Mathématiques : Khôlles de MP*

Thomas CHEN

11 janvier 2026

Avant-propos

Ce document est l'aventure en khôlles de Mathématiques avec Thomas Chen et les MP* de la promotion 2024-2025 du lycée Louis Pasteur à Neuilly-sur-Seine. Chaque chapitre correspond à un programme de khôlle, prédéfini par Franck Taieb, professeur de mathématiques en MP* au lycée Louis Pasteur. Un chapitre contient deux structures : des exercices de difficultés variées, normalement tous exempt d'erreurs, complétés par des éléments de corrections. La locution « éléments de corrections » est cruciale. Je ne garantis pas avoir la rédaction suffisante digne des concours pour tous les exercices. Ils sont là pour que vous soyez suffisamment aiguillés pour conclure.

Rappelons que ces exercices ont été donnés en khôlle : la présence d'un examinateur est très souvent nécessaire pour cadrer vos recherches, et vous guider via quelques indications. Il est donc normal que certains exercices vous paraissent très difficile. C'est en cela que sert une correction. Toutefois, pour juger la difficulté d'un exercice, il faut s'y pencher un minimum. Selon le temps que vous avez, je préconise au moins 10 minutes afin d'exploiter vos pistes.

Ces exercices sont inspirés de différentes sources : livres, extraits d'oraux, planche de TD et divers exercices que j'ai pu croiser tout au long de mes études.

L'ouvrage a été entièrement écrit par ma main, et directement sur le compilateur : ils ne sont donc pas forcément exempt de coquilles. Si vous en voyez une, aussi petite soit elle, je vous serai gré de me le signaler par mail :

thomaschen(dot)maths[at]gmail(dot)com

Bonne lecture ! Thomas Chen.

Table des matières

Chapitre 1

Rappels d'analyse de MPSI

Exercice 1. Soit $\alpha > 0, u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$.

1. Déterminer la convergence ou divergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de la valeur de α.
2. Dans ce cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge, donner un équivalent de $(u_n)_n$.
3. Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, en notant ℓ la limite de $(u_n)_n$, donner un équivalent de $(u_n - \ell)_n$ (le résultat peut s'exprimer à l'aide de ℓ).

Corrigé :

1. Déjà, par une récurrence immédiate, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie et est strictement positive (il suffit de poser $H_n : u_n$ existe et $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$). Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} > 0$$
donc
$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{N} u_{n+1} - u_n = u_{N+1} - u_1 = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha u_n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha u_1} = \frac{1}{u_1} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}.$$
Ainsi, si $\alpha > 1$, par comparaison, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Supposons maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Alors la série $\sum_{n\geq 1} u_{n+1} - u_n$ converge aussi par télescopage. On en déduit la convergence de
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha u_n}$$
mais en notant ℓ, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a $\dfrac{1}{n^\alpha u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha \ell}$. Par comparaison, on en déduit que la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ entraîne $\alpha > 1$.
2. On se place dans le cas $\alpha \in]0, 1]$. *Comme tout système dynamique de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) - x$ qui est équivalent à un monôme lorsque $x \to \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, il est intéressant (non nécessairement fructueux a priori) de considérer $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ pour un β bien choisi.* On a
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \left(u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}\right)^\beta - u_n^\beta &= u_n^\beta \left(\left(1 + \frac{1}{n^\alpha u_n^2}\right)^\beta - 1\right) \\ &= u_n^\beta \left(1 + \frac{\beta}{n^\alpha u_n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha u_n^2}\right) - 1\right) \\ &= u_n^\beta \frac{\beta}{n^\alpha u_n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n^\beta}{n^\alpha u_n^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, poser $\beta = 2$ semble pertinent car cela permet de simplifier les puissances de u_n. Soit donc $\beta = 2$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n^\alpha}.$$

Par comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} u_{n+1}^2 - u_n^2$ diverge et par le théorème de sommation des équivalents (les termes généraux considérés étant positifs), on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha}.$$

A gauche, c'est équivalent à u_{n+1}^2 qui est équivalent à u_n^2 en $+\infty$ (il suffit de diviser par u_n dans la relation de récurrence pour s'en convaincre) et à droite, par une comparaison série-intégrale, c'est clair que c'est équivalent à $\dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ quand $\alpha \in]0, 1[$ et $\ln(n)$ si $\alpha = 1$.

Ainsi,

- Si $\alpha = 1$, alors $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\ln(n)}$.
- Si $\alpha \in]0, 1[$, alors $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$.

3. Soit $\alpha > 1$. *Pour obtenir l'ordre d'après dans un développement asymptotique $f(x) = g(x) + o(h(x))$ – donc essayer d'expliciter de $o(h(x))$ –, on considère souvent $f(x) - g(x)$ et on regarde ce qu'on peut en faire.* Posons $v_n = u_n - \ell$ pour $n \geq 1$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = u_n - \ell + \frac{1}{n^\alpha u_n} = v_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

Ainsi, comme $\dfrac{1}{n^\alpha u_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha \ell}$, et que $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge, par le théorème de sommation des équivalents (les suites considérées sont positives), on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_{k+1} - v_k \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ell}.$$

A gauche, c'est équivalent à $-v_n$ puisque $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et à droite, par une comparaison série-intégrale, c'est clair que c'est équivalent à $\dfrac{1}{\ell} \dfrac{1}{\alpha - 1} \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$. On en déduit que

$$v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}.$$

Ainsi,

$$u_n = \ell + \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\ell n^{\alpha-1}} + o_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

Exercice 2. On souhaite montrer le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit f une fonction définie au voisinage de 0 vérifiant $f(x) = x - \alpha x^{p+1} + \beta x^{2p+1} + o_{x\to 0}(x^{2p+1})$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*, \beta \in \mathbb{R}^*, p \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $f([0,\eta]) \subset [0,\eta]$ et en posant $u_0 \in]0,\eta]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\gamma := \frac{(1+p)\alpha^2}{2} - \beta \neq 0$, on a*

$$u_n = \left(\frac{1}{pn\alpha}\right)^{1/p} - \frac{\gamma}{p^2\alpha^2}\left(\frac{1}{pn\alpha}\right)^{1/p}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{p}}}\right).$$

1. Montrer l'existence de η.
2. Montrer alors que $(u_n)_n$ est bien définie et qu'elle tend vers 0.
3. Établir un développement asymptotique de $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ pour n au voisinage de $+\infty$. On choisira un α convenable.
4. En déduire le théorème.

Corrigé :

1. Puisque $f(x)$ vérifie ce développement limité, je peux trouver g, h continues au voisinage de 0 (car f l'est) telles que dans ce voisinage
   - $f(x) = xg(x)$,
   - $x - f(x) = \alpha x^{p+1}h(x)$,
   - $g \underset{0}{\longrightarrow} 1, h \underset{0}{\longrightarrow} 1$.

   Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que
   $$\forall x \in]0,\eta], g(x) > 0, h(x) > 0.$$
   Ainsi,
   $$\forall x \in]0,\eta], f(x) > 0, x - f(x) > 0.$$
   Ainsi, $\eta \geq x > f(x)$ ce qui donne $f(]0,\eta]) \subset]0,\eta]$.
2. Soit $u_0 \in]0,\eta] \subset]0,\eta]$. Alors $(u_n)_n$ est bien définie par le point précédent. Par ailleurs,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - f(u_n) > 0$$
   i.e. $(u_n)_n$ est décroissante. Etant minorée par 0, elle converge dans $[0,\eta]$ par le théorème de la limite monotone. De fait, soit $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors l'égalité vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$ passe à la limite en $\ell = f(\ell)$. Or, pour tout $\ell \in]0,\eta]$, $\ell \neq f(\ell)$. Donc $\ell = 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Faisons l'analogie avec les équations différentielles.

   L'idée « analogie » est la suivante :
   $$\underbrace{u_{n+1} - u_n}_{\approx u'} \approx \alpha u_n^{p+1}.$$
   Donc $u' \approx \alpha u^{p+1}$ ce qui donne $\frac{u'}{u^{p+1}} \approx \alpha$. En intégrant, on a
   $$\left(\frac{1}{u^p}\right)' \approx \text{constante}.$$
   On s'attend donc à ce que $\frac{1}{u_{n+1}^p} - \frac{1}{u_n^p}$ soit à peu près constante.

Regardons donc la quantité

$$\frac{1}{u_{n+1}^p} - \frac{1}{u_n^p}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Cette quantité est bien définie car $u_0 \in]0, \eta]$ et cet intervalle est stable par f donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. On a, puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^{-p} - u_n^{-p} &= (f(u_n))^{-p} - u_n^{-p} \\
&= (u_n - \alpha u_n^{p+1} + \beta u_n^{2p+1} + o_{n\to+\infty}(u_n^{2p+1}))^{-p} - u_n^{-p} \\
&= u_n^{-p}\left[\left(1 - \alpha u_n^p + \beta u_n^{2p} + o_{n\to+\infty}(u_n^{2p})\right)^{-p} - 1\right] \\
&= u_n^{-p}\left(1 - (-p)\left(-\alpha u_n^p + \beta u_n^{2p}\right) + \frac{(-p)(-p-1)}{2}\left(-\alpha u_n^p + \beta u_n^{2p}\right)^2 - 1 + o_{n\to+\infty}(u_n^{2p})\right) \\
&= u_n^{-p}\left(p\alpha u_n^p - p\left(\beta + \frac{-(p+1)}{2}\alpha^2\right)u_n^{2p} + o_{n\to+\infty}(u_n^{2p})\right) \\
&= p\alpha + p\underbrace{\left(\frac{p+1}{2}\alpha^2 - \beta\right)}_{=\gamma} u_n^p + o_{n\to+\infty}(u_n^p).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$u_{n+1}^{-p} - u_n^{-p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p\alpha.$$

Par le théorème de Cesàro (ou sommation des équivalents car $\alpha \neq 0$), on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k+1}^{-p} - u_k^{-p} \underset{n\to+\infty}{\sim} np\alpha.$$

Par télescopage, on en déduit :

$$u_{n+1}^{-p} \underset{n\to+\infty}{\sim} np\alpha$$

et on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$ puisque $f(x)/x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$. On a donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{np\alpha}\right)^{1/p}.$$

Avec ceci,

$$u_{n+1}^{-p} - u_n^{-p} - p\alpha = p\gamma u_n^p + o_{n\to+\infty}(u_n^p) \underset{n\to+\infty}{\sim} p\gamma\left(\frac{1}{np\alpha}\right)^{p\times 1/p} = \frac{\gamma}{\alpha n}$$

donc par le théorème de sommation des équivalents, puisque $\dfrac{\gamma}{\alpha n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_{k+1}^{-p} - u_k^{-p}}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^{-p}} - p\alpha n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\gamma}{\alpha}\ln(n).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
u_n^{-p} &= p\alpha n + \frac{\gamma}{\alpha}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n)) \\
&= p\alpha n\left(1 + \frac{\gamma}{p\alpha^2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, en passant à l'exposant $-1/p$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \left[p\alpha n\left(1+\frac{\gamma}{p\alpha^2}\frac{\ln(n)}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\right]^{-1/p} \\ &= \left(\frac{1}{p\alpha n}\right)^{1/p}\left[1-\frac{1}{p}\frac{\gamma}{p\alpha^2}\frac{\ln(n)}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Finalement,

$$u_n = \left(\frac{1}{pn\alpha}\right)^{1/p} - \frac{\gamma}{p^2\alpha^2}\left(\frac{1}{pn\alpha}\right)^{1/p}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{p}}}\right).$$

Exercice 3. On définit la suite suivante :

$$u_n : \begin{cases} u_0 \in]0,\pi[\\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_n$ est bien définie et montrer qu'elle converge en 0. Établir un développement asymptotique de $(u_n)_n$ à l'ordre 2.

Corrigé : Dans toute la suite, je pose $f : x \mapsto \sin(x) - x$ sur $[0,\pi]$. f est dérivable, de dérivée $x \mapsto \cos(x) - 1$, qui est tout le temps négative. Autrement dit, f est décroissante. Mais $f(0) = 0$. Donc f est négative, puis $\sin(x) \leq x$, pour tout x dans $[0,\pi[$. Un développement limité en 0 de la fonction sin me dit que $f(x) = -x^3/6 + o_{x\to 0}(x^3)$. Autrement dit, au voisinage de $0^+, f$ est strictement négative. On sait par ailleurs que f décroît. Donc f est strictement négative sur $]0,\pi]$. Mais $f(0) = 0$. Donc la seule solution de l'équation est 0. Soit u_n fixé. Alors j'ai immédiatement

$$0 \leq \sin u_n = u_{n+1} \leq u_n.$$

Il reste à montrer qu'elle est minorée par 0. Comme f stabilise $[0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par le théorème de la limite monotone. On note ℓ, la limite. Alors dans l'égalité $u_{n+1} = \sin(u_n)$, l'égalité passe à la limite en $\ell = \sin(\ell)$. Ainsi, on a que $\ell = 0$.

L'astuce machiavélique est de considérer $u_{n+1}^p - u_n^p$ avec $p = -2$ (pour trouver, faites un développement asymptotique de $u_{n+1}^p - u_n^p$ puis choisissez un p convenable).

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = (\sin(u_n))^{-2} - u_n^{-2} &= \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o_{n\to+\infty}(u_n^3)\right)^{-2} - u_n^{-2} \\ &= u_n^{-2}\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o_{n\to+\infty}(u_n^2)\right) - 1\right) \\ &= u_n^{-2}\left(1 + 2\frac{u_n^2}{6} + o_{n\to+\infty}(u_n^2) - 1\right) \\ &= \frac{1}{3} + o_{n\to+\infty}(1). \end{aligned}$$

Déjà,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right).$$

Mais je sais que le terme de gauche converge vers $\frac{1}{3}$ d'après le théorème de Cesàro, puisque la limite du terme général est $\frac{1}{3}$. Autrement dit, l'égalité passe à la limite en :

$$\frac{1}{3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_0^2}\right)$$

Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n^2} = \frac{1}{3}$$

Et donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Pour pousser l'équivalent, il faut pousser le développement asymptotique $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \dfrac{1}{3}$ puis utiliser le théorème de sommations des équivalents.

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme sur E. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que si $E = \mathbb{R}$, une suite est de Cauchy si, et seulement si, elle converge. *Indication : on pourra montrer que $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.*
2. On se place dans le cas général. On dit que E est complet lorsque pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, si u est de Cauchy, alors u converge. Montrer que E est complet si, et seulement si, toute série absolument convergente est convergente. *Indication : on pourra trouver une extraction φ de sorte $\sum \|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\|$ soit convergente.*

Corrigé :

1. Soit u une suite réelle convergente. Notons ℓ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$. Soit $p, q \geq N$. Alors $|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq 2\varepsilon/2 = \varepsilon$ donc u est de Cauchy.
   Réciproquement, montrons un lemme.

   Lemme 1.2. Une suite de Cauchy de E est bornée.

   Démonstration. Soit u de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N, \|u_p - u_N\| \leq \varepsilon$. Soit $M = \max\limits_{[0,N]} \|u\|$. Alors :

   $$\forall n \in [\![0, N]\!], \|u_n\| \leq M \ ; \ \forall n \geq N, \|u_p\| \leq \varepsilon + \|u_N\|.$$

   Ainsi, u est bornée par $\max(M, \varepsilon + \|u_N\|)$. □

   Soit maintenant u une suite réelle de Cauchy. Alors u est bornée, disons par M. u est à valeurs dans $[-M, M]$ qui est un compact de $\mathbb{K}$. Montrons alors que u n'a qu'une valeur d'adhérence (un résultat du cours nous dit alors que u converge). Soit ℓ, ℓ' deux valeurs d'adhérence de u. Soit φ, ψ deux extractions telles que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell, u_{\psi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

   (a) $\forall p, q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$,
   (b) $\forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$,
   (c) $\forall n \geq N, |u_{\psi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$.

   Puisque $\psi(n) \geq n \geq N, \varphi(n) \geq n \geq N$, on a

   $$|\ell - \ell'| = |\ell - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)} + u_{\psi(n)} - \ell'| \leq |u_{\psi(n)} - \ell| + |u_{\varphi(n)} - \ell| + |u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)}| \leq 3\varepsilon.$$

   (cette inégalité, que j'appelle inégalité carrée, est une « méthode » à connaitre : pour aller à un point A à un point D, mieux vaut faire la ligne droite que de passer par B puis par C.) Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$), $|\ell - \ell'| \leq 3\varepsilon$ donc $\ell = \ell'$. Ainsi, u admet une unique valeur d'adhérence donc converge.

2. Supposons que E est complet. Soit $(u_n)_n$ une suite de E et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose que la série $(S_n)_n$ converge absolument, ce qui veut dire que $\sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$ converge quand $n \to +\infty$ ce qui signifie que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$
$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \|u_k\| < \varepsilon.$$
Soit $p \geq q \geq N$. Alors
$$\|S_p - S_q\| = \left\|\sum_{k=p}^{q-1} u_k\right\| \leq \sum_{k=p}^{q-1} \|u_k\| \leq \varepsilon.$$
Alors $(S_n)_n$ est de Cauchy donc converge.
Réciproquement, la stratégie repose sur le lemme plus général suivant que l'on démontrera après.

Lemme 1.3. Si u est de Cauchy sur E et a une valeur d'adhérence, elle converge.

Supposons que toute série absolument convergente converge. Soit u une suite de Cauchy dans E. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N_k \in \mathbb{N}$[1] tel que $\forall p, q \geq N, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$. Construisions une extraction φ par récurrence. Une première remarque que si on prend $k \in \mathbb{N}$, alors il existe un entier $\varphi(k)$ tel que $\forall p, q \geq \varphi(k), \|u_p - u_q\| \leq \frac{1}{2^k}$ ce qui implique que $\forall p \geq \varphi(k), \|u_p - u_{\varphi(k)}\| \leq \frac{1}{2^k}$.

(a) Il existe $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq \varphi(0), \|u_p - u_{\varphi(0)}\| \leq 1$.

(b) Il existe $\varphi(1) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq \varphi(1), \|u_p - u_{\varphi(1)}\| \leq \frac{1}{2}$. On peut alors supposer que $\varphi(1) \geq \varphi(0)$.

