{n}W_{n+1} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underbrace{\sqrt{n+1}W_{n+1}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} (Q8 \text{ sur Wallis})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
Comme $(F(\sqrt{n}))_n$ converge, par passage à la limite, on en déduit $C \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $V_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta$ et $A_n = W_n - V_n$.

(a) Justifier pourquoi $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq V_n \leq W_n$.

Solution: Puisque $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, on a $W_n - V_n = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta > 0$.

(b) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, V_{n-2} = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{1+\tan^2(\theta)}\right)^{n/2} \tan'(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{n/2} \mathrm{d}t.$$

Solution: Déjà, pour tout $\theta \in [0, \pi/4]$, on a $1 + \tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$ donc $\cos^2(\theta) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\theta)}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on a
$$\left(\frac{1}{1+\tan^2(\theta)}\right)^{n/2} \tan'(\theta) = (\cos^2(\theta))^{n/2}(1+\tan^2(\theta)) = \cos^n(\theta)\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \cos^{n-2}(\theta).$$
Ainsi, on a bien
$$V_{n-2} = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{1+\tan^2(\theta)}\right)^{n/2} \tan'(\theta)\mathrm{d}\theta.$$
Ensuite, on utilise encore le théorème de changement de variable pour avoir
$$V_{n-2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{n/2} \mathrm{d}t.$$
On conclut en faisant le changement de variable affine $u = t\sqrt{n}$. Alors $\mathrm{d}u = \sqrt{n}\mathrm{d}t$ donc
$$V_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{n/2} \mathrm{d}t.$$

(c) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, F(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}V_{n-2}.$$
En déduire que $C \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Solution: Il s'agit donc, en vertu de 6b, de montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{n/2} \mathrm{d}t$$

pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On a montré à la question 3 que

$$\forall x \geq 0, e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}.$$

On applique ce résultat pour $x = \dfrac{t^2}{n} \geq 0$ avec $t \geq 0$. On a donc

$$0 \leq e^{-t^2/n} \leq \frac{1}{1+t^2/n}$$

puis en mettant à la puissance $n/2$, on obtient

$$e^{-t^2/2} \leq \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{n/2}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc, grâce à 6b,

$$F(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}V_{n-2} \leq \sqrt{n}W_{n-2}$$

avec la question 6a. Or,

$$\sqrt{n}W_{n-2} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-2}}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underbrace{\sqrt{n-2}W_{n-2}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} (Q8 \text{ sur Wallis})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Comme $(F(\sqrt{n}))_n$ converge, par passage à la limite, on en déduit $C \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

7. Conclure.

Solution: Par la question 5b et 6c, on obtient $C = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Problème : Formule de Stirling

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n définie par

$$u_n = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!}.$$

Remarque 2. On peut faire l'exercice avec $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ en guise d'entraînement.

1. Déterminer un équivalent simple de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}e^n\sqrt{n+1}n!}{(n+1)!n^n e^{n+1}\sqrt{n}} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{e}(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -1+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= -1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)+n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= -1+1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{n^3}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{12n^2}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ la limite. En déduire un équivalent en fonction de ℓ de $n!$.

Solution: Par le critère de Riemann, la série des $\sum_{n\geq 1}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge. Or, pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum_{n=1}^{N}(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)),$$

donc c'est une série télescopique. Puisque la série converge, on a la convergence de $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Par continuité de exp sur $\mathbb{R}$, on a la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vers une limite strictement positive. Ainsi,

$$\frac{n!}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell,$$

donc

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}.$$

3. Avec l'étude des intégrales de Wallis, montrer que $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Solution: Par la proposition sur les intégrales de Wallis, on a l'équivalent

$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

Simplifions le membre de gauche par l'équivalent que nous venons de trouver. On a

$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\ell}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{\frac{1}{\ell}^2 2^{2n}n^{2n}e^{-2n}n}\frac{\pi}{2} = \frac{\ell\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}.$$

Ainsi, $\sqrt{2n}I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $\sqrt{2n}I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\pi$ par l'équivalent précédent. Par unicité de la limite,

$$\ell\pi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ainsi, $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et on a bien

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$