

Éléments de correction : CCP MP Maths 1 2025

Thomas Chen – Site personnel cliquable

21 décembre 2025

Ne pas hésiter à signaler ce que vous pensez être une erreur.

Exercice 1

1. Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$, f' est continue sur $] -1, 1[$ donc l'image de $] -1, 1[$ par f' hérite du caractère connexe par arcs de l'intervalle $] -1, 1[$. On a bien $f' (] -1, 1[)$ qui est connexe par arcs.
2. (a) Soit $t \in] -1, 1[$. Si $t \leq 0$, alors $f(t) - f(0) = (0, 0)$. Sinon,

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \left(t \sin\left(\frac{1}{t}\right), t \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right)$$

et puisque cos et sin sont bornées,

$$\left(t \sin\left(\frac{1}{t}\right), t \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} (0, 0).$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = (0, 0)$.

Ensuite, f est dérivable sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$ car, composante par composante, elle est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .

Si $t < 0$, f est constante donc f' est nulle sur $]-1, 0]$. Si $t > 0$, on dérive composante par composante :

$$\forall t \in]0, 1[, f'(t) = \left(2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right), 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right).$$

(b) On calcule :

$$\begin{aligned} \forall t \in]0, 1[, \|f'(t)\|^2 &= \left(2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2 + \left(2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2 \\ &= (4t^2 + 1) \left(\sin^2\left(\frac{1}{t}\right) + \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) \right) \\ &= 4t^2 + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Notons $N = \|\cdot\| \circ f'$. Si $f' (] -1, 1[)$ était connexe par arcs, alors par continuité de la norme, $N (] -1, 1[)$ est une partie connexe par arcs de \mathbb{R} donc un intervalle. Comme $0 = N(0) \in N (] -1, 1[)$ et $2 = N\left(\frac{1}{2}\right) \in N (] -1, 1[)$, $[0, 2] \subset N (] -1, 1[)$ donc par exemple, le réel $\frac{1}{\pi}$ est atteint par N . Or N est soit nulle, soit supérieure ou égale à 1 donc ne peut prendre la valeur $\frac{1}{\pi}$. Ainsi, $f' (] -1, 1[)$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 2

3. f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 par théorèmes généraux. Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, \partial_1 f(x, y) &= -2(2 - x - y) - 2(1 - x) - 4(1 - 2x - y) \\ &= -4 + 2x + 2y - 2 + 2x - 4 + 8x + 4y \\ &= -10 + 12x + 6y \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathbb{R}, \partial_2 f(x, y) &= -2(2 - x - y) - 2(1 - 2x - y) \\ &= -4 + 2x + 2y - 2 + 4x + 2y \\ &= -6 + 6x + 4y.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 12x + 6y = 10 \\ 6x + 4y = 6 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant la hessienne. On a

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

donc la hessienne est constante. Son déterminant est $12 \neq 0$ et sa trace est $16 \geq 0$. Ainsi, la hessienne est définie positive donc f admet un minimum local en $(1/3, 1)$: $(1/3, 1)$ est donc bien un extremum local de f . On admet que ce minimum est global : on calcule

$$f(1/3, 1) = \frac{4}{3}.$$

4. Déjà, u et v sont libres donc F est bien un plan vectoriel. Soit π projection orthogonale sur F . Alors $a - b = a - \pi(a) \in \ker(\pi) = F^\perp$ donc comme $u, v \in F$, $\langle a - b, u \rangle = \langle a - b, v \rangle = 0$. Ainsi, $\langle b, u \rangle = \langle a, u \rangle$ et $\langle b, v \rangle = \langle a, v \rangle$. Puisque $b \in F$, b s'écrit $\lambda u + \mu v$ donc

$$\langle b, u \rangle = \lambda \|u\|^2 + \mu \langle u, v \rangle = \langle a, u \rangle ; \langle b, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \|v\|^2 = \langle a, v \rangle.$$

On a donc l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} \|u\|^2 & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & \|v\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a, u \rangle \\ \langle a, v \rangle \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\langle u, v \rangle = 3, \|u\|^2 = 6, \|v\|^2 = 2, \langle a, u \rangle = 5, \langle a, v \rangle = 3.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$b = \frac{1}{3}u + v = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right).$$

Soit maintenant $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x, 2x + y) \in \mathbb{R}^3$. Alors g est clairement linéaire et injective. $((1, 0), (0, 1))$ étant une base de \mathbb{R}^2 ,

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}(g(1, 0), g(0, 1)) = \text{Vect}(u, v) = F.$$

Ainsi, d'un côté, b étant projeté orthogonal de a sur F , par le cours,

$$d(a, F)^2 = \|a - b\|^2 = \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

et de l'autre,

$$d(a, F)^2 = \inf_{(x', y', z') \in F} \|a - (x', y', z')\|^2 = \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \|a - g(x, y)\|^2 = \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y).$$

On a bien $\inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \frac{4}{3}$ et cet infimum est atteint lorsque $g(x, y) = b$, donc pour $(x, y) = (1/3, 1)$.