(c) On construit ainsi par récurrence $\varphi(k) > \varphi(k-1)$ tel que $\forall p \geq \varphi(k), \|u_p - u_{\varphi(k)}\| \leq \frac{1}{2^k}$.

Soit $v_n = u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}$. Alors $\|v_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ par construction. De fait, la série $\sum v_n$ converge absolument donc converge par hypothèse. Par télescopage, cela revient à dire que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge. u est une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence : elle converge.

Démonstration. Montrons le lemme. Soit u de Cauchy dans E. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$. Soit φ une extraction telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge, disons vers ℓ. Il existe alors un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0, \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \varepsilon$.
Soit $n_1 = \max(N, n_0)$. Alors $\forall n \geq n_1, n \geq N, \varphi(n) \geq n \geq N, n \geq 0$. De fait,
$$\forall n \geq n_1, \|u_n - \ell\| \leq \|u_n - u_{\varphi(n)}\| + \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq 2\varepsilon.$$
Ainsi, u converge. □

<u>Exercice</u> 5. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : Disons $T > 0$, la période. Fixons $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[-T, 2T]$: il existe donc $\eta > 0, \forall x, y \in [-T, 2T], |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On peut supposer $\eta \leq T$ (si $\eta > T$, la propriété est vraie pour T en particulier). Soit donc x, y tel que $|x - y| \leq \eta$. x est alors compris entre kT et $(k+1)T$ pour un certain k. Alors $x' = x - kT \in [0, T]$. Puisque $|x - y| \leq \eta \leq T$, on a $y' := y - kT \in [-T, 2T]$. Puisque $|x' - y'| = |x - y| \leq \eta$ et que $x', y' \in [-T, 2T]$, on a $|f(x') - f(y')| \leq \varepsilon$. Mais $f(x') = f(x), f(y') = f(y)$ donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

[1]. cet entier dépend de k

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

Exercice 6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_n x^n (1-x) \end{array}.$$

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$, disons vers f.
2. Montrer que f converge normalement sur $[0,r]$ pour tout $r \in]0,1[$.
3. Établir une CNS en fonction de $(a_n)_n$ pour la convergence normale de f.
4. Établir une CNS en fonction de $(a_n)_n$ pour la convergence uniforme de f.
5. Trouver une suite $(a_n)_n$ telle que f converge uniformément mais pas normalement.

Corrigé :

1. Soit $x \in [0,1]$. Si $x = 1$, $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sinon, (a_n) est décroissante positive donc elle est bornée. Ainsi,
$$a_n x^n (1-x) = O_{n\to+\infty}(x^n)$$
et $x \in [0,1[$ entraine la convergence de $\sum x^n$. Par comparaison, $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement.
2. Soir $r \in]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\forall x \in [0,r], |f_n(x)| = a_n x^n (1-x) \leq a_n r^n$$
donc $\|f_n\|_\infty = O_{n\to+\infty}(r^n)$ donc par comparaison, on a la convergence normale de f sur tout segment de $[0,1[$.
3. Calculons $\|f_n\|_\infty$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f_n'(x) = a_n x^{n-1}(n-(n+1)x)$. Ainsi, f_n croit sur $\left[0, \dfrac{n}{n+1}\right]$ puis décroit jusqu'à 1. Par positivité de f_n, on en déduit que $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$. Or,
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}.$$
Ainsi, $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{ne}$ donc f converge normalement si, et seulement si, $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.
4. Estimons $R_n(x)$ pour tous $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$. Par décroissance de $(a_n)_n$, on en déduit que
$$0 \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x) \leq a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k (1-x) = a_{n+1}\left(x^{n+1} - 0\right) \leq a_{n+1}.$$

Ainsi, $0 \leq \|R_n\|_\infty \leq a_{n+1}$ donc si $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Supposons maintenant que $(a_n)_n$ ne tend pas vers 0. En vertu du théorème de la limite monotone, $(a_n)_n$ converge, disons vers ℓ vérifiant $\ell = \inf \underbrace{\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}}_{\subset[0,a_0]} \geq 0$. $\ell \neq 0$ par hypothèse et donc $\ell > 0$. Ainsi,

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x) \geq \ell \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x) = \ell x^{n+1}.$$

Puisque $\|R_n\|_\infty \geq R_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \|R_n\|_\infty \geq \ell x^{n+1}.$$

L'inégalité passe donc au sup à droite en

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|R_n\|_\infty \geq \ell > 0.$$

Ainsi, $\|R_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. Ainsi, f converge uniformément si, et seulement si, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. Par le critère de Bertrand, $a_n = \dfrac{1}{\ln(n+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ convient.

<u>Exercice</u> 7. Soit $n \geq 2, x \geq 0$ et $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, disons vers f.
2. Montrer que f ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$ mais sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
3. Montrer que f converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
4. Établir un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Corrigé :

1. D'abord la convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Alors pour tout $n \geq 2$, $u_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$. Si $x = 0, u_n(x) = 0$. Sinon,

$$\frac{n^2 xe^{-nx}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées. Ainsi,

$$u_n(x) = o_{n\to+\infty}(1/n^2)$$

donc $\sum u_n(x)$ converge. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge simplement.

2. La convergence n'est pas normale sur tout $\mathbb{R}^+$. En effet, calculons $\|u_n\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Pour cela, étudions la fonction $f_n : x \mapsto xe^{-nx}$ pour tout $n \geq 2$. On a :

$$\forall x \geq 0, f_n'(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = e^{-nx}(1-nx).$$

Ainsi, f_n est extrémale en $\dfrac{1}{n}$, croissante puis décroissante. Ainsi, $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{\ln(n)}\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\ln(n)} f_n(1/n) = \dfrac{1}{\ln(n)}\dfrac{e^{-1}}{n}$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi, par le critère de Bertrand (hors-programme je rappelle), on a la divergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{e^{-1}}{n\ln(n)}$ donc la divergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \|u_n\|_\infty$.

Par contre, la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$, $a > 0$. En effet, soit $a > 0$ et $x \geq a$. Alors il existe N assez grand tel que $\forall n \geq N$, $\dfrac{1}{n} \leq a$ ce qui signifie qu'à partir de ce N (ce N vaut donc $\lfloor 1/a \rfloor + 1$), on a f_n qui décroit sur $[a, +\infty[$ ce qui signifie que

$$\forall n \geq N, \|f_n\|_\infty = f_n(a) = ae^{-na}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k \geq N} \|u_n\|_\infty = \sum_{k \geq N} \frac{1}{\ln(n)} ae^{-na}.$$

Cette série converge bien évidemment ce qui entraine la convergence normale de $\sum u_n$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

3. Soit $n \geq 1$. Soit $x > 0$. Le reste $R_n(x)$ s'écrit alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(k)} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(n+1)} = \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (e^{-x})^k = \frac{xe^{-(n+1)x}}{(1 - e^{-x}) \ln(n+1)}.$$

Ainsi,

$$\forall x > 0, |R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)} \frac{x}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{-nx}}{\ln(n+1)} \frac{x}{e^x - 1}. \tag{2.1}$$

Or, $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ tend vers 0 en $+\infty$ donc il existe A telle que f est bornée sur $[A, +\infty[$. Par ailleurs, f est bornée sur $[0, A]$ par le théorème des bornes atteintes (f est prolongeable par continuité en 0) : f est donc bornée sur $[0, +\infty[$, disons par M. On a donc

$$\frac{e^{-nx}}{\ln(n+1)} \frac{x}{e^x - 1} \leq \frac{\overbrace{e^{-nx}}^{\leq 1} M}{\ln(n+1)} \leq \frac{M}{\ln(n+1)}.$$

Ainsi,

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{M}{\ln(n+1)}$$

ce qui conclut quant à la convergence uniforme de $\sum u_n$.

4. On a

$$f(x) = \frac{xe^{-2x}}{\ln(2)} + \underbrace{\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}}_{R_2(x)}.$$

On veut alors montrer que $R_2(x) = o_{x \to +\infty}\left(\dfrac{xe^{-2x}}{\ln(2)}\right)$ (on peut enlever le $\ln(2)$ dans le petit o bien évidemment). Pour cela, on va essayer d'avoir une estimation de $R_2(x)$. J'ai choisi de prendre la plus précise, à savoir celle que j'ai notée (8.1). On a

$$\forall x > 0, |R_2(x)| \leq \frac{e^{-2x}}{\ln(3)} \frac{x}{e^x - 1} = \frac{xe^{-2x}}{\ln(3)} \underbrace{\frac{1}{e^x - 1}}_{\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0} = o_{x \to +\infty}(xe^{-2x}).$$

Ceci montre donc que $R_2(x) = o_{x \to +\infty}(xe^{-2x})$ ce qui montre que

$$f(x) = \frac{xe^{-2x}}{\ln(2)} + o_{x \to +\infty}(xe^{-2x}).$$

Ainsi,

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{xe^{-2x}}{\ln(2)}.$$

Exercice 8. Soit $s \in \mathbb{R}$. Soit $I =]1, +\infty[$, on note pour $s \in I$

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

On note $f_n : s \in I \mapsto \dfrac{1}{n^s}$.

1. Montrer que ζ converge simplement sur I.
2. Sur I, calculer $\|f_n\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que ζ ne converge pas normalement sur I.
3. Montrer que ζ est continue sur I.
4. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I (cette question utilise le critère de Bertrand) et exprimer ses dérivées.
5. En déduire que ζ est convexe sur I.
6. Étudier les limites de ζ sur le bord de I.
7. Établir un développement asymptotique à deux termes de ζ en 1^+.
8. On souhaite montrer que ζ est log-convexe sur I, c'est-à-dire, $\ln \circ \zeta =: f$ est convexe.
   (a) Calculer f'' et exprimer le résultat en fonction de ζ, ζ', ζ''.
   (b) Montrer alors que f est convexe grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (que l'on peut montrer ou admettre) :

   Théorème 2.1 (Cauchy-Schwarz)**.** *On note* $\ell^2(\mathbb{N}^*) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \geq 1} u_n^2 < \infty \right\}$*. Alors pour toute suite* $u, v \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$*, on a*

   $$\left(\sum_{n \geq 1} u_n v_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n \geq 1} u_n^2 \right) \left(\sum_{n \geq 1} v_n^2 \right).$$

9. On souhaite montrer l'identité suivante :

   $$\forall s > 1, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}$$

   où l'on dénote $\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_k, \cdots\}$ rangés dans l'ordre croissant. **Remarque : en probabilités, on montrera d'une autre manière cette identité.**
   (a) Etablir l'existence du produit infini.
   (b) On fixe un $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier m_0 et un entier M_0 tel que $\forall m \geq m_0, \forall M \geq M_0$,

   $$\forall s > 1, \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{k=1}^{m} \sum_{i_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} \leq \zeta(s).$$

   Indication : on pourra réécrire le produit du milieu en une seule somme.
   (c) Conclure.
10. En déduire que la somme des inverses des nombres premiers diverge.

Corrigé :

1. Soit $s > 1$. Alors par le critère de Riemann, la série $\sum \dfrac{1}{n^s}$ converge. Ainsi, ζ converge simplement sur I.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $s \in I \mapsto (1/n)^s$ est une fonction décroissante donc
$$\sup_{s \in I} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n}$$
donc $\sum \|f_n\|_\infty = \sum \frac{1}{n}$ diverge.

> **Remarque 2.1.** De fait, pour utiliser les théorèmes de régularités des séries de fonctions, on devra se placer sur des intervalles $[a, +\infty[$ avec $a > 1$!

3. Soit $a > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors par décroissance de f_n sur $[a, +\infty[$, on a
$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{1}{n^a}$$
puisque f_n est positive. Or, $\sum \frac{1}{n^a}$ converge par Riemann donc
$$\sum \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$$
converge. Ainsi, ζ converge normalement sur $[a, +\infty[$. La continuité de f_n sur $[a, +\infty[$ entraine donc, par le théorème de continuité des séries de fonctions, la continuité de ζ sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
4. Utilisons le théorème de régularité $\mathcal{C}^\infty$ des séries de fonctions. On a déjà que ζ converge simplement sur I donc sur $[a, +\infty[$ avec $a > 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $f_n \in \mathcal{C}^\infty([a, +\infty[, \mathbb{R})$ et
$$\forall s \geq a, f_n^{(k)}(s) = \frac{(-1)^k \ln^k(n)}{n^s}.$$
Ainsi,
$$\sup_{s \geq a} |f_n^{(k)}(s)| = \ln^k(n) \sup_{s \geq a} \frac{1}{n^s} = \frac{\ln^k(n)}{n^a}.$$
On rappelle que le critère de Bertrand est hors-programme ! Puisque $a > 1$, soit $\gamma = \frac{1+a}{2} > 1, \varepsilon = \frac{a-1}{2} > 0$. Ainsi, $a = \gamma + \varepsilon$ et $\frac{\ln^k(n)}{n^\varepsilon} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,
$$\frac{\ln^k(n)}{n^a} = \frac{\ln^k(n)}{n^\varepsilon} \frac{1}{n^\gamma} = o_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$
Ainsi, par comparaison et positivité de $\|f_n^{(k)}\|_{\infty, [a, +\infty[}$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement.
Par le théorème de régularité $\mathcal{C}^\infty$ des séries de fonctions, ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et
$$\forall s \geq a, \forall k \in \mathbb{N}, \zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln^k(n)}{n^s}.$$
Ceci étant valide pour tout $a > 1$, on en déduit que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et
$$\forall s \in I, \forall k \in \mathbb{N}, \zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln^k(n)}{n^s}.$$
5. ζ'' est alors positive sur I en vertu de la question précédente assurant la convexité de ζ sur I.

6. Réalisons une comparaison série-intégrale. On a

$$\forall s>1, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leq \frac{1}{n^s} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}.$$

Ainsi, en sommant avec Chasles,

$$\forall s>1, \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1+\frac{1}{s-1}.$$

On déduit deux choses : puisque $\zeta \geq 1$, par encadrement, ζ tend vers 1 en $+\infty$. Aussi, au voisinage de 1^+, l'inégalité ci-dessus donne donc $\zeta(s) \underset{s\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{s-1}$.

7. On a déjà obtenu le premier ordre. Pour avoir le deuxième, il faut être plus subtil dans la comparaison série-intégrale. Pour cela, pour $s \in [1,2]$, on regarde

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}}_{=:u_n(s)}$$

On va vouloir intervertir limite et série. Pour cela, une convergence normale n'est pas de refus. On a

$$\forall s \in [1,2], \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n(s) \leq \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = \int_n^{n+1} \frac{s}{t^{s+1}} \mathrm{d}t \leq 2\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$$

et on sait que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge puisque par le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge. On a bien convergence normale de la série donc par interversion limite-série,

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1} \underset{s\to 1^+}{\longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_n(1) = \lim_{n\to+\infty} H_n - \ln(n+1) = \gamma.$$

Donc

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o_{s\to 1^+}(1).$$

8. (a) Clairement, $\zeta > 0$ donc par composition de fonctions, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I. En particulier,

$$f' = \frac{\zeta'}{\zeta} \ ; \ f'' = \frac{\zeta''\zeta - \zeta'^2}{\zeta^2}.$$

(b) On rappelle que

$$\forall s>1, \zeta'(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{-\ln(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^{s/2}} \frac{-1}{n^{s/2}}.$$

Or, pour tout $s>1$, $\left(\dfrac{\ln^2(n)}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n^s}\right)$ sont des termes généraux de séries convergentes donc $\left(\dfrac{\ln(n)}{n^{s/2}}\right)_n$ et $\left(\dfrac{-1}{n^{s/2}}\right)$ sont dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$. Ainsi, par Cauchy-Schwarz,

$$\forall s>1, \left(\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^{s/2}} \frac{-1}{n^{s/2}}\right)^2 \leq \left(\sum_{n\geq 1} \frac{\ln^2(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}\right)$$

ce qui signifie exactement

$$\forall s>1, (\zeta'(s))^2 \leq \zeta''(s)\zeta(s).$$

Ainsi, $\forall s>1, \zeta''(s)\zeta(s) - (\zeta'(s))^2 \geq 0$ donc $\zeta''\zeta - \zeta'^2 \geq 0$ donc $f'' \geq 0$: f est convexe.

9. (a) Pour qu'un produit infini existe, il suffit de regarder avec un ln. En effet, soit $s > 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-p_k^{-s}}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \ln(1-p_k^{-s}).$$

Puisque $\ln(1-p_k^{-s}) \sim p_k^{-s} \leq n^{-s}$, par encadrement, la série avec les ln converge donc le produit converge.

(b) Considérons les entiers compris entre 1 et N et regardons p_{m_0}, le plus grand nombre premier apparaissant dans une décomposition d'un des entiers entre 1 et N. De même, regardons M_0, la plus grande valuation apparaissant dans une décomposition d'un des entiers entre 1 et N. En considérant un $m \geq m_0$ et $M \geq M_0$, tout nombre compris entre 1 et N divise $p_1^M p_2^M p_3^M \cdots p_m^M$ par construction. Mieux, chaque entier entre 1 et N s'écrit donc $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ dans $[\![0, M]\!]$. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{0 \leq \alpha_1, \cdots, \alpha_m \leq M} \frac{1}{(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m})^s} \leq \zeta(s). \tag{2.2}$$

Il faut maintenant remarquer que

$$\sum_{0 \leq \alpha_1, \cdots, \alpha_m \leq M} \frac{1}{(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m})^s} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\alpha_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{\alpha_k})^s}.$$

(c) En faisant tendre M puis m vers $+\infty$ dans 2.2 (en remplaçant avec l'identité ci-dessus) valide pour tout $m \geq m_0, M \geq M_0$, on a donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \sum_{\alpha_k=0}^{+\infty} \frac{1}{(p_k^{\alpha_k})^s} \leq \zeta(s).$$

En remarquant la série géométrique

$$\sum_{\alpha_k=0}^{+\infty} \frac{1}{(p_k^{\alpha_k})^s} = \frac{1}{1-p_k^{-s}},$$

on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}} \leq \zeta(s).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on a le résultat voulu.

