

Théorème d'approximation de WEIERSTRASS

Thomas CHEN

Lorsqu'on se donne une fonction continue sur un segment, le théorème de WEIERSTRASS assure qu'il existe une suite de fonctions polynomiales qui convergent uniformément vers la fonction initiale.

Il existe plusieurs preuves, la preuve via les probabilités est classique en CPGE, elle est déjà tombée deux fois.

On donne ensuite quelques applications.

Exercice 1. On souhaite démontrer le théorème de Weierstraß. Pour cela, soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$ et considérons les polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Bernstein associés à f . On fixe $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit X , une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n, p)$.

1. Montrer que $P_n(p) = \mathbb{E}[f(X/n)]$.
2. Calculer $f(\mathbb{E}(X/n))$.
3. Conclure à l'aide de Bienaymé-Tchebychev et Heine.
4. En déduire le cas où f est continue sur $[a, b]$.

Corrigé :

1. On rappelle que $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f(k/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}[f(X/n)] = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) f(k/n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f(k/n) = P_n(p).$$

2. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}[X/n] = \frac{1}{n} \mathbb{E}[X] = np/n = p.$$

Donc $f(\mathbb{E}[X/n]) = f(p)$.

3. Puisqu'elle est continue sur $[0, 1]$, elle est uniformément continue par Heine. Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé. Donnons-nous un η tel que $\forall x, y \in [0, 1], |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On souhaite regarder la quantité

$$|P_n(p) - f(p)| = |\mathbb{E}[f(X/n) - f(p)]| \leq \mathbb{E}|f(X/n) - f(p)|.$$

Ainsi, lorsque l'événement $|X/n - p| \leq \eta$ est réalisé, on obtient une majoration convenable. On écrit alors

$$\begin{aligned} |f(X/n) - f(p)| &= |(f(X/n) - f(p))(\mathbb{1}_{|X/n-p| \leq \eta} + \mathbb{1}_{|X/n-p| \geq \eta})| \\ &\leq \underbrace{|f(X/n) - f(p)|}_{\leq \varepsilon} \mathbb{1}_{|X/n-p| \leq \eta} + \underbrace{|f(X/n) - f(p)|}_{\leq 2\|f\|_\infty} \mathbb{1}_{|X/n-p| \geq \eta}. \end{aligned}$$

Par croissance et linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}|f(X/n) - f(p)| \leq \underbrace{\varepsilon \mathbb{P}(|X/n - p| \leq \eta)}_{\leq 1} + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|X/n - p| \geq \eta).$$

Par Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|X/n - p| \geq \eta) \leq \frac{\text{Var}(X/n)}{\eta^2} = \frac{p(1-p)}{\eta^2 n} \leq \frac{1}{4\eta^2 n}.$$

Donc pour n assez grand,

$$\mathbb{E}|f(X/n) - f(p)| \leq 2\varepsilon.$$

Au bout du compte,

$$|P_n(p) - f(p)| \leq 2\varepsilon$$

à partir d'un certain rang indépendant de p . Donc $P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{unif.}} f$.

4. Soit f continue sur $[a, b]$ et $g : x \in [0, 1] \mapsto f(a + (b - a)x)$. Soit $(P_n)_n$, suite de polynômes approchant uniformément g . Alors la suite de polynômes $(Q_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = P_n\left(\frac{X - a}{b - a}\right)$ approche uniformément f .

- Exercice 2.** 1. Soit f , une fonction continue sur $[0, 1]$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$. Que dire de f ?
2. Montrer que toute fonction continue sur $[0, 1]$ est limite uniforme de polynômes de la forme $P_n(X^2)$.
3. Considérons f , une fonction continue et $(a_1, \dots, a_n)$ n réels distincts de $[0, 1]$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes approximant f uniformément tel que chaque polynôme coïncident avec f en les $(a_1, \dots, a_n)$.

Corrigé :

1. f va être nulle. On remarque déjà que par linéarité de l'intégrale, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P_n, f \rangle = 0$. Soit $(P_n)_n$, une suite de polynômes tendant uniformément vers f sur $[0, 1]$ (d'après le théorème de Weierstraß). Alors par le théorème d'interversion limite-intégrale, on a

$$0 = \int_0^1 P_n f \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f^2.$$

Donc f^2 est identiquement nulle donc f aussi.

2. L'astuce est de "rendre pair" f . Posons donc $g : x \in [-1, 1] \mapsto f(x)\mathbb{1}_{x \geq 0} + f(-x)\mathbb{1}_{x < 0}$. Alors g est paire et est continue. Par le théorème de Weierstraß, il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ qui convergent uniformément sur $[-1, 1]$. On remarque que $(P_n(-X))_n$ est une suite de polynômes convergeant uniformément vers $x \mapsto g(-x) = g(x)$. Ainsi, $Q_n = \frac{P_n(X) + P_n(-X)}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ constitue une suite de polynômes convergeant uniformément vers g sur $[-1, 1]$ donc a fortiori sur $[0, 1]$ donc vers f . On conclut en remarquant que Q_n est un polynôme en X^2 .
3. D'après le théorème de Weierstraß, il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ convergeant uniformément vers f sur $[0, 1]$. Considérons la base d'interpolation de Lagrange

$$L_i(X) = \prod_{j \neq i, j=1}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}, 1 \leq i \leq n.$$

On pose alors pour $k \in \mathbb{N}$

$$Q_k(X) = P_k(X) + \sum_{i=1}^n (f(a_i) - P_k(a_i)) L_i(X).$$

Alors $\forall 1 \leq i \leq n, Q_k(a_i) = f(a_i)$. De plus,

$$\|f - Q_k\|_\infty \leq \|f - P_k\|_\infty + \sum_{i=1}^n |f(a_i) - P_k(a_i)| \|L_i\|_\infty \leq \|f - P_k\|_\infty \left(1 + \sum_{i=1}^n \|L_i\|_\infty\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

On a le résultat voulu.

Exercice 3. Déterminer quelles sont les fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de fonctions polynômiales strictement croissantes.

Corrigé : Ce corrigé présuppose la connaissance des polynômes de Bernstein.

Déjà, si f est une telle fonction, alors f est croissante car la monotonie est une propriété qui passe à la convergence simple (donc uniforme aussi). Réciproquement, soit f une fonction continue croissante sur $[0, 1]$ et considérons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

Alors la suite de fonctions $\tilde{B}_n(f) : x \mapsto B_n(f)(x)$ converge uniformément vers f . Il s'agit donc de montrer que $\tilde{B}_n(f)$ est une fonction croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0, 1]$. Alors

$$[B_n(f)]'(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) k x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) (n-k) x^k (1-x)^{n-k-1}.$$

La formule des chefs¹ assure que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ et donc

$$(n-k) \binom{n}{k} = n \binom{n}{k} - n \binom{n-1}{k-1} = n \binom{n-1}{k}$$

et ce pour tout k, n entier (on convient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k}$ est nul lorsque $k \notin \llbracket 0, n \rrbracket$). Ainsi, on a

$$\begin{aligned} [B_n(f)]'(x) &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} f\left(\frac{k}{n}\right) x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f\left(\frac{k+1}{n}\right) x^k (1-x)^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \underbrace{\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

par croissance de f . Ainsi, $B_n(f)$ est croissante.

Maintenant, considérons $P_n = \frac{X}{n} + B_n(f)$. Alors P_n converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ car

$$\|P_n - f\|_\infty \leq \|B_n - f\|_\infty + \frac{1}{n}$$

et P_n induit une fonction strictement croissante ce qui conclut.

¹. ou du capitaine, du roi, ...