

# Éléments de correction : CCP MP Maths 1 2025

Thomas Chen – Site personnel cliquable

21 décembre 2025

Ne pas hésiter à signaler ce que vous pensez être une erreur.

## Exercice 1

1. Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - 1, 1[$ ,  $f'$  est continue sur  $] - 1, 1[$  donc l'image de  $] - 1, 1[$  par  $f'$  hérite du caractère connexe par arcs de l'intervalle  $] - 1, 1[$ . On a bien  $f'([ - 1, 1])$  qui est connexe par arcs.
2. (a) Soit  $t \in ] - 1, 1[$ . Si  $t \leq 0$ , alors  $f(t) - f(0) = (0, 0)$ . Sinon,

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \left( t \sin\left(\frac{1}{t}\right), t \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right)$$

et puisque  $\cos$  et  $\sin$  sont bornées,

$$\left( t \sin\left(\frac{1}{t}\right), t \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0).$$

Ainsi,  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = (0, 0)$ .

Ensuite,  $f$  est dérivable sur  $] - 1, 1[ \setminus \{0\}$  car, composante par composante, elle est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

Si  $t < 0$ ,  $f$  est constante donc  $f'$  est nulle sur  $] - 1, 0]$ . Si  $t > 0$ , on dérive composante par composante :

$$\forall t \in ]0, 1[, f'(t) = \left( 2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right), 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right).$$

(b) On calcule :

$$\begin{aligned} \forall t \in ]0, 1[, \|f'(t)\|^2 &= \left( 2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2 + \left( 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2 \\ &= (4t^2 + 1) \left( \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) + \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) \right) \\ &= 4t^2 + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Notons  $N = \|\cdot\| \circ f'$ . Si  $f'([ - 1, 1])$  était connexe par arcs, alors par continuité de la norme,  $N([ - 1, 1])$  est une partie connexe par arcs de  $\mathbb{R}$  donc un intervalle. Comme  $0 = N(0) \in N([ - 1, 1])$  et  $2 = N\left(\frac{1}{2}\right) \in N([ - 1, 1])$ ,  $[0, 2] \subset N([ - 1, 1])$  donc par exemple, le réel  $\frac{1}{\pi}$  est atteint par  $N$ . Or

$N$  est soit nulle, soit supérieure ou égale à 1 donc ne peut prendre la valeur  $\frac{1}{\pi}$ . Ainsi,  $f'([ - 1, 1])$  n'est pas connexe par arcs.

## Exercice 2

3.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  par théorèmes généraux. Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, \partial_1 f(x, y) &= -2(2 - x - y) - 2(1 - x) - 4(1 - 2x - y) \\ &= -4 + 2x + 2y - 2 + 2x - 4 + 8x + 4y \\ &= -10 + 12x + 6y \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathbb{R}, \partial_2 f(x, y) &= -2(2 - x - y) - 2(1 - 2x - y) \\ &= -4 + 2x + 2y - 2 + 4x + 2y \\ &= -6 + 6x + 4y.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 12x + 6y = 10 \\ 6x + 4y = 6 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant la hessienne. On a

$$\text{Hess}f(x, y) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

donc la hessienne est constante. Son déterminant est  $12 \neq 0$  et sa trace est  $16 \geq 0$ . Ainsi, la hessienne est définie positive donc  $f$  admet un minimum local en  $(1/3, 1)$  :  $(1/3, 1)$  est donc bien un extremum local de  $f$ . On admet que ce minimum est global : on calcule

$$f(1/3, 1) = \frac{4}{3}.$$

4. Déjà,  $u$  et  $v$  sont libres donc  $F$  est bien un plan vectoriel. Soit  $\pi$  projection orthogonale sur  $F$ . Alors  $a - b = a - \pi(a) \in \ker(\pi) = F^\perp$  donc comme  $u, v \in F$ ,  $\langle a - b, u \rangle = \langle a - b, v \rangle = 0$ . Ainsi,  $\langle b, u \rangle = \langle a, u \rangle$  et  $\langle b, v \rangle = \langle a, v \rangle$ . Puisque  $b \in F$ ,  $b$  s'écrit  $\lambda u + \mu v$  donc

$$\langle b, u \rangle = \lambda \|u\|^2 + \mu \langle u, v \rangle = \langle a, u \rangle ; \quad \langle b, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \|v\|^2 = \langle a, v \rangle.$$