10. Supposons que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k}$ diverge. Alors par l'équivalent $\ln\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) \sim 1/p_k$ montre que le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ converge. Notons ℓ, cette limite. Alors $\forall s > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}} \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \ell.$$

Donc ζ est majorée sur $]1, +\infty[$ ce qui est absurde puisqu'elle diverge en 1^+.

Exercice 9. Soit $s \in \mathbb{R}$. On note pour $s \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\eta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

On note $g_n : s \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

1. Montrer que η converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que η est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que $\forall s > 1, \eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$.

Corrigé :

1. Soit $s > 0$. Alors $\left(\dfrac{1}{n^s}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial des séries alternées, $\eta(s)$ converge.
2. Il n'y aura pas de convergence normale sur tout $]0, +\infty[$ (elle n'existe déjà pas sur $]1, +\infty[$...) mais le critère spécial des séries alternées nous donne **un contrôle uniforme** (et c'est le point important de ce critère) : plaçons nous sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
   - η converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - g_n est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a

   $$\forall s > 0, g_n'(s) = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^s}.$$

   Étudions la fonction $h : x \in]0, +\infty[\mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^s}$ pour $s > 0$ (on peut prendre $s > a$ si on veut). Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée

   $$\forall x > 0, h'(x) = \frac{1 - s\ln(x)}{x^{s+1}}$$

   donc h' s'annule en $\exp(1/s) =: x_s$. De plus, h' est positive puis négative donc h est croissante sur $]0, x_s]$ puis décroissante sur $[x_s, +\infty[$. Soit donc $n_s = \lfloor x_s \rfloor + 1$. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln(n)}{n^s}\right)$ décroît à partir du rang n_s et tend trivialement vers 0. Comme $s \geq a$, on a $n_a \geq n_s$. Par le critère spécial des séries alternées, on a le contrôle du reste :

   $$\forall s > a, \forall n \geq n_a, |R_n(s)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^s} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

   Ainsi,

   $$\|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   On en déduit que η' converge uniformément sur tout $]a, +\infty[$.

   Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, η est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et ce, pour tout $a > 0$ donc η est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. Soit $s > 1$. Alors

   $$\eta(s) - \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^s}.$$

   Or, $(-1)^{n-1} - 1$ vaut 0 si n est impair, -2 sinon. Ainsi,

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^s} \underset{\star}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2n)^s} = -2\frac{1}{2^s}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = -2^{1-s}\zeta(s).$$

Remarque 2.2. L'égalité ($\star$) est loin d'être anodine. Si la notion de familles sommables a été vue, on s'en sort aisément mais c'est `overkill`. Le mieux est d'écrire

$$\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^s}=\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ pair}}}^{2N}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^s}+\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ impair}}}^{2N}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^s}=\sum_{n=1}^{N}\frac{-2}{(2n)^s}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2}{(2n)^s}.$$

Exercice 10.

1. Soit f, une fonction continue sur $[0,1]$ vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t=0$. Que dire de f ?
2. Montrer que toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme de polynômes de la forme $P_n(X^2)$.
3. Considérons f, une fonction continue et $(a_1,\cdots,a_n)$ n réels distincts de $[0,1]$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes approximant f uniformément tel que chaque polynôme coïncident avec f en les $(a_1,\cdots,a_n)$.

Corrigé :

1. f va être nulle. On remarque déjà que par linéarité de l'intégrale, pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $\langle P_n,f\rangle=0$. Soit $(P_n)_n$, une suite de polynômes tendant uniformément vers f sur $[0,1]$ (d'après le théorème de Weierstraß). Alors par le théorème d'interversion limite-intégrale, on a
$$0=\int_0^1 P_nf\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 f^2.$$
Donc f^2 est identiquement nulle donc f aussi.
2. L'astuce est de "rendre pair" f. Posons donc $g: x\in[-1,1]\mapsto f(x)\mathbb{1}_{x\geq 0}+f(-x)\mathbb{1}_{x<0}$. Alors g est paire et est continue. Par le théorème de Weierstraß, il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ qui convergent uniformément sur $[-1,1]$. On remarque que $(P_n(-X))_n$ est une suite de polynômes convergeant uniformément vers $x\mapsto g(-x)=g(x)$. Ainsi, $Q_n=\dfrac{P_n(X)+P_n(-X)}{2}$ pour $n\in\mathbb{N}$ constitue une suite de polynômes convergeant uniformément vers g sur $[-1,1]$ donc a fortiori sur $[0,1]$ donc vers f. On conclut en remarquant que Q_n est un polynôme en X^2.
3. D'après le théorème de Weierstraß, il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ convergeant uniformément vers f sur $[0,1]$. Considérons la base d'interpolation de Lagrange
$$L_i(X)=\prod_{j\neq i,j=1}^{n}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}, 1\leq i\leq n.$$
On pose alors pour $k\in\mathbb{N}$
$$Q_k(X)=P_k(X)+\sum_{i=1}^{n}(f(a_i)-P_k(a_i))L_i(X).$$
Alors $\forall 1\leq i\leq n, Q_k(a_i)=f(a_i)$. De plus,
$$\|f-Q_k\|_\infty\leq\|f-P_k\|_\infty+\sum_{i=1}^{n}|f(a_i)-P_k(a_i)|\|L_i\|_\infty\leq\|f-P_k\|_\infty\left(1+\sum_{i=1}^{n}\|L_i\|_\infty\right)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$
On a le résultat voulu.

Exercice 11. *On souhaite généraliser le théorème de Weierstraß en le suivant : toute fonction continue et 2π-périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques. Le théorème de Fejér donne une réponse. L'exercice propose une preuve orienté vers ce corollaire. On laissera le cas général au lecteur.*

On parle dans la suite, sans le dire, de la théorie des séries de Fourier. Nous ne rentrons pas dans les détails, c'est un prétexte pour faire des séries de fonctions. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que f est 2π-périodique. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k : x \in \mathbb{R} \to e^{ikx} \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit pour $n \in \mathbb{N}$

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t, S_n := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k, C_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k.$$

Ce sont respectivement le $n-$ème coefficient de Fourier de f, la somme partielle de la série de Fourier de f, la moyenne de Cesàro de la série de Fourier. On note aussi

$$\widetilde{S}_n := \sum_{k=-n}^{n} e_k, \widetilde{C}_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \widetilde{S}_k.$$

1. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{C}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Montrer que $(\widetilde{C}_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi]\backslash[-\alpha, \alpha]$.
3. On pourra admettre cette question dans un premier temps. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $(C_n)_n$ tend uniformément vers f.
   Indication : on pourra montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, C_n(x) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\widetilde{C}_n(x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\widetilde{C}_n(t)\mathrm{d}t.$

Corrigé :

1. Il est aisé de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_k = \delta_{k,0}$. Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{S}_n(t)\mathrm{d}t = 1$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{C}_n(t)\mathrm{d}t = 1.$$
2. D'abord, $\widetilde{S}_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \widetilde{S}_n = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}(e^{ix})^k = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\Im(e^{i(n+\frac{1}{2})x}).$$
Or $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\Im(e^{i(k+\frac{1}{2})x}) = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\Im\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}\right)$$
$$= \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right) = \left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2.$$
De fait,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \widetilde{C}_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2.$$
On en déduit donc que
$$\forall \alpha \in]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\pi, \pi]\backslash[-\alpha, \alpha], |\widetilde{C}_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2(\alpha/2)}.$$
Donc la série de fonctions converge uniformément.

3. Disons $T > 0$, la période. Fixons $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[-T, 2T]$: il existe donc $\eta > 0, \forall x, y \in [-T, 2T], |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On peut supposer $\eta \leq T$ (si $\eta > T$, la propriété est vraie pour T en particulier). Soit donc x, y tel que $|x - y| \leq \eta$. x est alors compris entre kT et $(k+1)T$ pour un certain k. Alors $x' = x - kT \in [0, T]$. Puisque $|x - y| \leq \eta \leq T$, on a $y' := y - kT \in [-T, 2T]$. Puisque $|x' - y'| = |x - y| \leq \eta$ et que $x', y' \in [-T, 2T]$, on a $|f(x') - f(y')| \leq \varepsilon$. Mais $f(x') = f(x), f(y') = f(y)$ donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
4. Déjà, on remarque que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \mathrm{d}t \right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widetilde{S}_n(x - t) \mathrm{d}t.$$
Ainsi, on en déduit
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, C_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widetilde{C}_n(x - t) \mathrm{d}t.$$
Par le changement de variable $u = x - t$ et la 2π-périodicité de l'intégrande, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, C_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widetilde{C}_n(x - t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) \widetilde{C}_n(t) \mathrm{d}t.$$
Soit $\varepsilon > 0$. Par la question précédente, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On peut supposer que $\eta < \pi$. Une fonction continue périodique étant bornée, notons M un majorant de $|f|$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} |f(x) - C_n(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ((f(x - t) - f(x)) \widetilde{C}_n(t) \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} 2M \widetilde{C}_n(t) \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varepsilon \widetilde{C}_n(t) \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{2M}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} \widetilde{C}_n(t) \mathrm{d}t + \varepsilon. \end{aligned}$$
La convergence uniforme de $(\widetilde{C}_n)_n$ assure que l'intégrale est bornée par ε à partir d'un certain rang. On a la convergence uniforme voulue.

Exercice 12. Déterminer quelles sont les fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de fonctions polynômiales strictement croissantes.

Corrigé : Ce corrigé présuppose la connaissance des polynômes de Bernstein.

Déjà, si f est une telle fonction, alors f est croissante car la monotonie est une propriété qui passe à la convergence simple (donc uniforme aussi). Réciproquement, soit f une fonction continue croissante sur $[0, 1]$ et considérons pour $n \in \mathbb{N}$:
$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1 - X)^{n-k}.$$
Alors la suite de fonctions $\widetilde{B}_n(f) : x \mapsto B_n(f)(x)$ converge uniformément vers f. Il s'agit donc de montrer que $\widetilde{B}_n(f)$ est une fonction croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0, 1]$. Alors
$$[B_n(f)]'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) k x^{k-1} (1 - x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) (n - k) x^k (1 - x)^{n-k-1}.$$
La formule des chefs [1] assure que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et donc
$$(n - k)\binom{n}{k} = n\binom{n}{k} - n\binom{n-1}{k-1} = n\binom{n-1}{k}$$

1. ou du capitaine, du roi, ...

et ce pour tout k, n entier (on convient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k}$ est nul lorsque $k \notin [\![0, n]\!]$). Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
[B_n(f)]'(x) &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} f\left(\frac{k}{n}\right) x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-1-k} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f\left(\frac{k+1}{n}\right) x^k (1-x)^{n-1-k} - \binom{n-1}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-1-k} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \underbrace{\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)}_{\geq 0} \geq 0
\end{aligned}$$

par croissance de f. Ainsi, $B_n(f)$ est croissante.

Maintenant, considérons $P_n = \frac{X}{n} + B_n(f)$. Alors P_n converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ car

$$\|P_n - f\|_\infty \leq \|B_n - f\|_\infty + \frac{1}{n}$$

et P_n induit une fonction strictement croissante ce qui conclut.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $f_n : x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\} \mapsto \frac{x^n}{1-x^n} \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ s'il y a existence.

1. Déterminer le plus grand intervalle I où f est défini. Est-elle continue ? Dérivable ?
2. Établir un équivalent en 1^-.
3. Montrer que
$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$$
où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de n.

Corrigé :

1. Si $|x| < 1$, alors $|f_n(x)| \underset{n \to +\infty}{\sim} |x|^n$ donc par comparaison de séries à terme général positif, $f(x)$ existe. Si $|x| = 1$, $f_n(x)$ n'est pas défini, et ce pour tout n et si $|x| > 1$, $f(x)$ diverge grossièrement.
Montrons donc que f est continue puis dérivable sur $]-1, 1[$. Soit $a \in]0, 1[$. Alors pour tout $x \in [-a, a]$, on a
$$|f_n(x)| \leq \frac{a^n}{1-a^n} = f_n(a).$$
Or, $\sum f_n(a)$ converge donc on a la convergence normale de f sur $[-a, a]$. f_n étant continue pour tout n sur $]-1, 1[$, par le théorème de continuité des séries de fonctions, f est continue sur $[-a, a]$ pour tout $a \in]0, 1[$ donc sur $]-1, 1[$. De plus, pour tout $x \in [-a, a]$,
$$|f_n'(x)| = \left|\frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}\right| \leq \frac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} na^{n-1} = o_{n \to +\infty}(1/n^2).$$
Ainsi, $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a, a]$ donc par le théorème de dérivation des séries de fonctions, $\sum f_n$ convergeant simplement vers f, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$ et ce pour tout $a \in]0, 1[$.

2. Il faut penser à la comparaison série-intégrale. Soit $x \in]0,1[$. Alors $\varphi : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{x^t}{1-x^t}$ est continue décroissante en tant que produit de fonctions continues positives décroissantes. Ainsi, on a [2]

$$\int_n^{n+1} \frac{x^t}{1-x^t}\mathrm{d}t \leq \frac{x^n}{1-x^n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x^t}{1-x^t}\mathrm{d}t$$

pour tout $n \geq 2$. En sommant, par Chasles, on a, pour tout $N \geq 2$,

$$\int_2^{N+1} \frac{x^t}{1-x^t}\mathrm{d}t \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{x^n}{1-x^n} \leq \int_1^{N} \frac{x^t}{1-x^t}\mathrm{d}t.$$

Réalisons le changement de variable $u = x^t = \exp(t\ln(x))$ dans les intégrales sur $[\alpha, \beta]$. On a alors $\mathrm{d}u = \ln(x)x^t\mathrm{d}t$ et on a

$$\int_\alpha^\beta \frac{x^t}{1-x^t}\mathrm{d}t = \int_{x^\alpha}^{x^\beta} \frac{u}{1-u}\frac{1}{u\ln(x)}\mathrm{d}u = \frac{1}{\ln(x)}\left[\ln(1-u)\right]_{x^\alpha}^{x^\beta}.$$

On prend $\alpha = 1$ et on fait tendre β vers $+\infty$ ce qui donne (car $x \in]0,1[$)

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\mathrm{d}t = \frac{\ln(1-x^\alpha)}{\ln(x)}$$

Mais en notant $x = 1+h$

$$1 - x^\alpha = 1-(1+h)^\alpha = 1-1-h\alpha + o(h) = \alpha(1-x) + o_{x\to 1}(1-x).$$

Ainsi,

$$\ln(1-x^\alpha) = \ln(1-x) + O(1)$$

donc $\ln(1-x^\alpha) \underset{x\to 1}{\sim} \ln(1-x)$. Puisque $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$, par quotient d'équivalent, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\mathrm{d}t \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}$. Ainsi, par encadrement, on a

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}.$$

3. On a, pour $n \geq 1$ et $|x| < 1$

$$\frac{x^n}{1-x^n} = x^n \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{nk}.$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} |x|^{nk}$ converge donc la famille $(x^{nk})_{(n,k)\in\mathbb{N}*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable. En vertu du théorème de sommation par paquets, puisque [3]

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigsqcup_{p\in\mathbb{N}^*} \underbrace{\{(n,k) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* : nk = p\}}_{=:E_p},$$

on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} x^{nk} = \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} x^{nk} = \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\sum_{(n,k)\in E_p} x^{nk} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{(n,k)\in E_p} x^p = \sum_{p=1}^{+\infty} x^p \underbrace{\mathrm{Card}(E_p)}_{=d(p)}.$$

2. en pratique, un dessin suffira aux oraux mais assurez-vous de savoir le démontrer rigoureusement

3. justifions-le. L'inclusion de droite à gauche est triviale. De gauche à droite, si je me donne $(n,k) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, alors $(n,k) \in E_{nk}$ donc il existe p tel que $(n,k) \in E_p$ (on prend $p = nk$) et la réunion est clairement disjointe.

Chapitre 3

Intégration

Exercice 14. 1. Montrer le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f' \in \mathrm{L}^1(]1, +\infty[)$. Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n)$ ont la même nature.*

Remarque : on pourra remplacer $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge par $\displaystyle\left(\int_1^n f(t)\mathrm{d}t\right)_n$ converge, plus simple à montrer et suffisant pour la suite.

2. Étudier la nature des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$.

3. Soit $\alpha > 0$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^{1/2}}}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 1/2$ (Le sens direct est dur).

La suite est culturelle. Avec une formule du type Euler-Maclaurin, on peut démontrer le théorème suivant

Théorème 3.2. *Soit $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Soit $f \in \mathcal{C}^p([0, +\infty[)$ telle que f et ses dérivées jusqu'à $p-1$ tendent vers 0 à l'infini et que $f^{(p)}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Alors $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.*

Corollaire 3.3. Soit $\alpha > 0, \beta \in]0, 1[$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^\beta}}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha + \beta > 1$

Corrigé :

1. Soit $F : x \in]0, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Alors $F \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ et par le théorème de Taylor avec reste intégral,

pour tout $n > 0$,

$$F(n+1) - F(n) = F'(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)F''(t)\mathrm{d}t$$

ce qui s'écrit

$$\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n) = \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$\left|\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right| \leq \int_n^{n+1} \underbrace{|n+1-t|}_{\leq 1} |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$\sum_{n\geq 0} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$$

converge absolument donc elle converge. Ainsi, $\sum f(n)$ converge si, et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)\mathrm{d}t\right)$ converge. On va alors montrer que c'est équivalent à la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

$\Longleftarrow$ C'est évident. Si $F(x)$ converge en $+\infty$ quand $x \to +\infty$, alors la suite $(F(n))_n$ converge.