Problème : autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Partie I.

5. Comme f est positive, (S_n) et (J_n) sont croissantes. Ensuite, c'est classique. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k-1, k]$, $f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$ donc par croissance de l'intégrale,

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt \leq f(k-1).$$

puisque l'intégrale d'une constante sur $[k-1, k]$ égale cette constante.

6. On somme pour $k = 1$ à n et on utilise la relation de Chasles : on a

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=1}^n f(k-1).$$

A droite, on fait un décalage d'indice. A gauche, on rajoute et on retire $f(0)$, le premier terme. On a alors

$$S_n - f(0) \leq \int_0^n f(t)dt \leq S_{n-1}.$$

7. Déjà, comme f est positive, f est intégrable sur \mathbb{R}^+ équivaut à $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt$ converge.

(a) Si f est intégrable, alors la convergence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt$ entraîne la convergence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(t)dt$ ce qui correspond à la convergence de la suite J_n . Par comparaison, la suite $(S_n)_n$ converge.

Si $(S_n)_n$ converge, alors $(J_n)_n$ converge, disons vers ℓ . Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, ce qu'on note ℓ' , par le théorème de la limite monotone, $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ étant croissante sur \mathbb{R}^+ (par positivité de f). Ainsi, par unicité de la limite, $\ell = \ell'$ donc f est bien intégrable.

(b) Par télescopage, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\underbrace{\sum_{n=1}^N \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)}_{\geq 0 \text{ par Q5}} = \int_0^N f(t)dt - \sum_{n=1}^N f(n) = J_N - S_N + f(0).$$

Par la question précédente, on a

$$0 \leq J_N - S_N + f(0) \leq S_{N-1} - S_N + f(0) = f(0) - f(N)$$

$\left(\sum_{n=1}^N \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n) \right)_n$ est une suite croissante majorée donc convergente : CQFD.

Attention. Il y a un décalage d'indice dans la technique de comparaison série-intégrale que l'on invoque ici par rapport aux résultats précédents. On laisse volontairement ce détail de côté par souci de lisibilité.

8. (a) $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)^a$ sont toutes deux croissantes positives sur $[2, +\infty[$ donc le produit des deux l'est aussi. Par inverse, f est décroissante sur $[2, +\infty[$. f est aussi continue et positive donc on satisfait les hypothèses de la comparaison série-intégrale.

Or, – on reconnaît une primitive à vue mais c'est un peu plus long à écrire rapidement – \ln étant strictement croissante de $[2, +\infty[$ dans $[\ln(2), +\infty[$ et \mathcal{C}^1 , par le théorème de changement de variable,

$$\int_2^x f(t)dt = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{1}{u^a} du = \begin{cases} \frac{1}{1-a} [u^{1-a}]_{\ln(2)}^{\ln(x)} & \text{si } a < 1 \\ [\ln(u)]_{\ln(2)}^{\ln(x)} & \text{si } a = 1 \\ \left[-\frac{1}{a-1} \frac{1}{u^{a-1}} \right]_{\ln(2)}^{\ln(x)} & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Ainsi, si $a \leq 1$, quand $x \rightarrow +\infty$, l'intégrale à calculer tend vers $+\infty$, et converge quand $a > 1$. Ainsi, par la question précédente, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^a(n)}$ converge si, et seulement si, $a > 1$ (c'est un point du critère de Bertrand).

- (b) On a, par le raisonnement de la Q7b, que pour tout $N \in \mathbb{N}_{\geq 3}$,

$$0 \leq \int_2^N \frac{1}{t \ln^2(t)} dt - \sum_{k=2}^N \frac{1}{k \ln^2(k)} + f(2) \leq f(2) - f(N)$$

L'inégalité passe à la limite quand $N \rightarrow +\infty$ en

$$-\frac{1}{2 \ln^2(2)} \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2(t)} dt - \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln^2(k)} \leq 0.$$

Or,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2(t)} dt = \frac{1}{\ln(2)}$$

(on trouve facilement une primitive) donc

$$\frac{1}{\ln(2)} \leq \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln^2(k)} \leq \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{2 \ln^2(2)} = \frac{2 \ln(2) + 1}{2 \ln^2(2)}.$$

9. (a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante continue positive sur $[1, +\infty[$. On applique donc la question 7b.
On a alors la convergence de

$$\sum_{n \geq 2} \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}.$$

Or, pour $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n} = \underbrace{\int_1^N \frac{1}{t} dt}_{=\ln(N)} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n}.$$

On obtient alors la convergence de $(T_n)_n$. **La constante γ s'appelle constante d'Euler-Mascheroni.**

- (b) Vu que $(T_n)_n$ converge vers γ , on a

$$T_n - \gamma = o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

Un équivalent est alors $\ln(n)$.

