Nombre de Catalan

Thomas Chen

L'étude des nombres de Catalan est classique au concours. Issu de problèmes de combinatoires, ces nombres sont reliés au chemins de Dyck, mots bien parenthésés, marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$, etc. Par exemple.

1. On se place dans le carré $[\![0, n-1]\!]^2$. Une particule se trouve en position $(0,0)$ et ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut de sa position (tout en restant dans le carré). Combien existe-t-il de chemin la menant vers $(n-1, n-1)$ sachant qu'elle ne peut se trouver en position (i,j) avec $j > i$?
2. On dit qu'un mot est bien parenthésé lorsqu'il est soit vide, soit pour toute parenthèse fermée, il existe une parenthèse ouverte placée avant qui enferme un mot bien parenthésé. Par exemple, « (()) » est bien parenthésé, « ())(» ne l'est pas. Combien existe-t-il de mot bien parenthésé de taille $2n$?
3. On considère un cercle et $2n$ points de ce cercle. A chaque point, on le relie à un unique autre point. On dit que la configuration des cordes est admissible lorsque aucune corde ne s'intersecte entre elles. Combien de configurations admissibles existe-t-il ?

Déjà, on va répondre à ces questions.

1. Pour $n = 0$, il y a 1 seul chemin. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour construire un tel chemin, il suffit de construire un chemin qui va de $(0,0)$ à (k,k) (il y a par hypothèse c_k chemins possibles) puis de (k,k) à (n,n) (c'est-à-dire autant de chemin que pour aller de $(0,0)$ à $(n-k, n-k)$ à savoir c_{n-k-1} choix) et ce, pour chaque k dans $[\![0, n-1]\!]$. On a donc
$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}.$$
La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des nombres de Catalan.
2. Pour $n = 0$, il y a un seul mot qui est le mot vide, bien parenthésé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour construire un mot bien parenthésé de taille $2n$, je note $0, \cdots, 2n-1$ les positions des parenthèses. Je note alors N la position de la parenthèse fermée qui ferme la parenthèse ouverte en position 0. k est nécessairement impair, je le note $2k+1$. Alors il suffit de construire un mot bien parenthésé entre les indices 0 et $N-1$ (donc un mot de taille $2k+1-1 = 2k$ donc c_k choix) puis un mot bien parenthésé entre les indices $N+1$ et $2n-1$ (donc un mot de taille $2n-1-N-1+1 = 2(n-k-1)$ donc c_{n-1-k} choix). Choisir N revient à choisir k dans $[\![0, n-1]\!]$ donc
$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}.$$
3. C'est la même preuve que le cas précédent, les arêtes étant davantage géométrique.

On pourra consulter le sujet Centrale PC Maths 1 2021 qui en parle très bien.

Exercice 1. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant

$$c_0 = 1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}.$$

On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ pour x réel de rayon de convergence $R > 0$.

1. Montrer que $\forall x \in]-R, R[, f(x) = 1 + xf^2(x)$.
2. Donner une expression de f (on remarquera qu'il suffit d'imposer une condition sur R pour avoir une expression simple).
3. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ est développable en série entière sur $]-1/4, 1/4[$.
4. En déduire une expression close de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Corrigé :

1. Soit $x \in]-R, R[$. Alors par produit de Cauchy,

$$f^2(x) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} c_p x^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} c_q x^q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} c_p c_q\right) x^n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 + xf^2(x) &= 1 + x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} c_p c_q\right) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} c_p c_q\right) x^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\sum_{p+q=n-1} c_p c_q\right)}_{=c_n} x^n \\ &= c_0 x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \\ &= f(x). \end{aligned}$$

2. Soit $x \in]0, R[$. Alors

$$xf^2(x) - f(x) + 1 = 0 \iff f^2(x) - \frac{1}{x}f(x) + \frac{1}{x} = 0 \iff \left(f(x) - \frac{1}{2x}\right)^2 \underbrace{-\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x}}_{=-\frac{1-4x}{4x^2}}.$$

Ainsi, dès lors que $1 - 4x \geq 0$ à savoir $x \leq \dfrac{1}{4}$, on a $f(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. Si le signe devant la racine est $+$, alors en 0, f tend vers l'infini ce qui n'est pas : c'est donc un $-$. On a le même résultat sur $]-R, 0[$. Ainsi, pour $R < 1/4$, on a

$$\forall x \in]-R, R[\setminus\{0\}, f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

3. On rappelle le D.S.E. de $\sqrt{1-x}$. Pour $x \in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-(n-1))}{n!}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{2}-k)}{n!}(-1)^n x^n.\end{aligned}$$

Or

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-2k}{2}\right) = \frac{1}{2^n}(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1}(2k-1) = \frac{1}{2^n}(-1)^{n+1} \prod_{k=1, k \text{ impair}}^{2n-3} k.$$

Pour conclure, on écrit

$$\prod_{k=1,k \text{ impair}}^{2n-3} k = \frac{1}{2n-1} \prod_{k=1,k \text{ impair}}^{2n-1} k = \frac{1}{2n-1} \frac{\overbrace{\prod_{k=1,k \text{ impair}}^{2n-1} k \prod_{k=1,k \text{ pair}}^{2n} k}^{=(2n)!}}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

On a donc

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{4^n n!(2n-1)}.$$

Finalement,

$$\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{2}-k)}{n!}(-1)^n = -\frac{(2n)!}{n!^2}\frac{1}{4^n(2n-1)}$$

ce qui donne

$$\sqrt{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}\frac{1}{2n-1}x^n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} &= \frac{1}{2x}\left(1+\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}\frac{1}{2n-1}(4x)^n\right) \\ &= \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}x^n \\ &= \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2n+1}x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{4n+2}x^n.\end{aligned}$$

4. Pour $x \in]-1/4, 1/4[$, on a donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{4n+2}x^n.$$

Par unicité du D.S.E., on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{4n+2} = \frac{(2n)!(2n+1)2(n+1)}{n!^2(n+1)^2}\frac{1}{2(2n+1)} = \frac{(2n)!}{n!^2(n+1)} = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}.$$