$\Longrightarrow$ Soit x réel. Alors

$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{\lfloor x\rfloor} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\lfloor x\rfloor} f(t)\mathrm{d}t$ converge lorsque $x \to +\infty$ ce qui entraine que $\sum f(n)$ converge donc $f(n)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. f' étant intégrable, nécessairement, $f(t)$ converge quand $t \to +\infty$ vers 0 donc $\displaystyle\int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\mathrm{d}t$ converge[1]. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

2. (a) On regarde $f : x \in [1, +\infty[\mapsto \sin(\sqrt{x})/x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})x - \sin(\sqrt{x})}{x^2} = \frac{1}{2x^2}(\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) - 2\sin(\sqrt{x})).$$

Au voisinage de $+\infty$, cette fonction est intégrable car $\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) - 2\sin(\sqrt{x}) \in O(\sqrt{x})$ donc $f'(x) \in O(x^{-3/2})$. La continuité sur $[1, +\infty[$ assure donc l'intégrabilité de f'. Ainsi,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n} \text{ et } \left(\int_1^n \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x\right)_n$$

ont la même nature. Soit $n > 0$. Un changement de variable indique que

$$\int_1^n \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x = 2\int_1^{n^2} \frac{\sin(u)}{u} < +\infty.$$

(c'est classique. Faites une IPP). La série converge.

(b) On regarde $g : x \in [1, +\infty[\mapsto \dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée

$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{-\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))}{x^2}$$

1. c'est un petit exercice. Il suffit de passer aux ε pour conclure rapidement. Pour x assez grand, l'intégrale est plus petite que $\varepsilon(x - \lfloor x\rfloor) \leq \varepsilon$.

intégrable au voisinage de $+\infty$, continue sur $[1,+\infty[$. Elle est donc intégrable sur $[1,+\infty[$. Ainsi, la série converge si, et seulement si $\left(\int_1^n \frac{\cos(\ln(x))}{x}\mathrm{d}x\right)_n$ converge. On réalise le changement de variable $u=\ln(x)$ ce qui donne $\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\int_1^n \frac{\cos(\ln(x))}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\ln(n)}\cos(x)\mathrm{d}x.$$

Ainsi, la série diverge.

3. On changera $\beta=1/2$ juste après. Notons $f : t\in]0,+\infty[\mapsto \frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}$. Alors f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall t>0, |f'(t)|=\left|\frac{\beta i t^{\beta-1}e^{it^\beta}}{t^\alpha}-\frac{e^{it^\beta}}{t^{\alpha+1}}\right|\leq \frac{\beta}{t^{1+\alpha-\beta}}+\frac{1}{t^{\alpha+1}}.$$

Puisque β est strictement positif, f' est intégrable sur $]1,+\infty[$ dès que $1+\alpha-\beta>1$ c'est-à-dire $\alpha>\beta$. Ainsi, le théorème s'applique. La série $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{in^\beta}}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si,

$$\left(\int_1^n \frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}\mathrm{d}t\right)_n$$

converge. Or, par le changement de variable $u=t^\beta$ puis par intégration par parties, on a, en notant $\gamma=\alpha+\beta-1$

$$\begin{aligned}\int_1^n \frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}\mathrm{d}t&=\int_1^{n^\beta}\frac{e^{iu}}{u^{\alpha/\beta}}\frac{1}{\beta u^{1-1/\beta}}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\beta}\int_1^{n^\beta}\frac{e^{iu}}{u^{(\alpha+\beta-1)/\beta}}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\beta}\left(\left[\frac{1}{i}\frac{e^{iu}}{u^\gamma}\right]_1^{n^\beta}+\int_1^{n^\beta}\frac{\gamma}{i}\frac{e^{iu}}{u^{\gamma+1}}\mathrm{d}u\right)\end{aligned}$$

donc

$$\int_1^n \frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}\mathrm{d}t=\frac{1}{\beta}\left(\left[\frac{1}{i}\frac{e^{iu}}{u^\gamma}\right]_1^{n^\beta}+\int_1^{n^\beta}\frac{\gamma}{i}\frac{e^{iu}}{u^{\gamma+1}}\mathrm{d}u\right)\tag{3.1}$$

donc converge dès que $\gamma>0$. Ainsi, on impose $\alpha>\beta$ et $\alpha+\beta>1$.
Ainsi, lorsque $\beta=\frac{1}{2}$, la série converge lorsque $\alpha>\frac{1}{2}$. Si $\alpha\leq\frac{1}{2}$, f' n'est plus intégrable donc il faut être plus fin. Ici, f étant $\mathcal{C}^2$, on pourrait écrire un Taylor avec reste intégral un cran plus loin :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \left|\int_n^{n+1}f(t)\mathrm{d}t-f(n)-\frac{f'(n)}{2}\right|\leq\int_n^{n+1}\underbrace{\left|\frac{(n+1-t)^2}{2}\right|}_{\leq 1}f''(t)\mathrm{d}t$$

et ici, par Leibniz

$$f''(t)=\frac{-e^{i\sqrt{t}}}{4t^{\alpha+1}}+o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$$

donc f'' est intégrable. Ainsi, en raisonnant comme avant,

$$\sum\left|\int_n^{n+1}f(t)\mathrm{d}t-f(n)-\frac{f'(n)}{2}\right|$$

converge. Or, $f'(n) = \dfrac{ie^{i\sqrt{n}}}{2n^{\alpha+1/2} - \alpha\dfrac{e^{i\sqrt{n}}}{n^{1+\alpha}}}$ donc le résultat dans le cas « $\alpha > 1/2$ s'applique ici pour assurer la convergence de $\sum f'(n)$. Ainsi, $\sum \left|\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right|$ converge donc $\sum f(n)$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature. Vu l'équation (8.1), on a la divergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ donc la série diverge dans le cas $\alpha \leq 1/2$.

Exercice 15.
1. Donner le domaine de définition de Γ. On le note D.
2. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On explicitera la valeur de $\Gamma^{(k)}$, pour $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $\Gamma(1) = 1$. On dira que Γ vérifie la propriété (1).
4. Montrer que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Dans la suite, on dira que Γ vérifie la propriété (2). En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$.
5. Montrer que $\ln \Gamma$ est convexe. Dans la suite, on dira que Γ vérifie la propriété (3).
6. Soit f, une fonction strictement positive sur D vérifiant les propriétés (1), (2), (3). On pose $g = \ln f$.
   (a) Montrer que $x \mapsto g(x) - \ln\Gamma(x)$ est 1-périodique.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = \ln\Gamma(n)$.
   (c) Montrer que $f = \Gamma$.

Corrigé : Dans toute la suite, on notera $h_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$.

1. Au voisinage de 0, $h_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ Or l'étude des intégrale de Riemann nous indique que $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0 dès lors que $x > 0$. Par ailleurs, $t^2 h_x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, comme h_x est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que Γ est bien définie dès lors que $x > 0$.
2.
   - $\forall t > 0, x \mapsto h_n(t,x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*})$: $\forall t > 0, \forall x > 0, \dfrac{\partial^n h_x}{\partial x^n}(t,x) = \ln^n(t)t^{x-1}e^{-t}$.
   - Pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}, t \mapsto \dfrac{\partial^n h_x}{\partial x^n}(t,x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - **Domination** : Soit (a,b) tels que $0 < a < 1 < b < +\infty$. Alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \forall t > 0, |\ln^n(t)|t^{x-1}e^{-t} \leq |\ln^n(t)|e^{-t} \times (t^{a-1} + t^{b-1}) := g_n(t).$$
   Il suffit de montrer que g_n est intégrable ce qui est le cas car elle est continue, et par croissances comparées, elle est intégrable en 0 et $+\infty$.

   Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, j'ai :
   $$\Gamma \in \mathcal{C}^\infty, \forall x > 0, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n h_x}{\partial x^n}(t,x)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln^n(t)t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$
3. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$.
4. Soit $0 < a < b$, deux réels. Alors :
   $$\int_a^b t^x e^{-t}\mathrm{d}t = [-t^x e^{-t}]_a^b + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$
   Le crochet tend vers 0 quand $a \to 0, b \to +\infty$. Or, pour $x > 0$, l'intégrale de droite converge vers $x\Gamma(x)$. L'égalité passe donc la limite en :
   $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$
   Une simple récurrence nous dit donc que :
   $$\Gamma(n+1) = n!$$

5. Par la question 2, nous savons que pour $x > 0$:

$$|\Gamma'(x)| \leq \int_0^{+\infty} |\ln(t)| t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} |\ln(t)| t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \mathrm{d}t.$$

J'utilise donc Cauchy-Schwarz :

$$|\Gamma'(x)| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} \left(|\ln(t)| t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}\right)^2 \mathrm{d}t} \sqrt{\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}\right)^2 \mathrm{d}t}$$

Je développe le carré, et j'ai au final :

$$|\Gamma'(x)| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} \ln^2(t) t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t} \sqrt{\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t} = \Gamma''(x)\Gamma(x).$$

D'où :

$$\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2 > 0$$

Par ailleurs,

$$\ln(\Gamma)'' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} > 0$$

Donc $\ln \Gamma$ est convexe.

6. (a)

$$\forall x > 0, \ln(\Gamma(x+1)) = \ln(x) + \ln(\Gamma(x)) \ ; \ \forall x > 0, \ln(f(x+1)) = \ln(x) + \ln(f(x))$$

D'où :

$$\forall x > 0, (\ln(\Gamma) - g)(x+1) = (\ln(\Gamma) - g)(x).$$

C'est la 1-périodicité.

(b) Comme $(\ln(\Gamma) - g)(1) = 0$, par une récurrence immédiate, j'ai :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = \ln(\Gamma(n)).$$

(c) Alors pour tout $x > 0$, on a $g(x+1) = g(x) + \ln(x)$ $(\star)$. Il suffit de montrer que $\ln \circ \Gamma = g$ sur $]0,1[$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Par convexité de g et par le lemme des pentes croissantes, sur $n \leq n+1 \leq n+1+x \leq n+2$ avec $x \in]0,1[$, on a

$$g(n+1) - g(n) \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq g(n+2) - g(n+1).$$

Par $(\star)$, on a

$$\ln(n) \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq \ln(n+1)$$

ce qui donne

$$x\ln(n) \leq g(n+1+x) - \ln(n!) \leq x\ln(n+1) = x\ln(n) + x\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Par ailleurs, en itérant $(\star)$ par récurrence, on a $g(n+1+x) = g(x) + \ln\left(\prod_{i=0}^{n}(x+i)\right)$. On obtient donc

$$0 \leq g(n+1+x) - \ln(n!n^x) \leq x\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

ce qui donne

$$0 \leq g(x) - \ln\left(\frac{n!n^x}{\prod_{i=0}^{n}(x+i)}\right) \leq x\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, g est uniquement déterminé par

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n!n^x}{\prod_{i=0}^{n}(x+i)}\right).$$

Par continuité de exp, on a donc

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{i=0}^{n}(x+i)}$$

donc on a bien unicité de f vérifiant $(a), (b)$ et (c) donc comme Γ satisfait ces propriétés, $f = \Gamma$ et on a de surcroît

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{i=0}^{n}(x+i)}$$

constituant la formule d'Euler.

Exercice 16. On souhaite montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$. En considérant $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\mathrm{d}t$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$, retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss.

Corrigé : Déjà, il est clair que $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,1] \mapsto \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux. De plus,

$$\forall t \in [0,1], x \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)\ ,\ \forall x \geq 0, \forall t \in [0,1], \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2+1)}.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $\forall x \geq 0, -2xe^{-x^2(t^2+1)} \leq -2xe^{-x^2}$. Or, $\forall x \geq 0, x \leq e^{x^2}$ donc la dérivée partielle en x de f est dominée par 2. Par le théorème de dérivation sous le signe intégral,

$$\forall x \geq 0, F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)}\mathrm{d}t = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\mathrm{d}t \underset{u=xt}{=} -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u = -2f'(x)f(x).$$

En intégrant, on a donc

$$\forall x \geq 0, F(x) - F(0) = -f^2(x) + f^2(0)$$

ce qui donne $\forall x \geq 0, F(x) = \dfrac{\pi}{4} - f^2(x)$. Par ailleurs,

$$\forall x \geq 0, 0 \leq F(x) \leq e^{-x^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

car f est positive. En réalisant le changement de variable $u = x/\sqrt{2}$, on a donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

et par parité, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Exercice 17. Soit $F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ avec $f : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathrm{sinc}(t)e^{-xt}$. Montrer que

1. sinc n'est pas intégrable.
2. F est bien définie
3. F admet une limite en $+\infty$
4. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
5. $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Par ailleurs, au voisinage de $+\infty$, lorsque $x \neq 0$, on a $t^2\mathrm{sinc}(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par comparaison, $f(x,\cdot)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ce qui assure l'existence de F sur $]0,+\infty[$. Il reste la convergence de $f(0,\cdot)$ en $+\infty$ pour conclure. Pour cela,
$$\int_1^A \mathrm{sinc}(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^A}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0+\cos(1)} - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$
Or l'intégrale résiduelle converge absolument donc $\int_1^A \mathrm{sinc}(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $A \to +\infty$.
3. sinc est bornée par 1 donc par inégalité triangulaire,
$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} |\mathrm{sinc}(t)||e^{-xt}|\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
4. On souhaite utiliser le théorème de Leibniz. Pour cela, on a
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable en $+\infty$).
   (b) $\forall t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto f(t,x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}$. $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -t\mathrm{sinc}(t)e^{-xt}.$$
   (c) Domination :
   $$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in]a,+\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq t\mathrm{sinc}(t)e^{-at} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+).$$
   Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,+\infty[$ pour tout $a > 0$ donc sur $]0,+\infty[$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t.$$
5. On a par la ligne précédente,
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F'(x) &= -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t \\ &= -\Im\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\mathrm{d}t\right) \\ &= -\Im\left(\frac{-1}{i-x}\right) \\ &= \frac{-1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, il existe C réel tel que $\forall x > 0, F(x) = -\arctan(x) + C$. Puisque $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, l'égalité passe à la limite et $C = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, si la limite de $x \to 0$ de $F(x)$ existe, alors, $(\star)$ $\boxed{\lim_{x\to 0^+} F(x) = \dfrac{\pi}{2}}$ et c'est ce qu'on voulait. Pour cela, on va utiliser le théorème de convergence dominée. Soit $G : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \displaystyle\int_0^x \operatorname{sinc}$ la primitive de sinc s'annulant en 0. G est bornée en tant que fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ ayant une limite finie en 0 et en $+\infty$. Alors pour tout $A > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\int_0^A \operatorname{sinc}(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = \Big[G(t)e^{-xt}\Big]_0^A + \int_0^A xe^{-xt}G(t)\mathrm{d}t.$$

On fixe $x \in \mathbb{R}^{+*}$. G étant bornée, la convergence du crochet et de l'intégrale est du même acabit que l'équation 3.2 et on a finalement

$$\forall x > 0, F(x) = 0 + \int_0^{+\infty} xe^{-xt}G(t)\mathrm{d}t.$$

L'application $u = xt$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même. Le théorème de changement de variable nous assure alors

$$\forall x > 0, F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u}G\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u.$$

(a) Soit $x > 0$. $u \mapsto e^{-u}G\left(\frac{u}{x}\right)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Soit $u \in \mathbb{R}^+$. $e^{-u}G\left(\dfrac{u}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} e^{-u}F(0)$.

(c) Domination : $\forall u \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \left|e^{-u}G\left(\dfrac{u}{x}\right)\right| \leq e^{-u}\|G\|_\infty \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

Par le théorème de convergence dominée, on a donc bien

$$F(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-u}F(0)\mathrm{d}u = F(0).$$

Ainsi, dans $(\star)$, on a $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui signifie que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 18. Donner un équivalent quand $t \to +\infty$ de

$$I(t) = \int_0^1 \cos(x)\exp(it\cosh(x))\mathrm{d}x.$$

Corrigé : Lorsque $t \to +\infty$, la quantité $t\cosh(x)$ est très grande donc $\exp(it\cosh(x))$ oscille très vite. Le lemme classique de Riemann-Lebesgue nous mets sur la voie sur le fait que l'intégrale va être petite lorsque $t \to +\infty$. Pour autant, lorsque x est proche de 0, $\cosh(x)$ varie peu (sa dérivée est nulle) donc l'effet oscillant (permettant la convergence vers 0) se trouve atténué. Ainsi, c'est au voisinage de 0 que l'intégrande a sa partie la plus prépondérante.

Étudions donc l'intégrande en 0. Par Taylor-Young, on a $\cosh(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)$. Ainsi, on a

$$\cosh(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Il est de bon goût de poser le changement de variable $y = \sqrt{2(\cosh(x) - 1)} = 2\sinh(x/2)$ (et on s'aliène tout de suite du 2 devant sinh) qui est bien $\mathcal{C}^1$ bijectif de $[0, 1]$ dans $[0, \sinh(1/2) =: a]$. Alors $\cosh(x) = 2\sinh^2(x/2)+1$,

$\cosh(x/2) = \sqrt{1+\sinh^2(x/2)}$, $\mathrm{d}y = \dfrac{\cosh(x/2)}{2}\mathrm{d}x$ et par le théorème de changement de variable,

$$I(t) = \int_0^a \underbrace{\frac{\cos(2\operatorname{argsinh}(y))}{\sqrt{1+y^2}}}_{=:h(y)} e^{2ity^2} 2e^{it}\mathrm{d}y.$$

h a été créé pour peu contribuer donc on a bon espoir que

$$I(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2e^{it}\int_0^a e^{2ity^2}\mathrm{d}y.$$

Avant d'estimer l'écart, assurons-nous déjà à quel ordre nous devons faire nos contrôles. Par le changement de variable $x = 2ty^2$, on voit immédiatement que

$$\int_0^a e^{2ity^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{2t}}\int_0^{2ta^2}\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge (en 0, c'est trivial. En $+\infty$, c'est une intégration par parties : assurez-vous de savoir le faire). Ainsi, si on trouve des contrôles de l'ordre de $\dfrac{1}{t}$ par exemple, on est sur la bonne voie. Considérons maintenant $H(t)$ égal à $I(t)$ sans le facteur $2e^{it}$ et regardons

$$H(t) - \int_0^a e^{2ity^2}\mathrm{d}y = \int_0^a (h(y)-1)e^{2ity^2}\mathrm{d}y.$$

Pour contrôler ce genre d'intégrale, une intégration par parties est une bonne idée pour mettre en exergue les oscillations. On aimerait intégrer l'exponentielle mais le y^2 est gênant. Par contre, avec un y devant, cela change la donne.

$$H(t) - \int_0^a e^{2ity^2}\mathrm{d}y = \int_0^a (h(y)-1)e^{2ity^2}\mathrm{d}y = \int_0^a \underbrace{\frac{h(y)-1}{y}}_{\widetilde{h}} ye^{2ity^2}\mathrm{d}y$$

et $\widetilde{h}$ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en la prolongeant convenable en 0. Par intégration par parties, on obtient donc

$$H(t) - \int_0^a e^{2ity^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{4it}\underbrace{\left[\widetilde{h}(y)e^{2ity^2}\right]_0^a}_{\text{bornée en } t} - \frac{1}{4it}\underbrace{\int_0^a \widetilde{h}'(y)e^{2ity^2}\mathrm{d}y}_{|\cdot|\leq a\|\widetilde{h}'\|_\infty} = O(1/t).$$

($\|\widetilde{h}'\|_\infty < \infty$ par le théorème des bornes atteintes). Ainsi,

$$H(t) = \int_0^a e^{2ity^2}\mathrm{d}y + O(1/t)$$

ce qui donne l'équivalent de H espéré et

$$I(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{Ke^{it}}{\sqrt{2t}}$$

avec $K = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x$ (*Remarque* : K vaut $\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}$).