10. (a) Déjà, pour tout $x > 0$, $\sum_n g_n$ converge simplement puisque le terme général est un $o(1/n^2)$. Soit $n \geq 1$. Alors $x \mapsto g_n(x)$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} et

$$\forall x > 0, g'_n(x) = \frac{n^2 + x^2 - 2x^2}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{(n-x)(n+x)}{(n^2 + x^2)^2}.$$

Ainsi, g_n est croissante sur $]0, n[$, décroissante sur $]n, +\infty[$ donc comme elle est positive, elle atteint son maximum en n . On a donc

$$\|g_n\|_\infty = g_n(n) = \frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Ainsi, $\sum \|g_n\|_\infty$ n'est pas une série convergente. Ainsi, $\sum g_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$. Par contre, elle va converger normalement sur tout segment de $]0, +\infty[$. En effet, soit $a, b \in]0, +\infty[$, $a < b$. Sur $[a, b]$, pour n assez grand, g_n est strictement croissante. On en déduit que

$$\|g_n\|_{\infty, [a, b]} = g_n(b).$$

On en déduit, puisque $\sum g_n(b)$ converge, que $\sum g_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Attention ! Dans les deux questions qui suivent, x doit être strictement positif !

- (b) $t \mapsto t^2 + x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Elle est de plus continue et positive. On est dans les hypothèses du théorème de comparaison série-intégrale. On applique donc Q5 et on somme par Chasles pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt.$$

- (c) Fixons $x > 0$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{x} \frac{1}{(t/x)^2 + 1}$$

donc on reconnaît la dérivée de $t \mapsto \arctan(t/x)$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \arctan\left(\frac{n+1}{x}\right) - \arctan(1/x) \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \arctan(n/x).$$

L'inégalité passe à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ en

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(1/x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + x^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

- (d) Comme $\arctan(1/x)$ tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Si la série $\sum g_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$, par le théorème d'interversion série-limite, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}}_{=0} = 0.$$

Ainsi, par unicité de la limite, $0 = \frac{\pi}{2}$ ce qui est absurde : ainsi, la série $\sum g_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

Partie II.

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\int_n^{n+1} |\sin(2\pi x)| dx = \int_n^{n+\frac{1}{2}} |\sin(2\pi x)| dx + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} |\sin(2\pi x)| dx.$$

Or, $x \mapsto \sin(2\pi x)$ est positive sur $[n, n + \frac{1}{2}]$ et négative sur $[n + \frac{1}{2}, n + 1]$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} |\sin(2\pi x)| dx &= \int_n^{n+\frac{1}{2}} \sin(2\pi x) dx - \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \sin(2\pi x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left([-\cos(2\pi x)]_n^{n+\frac{1}{2}} + [\cos(2\pi x)]_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} ((1+1) + (1+1)) = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

- (b) Soit $x \geq 1$. Si $x \in [1, 2[, \lfloor x \rfloor = 1$ donc on demande à l'intégrale d'une fonction positive à être positive, ce qui est vrai.

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^{\lfloor x \rfloor} f(t)dt + \underbrace{\int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t)dt}_{\geq 0} \geq \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_k^{k+1} f(t)dt = (\lfloor x \rfloor - 1) \frac{2}{\pi}.$$

Ainsi, par comparaison, $\int_0^{+\infty} f$ diverge vers $+\infty$ donc, f étant positive, f n'est pas intégrable sur \mathbb{R}^+ . Pourtant, $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la série $\sum f(n)$ converge.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que l'aire d'un triangle est $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$. Ainsi, on demande à ce que $n + a_n - n + a_n = \frac{1}{n^2}$ donc posons $a_n = \frac{1}{n^2}$.

On considère donc f de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- si $x \in [n - a_n, n]$, alors $f(x) = \frac{x - n + a_n}{a_n}$ (on veut que ce soit affine de $(n - a_n, 0)$ à $(n, 1)$).
- si $x \in [n, n + a_n]$, alors $f(x) = \frac{a_n + n - x}{a_n}$ (on veut que ce soit affine de $(n, 1)$ à $(n + a_n, 0)$).
- sinon, $f(x) = 0$.

f est bien définie puisque pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $[p - a_p, p + a_p] \cap [q - a_q, q + a_q] = \emptyset$. Alors

$$\sum_{n \geq 1} f(n) = \sum_{n \geq 1} 1 = +\infty$$

et

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{+\infty} f(t)dt &= \sum_{n \geq 1} \underbrace{\int_{n-a_n}^{n+a_n} f(t)dt}_{\frac{1}{n^2}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty \\ &= \frac{1}{n^2} \text{ (*)} \end{aligned}$$

et on a (*) car f étant positive, son aire sous la courbe sur un intervalle $[n - a_n, n + a_n]$ est par construction $\frac{1}{n^2}$. Ainsi, on a bien construit un contre-exemple.