On a donc l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} \|u\|^2 & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & \|v\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a, u \rangle \\ \langle a, v \rangle \end{pmatrix}$$

On a :

$$\langle u, v \rangle = 3, \quad \|u\|^2 = 6, \quad \|v\|^2 = 2, \quad \langle a, u \rangle = 5, \quad \langle a, v \rangle = 3.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$b = \frac{1}{3}u + v = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Soit maintenant  $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x, 2x + y) \in \mathbb{R}^3$ . Alors  $g$  est clairement linéaire et injective.  $((1, 0), (0, 1))$  étant une base de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}(g(1, 0), g(0, 1)) = \text{Vect}(u, v) = F.$$

Ainsi, d'un côté,  $b$  étant projeté orthogonal de  $a$  sur  $F$ , par le cours,

$$d(a, F)^2 = \|a - b\|^2 = \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

et de l'autre,

$$d(a, F)^2 = \inf_{(x', y', z') \in F} \|a - (x', y', z')\|^2 = \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \|a - g(x, y)\|^2 = \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y).$$

On a bien  $\inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \frac{4}{3}$  et cet infimum est atteint lorsque  $g(x, y) = b$ , donc pour  $(x, y) = (1/3, 1)$ .

## Problème : autour du théorème de comparaison avec une intégrale

### Partie I.

5. Comme  $f$  est positive,  $(S_n)$  et  $(J_n)$  sont croissantes. Ensuite, c'est classique. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $t \in [k-1, k]$ ,  $f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$  donc par croissance de l'intégrale,

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1).$$

puisque l'intégrale d'une constante sur  $[k-1, k]$  égale cette constante.

6. On somme pour  $k = 1$  à  $n$  et on utilise la relation de Chasles : on a

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k-1).$$

A droite, on fait un décalage d'indice. A gauche, on rajoute et on retire  $f(0)$ , le premier terme. On a alors

$$S_n - f(0) \leq \int_0^n f(t) dt \leq S_{n-1}.$$

7. Déjà, comme  $f$  est positive,  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  équivaut à  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$  converge.

- (a) Si  $f$  est intégrable, alors la convergence de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$  entraîne la convergence de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(t) dt$  ce qui correspond à la convergence de la suite  $J_n$ . Par comparaison, la suite  $(S_n)_n$  converge.

Si  $(S_n)_n$  converge, alors  $(J_n)_n$  converge, disons vers  $\ell$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$  existe dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , ce qu'on note  $\ell'$ , par le théorème de la limite monotone,  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  étant croissante sur  $\mathbb{R}^+$  (par positivité de  $f$ ). Ainsi, par unicité de la limite,  $\ell = \ell'$  donc  $f$  est bien intégrable.

- (b) Par télescopage, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{n=1}^N \underbrace{\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)}_{\geq 0 \text{ par Q5}} = \int_0^N f(t) dt - \sum_{n=1}^N f(n) = J_N - S_N + f(0).$$

Par la question précédente, on a

$$0 \leq J_N - S_N + f(0) \leq S_{N-1} - S_N + f(0) = f(0) - f(N)$$

$$\left( \sum_{n=1}^N \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)_n \text{ est une suite croissante majorée donc convergente : CQFD.}$$

**Attention.** Il y a un décalage d'indice dans la technique de comparaison série-intégrale que l'on invoque ici par rapport aux résultats précédents. On laisse volontairement ce détail de côté par souci de lisibilité.

8. (a)  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto \ln(x)^a$  sont toutes deux croissantes positives sur  $[2, +\infty[$  donc le produit des deux l'est aussi. Par inverse,  $f$  est décroissante sur  $[2, +\infty[$ .  $f$  est aussi continue et positive donc on satisfait les hypothèses de la comparaison série-intégrale.