Exercice 19. Donner un équivalent quand $t \to +\infty$ de

$$I(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^t}.$$

Corrigé : Le théorème de convergence dominée donne immédiatement que $I(t)$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$.

Pour trouver un équivalent, la recette est la suivante : déterminer là où l'intégrande est la plus « importante » car c'est cette quantité qui régit l'intégrale. L'intégrande, ici, apporte sa contribution la plus importante en 0 (puisqu'elle est maximale en 0). On va donc réaliser un développement limité de l'intégrande en 0. On a

$$\frac{1}{(1+x+x^2)^t} = \exp(-t\ln(1+x+x^2)) = \exp(-t(x+o_{x\to 0}(x))) = \exp(-tx+o_{x\to 0}(x))$$

donc on a envie de dire que $I(t)$ est pas si loin de $\int_0^1 \exp(-tx)\mathrm{d}x$. Par un changement de variable,

$$\int_0^1 \exp(-tx)\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int_0^t e^{-u}\mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

puisque $\int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = 1$.

Ainsi, on aura gagné si on arrive à montrer que

$$I(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_0^1 \exp(-tx)\mathrm{d}x.$$

Pour cela, contrôlons la différence. On a

$$\begin{aligned}\left|I(t) - \int_0^1 \exp(-tx)\mathrm{d}x\right| &\leq \int_0^1 |\exp(-t\ln(1+x+x^2)) - \exp(-tx)|\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \exp(-tx)|\exp(-t\ln(1+x+x^2)+tx]) - 1|\mathrm{d}x \\ &\underset{u=tx}{=} \frac{1}{t}\int_0^t e^{-u}\left|\exp\left(-t\left[\ln\left(1+\frac{u}{t}+\frac{u^2}{t^2}\right)-\frac{u}{t}\right]\right)-1\right|\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Une banale étude de fonction montre que $x\mapsto \ln(1+x+x^2)-x$ montre que cette quantité est positive sur $[0,1]$ donc $\exp\left(-t\left[\ln\left(1+\frac{u}{t}+\frac{u^2}{t^2}\right)-\frac{u}{t}\right]\right)-1$ est négative. On peut donc enlever les valeurs absolues en mettant un signe $-$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}\left|I(t) - \int_0^1 \exp(-tx)\mathrm{d}x\right| &\leq \frac{1}{t}\int_0^t e^{-u}\left(1-\exp\left(-t\ln\left(1+\frac{u}{t}+\frac{u^2}{t^2}\right)+u\right)\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-u}\left(1-\exp\left(-t\ln\left(1+\frac{u}{t}+\frac{u^2}{t^2}\right)+u\right)\right)\mathbb{1}_{[0,t]}(u)}_{=:\phi(u)}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

On applique maintenant le théorème de convergence dominée puisque ϕ est dominée par e^{-u}, intégrable sur $[0,+\infty[$. Puisque ϕ tend vers 0 en $+\infty$, on en déduit que, après application du théorème de convergence dominée,

$$\left|I(t) - \int_0^1 \exp(-tx)\mathrm{d}x\right| = o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ainsi,

$$I(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}.$$

<u>Exercice</u> 20. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)}\right).$$

Corrigé : On réalise des intégrations par parties jusqu'à obtenir

$$\mathrm{Li}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k! \left[\frac{t}{\ln^{k+1}(t)} \right]_2^x + n! \int_2^x \frac{1}{\ln^{n+1}}.$$

On cherche un équivalent du dernier terme. Pour cela, « on dérive ce qui lentement vite et on intègre ce qui bouge vite ». Ici, on dérive le ln et intègre 1. On obtient alors par intégration par parties

$$\int_2^x \frac{1}{\ln^{n+1}} = \left[\frac{t}{\ln^{n+1}(t)} \right]_2^x + (n+1) \int_2^x \frac{1}{\ln^{n+2}}.$$

Mais $\frac{1}{\ln^{n+2}} \in o_\infty \frac{1}{\ln^{n+1}}$ et par divergence de l'intégrale, par le théorème d'intégration des relations de comparaisons, on a le résultat souhaité.

Exercice 21. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que g ne s'annule pas en l'infini et que

$$g'/g \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mu}{x}$$

pour $\mu \neq 0, \mu \neq -1$. On suppose que $\mu > -1$. Montrer que

$$\int_a^{+\infty} g \text{ diverge et } \int_a^x g \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{xg(x)}{\mu + 1}.$$

(Si $\mu < -1$, il y a convergence et $\displaystyle\int_x^{+\infty} g \underset{x \to +\infty}{\sim} -\frac{xg(x)}{\mu + 1}$ et le résultat se montre de la même manière).

Corrigé : Le théorème d'intégration des relations de comparaisons entraine

$$\int_a^x \frac{g'(t)}{g(t)} \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\sim} \mu \int_a^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t.$$

Ainsi, $\ln \circ g \underset{+\infty}{\sim} \mu \ln$. Par définition, en fixant $\varepsilon > 0$ telle que $\mu - \varepsilon > -1$, il existe $A > a$ tel que $\forall x \geq A, \ln(g(x)) \geq (\mu - \varepsilon) \ln(x)$ ce qui donne $g(x) \geq x^{\mu - \varepsilon}$. Ainsi, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge vers $+\infty$. Par intégration par parties, on trouve

$$\int_a^x (g(t) + tg'(t)) \mathrm{d}t = xg(x) - ag(a).$$

Or, $g(t) + tg'(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} g(t)(1 + \mu)$. Par le théorème d'intégration des relations de comparaisons, sachant qu'on est dans le cas divergent, on a bien

$$xg(x) \sim (\mu + 1) \int_a^x g.$$

Exercice 22. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On note, lorsque c'est possible,

$$\widehat{f}(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi tx} \mathrm{d}x.$$

Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(-\pi x^2)$. Montrer que g et $\widehat{g}$ vérifie la même équation différentielle. A l'aide de la valeur de l'intégrale de Gauss, montrer que $g = \widehat{g}$.

Corrigé : g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -2\pi x g(x)$. Soit donc $(E) : y'(x) + 2\pi x y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\widehat{g}$ vérifie cette équation différentielle. Déjà, $\widehat{g}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto g(x) e^{-2i\pi tx}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $\pm\infty$.

Montrons que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\varphi : (t, x) \mapsto g(x) e^{-2i\pi tx}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = -2i\pi x\varphi(t, x).$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}, \varphi(t, \cdot)$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \cdot)$ sont continue sur $\mathbb{R}$.
- **Domination** :

$$\forall a > 0, \forall t \in]-a, a[, \forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x)\right| \leq 2\pi x e^{-\pi x^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$$

(le dernier fait par croissances comparées). Ainsi, par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, $\widehat{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-a, a[$ pour tout $a > 0$ donc sur $\mathbb{R}$ et de surcroît, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, [\widehat{g}]'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i \underbrace{-2\pi x g(x)}_{=_{(E)} g'(x)} e^{-2i\pi tx} \mathrm{d}x.$$

Réalisons une intégration par parties. On va naturellement intégrer g' et dériver l'exponentielle. On a donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i g'(x) e^{-2i\pi tx} \mathrm{d}x = i \underbrace{\lim_{a \to -\infty, b \to +\infty} \left[g(x)e^{-2i\pi tx}\right]_a^b}_{=0} + i^2 2\pi t \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-2i\pi tx} \mathrm{d}x = -2\pi t\widehat{g}(t).$$

Ainsi, on vient de montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, [\widehat{g}]'(t) = -2\pi t\widehat{g}(t)$ donc $\widehat{g}$ vérifie (E).

Puisque g ne s'annule jamais, $\dfrac{\widehat{g}}{g}$ est bien définie et mieux, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut donc dériver pour obtenir

$$\left(\frac{\widehat{g}}{g}\right)' = \frac{[\widehat{g}]' g - \widehat{g} g'}{g^2}.$$

Or, puisque g et $\widehat{g}$ vérifie la même équation différentielle du premier ordre, on montre facilement que $[\widehat{g}]' g - \widehat{g}g' = 0$ et donc qu'il existe une constante C tel que $\widehat{g} = Cg$(on pouvait aussi utiliser Cauchy-Lipschitz...). On regarde en 0. Or,

$$g(0) = 1, \widehat{g}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^0 \mathrm{d}x.$$

On doit donc calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} \mathrm{d}x$ qui vaut 1 puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$. Ainsi, $\widehat{g} = g$.

Remarque 3.1.
On a montré plusieurs choses ici. Avec notre convention de la transformée de Fourier, sous réserve d'existence, en faisant l'abus de considérer $f(t)$ par sa fonction,

- $\left[\widehat{f}\right]'(t) = (-2i\pi)\widehat{tf(t)}$
- $\widehat{f'}(t) = 2i\pi t\widehat{f}(t)$
- La gaussienne est invariante à constante près par transformée de Fourier.

Chapitre 4

Algèbre générale

Exercice 23. Soit G, un groupe non réduit à $\{0\}$.

1. On suppose que $\forall x \in G, x^2 = e$. Montrer que G est abélien.
2. On veut montrer que si G est fini, G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/Z\mathbb{Z})^d$ pour un certain d. On propose deux méthodes.
   (a) Exhiber la forme des éléments de G. Conclure.
   (b) Montrer qu'il existe une loi interne $\times$ de sorte que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$ soit un corps. Conclure.

Corrigé :

1. Pour tout $x \in G, x^2 = e$ donc $x = x^{-1}$. Soit donc $x, y \in G$. On a $(xy)^2 = e$ donc $xyxy = e$. En multipliant à gauche par x^{-1} et à droite par y^{-1}, on a $yx = x^{-1}y^{-1} = xy$ en vertu de la première remarque. G est donc abélien.
2. (a) Déjà, en notant $(x_1, \cdots, x_n)$ les éléments de G, $\{x_1, \cdots, x_n\}$ génère G. On peut donc considérer l'ensemble des parties génératrices de G et écrire celle de cardinal minimal $(g_1, \cdots, g_d)$. Tout élément de G s'écrit par commutativité de G

$$G = \left\{ \prod_{i=1}^{d} g_i^{\alpha_i} : \forall 1 \leq i \leq d, \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Or tout élément de G est d'ordre 2 donc on peut se contenter de $\alpha_i \in \{0, 1\}$ pour tout $1 \leq i \leq d$ par division euclidienne de α_i par 2. Ainsi,

$$G = \left\{ \prod_{i=1}^{d} g_i^{\alpha_i} : \forall 1 \leq i \leq d, \alpha_i \in \{0, 1\} \right\}.$$

Soit donc

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \to & \{0,1\}^d \\ & g & \mapsto & \{\alpha_1(g), \cdots, \alpha_d(g)\} \end{array}$$

où $g = \prod_{i=1}^{d} g_i^{\alpha_i(g)}$ en vertu de l'écriture de G précédente. φ est alors un isomorphisme (c'est clairement un morphisme de groupe et admet une application inverse). De fait, $G \simeq \{0, 1\}^d \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$.

(b) *Du fait que G soit abélien, on adopte la convention additive pour G.* Il s'agit de la multiplication standard de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et pour cette multiplication, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ pour p premier est un corps. Il suffit alors de montrer que G est un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-espace vectoriel pour conclure. On prend la loi externe

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G & \to & G \\ & (\overline{n}, x) & \mapsto & nx \end{array}.$$

On vérifie sans peine les propriétés d'espace vectoriel. G est donc un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-espace vectoriel mais est de cardinal fini donc en particulier de dimension finie. Notons d cette dimension. Alors $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ en tant qu'espace vectoriel donc en particulier en tant que groupes.

Exercice 24. Déterminer tous les groupes de cardinal inférieur à 7 à isomorphisme près.

Corrigé : Soit G un groupe, on lui met une loi additive.

1. De cardinal 1, il n'y a que $\{0\}$ groupe ne contenant que le neutre.
2. De cardinal 2, soit 0 neutre de G et a l'autre élément. Alors $a+a=a$ (absurde car alors $a=e$) ou $a+a=e$ donc a est d'ordre 2. G est alors isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (on envoie a sur $\overline{2}$ et 0 sur $\overline{1}$).
3. De manière générale, si p est premier et G de cardinal G, alors $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. En effet, soit x un élément qui n'est pas le neutre de G. Son ordre divise p donc est p car ce n'est pas 1. Le sous-groupe engendré par x est alors de cardinal p donc par cardinalité, G est engendré par x. Il suffit alors d'envoyer x sur un générateur de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et on construit ainsi un isomorphisme.
4. Il ne reste que 6 et 4. Commençons par 4. Soit x un élément de G qui n'est pas le neutre. Alors x est d'ordre divisant 4 donc est 2 ou 4. Si c'est un élément d'ordre 4, par l'argument précédent, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. On peut donc supposer que tous les éléments de G sont d'ordre 2 et G est alors isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. Finissons par 6.
   - Soit $x \in G, x \neq e$. Si $w(x)=6$, alors G est cyclique donc isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
   - Supposons que G admet aucun élément d'ordre 6. On va montrer que G contient un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre 3.
     - Supposons déjà qu'il n'existe pas d'élément d'ordre 3. Alors tout élément est d'ordre 1 ou 2 donc G est abélien (exercice classique). On peut montrer que le cardinal de G est alors une puissance de 2 ce qui n'est pas. G admet donc un élément d'ordre 3. Sinon, on peut aussi dire que si on prend x, y deux éléments d'ordre 2 distincts, alors xy est différent de x et y, et $\{e, x, y, xy\}$ est un sous-groupe de G. Par le théorème de Lagrange fort, c'est absurde.
     - Alors G contient e, x, x^2 avec x, un élément d'ordre 3. Supposons que tous les éléments sont d'ordre 3. Soit donc y d'ordre 3. Alors G contient e, x, x^2, y, y^2, éléments distincts. En effet,
       - si $y^2 = x$, alors $y^3 = e = yx$ donc $y = x^{-1} = x^2$. Absurde.
       - Si $y^2 = x^2$, alors $x^2 y = e$ donc $x^3 y = y = x$. Absurde.

       Il manque un élément, appelons z. Alors G contient z, z^2 et ces derniers sont distincts des x, x^2, y, y^2 par les deux points précédents. Ce qu'on a fait ne dépendait pas de x et y, seulement que ces deux éléments étaient d'ordre 3. Mais donc c'est absurde car G contiendrait 7 éléments : $e, x, x^2, y, y^2, z, z^2$.

   Finalement, G contient un élément d'ordre 3 et un élément d'ordre 2, notés respectivement x et y. Ainsi, G contient e, x, x^2, y. G contient aussi xy, x^2y. Reste à savoir s'ils sont différents des éléments précédents. Si G était abélien, on a $xy \neq e, (xy)^2 = x^2y^2 = x^2 \neq e, (xy)^3 = x^3y^3 = y \neq e$ donc xy est d'ordre 6. Donc G est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Or, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \to & G \\ & (1,0) & \mapsto & x \\ & (0,1) & \mapsto & y \end{array}$$

   est clairement un isomorphisme. Donc si G est abélien, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On va donc supposer G non abélien. On va essayer de montrer qu'il y a 2 éléments d'ordre 3 (les 3-cycles) et 3 éléments d'ordre 2 (les 2-cycles). Je te propose 2 méthodes :
     - Si $xy = x$, alors $y = e$ absurde. Si $xy = x^2$, alors $x^3y = y = x^2x^2 = x$ absurde. Si $xy = y$, alors $x = e$, absurde. Bref, xy est distinct des autres, et de même pour x^2y. On peut en fait s'arrêter

là. En effet, on considère l'application $\varphi : G \to \mathfrak{S}_3$ suivante :

$$x \mapsto (1\ 2\ 3), x^2 \mapsto (1\ 3\ 2), y \mapsto (1\ 2), xy \mapsto (1\ 3), x^2y \mapsto (2\ 3)$$

qui est un isomorphisme.

- On va regarder yxy qui est dans G. Si $yxy = e$, alors $x = y^{-1}y^{-1} = e$ absurde. Si $yxy = y$, alors $yx = e$ absurde. Si $yxy = xy$, alors $y = e$, absurde. Si $yxy = x^2y$, alors $y = x$, absurde. Donc yxy vaut soit x, soit x^2.
  - Si $yxy = x$, alors $yx = xy$. Puisque tous les éléments de G sont composés de x ou de y, alors G est abélien.
  - On a donc $yxy = x^2$. Donc $yx = x^2y$ donc $x^2yx^2y = yxx^2y = yy = e$ donc x^2y est d'ordre 2. Pareillement, $xyxy = x(x^2y)y = x^3y^2 = e$ donc xy est d'ordre 2. On peut donc faire le même isomorphisme.

Exercice 25. Soit G, un groupe cyclique de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit d, un entier naturel divisant n. Montrer que G possède un et un unique sous-groupe d'ordre d. En déduire que

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

où φ est l'indicatrice d'Euler.

Corrigé : Puisque G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il suffit d'obtenir le résultat pour $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans toute la suite, on ne notera pas la barre au-dessus d'un élément de $\mathbb{Z}$: tous les éléments vivent dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $d|n$. Considérons $C_d = \{1, n/d, 2 * n/d, \cdots, (d-1)n/d\}$. Alors C_d est un groupe et est clairement de cardinal d. Par ailleurs, tout élément d'ordre d est dans C_d. En effet, soit x tel que $dx = 0$. En effet, – on note X, un représentant de x –, on a l'existence d'un k tel que $dX = kn$. Or, $d|n$ donc X est de la forme kn/d. Mais tous les éléments de la forme kn/d modulo n sont exactement les éléments de C_d. D'où ce résultat intermédiaire. Maintenant, soit H, un sous-groupe d'ordre d. Par Lagrange, tous les éléments de H vérifie $dx = 0$ donc $H \subset C_d$. Par cardinalité, on a l'égalité.

Pour obtenir la somme, il suffit de montrer que

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \bigcup_{d|n} \{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : o(x) = d\}$$

avec $o(x)$ l'ordre de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a clairement l'inclusion de droite à gauche. De gauche à droite, on sait que chaque élément d'un groupe admet un ordre et que cet ordre, par Lagrange, divise le cardinal du groupe qui est n. Pour l'union disjointe, un élément ne peut pas avoir deux ordres.

Ainsi, par cardinalité, on a

$$n = \sum_{d|n} \varphi_n(d)$$

avec $\varphi_n(d)$ le nombre d'élément d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On va montrer qu'il y en a $\varphi(d)$. Pour cela, soit x un élément d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Alors $\langle x \rangle = C_d$ donc tout élément d'ordre d est dans $C_d \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Comme il y a $\varphi(d)$ élément d'ordre d dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, par isomorphisme, il y en a aussi $\varphi(d)$ dans C_d donc dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ainsi, $\varphi_n(d) = \varphi(d)$ et on a

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Exercice 26. Soit $p \in \mathcal{P}$. Montrer que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. On pourra utiliser le fait que

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

(*On pourra trouver deux preuves de ce résultat dans cette planche : l'exercice 25 et l'exercice 28.*) *De* *manière générale, pour tout K corps, pour tout G sous-groupe fini de $K^\times$, G est cyclique ce qui est fait dans l'exercice 27. D'un autre point de vue plus général, on peut aussi montrer que $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$ est aussi cyclique pour $\alpha \in \mathbb{N}$ sauf $p = 2, \alpha \geq 3$.*

Corrigé : On démontre le premier cas général. Soit n, cardinal de G. Supposons que G contienne un élément d'ordre d. Notons-le x. Alors $x^d = 1$ et tous les éléments g de $\langle x \rangle$ vérifient l'équation $X^d - 1 = 0$. Dans le corps K, cette équation a au plus d solutions. Par cardinalité, G_d est exactement l'ensemble des solutions de $X^d - 1$ dans G. G étant cyclique, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ donc possède $\varphi(d)$ générateurs. Ces générateurs sont exactement les éléments d'ordre d de G puisque un élément d'ordre d est solution de $X^d - 1$. Ainsi, si G admet un élément d'ordre d, il en admet $\varphi(d)$. Si non, il n'en admet... aucun. De fait, il existe $\varepsilon_d \in \{0, 1\}$ pour tout $d|n$ tel que

$$n = \sum_{d|n} \varepsilon_d \varphi(d)$$

en comptant les éléments de G selon leurs ordres possibles. Mais par le résultat admis (*on pourra trouver deux preuves de ce résultat dans cette planche : l'exercice 25 et l'exercice 28*), nécessairement, tous les ε_d sont égaux à 1 et en particulier, on a $\varphi(n)$ éléments d'ordre n : G est bien cyclique.

Exercice 27. Soit G un groupe abélien fini. On note $o(x)$ l'ordre de $x \in G$. On appelle exposant de G l'entier $\mathrm{ppcm}(o(g) : g \in G)$ que l'on note $e(G)$. Cet exercice ne prétend pas à étudier la notion d'exposant d'un groupe.

1. Soit $x, y \in G$. Que dire de $o(xy)$?
2. Soit a, b deux entiers positifs. Montrer qu'il existe a', b' premiers entre eux tel que $\mathrm{pgcd}(a, b) = a'b'$ et $a'|a, b'|b$.
3. A-t-on $e(G) = \mathrm{Card}(G)$?
4. Montrer qu'il existe $z \in G$ tel que $o(z) = e(G)$.
5. En déduire que pour tout corps k, tout sous-groupe de k^* est cyclique.

Corrigé :

1. Notons $n = o(x), m = o(y)$. Si $n \wedge m = 1$, alors $o(xy) = nm$. En effet, soit k l'ordre de xy. Alors $1 = (xy)^{kn} = x^{kn}y^{kn} = y^{kn}$ donc m divise kn. Par Gauss, m divise k. De même, en passant à la puissance m, on aura $n|km$ donc $n|k$. Ainsi, $nm|k$. Or, $(xy)^{nm} = 1$ donc $k|nm$. Ainsi, $o(xy) = nm$.
   Si $n \wedge m \neq 1$, on n'a plus rien. Par exemple, soit x d'ordre k. Alors x^{-1} est aussi d'ordre k et le produit est d'ordre 1. On n'a donc pas $o(xy) = \mathrm{ppcm}(xy)$ en général.
2. Soit
   $$a = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(a)} \ ; \ b = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(b)}.$$
   On a donc
   $$\mathrm{ppcm}(a, b) = a = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\max(v_p(a), v_p(b))}.$$
   Pour trouver deux nombres premiers entre eux, il faut et suffit qu'ils n'ont pas de diviseurs premiers en commun. Faisons un petit exemple. On va trouver a', b' dans le cas où $a = 2^4 3^2 5^3$ et $b = 2^2 3^3 5^2 7$.
   Alors $\mathrm{ppcm}(a, b) = 2^4 3^3 5^3 7$. Le 2^4 provient de a tout comme 5^3. On pose alors $a' = 2^4 5^3$. Posons donc $b' = 3^3 7$. Alors $a'b' = \mathrm{ppcm}(a, b)$ et par construction, a' et b' sont premiers entre eux.
   Ainsi, posons
   $$a' = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\alpha_p} \ ; \ b' = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\beta_p}$$
   avec, pour $p \in \mathcal{P}$, α_p qui vaut $v_p(a)$ si $v_p(a) > v_p(b)$, 0 sinon et β_p qui vaut $v_p(b)$ si $v_p(b) \geq v_p(a)$, 0 sinon. Ainsi, a', b' convient.

3. Pour $G = \{e_G\}$, l'exposant est $1 = \text{Card}(G)$. Pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} =: G$, on a $e(G) = 2 \neq 4 = \text{Card}(G)$.
4. Soit $x \in G$ d'ordre maximal[1]. Notons $n = o(x)$. Montrons que $e(G) = n$.
   Soit y d'ordre m. Soit n', m' tel que $\text{pgcd}(n', m') = 1$ et $\text{ppcm}(nm) = n'm'$. Soit $d, \delta \in \mathbb{N}$ tel que $n = dn', m = \delta m'$. Alors x^d est d'ordre n'. C'est un fait général qu'on montre ici : si x est d'ordre $n = dn'$ alors x^d est d'ordre n'. En effet, $(x^d)^{n'} = x^n = 1$ donc $o(x)|n'$. Par ailleurs, $(x^d)^{o(x)} = x^{do(x)} = 1$ donc $do(x)|n$ mais $\mathbb{Z}$ étant intègre, $o(x)|n'$.
   De même, y^δ est d'ordre m'. Ainsi, $x^d y^\delta$ est d'ordre $n'm' = \text{ppcm}(n, m)$ mais par maximalité de n, on a $\text{ppcm}(n, m) \leq n$. Ce n'est possible que si $\text{ppcm}(n, m) = n$. Ainsi, $m|n$: tous les ordres des éléments de G divise n donc n est un multiple commun à tous les ordres. C'est le plus petit puisque $n = o(x)$ donc $n = e(G)$.
5. Dans un corps, un polynôme de degré n admet au plus n racines. Ainsi, soit $n = e(G)$ et $N = \text{Card}(G)$. Alors l'équation $X^n - 1$ admet au plus n solution dans G mais n étant l'exposant du groupe, pour tout $g \in G$, on a $g^n = 1$ donc G est inclus dans l'ensemble des racines de $X^n - 1$ de cardinal au plus n. On a donc $N \leq n$ et par Lagrange, puisqu'il existe un élément x d'ordre n, on a $n|N$ donc $n = N$. Ainsi, x génère G et G est cyclique. Ceci redémontre l'exercice 26.

Exercice 28. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{P}_n$, l'ensemble des racines n-ème primitives de l'unité *i.e.* elles génèrent $\mathbb{U}_n$. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$. On appelle n-ème polynôme cyclotomique, le polynôme $\Phi_n = \prod_{\zeta \in \mathbb{P}_n} (X - \xi)$.

1. Déterminer une CNS sur k pour que ω^k soit une racine n-ème primitive de l'unité.
2. Déterminer Φ_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. Déterminer $\deg(\Phi_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer Φ_p pour $p \in \mathcal{P}$.
5. Montrer que $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$.
   (a) Déduire de cette question que
   $$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$
   (b) Déduire de cette même question que Φ_n est à coefficients entiers.

On peut aussi montrer que Φ_n est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ mais l'exercice devient beaucoup plus ardu.

Corrigé :

1. Il faut et suffit que k soit premier avec n. Supposons que k et n soit premiers entre eux. Par le théorème de Bézout, il existe u, v tel que $ku + nv = 1$. Donc $ku = 1[n]$. De fait, $e^{2iku\pi/n} = e^{2i\pi/n}$ et $e^{2iku\pi/n} \in \langle \omega^k \rangle$ donc $\langle \omega^k \rangle$ contient un générateur de $\mathbb{U}_n$: ω^k est bien racine n-ème primitive de l'unité. Réciproquement, supposons que ω^k soit racine n-ème primitive de l'unité. Il existe alors un $u \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega^{ku} = \omega$. De fait, $\omega^{ku-1} = 1$ donc $ku - 1 = 0[n]$. Par le théorème de Bézout, k est premier avec n.
2. On trouve respectivement $X - 1, X + 1, X^2 + X + 1, X^2 + 1, X^4 + X^3 + X^2 + X + 1, X^2 - X + 1$.
3. Le degré de Φ_n correspond au cardinal de $\mathbb{U}_n$: c'est $\varphi(n)$.
4. Puisque pour p premier, $\mathbb{P}_n = \mathbb{U}_n \backslash \{1\}$,
   $$\Phi_p(X) = \frac{1}{X - 1} \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = \sum_{k=0}^{p-1} X^k.$$
5. Il suffit de montrer que $\{\mathbb{U}_d^* : d|n\}$ forment une partition de $\mathbb{U}_n$. Il est clair que l'union est disjointe et que les $\mathbb{U}_d^*$ sont non vides. Il suffit de montrer le résultat par double inclusion. Soit $\omega \in \mathbb{U}_d^*$ pour $d|n$. Alors

[1]. l'ensemble $\{n : x = o(n), x \in G\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (contient 1 pour $x = e_G$) majorée (car $\forall x \in G, x^n = 1$)

$\omega^d = 1$. De fait, d divisant n *i.e.* $n = kd$, $\omega^{kd} = 1$ donc $z \in \mathbb{U}_n$. Réciproquement, soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. On note d son ordre. Alors par Lagrange, $d|n$ d'où la réciproque. De fait, pour $n = 1$, on a $\Phi_1 = X - 1$ et pour $n \geq 2$,

$$X^n - 1 = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} (X - \zeta) = \prod_{d|n} \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_d^*} (X - \zeta) = \prod_{d|n} \Phi_d.$$

(a) On prend les degrés et on a le résultat.

(b) Par l'étape 1, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X^n - 1 = \Phi_n \prod_{d|n, d \neq n} \Phi_d.$$

Par récurrence forte, Φ_n est le quotient dans $\mathbb{Q}[X]$ de $X^n - 1$ et $\prod_{d|n, d \neq n} \Phi_d := B$ qui sont deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$. On peut montrer un résultat assez utile : on ne peut pas faire la division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$ a priori. On peut le faire si le coefficient dominant du polynôme par lequel on divise est inversible[2] ! Une preuve de ce résultat est écrite après. Un corollaire est le lemme suivant.

> Lemme : Soit $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ avec B unitaire. On suppose que $B|A$ dans $\mathbb{Q}[X]$. Alors c'est vrai dans $\mathbb{Z}[X]$.
>
> *Démonstration.* Soit Q, le quotient dans $\mathbb{Q}[X]$. Par unitarité de Q, il existe C, R dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $A = BC + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$. Donc $(Q - C)B = R$. Par degré, $R = 0$ donc par intégrité, $Q = C$ et $Q \in \mathbb{Z}[X]$. □

On applique donc le lemme pour $A = X^n - 1$ et $B = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} \Phi_d$ pour obtenir $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ (et unitaire par unitarité de A et B.

Preuve de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$.

> **Théorème 4.1.** *Soit $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ et B unitaire. Alors il existe $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$ ou $R = 0$.*

Démonstration. Si B est un polynôme constant, il n'y a rien à faire car $B = 1$ par unitarité. On suppose donc que B est de degré au moins 1 que l'on note b. On procède par récurrence sur le degré de A. Soit $H_n : \forall A \in \mathbb{Z}_n[X], \exists Q, R \in \mathbb{Z}[X], A = BQ + R \wedge (\deg(R) < \deg(B) \vee R = 0)$.

- Pour $n = 0$, on prend $Q = 0$ et $R = A$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathbb{Z}_n[X]$ et a_n coefficient dominant de A . Alors $A - B(a_n X^{n-b})$ est de degré au plus $n - 1$. En effet, $\deg(A) = n = n - b + b = \deg(B) + \deg(a_n X^{n-b}) = \deg(a_n B X^{n-b})$ et le coefficient dominant de A est a_n tandis que celui de $a_n B X^{n-b}$ est $a_n \times 1$ (B est unitaire) donc le terme de degré n disparait. On applique l'hypothèse de récurrence sur cette différence. Il existe $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\deg(R) < \deg(B)$ ou $R = 0$ vérifiant $A - B(a_n X^{n-b}) = QB + R$. Ainsi, $A = B(a_n X^{n-b} + Q) + R$ et $(a_n X^{n-b} + Q) \in \mathbb{Z}[X]$. On a donc écrit une division euclidienne de A par B ce qui montre H_n.
- Par le principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

> **Exercice 29.** Dans la suite, les anneaux sont supposés commutatifs.
>
> 1. Rappeler pourquoi $\mathbb{A}[X]$ est un anneau principal (c'est-à-dire que ses idéaux sont engendrés par

[2]. donc ± 1

un seul élément) lorsque A est un corps.

2. $\mathbb{Z}[X]$ est-il un anneau principal ?
3. Soit A un anneau. Montrer que $A[X]$ est principal si, et seulement si, A est un corps.

Corrigé :

1. C'est du cours.
2. Supposons par l'absurde que $\mathbb{Z}[X]$ est principal. Soit I l'idéal de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par 2 et X (on a $I = (2) + (X)$) et P tel que $I = (P)$. Pour les idéaux, diviser, c'est contenir ! Ainsi, (P) contenant (2), on a que P divise 2 donc $P = \pm 1, \pm 2$. De même, P divise X et ± 2 ne divise pas X donc $P = \pm 1$. Ainsi, $(1) = (2) + (X)$ donc il existe $U, V \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $1 = 2U + XV$. En 0, on a donc $1 = 2U(0)$ ce qui est absurde car 2 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}$.
3. Supposons que A ne soit pas un corps. Supposons par l'absurde que $A[X]$ est principal. Soit $a \in A$ non nul, non inversible. Alors soit $I = (a) + (X)$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $(P) = (a) + (X)$. En raisonnant de même qu'avant, on montre l'existence de $U, V \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $1 = aU + XV$. En 0, on a donc $1 = aU(0)$ ce qui est absurde car a n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 30. Soit G un groupe, H un sous-groupe de G. On dit que H est distingué dans G lorsque $\forall g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H$. Autrement dit, $\forall g \in G, gHg^{-1} \subset H$ et on montre aisément qu'il y a égalité. On dit que deux éléments h_1, h_2 de H sont conjugués dans G lorsqu'il existe $g \in G, gh_1g^{-1} = h_2$.
Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

1. Montrer que les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$.
2. Montrer que les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ si $n \neq 4$. Que se passe-t-il pour $n = 4$? En déduire que pour $n \neq 4$, si H est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_n$ qui contient un 3-cycle, alors $H = \mathfrak{A}_n$.
3. On se place dans le cas $n = 5$. Classifier et dénombrer les éléments de $\mathfrak{A}_n$ en fonction de la forme de leurs supports.
4. Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_n$ distinct de $\{id\}$. On veut montrer que $H = \mathfrak{A}_n$.
   (a) Montrer que les doubles-transpositions sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.
   (b) Montrer que si σ est un 5-cycle, alors tout 5-cycle de $\mathfrak{A}_n$ est conjugué à σ ou σ^2.
   (c) Conclure.

Corrigé :

1. $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions. De fait, par multiplicativité de la signature, un élément de $\mathfrak{A}_n$ est un produit pair de transpositions : soit $\sigma \in \mathfrak{A}_n$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(\tau_i = (a_i\ b_i))_{1 \leq i \leq 2N}$ des transpositions telles que
$$\sigma = \prod_{i=1}^{2N} \tau_i.$$
Or, pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ deux à deux distincts, $(a\ b)(a\ c) = (a\ c\ b)$ et $(a\ b)(c\ d) = (a\ c\ b)(a\ c\ d)$ donc en regroupant par 2, on a le résultat souhaité.
2. Soit $(a\ b\ c), (\alpha\ \beta\ \gamma)$ deux 3-cycles de $\mathfrak{A}_n$. Dans $\mathfrak{S}_n$, ces permutations sont conjuguées : il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma(a\ b\ c)\sigma^{-1} = (\alpha\ \beta\ \gamma)$. Si $\sigma \in \mathfrak{A}_n$, c'est gagné. Sinon, soit d, e distincts de a, b, c dans $[\![1, n]\!]$ ce qui est possible puisque $n \geq 5$. Alors $\sigma \circ (d\ e)$ est dans $\mathfrak{A}_n$ et
$$\sigma \circ \underbrace{(d\ e)(a\ b\ c)(d\ e)}_{=(a\ b\ c)} \sigma^{-1} = \sigma(a\ b\ c)\sigma^{-1} = (\alpha\ \beta\ \gamma)$$
donc deux 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$. Cela est faux dans $\mathfrak{A}_4$: $(1\ 2\ 3)$ et $(2\ 3\ 4)$ ne peuvent être conjugués dans $\mathfrak{A}_4$: mettons que σ soit telle que $\sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1} = (2\ 3\ 4)$. Alors $\sigma(4) = 1$. En imposant

$(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) = (2\ 3\ 4)$, cela impose que $\sigma \in \{(1\ 4)(2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 3\ 4)\}$. Dans les trois cas, cela ne fonctionne pas.
Ainsi, si H est un tel groupe, alors comme $n \neq 4$, les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ donc H contient tous les 3-cycles. Puisque les 3-cycles engendrent H, on en déduit que $\mathfrak{A}_n = \langle\{3\text{-cycle}\} \subset H$ donc $H = \mathfrak{A}_n$.