Or, – on reconnaît une primitive à vue mais c'est un peu plus long à écrire rapidement –  $\ln$  étant strictement croissante de  $[2, +\infty[$  dans  $[\ln(2), +\infty[$  et  $\mathcal{C}^1$ , par le théorème de changement de variable,

$$\int_2^x f(t) dt = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{1}{u^a} du = \begin{cases} \frac{1}{1-a} [u^{1-a}]_{\ln(2)}^{\ln(x)} & \text{si } a < 1 \\ [\ln(u)]_{\ln(2)}^{\ln(x)} & \text{si } a = 1 \\ \left[ -\frac{1}{a-1} \frac{1}{u^{a-1}} \right]_{\ln(2)}^{\ln(x)} & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Ainsi, si  $a \leq 1$ , quand  $x \rightarrow +\infty$ , l'intégrale à calculer tend vers  $+\infty$ , et converge quand  $a > 1$ . Ainsi, par la question précédente,  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^a(n)}$  converge si, et seulement si,  $a > 1$  (c'est un point du critère de Bertrand).

(b) On a, par le raisonnement de la Q7b, que pour tout  $N \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ,

$$0 \leq \int_2^N \frac{1}{t \ln^2(t)} dt - \sum_{k=2}^N \frac{1}{k \ln^2(k)} + f(2) \leq f(2) - f(N)$$

L'inégalité passe à la limite quand  $N \rightarrow +\infty$  en

$$-\frac{1}{2 \ln^2(2)} \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2(t)} dt - \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln^2(k)} \leq 0.$$

Or,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2(t)} dt = \frac{1}{\ln(2)}$$

(on trouve facilement une primitive) donc

$$\frac{1}{\ln(2)} \leq \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln^2(k)} \leq \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{2 \ln^2(2)} = \frac{2 \ln(2) + 1}{2 \ln^2(2)}.$$

9. (a) La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante continue positive sur  $[1, +\infty[$ . On applique donc la question 7b. On a alors la convergence de

$$\sum_{n \geq 2} \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}.$$

Or, pour  $N \geq 2$ ,

$$\sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n} = \underbrace{\int_1^N \frac{1}{t} dt}_{=\ln(N)} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n}.$$

On obtient alors la convergence de  $(T_n)_n$ . **La constante  $\gamma$  s'appelle constante d'Euler-Mascheroni.**

(b) Vu que  $(T_n)_n$  converge vers  $\gamma$ , on a

$$T_n - \gamma = o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

Un équivalent est alors  $\ln(n)$ .

10. (a) Déjà, pour tout  $x > 0$ ,  $\sum g_n$  converge simplement puisque le terme général est un  $o(1/n^2)$ . Soit  $n \geq 1$ . Alors  $x \mapsto g_n(x)$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et

$$\forall x > 0, g'_n(x) = \frac{n^2 + x^2 - 2x^2}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{(n-x)(n+x)}{(n^2 + x^2)^2}.$$

Ainsi,  $g_n$  est croissante sur  $]0, n[$ , décroissante sur  $]n, +\infty[$  donc comme elle est positive, elle atteint son maximum en  $n$ . On a donc

$$\|g_n\|_{\infty} = g_n(n) = \frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Ainsi,  $\sum \|g_n\|_{\infty}$  n'est pas une série convergente. Ainsi,  $\sum g_n$  ne converge pas normalement sur  $]0, +\infty[$ . Par contre, elle va converger normalement sur tout segment de  $]0, +\infty[$ . En effet, soit  $a, b \in ]0, +\infty[, a < b$ . Sur  $[a, b]$ , pour  $n$  assez grand,  $g_n$  est strictement croissante. On en déduit que

$$\|g_n\|_{\infty, [a, b]} = g_n(b).$$

On en déduit, puisque  $\sum g_n(b)$  converge, que  $\sum g_n$  converge normalement sur  $[a, b]$ .