3.
   - Il y a identité.
   - Il y a les doubles transpositions : pour obtenir une double transposition, on choisit $\binom{5}{2}$ éléments à permuter, puis $\binom{3}{2}$ éléments à permuter, le dernier élément sera automatiquement fixé. L'ordre ne compte pas donc je divise par 2 le résultat. Il y a donc 15 doubles transpositions.
   - Il y a les 3-cycles : pour obtenir un 3-cycle, on choisit nos deux points fixes. Il y a $\binom{5}{2}$ choix que l'on multiplie par les 2 3-cycles que l'on peut créer après ce choix. J'ai donc 20 3-cycles.
   - Pas d'éléments d'ordre 4 – mais pas besoin de justifier via la suite –[3].
   - Un 5-cycle est déterminé par un tirage sans remise de 5 éléments dans une urne à 5 éléments et faire tous les tirages possibles donnera 5 fois un même 5-cycles : il y a donc $4! = 24$ 5 cycles.

   Au total, on a donc obtenu 60 éléments donc il n'y en a pas d'autres.
4. (a) Soit $(a\ b)(c\ d)(e)$, $(\alpha\ \beta)(\gamma\ \delta)(\eta)$ deux doubles transpositions. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ telle que $\sigma(a) = \alpha, \sigma(b) = \beta, \sigma(e) = \eta$. On a $\sigma(a\ b)(c\ d)(e)\sigma^{-1} = (\alpha\ \beta)(\sigma(c)\ \sigma(d))(\eta)$ ce qui signifie $(\sigma(c)\ \sigma(d)) = (\gamma\ \delta)$.
   Si $\sigma \in \mathfrak{A}_5$, nos deux doubles transpositions sont conjugués dans $\mathfrak{A}_5$.
   Sinon, soit $\sigma' = \sigma \circ (c\ d)$. Alors $\sigma' \in \mathfrak{A}_5$ et le résultat tient toujours.

   (b) Notons σ' un 5-cycle. Alors σ et σ' sont conjugués dans $\mathfrak{S}_5$: il existe $\tau \in \mathfrak{S}_5$ tel que $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$. Si τ est dans $\mathfrak{A}_5$, c'est gagné. Sinon, on note $\sigma = (a\ b\ c\ d\ e)$ et $\sigma^2 = (a\ c\ e\ b\ d)$ de sorte qu'on arrive à les conjuguer avec un 4-cycle : en prenant la permutation $(b\ c\ e\ d)$, on arrive à $\sigma = (b\ c\ e\ d)\sigma^2(b\ c\ e\ d)^{-1}$. Ainsi,
   $$\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1} = \underbrace{\tau(b\ c\ e\ d)}_{\in\mathfrak{A}_5}\sigma^2[\tau(b\ c\ e\ d)]^{-1}$$

   (c)
   - Si H contient un 3-cycle, c'est terminé : $H = \mathfrak{A}_n$.
   - Si H contient une double transposition, il les a tous : cela fait $1 + 15 = 16 \nmid 60$ donc H doit contenir autre chose, et si c'est un 3-cycle, c'est fini donc on va dire aussi un 5-cycle, disons σ. H étant un groupe, il contient σ^2 et donc par précédent, il contient tous les 5-cycles : H est donc au-moins de cardinal $1 + 15 + 24 > 30$ donc $H = \mathfrak{A}_5$.
   - Si H contient un 5-cycles, il contient son carré donc tous les 5 cycles : cela fait au moins $1 + 24 = 25 \nmid 60$ éléments donc H contient aussi une double-transposition et on est ramené à précédent.

Exercice 31. On souhaite obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que (-1) soit un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} =: K$ avec p premier.

1. Lemme préliminaire : soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupe avec G de cardinal fini. Montrer que $|G| = |\ker(\varphi)||\mathrm{Im}(\varphi)|$.
2. Montrer que $x \in K \mapsto x^p \in K$ est un automorphisme de corps.
3. Conclure le cas où $p = 2$.
4. On note K^2 l'ensemble des carrés de K et $K^{2*} = K^2 \backslash \{0\}$. Quel est le cardinal de K^2 ?
5. Soit $x \in K$. Montrer que $x \in K^2 \iff x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.
6. Conclure.

[3]. Si on a un élément d'ordre 4, c'est un 4-cycle donc il est de signature -1. Ce n'est pas long mais on peut se permettre de ne pas écrire cette puce.

Corrigé :

1. On peut faire comme dans la preuve du théorème de Lagrange : utiliser la relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff \phi(x) = \phi(y)$ pour $x, y \in G$. $\mathcal{R}$ ainsi définie est clairement une relation d'équivalence. Soit $\{y_1, \cdots, y_p\} = \mathrm{Im}(\varphi)$ et $x_i \in G$ tel que $\varphi(x_i) = y_i$ pour tout $1 \leq i \leq p$. Soit $\{e_1, \cdots, e_q\} = \ker(\varphi)$. Alors on a donc
$$G = \bigsqcup_{i=1}^{p} \mathrm{Cl}(x_i)$$
et il suffit maintenant de démontrer que
$$\forall 1 \leq i \leq p, \mathrm{Cl}(x_i) = \{x_i e_1, \cdots, x_i e_q\}.$$
Soit $1 \leq i \leq p$. Clairement, on a l'inclusion de droite à gauche puisque φ est un morphisme de groupes. Réciproquement, soit $a \in \mathrm{Cl}(x_i)$. Alors $\varphi(a) = \varphi(x_i)$ donc $\varphi(ax_i^{-1}) = e_G$ donc $ax_i^{-1} \in ker(\varphi)$ donc il existe $1 \leq k \leq q$ tel que $ax_i^{-1} = e_q$ *i.e.* $a = e_q x_i$.
Ainsi,
$$|G| = \sum_{i=1}^{p} |\mathrm{Cl}(x_i) = \sum_{i=1}^{p} q = pq = |\ker(\varphi)||\mathrm{Im}(\varphi)|.$$
2. On peut montrer que ce morphisme (dit morphisme de Frobenius) est l'identité sur ce cas ici mais soyons général. Notons F cette application. On a déjà $F(0) = 0^p = 0$ (inutile à vérifier) et $F(1) = 1^p = 1$. Ensuite, on a
$$F(xy) = (xy)^p = x^p y^p = F(x)F(y)$$
puisque $\times$ est commutative dans un corps et
$$F(x+y) = (x+y)^p = x^p + y^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x^k y^{p-k}$$
par le binôme de Newton ($\times$ est toujours commutative). On a
$$k!(p-k)!\binom{p}{k} = p!$$
donc $p|k!(p-k)!\binom{p}{k}$ mais comme $k < p$ et $p-k < p$, par primalité de p, on a $p \wedge k! = 1$ et $p \wedge (p-k)! = 1$: par le théorème de Gauss, $p|\binom{p}{k}$. Ainsi, $F(x+y) = x^p + y^p = F(x) + F(y)$.
3. Si $p = 2$, alors tout élément de K est un carré.
4. Déjà, $(K^*)^2$ est clairement un groupe multiplicatif. On considère $\varphi : K^* \to (K^*)^2, x \mapsto x^2$. Alors φ est par construction surjective et $x^2 = 1 \iff x = \pm 1$ donc $\ker(\varphi) = \{\pm 1\}$. Par la première question, on a donc $p - 1 = 2|(K^*)^2|$ donc le cardinal cherché est $\frac{p-1}{2}$.
5. Par le théorème de Lagrange, $\forall x \in (K^*)^2, x^{\frac{p-1}{2}} = 1$ puisque $|(K^*)^2| = \frac{p-1}{2}$. Ainsi, on a l'inclusion de gauche à droite (le cas $x = 0$ est trivial). Réciproquement, soit E l'ensemble des racines du polynôme $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$ dans K. Alors K étant un corps, ce polynôme admet au plus $\frac{p-1}{2}$ racines.
Par ailleurs, il contient $(K^*)^2$ qui est de cardinal $\frac{p-1}{2}$ donc E est de cardinal au moins $\frac{p-1}{2}$: il est donc de cardinal $\frac{p-1}{2}$ donc $E = (K^*)^2$.
6. Ainsi, (-1) est un carré si, et seulement si, $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$ ce qui implique que $p - 1 = 0$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ donc $p \equiv 1[4]$.

Pour $x \in K$, la quantité $x^{\frac{p-1}{2}}$ est notée $\left(\frac{x}{p}\right)$: c'est le symbole de Legendre.

Exercice 32. On souhaite obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que 2 soit un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} =: K$ avec p premier. On suppose connu les résultats de l'exercice 31. On considère L un surcorps de K qui contient un α tel que $\langle \alpha \rangle \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

1. Soit $y = \alpha + \alpha^{-1}$. Calculer y^2.
2. Calculer y^p selon la classe de p dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
3. Conclure.

Corrigé :

1. On a $\alpha^2 + \alpha^{-2} = \alpha^{-2}(\alpha^4 + 1) = 0$ donc $y^2 = 2 + \alpha^2 + \alpha^{-2} = 2$.
2. Par Frobenius, $y^p = \alpha^p + \alpha^{-p}$. p étant impair, p est congru à $\pm 1[8]$ ou à $\pm 5[8]$.
   - Si $p \equiv \pm 1[8]$, alors $y^p = \alpha + \alpha^{-1} = y$
   - Si $p \equiv \pm 5[8]$, alors $y^p = -y$ car $\alpha^4 = \alpha^{-4} = -1$.
3. Le lien entre les deux questions est le suivant : $2^{\frac{p-1}{2}} = y^{p-1}$ par le critère de l'exercice 31, 2 est un carré dans K si, et seulement si, $y^{p-1} = 1$.
   - Si $p \equiv \pm 1[8]$, alors $y^p = y$ donc $y^{p-1} = 1$. 2 est un carré.
   - Si $p \equiv \pm 5[8]$, alors $y^p = -y$ donc $y^{p-1} = -1$: 2 n'est pas un carré.

Exercice 33. Soit G un groupe et X un ensemble. On dit que G agit sur X lorsqu'on se donne une application

$$\begin{array}{cccc} \cdot & G \times X & \to & X \\ & (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

de sorte que

- $\forall g, g' \in G, \forall x \in X, g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$.
- $\forall x \in X, e_G \cdot x = x$.

$\cdot$ est alors appelé une action de groupes. *Une action de groupes généralise la notion de loi externe dans la structure d'un espace vectoriel. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\mathbb{K}$ agit sur E. Toutefois, E ayant une structure vectorielle (c'est un groupe), on demande que l'action soit compatible avec ces opérations alors que ici, X n'est qu'un ensemble sans structure. Le but des actions de groupes est d'étudier X à travers G en choisissant un couple groupe/action adéquat.*

1. Montrer que tout sous-groupe H de G agit sur G via l'action $\forall g \in H, \forall x \in G, g \cdot x = gx$.
2. Montrer que G agit sur lui-même par conjugaison : l'action $\forall g \in G, \forall x \in G, g \cdot x = gxg^{-1}$.
3. Dans la suite, on se donne une action de G sur X. Soit la relation $\forall x, y \in X, x \; y \iff \exists g \in G, y = g \cdot x$. Montrer que est une relation d'équivalence. On appelle orbites les classes d'équivalences de .
4. Soit $x \in X$, on note $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G : g \cdot x = x\}$. Montrer que $\mathrm{Stab}(x)$ est un sous-groupe de G.
5. On suppose maintenant que G est de cardinal fini. Montrer que $\dfrac{|G|/}{|\mathrm{Stab}(x)|} = |\omega(x)|$. *On admettra (ce n'est pas dur) que si H est un sous-groupe de G, alors on peut définir l'ensemble des classes d'équivalences noté $G/H = \{gH : g \in G\}$ pour la relation d'équivalence $x \sim_G y \iff x \in yH$. On a alors $|G/H| = \dfrac{|G|}{|H|}$.*
6. En déduire l'équation aux classes : soit Ω un système de représentant des orbites. On a
$$|X| = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(\omega)|}.$$
7. Une application. Soit $n \in \mathbb{N}^*, G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On fait agir G sur X via $g \cdot x = gx$. Écrire l'équation aux classes. On pourra établir une bijection entre l'ensemble des orbites pour cette action et les diviseurs de n.

Corrigé :

1. Soit H un sous-groupe de G. Montrons que H agit sur G via l'action de l'énoncé appelée action par translation à gauche.
   - Soit $h, h' \in H, g \in G$. Alors $h \cdot (h' \cdot g) = h \cdot (\underbrace{h'g}_{\in G}) = h(h'g) = (hh')g = (hh') \cdot g$.
   - Soit $g \in G$. Alors $1_H g = 1_G g = g$.

   Beaucoup d'opérations naturelles vue en cours de Mathématiques supérieures ou Mathématiques spéciales sont en réalité des actions par translation à gauche. Par exemple, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *agit par multiplication à gauche sur* $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\mathrm{GL}(E)$ *agit sur l'ensemble des bases de* E *via l'action* $(f, (e_i)_{1\leq i\leq n}) \mapsto (f(e_i)_{1\leq i\leq n})$.
2. - Soit $g, g' \in G, x \in G$. Alors $g \cdot (g' \cdot x)) = g \cdot (g'xg'^{-1}) = gg'x(gg')^{-1} = (gg') \cdot x$.
   - Soit $x \in G$. Alors $1_G \cdot x = 1_G x 1_G = x$.

   Même remarque ! Par exemple, $\mathfrak{S}_n$ *agit sur l'ensemble des* k*-cycles ,*$k \in [\![1, n]\!]$*, par conjugaison. Aussi,* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *agit par conjugaison sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Il s'agit de montrer les trois points pour avoir une relation d'équivalence :
   - Réflexivité : soit $x \in G$. Alors $1_G \cdot x = x$ donc $x \sim x$.
   - Transitivité : soit $x, y, z \in G$ tels que $x \sim y, y \sim z$. Soit $g, g' \in G$ tel que $y = g \cdot x$ et $z = g' \cdot y$. Alors $z = g' \cdot (g \cdot x)) = \underbrace{gg'}_{\in G} x$ donc $x \sim z$.
   - Symétrie : soit $x, y \in G$ tels que $x \sim y$. Soit $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$. Alors $g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$ et $g^{-1} \in G$: on a donc $y \sim x$.

   Regardons quelques exemples. Pour l'action par translation à gauche de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *sur* $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, le représentant privilégié de chaque orbite est une matrice triangulaire supérieure : c'est le Pivot de Gauss !*

   Pour l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, deux éléments d'une même orbite sont dites semblables. Si on regarde l'orbite d'une matrice diagonalisable (resp. trigonalisable), le représentant privilégié est naturellement la matrice diagonale (resp. triangulaire) associée. Enfin, lorsqu'on dit que quelque chose est invariant par conjugaison, c'est qu'il est constant sur chaque orbite.*
4. Soit $x \in X$. Alors $1_G \cdot x = x$ donc $1_G \in \mathrm{Stab}(x)$. Soit $y, y' \in \mathrm{Stab}(x)$. Alors
   - $(yy') \cdot x = y \cdot (y' \cdot x) = y \cdot x = x$ donc $yy' \in \mathrm{Stab}(x)$.
   - $y^{-1} \cdot x = y^{-1} \cdot (y \cdot x) = (y^{-1}y) \cdot x = 1_G \cdot x = x$ donc $y^{-1} \in \mathrm{Stab}(x)$.

   Ainsi, $\mathrm{Stab}(x)$ est un sous-groupe de G.

   Bien sûr, $\mathrm{Stab}(x)(1_G) = G$ *pour toute action.*
5. Soit $\varphi : \overline{g} \in G/\mathrm{Stab}(x) \mapsto g \cdot x \in \omega(x)$.
   - Bien définie : soit g, g' tel que $\overline{g} = \overline{g'}$. Alors il existe $h \in \mathrm{Stab}(x)$ tel que $g = g'h$. On a alors
   $$g \cdot x = (g'h) \cdot x = g' \cdot (\underbrace{h \cdot x}_{=x \text{ car } h \in \mathrm{Stab}(x)}) = g' \cdot x.$$
   Ainsi, $\varphi(\overline{g}$ ne dépend pas du représentant de $\overline{g}$.
   - Injectif : Attention, ce n'est pas un morphisme ! Soit $g, g' \in G$ tel que $g \cdot x = g' \cdot x$. Alors $(g'^{-1}g) \cdot x = x$ donc $g'^{-1}g \in \mathrm{Stab}(x)$ *i.e.* $g \in g'\mathrm{Stab}(x)$ *i.e.* $\overline{g} = \overline{g'}$.
   - Surjectif : soit $y \in \omega(x)$. Il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$. Alors $\varphi(\overline{g} = y$.

   Ainsi, φ est bijectif donc on a l'égalité des cardinaux souhaités.
6. Les orbites forment une partition de X. Ainsi, on a
$$|X| = \sum_{x \in \Omega} |\omega(x)| = \sum_{x \in \Omega} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(x)|}.$$

Exercice 34. *Cet exercice utilise les résultats sur les actions de groupes. Les résultats utilisés sont vus dans l'exercice 33.* On utilisera librement l'exercice 28. Soit $(k, +, \times)$ une algèbre à division ou corps gauche (un corps commutatif avec $\times$ non commutatif). On suppose que k est fini. On souhaite montrer que $k = Z(k)$.