**Attention !** Dans les deux questions qui suivent,  $x$  doit être strictement positif !

- (b)  $t \mapsto t^2 + x^2$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  donc  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Elle est de plus continue et positive. On est dans les hypothèses du théorème de comparaison série-intégrale. On applique donc Q5 et on somme par Chasles pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt.$$

- (c) Fixons  $x > 0$ . On a, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f(t) = \frac{1}{x} \frac{1}{(t/x)^2 + 1}$$

donc on reconnaît la dérivée de  $t \mapsto \arctan(t/x)$ . Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \arctan\left(\frac{n+1}{x}\right) - \arctan(1/x) \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \arctan(n/t).$$

L'inégalité passe à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  en

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(1/x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + t^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

- (d) Comme  $\arctan(1/x)$  tend vers 0 quand  $x \rightarrow +\infty$ , par théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Si la série  $\sum g_n$  converge uniformément sur  $]0, +\infty[$ , par le théorème d'interversion série-limite, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}}_{=0} = 0.$$

Ainsi, par unicité de la limite,  $0 = \frac{\pi}{2}$  ce qui est absurde : ainsi, la série  $\sum g_n$  ne converge pas uniformément sur  $]0, +\infty[$ .

## Partie II.

11. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\int_n^{n+1} |\sin(2\pi x)| dx = \int_n^{n+\frac{1}{2}} |\sin(2\pi x)| dx + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} |\sin(2\pi x)| dx.$$

Or,  $x \mapsto \sin(2\pi x)$  est positive sur  $[n, n + \frac{1}{2}]$  et négative sur  $[n + \frac{1}{2}, n + 1]$ . On a donc

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} |\sin(2\pi x)| dx &= \int_n^{n+\frac{1}{2}} \sin(2\pi x) dx - \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \sin(2\pi x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( [-\cos(2\pi x)]_n^{n+\frac{1}{2}} + [\cos(2\pi x)]_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} ((1+1) + (1+1)) = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

- (b) Soit  $x \geq 1$ . Si  $x \in [1, 2[$ ,  $\lfloor x \rfloor = 1$  donc on demande à l'intégrale d'une fonction positive à être positive, ce qui est vrai.

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^{\lfloor x \rfloor} f(t)dt + \underbrace{\int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t)dt}_{\geq 0} \geq \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_k^{k+1} f(t)dt = (\lfloor x \rfloor - 1) \frac{2}{\pi}.$$

Ainsi, par comparaison,  $\int_0^{+\infty} f$  diverge vers  $+\infty$  donc,  $f$  étant positive,  $f$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . Pourtant,  $f(n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc la série  $\sum f(n)$  converge.

12. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On rappelle que l'aire d'un triangle est  $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ . Ainsi, on demande à ce que

$$n + a_n - n + a_n = \frac{1}{n^2} \text{ donc posons } a_n = \frac{1}{n^2}.$$

On considère donc  $f$  de sorte que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

- si  $x \in [n - a_n, n]$ , alors  $f(x) = \frac{x - n + a_n}{a_n}$  (on veut que ce soit affine de  $(n - a_n, 0)$  à  $(n, 1)$ ).
- si  $x \in [n, n + a_n]$ , alors  $f(x) = \frac{a_n + n - x}{a_n}$  (on veut que ce soit affine de  $(n, 1)$  à  $(n + a_n, 0)$ ).
- sinon,  $f(x) = 0$ .

$f$  est bien définie puisque pour tout  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $[p - a_p, p + a_p] \cap [q - a_q, q + a_q] = \emptyset$ . Alors

$$\sum_{n \geq 1} f(n) = \sum_{n \geq 1} 1 = +\infty$$

et

$$\int_{1/2}^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n \geq 1} \underbrace{\int_{n-a_n}^{n+a_n} f(t)dt}_{=\frac{1}{n^2} \text{ (*)}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

et on a (\*) car  $f$  étant positive, son aire sous la courbe sur un intervalle  $[n - a_n, n + a_n]$  est par construction  $\frac{1}{n^2}$ . Ainsi, on a bien construit un contre-exemple.