1. Montrer que $Z(k)$ est un corps. On suppose par l'absurde que $k \neq Z(k)$. On note $q = |Z(k)|$.
2. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|k| = q^n$.
3. Montrer que k^* agit sur lui-même par conjugaison.
4. On fixe dans la suite $x \in k^*$. Soit $k_x = \{y \in k : xy = yx\}$. Montrer que k_x est une algèbre à division et que $k_x^* = \mathrm{Stab}(x)$.
5. Montrer que k_x est un $Z(k)$-espace vectoriel. En déduire qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^d = |k_x|$.
6. Montrer que $q^d - 1 | q^n - 1$. Que dire de d et n ?
7. Ecrire l'équation aux classes. En déduire qu'il existe une liste d'indice $I = \{d_1, \cdots, d_p\}$ tels que $d_i | n, d_i \neq n$ pour tout i de sorte que
$$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{d \in I} \frac{q^n - 1}{q^d - 1}.$$
8. Montrer que $\Phi_n(q) | q - 1$. On utilisera l'exercice 28. En déduire que $|\Phi_n(q)| \leq q - 1$.
9. Montrer pourtant que $\Phi_n(q) > q - 1$. Conclure.

Corrigé :

1. Il est aisé de montrer que $Z(k)$ est un sous-anneau de k qui a la commutativité de $\times$ et tous ses éléments non nuls sont inversibles dans $Z(k)$ (si $x \in Z(k) \backslash \{0\}$, alors $x^{-1} \in k$ et x^{-1} commutent avec tous les éléments de k puisque x a cette propriété. C'est donc un corps.
2. Il faut penser à la dimension ! Il est aisé de montrer que k est un $Z(k)$-espace vectoriel. Puisque k est fini, k est de $Z(k)$-dimension finie donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k \simeq (Z(k))^n$ donc $|k| = |Z(k)|^n = q^n$.
3. Tout groupe agit sur lui-même par conjugaison. Puisque k^* est un groupe (multiplicatif), on a le résultat.
4. Il est aisé de montrer que k_x est un sous-anneau de k. De plus, soit $y \in k_x \backslash \{0\}$. Alors y^{-1} est inversible dans k et de l'égalité $yx = xy$, alors $xy^{-1} = y^{-1}x$ donc $y^{-1} \in k_x$. Ainsi, k_x est une algèbre à division. Enfin,
$$\begin{aligned} y \in k_x^* &\iff xy = yx \\ &\iff yxy^{-1} = x \\ &\iff y \cdot x = x \\ &\iff y \in \mathrm{Stab}(x). \end{aligned}$$
Ainsi, $k_x^* = \mathrm{Stab}(x)$.
5. Il est aisé de montrer que k_x est un $Z(k)$-espace vectoriel (en montrant tous les axiomes) sachant qu'on a déjà la structure de groupe de $(k_x, +)$. Par le même argument que 2, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $|k_x| = |Z(k)|^d = q^d$.
6. k_x^* est un sous-groupe de k^* donc par le théorème de Lagrange, $q^d - 1 | q^n - 1$. On a alors que $d | n$ (et c'est équivalent). En effet, soit b, r quotient et reste de la division euclidienne de n par d. Alors
$$\begin{aligned} q^n - 1 = q^{bd+r} - 1 &= (q^d)^b q^r - 1 \\ &= (q^d)^b q^r - q^r + q^r - 1 = q^r((q^d)^b - 1) + q^r - 1 \\ &= (q^d - 1) q^r \sum_{i=0}^{b-1} q^{id} + q^r - 1. \end{aligned}$$

On vient d'écrire la division euclidienne de q^n-1 par q^d-1. Ainsi, $d|n \iff r=0 \iff q^r-1=0 \iff q^d-1|q^n-1$.

7. Soit X un système de représentant de chaque orbite. Alors

$$|k^*| = \sum_{x\in X} |\omega(x)| = |Z(k)^*| + \sum_{x\in X, x\notin Z} |\omega(x)|$$

puisque si $x\in Z$, alors $\omega(x)=\{x\}$ ce qui donne le terme $|Z(k)^*|$. Réciproquement si $|\omega(x)|=1$, alors $\omega(x)=\{x\}$ donc $x\in Z(k)^*$. Ainsi, sur la somme sur $x\in X, x\notin Z$, alors $|\omega(x)|>1$.
Puisque

$$|\omega(x)| = \frac{|k^*|}{|\mathrm{Stab}(x)|} = \frac{|k^*|}{|k_x^*|} = \frac{q^n-1}{q^d-1},$$

alors en replaçant,

$$q^n-1 = q-1+\sum \frac{q^n-1}{q^d-1}$$

où la somme porte sur des d tels que $d|n$ (question précédente) et $d\neq n$ (pour avoir $|\omega(x)|\neq 1$).

8. On a

$$X^p-1 = \prod_{q|p} \Phi_q$$

par l'exercice 28. On a donc

$$\frac{X^n-1}{X^d-1} = \frac{\prod_{j|n} \Phi_j}{\prod_{\ell|d} \Phi_\ell} = \prod_{j|n, j\nmid d} \Phi_j.$$

pour $d|n, d\neq n$. En particulier, Φ_n divise ce quotient mais Φ_n divise X^n-1 donc dans la formule précédente,

$$\Phi_n(q)|q-1.$$

Si $n|m$, alors $|n|\leq|m|$. Ainsi, $|\Phi_n(q)|\leq q-1$.

9. Par inégalité triangulaire, pour tout $u\in\mathbb{U}\neq\{1\}$,

$$|q-u| \geq ||q|-|u|| = q-1$$

et l'inégalité est stricte puisque $u\neq 1$ [4]. Puisque 1 est racine primitive de l'unité si, et seulement si $n=1$, on en déduit que

$$|\Phi_n(q)| = \left|\prod_{x\in\mu_n}(q-x)\right| > |q-1|^{\varphi(n)} \geq q-1$$

ce qui est contradictoire avec le point précédent. Ainsi, $k=Z$ donc k est bien un corps.

4. dans ce cadre, le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire est le caractère positivement colinéaire et par positivité de q ...

Chapitre 5

Espaces vectoriels normés

<u>Exercice</u> 35. Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. On munit E de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}, u(X^k) = \dfrac{1}{k+1}X^k$. Montrer que u est continue, inversible, mais d'inverse non continue.
2. Exhiber deux normes non équivalentes sur E.
3. Soit $D : P \in E \mapsto P' \in E$ et $M : P \in E \mapsto XP \in E$.
   (a) Donner une norme sur E de sorte que M soit continue, et une autre de sorte que M ne le soit pas.
   (b) Même question pour D.
4. Existe-t-il une norme de sorte que M et D soient continues ?

Corrigé :

1. Soit P, un polynôme, disons de degré n. Alors P s'écrit $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Ainsi, $u(P) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{k+1}X^k$. Ainsi,
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \left|\frac{a_k}{k+1}\right| \leq \frac{|a_k|}{k+1} \leq |a_k| \leq \|P\|_\infty.$$
D'où $\|u(P)\| \leq \|P\|$. u est donc continue car 1-lipschitzienne.
Par ailleurs, u envoie une base de $\mathbb{K}[X]$ sur une famille échelonnée en degré, qui contient tous les degrés : c'est donc une base donc u est bijective. Maintenant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{-1}(X^k) = (k+1)X^k$ donc $\|u^{-1}(X^k)\|/\|X^k\|$ n'est pas bornée. u^{-1} n'est pas continue.
2. On considère la norme infinie et la norme 1. Pour $P_n = \sum_{i=0}^{n} X^k$. Alors $\dfrac{\|P_n\|_1}{\|P_n\|_\infty} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc les normes ne sont pas équivalentes.
3. (a) De manière générale, pour toute suite de réels strictement positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, l'application définie par $N_u(P) = \sum_{k=0}^{n} u_k |a_k|$ est une norme sur E. Considérons alors la norme N pour $u = (n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors
$$N(D(P)) = \sum_{k=0}^{n-1} |a_{k+1}|(k+1)! \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| k! = N(P).$$
Donc D est continu pour N. Par contre, D n'est pas continu pour $\|\cdot\|_\infty$.
   (b) On a $\|M(P)\|_\infty = \|P\|_\infty$. Par contre, pour la norme N précédente, on a $N(X^n) = n!, N(M(X^n)) = (n+1)!$ donc $\dfrac{N(M(X^n))}{N(X^n)} = n+1$ donc M n'est pas continu pour N.

4. Supposons qu'une telle norme existe, disons $\|\cdot\|$. Alors il existe k, h tel que
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \|M(P)\| \leq k\|P\|, \|D(P)\| \leq h\|P\|.$$
Alors
$$\|nX^n\| \leq \|M(nX^{n-1}\| \leq k\|nX^{n-1}\| \leq k\|D(X^n\| \leq kh\|X^n\|.$$
Ainsi, on en déduit que $n \leq kh$, ce qui est absurde.

Exercice 36. Soit E, un espace vectoriel normé, u, v deux endomorphismes continus de E. On suppose que $u \circ v - v \circ u = a\mathrm{Id}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u^n \circ v - v \circ u^n = anu^{n-1}$.
2. Montrer que u et v commutent (c'est-à-dire $a = 0$).
3. Et si E est de dimension finie ?
4. Déduire de cet exercice qu'il n'existe pas de norme sur $\mathbb{K}[X]$ rendant les endomorphismes D et M continus (c.f. l'exercice 35).

Corrigé :

1. C'est une récurrence.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$n|a|\left\|\left|u^{n-1}\right|\right\| = \||u^n \circ v - v \circ u^n\|| \leq 2\||u^n\||\||v\|| \leq 2\left\|\left|u^{n-1}\right|\right\|\||u\||\||v\||.$$
Il y a deux cas.
   - Soit $u^{n-1} \neq 0$ pour tout $n \geq 1$ donc $|a|n$ est majorée : $a = 0$.
   - Soit il existe un rang p tel que $u^{p-1} = 0$ donc a est nilpotente. Si $p = 1$, alors u est nulle, donc u et v commutent. Si $p \geq 2$, supposons $a \neq 0$. Alors par 1, on en déduit que $u^{p-2} = 0$. Par une récurrence descendante finie, $u = 0$ contredisant le fait que $a \neq 0$. Donc $a = 0$.
3. Si E est de dimension finie, on a, en prenant la trace, $0 = a\dim(E)$ donc $a = 0$.

Exercice 37. On considère $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1 : f \in E \mapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$.

1. Soit $g \in E$. On considère $\varphi_g : f \in E \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$. Montrer que φ_g est une forme linéaire continue puis calculer sa norme d'opérateur.
2. Soit $g \in E$. Soit $\Phi : f \in E \mapsto \Phi(f) \in E$ telle que $\forall f \in E$,
$$\Phi(f) : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t. \end{array}$$
Montrer que Φ est un endomorphisme continu puis calculer sa norme d'opérateur.

Corrigé :

1. Il est aisé de montrer que φ_g est linéaire. De plus,
$$\forall f \in E, |\varphi_g(f)| = \left|\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |f(t)||g(t)|\mathrm{d}t \leq \|g\|_\infty \|f\|_1.$$
Ainsi, φ_g est continue car elle est $\|g\|_\infty$ lipschitzienne.
Une propriété du cours assure que la $\||\varphi_g\||$ est l'infimum des constantes de Lipschitz de φ_g donc on a déjà
$$\||\varphi_g\|| \leq \|g\|_\infty.$$

Réciproquement, on souhaiterait exhiber une fonction f de norme 1 telle que $|\varphi_g(f)| = |||\varphi_g|||$. Pour cela puisque g est continue sur le segment $[0,1]$, il existe x_0 tel que $|g(x_0)| = \|g\|_\infty$. Quitte à considérer $-g$, on peut supposer que $g(x_0)$ est positive puisque $|||\varphi_g||| = |||\varphi_{-g}|||$. On peut même supposer $g(x_0) > 0$ car si $g(x_0) = 0$, alors g est nulle. On va donc essayer de construire une fonction f concentrée en x_0 de sorte que

$$\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t = g(x_0).$$

Le problème est qu'une bonne fonction satisfaisante est le Dirac en x_0 qui n'est pas une fonction sympathique. On va donc essayer de l'approcher via une fonction en forme de pic.
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n > \max\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{1-x_0}\right)$ et

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right] \\ n^2\left(x - x_0 + \frac{1}{n}\right) & \text{si } x \in \left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0\right] \\ -n^2\left(x - x_0 - \frac{1}{n}\right) & \text{si } x \in \left[x_0, x_0 + \frac{1}{n}\right] \end{cases}.$$

Remarquons déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la formule de l'aire d'un triangle, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 1$ et que f_n est positive : on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_1 = 1$.
Sur l'intervalle $\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]$, g étant continue sur $[0,1]$, soit donc $\varepsilon > 0$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in \left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right], |g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon.$$

On écrit maintenant

$$|\varphi_g(f_n) - g(x_0)| = \left|\int_0^1 f_n(t)(g(t) - g(x_0)\mathrm{d}t\right| \leq \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} |f_n(t)| \underbrace{|g(t) - g(x_0)|}_{\leq \varepsilon} \mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

On vient de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |\varphi_g(f_n) - g(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $\varphi_g(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x_0)$ donc $|\varphi_g(f_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|g\|_\infty$. L'inégalité

$$\|\varphi_g(f_n)\| \leq |||\varphi_g|||$$

passe donc à la limite en $\|g\|_\infty \leq |||\varphi_g|||$.

2. Il est aisé de montrer que Φ est un endomorphisme : elle est clairement linéaire et $x \mapsto \displaystyle\int_0^x fg$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc dans E. De plus,

$$\begin{aligned} \forall f \in E, \|\Phi(f)\|_1 &= \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 \int_0^x |f(t)\varphi(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 \|\varphi\|_\infty \underbrace{\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t}_{\leq \|f\|_1} \mathrm{d}x \\ &= \|\varphi\|_\infty \|f\|_1. \end{aligned}$$

Ainsi, Φ est continue et on a déjà $|||\Phi||| \leq \|\varphi\|_\infty$ mais cela est assez grossier. En effet, si on retourne en arrière, il y a une majoration très grossière à cause de l'intégrale de 0 à x. Soyons plus subtil et procédons à une intégration par parties. On intègre 1 et on choisit la constante pour annuler le crochet :

$$\forall f \in E, \|\Phi(f)\|_1 \leq \int_0^1 \int_0^x |f(t)\varphi(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \left[(x-1)\int_0^x |f(t)\varphi(t)|\mathrm{d}t\right]_0^1 - \int_0^1 (x-1)|f(x)\varphi(x)|\mathrm{d}x.$$

On a donc

$$\forall f \in E, \|\Phi(f)\|_1 \leq \underbrace{\int_0^1 (1-x)|\varphi(x)||f(x)|\mathrm{d}x}_{=\varphi_a(f)} \leq \sup_{x\in[0,1]} (1-x)|\varphi(x)|\|f\|_1.$$

On a donc

$$|||\Phi||| \leq \sup_{x\in[0,1]} (1-x)|\varphi(x)| =: M$$

Puisque $u : x \in [0,1] \mapsto (1-x)\varphi(x)$ est continue sur $[0,1]$, soit x_0 tel que $|u(x_0)| = M$ que l'on peut supposer strictement positive comme avant. Soit $(f_n)_n$ suites de fonctions pics en x_0 comme avant. Pour n assez grand, l'image de l'intervalle $\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]$ par u est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$ (donc φ aussi car $x_0 \in]0,1[$). On a alors Remarquons déjà que

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, |\|\Phi(f_n)\|_1 - M| &= \left|\int_0^1 \left|\int_0^x f_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right| \mathrm{d}x - M\right| \\
&= \left|\int_{x_0-\frac{1}{n}}^1 \left|\int_{x_0-\frac{1}{n}}^x f_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}x - M\right| \\
&= \left|\int_{x_0-\frac{1}{n}}^1 \int_{x_0-\frac{1}{n}}^x f_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x - M\right| \\
&\underset{\text{IPP}}{=} \left|\left[(x-1)\int_{x_0-\frac{1}{n}}^x f_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right]_{x_0-1/n}^1 + \int_{x_0-\frac{1}{n}}^1 (1-t)f_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t - M\right| \\
&= \left|\int_{x_0-\frac{1}{n}}^1 u(t)f_n(t)\mathrm{d}t - u(x_0)\right| = \left|\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} u(t)f_n(t)\mathrm{d}t - u(x_0)\right| \\
&\leq \int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} \underbrace{u(t)-u(x_0)}_{\leq\varepsilon} f_n(t)\mathrm{d}t \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cela conclut et montre que $|||\Phi||| = M = \sup_{x\in[0,1]} (1-x)|\varphi(x)|$.

Exercice 38. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $|||A||| < 1$, alors $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse à l'aide d'une série de vecteurs. (C'est la formule de von Neumann.)

Corrigé : Il faut penser à l'identité sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$\sum_{k\geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$$

pour $|x| < 1$.

Ici, on a bien envie de dire que l'inverse de $I_n - A$ est $\sum_{k\geq 0} A^k$. Pour ce faire, admettons dans un premier temps que cette série est bien définie. Alors

$$(I_n - A)\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k - A^{k+1} = I_n - \lim_{k\to+\infty} A^k = I_n.$$

Il y a donc deux choses à justifier : la convergence de la série et le fait que $A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (ce que l'on sait déjà par la série). On écrit donc

$$\left\|\sum_{k\geq 0} A^k\right\| \leq \sum_{k\geq 0} \|A^k\| \leq \sum_{k\geq 0} \|A\|^k = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Ainsi, la série converge et on a bien

$$I_n - A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : (I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k.$$

Exercice 39. Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(A)$$

où $\exp(A) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A^j}{j!}$. (On s'assurera de la bonne définition de $\exp(A)$. Pour rappel, une série de vecteurs converge lorsque la suite des sommes partielles converge.)

Corrigé : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (il en existe : par exemple, on prend une norme d'opérateur ou même la norme de Frobenius qui est $A \mapsto \mathrm{tr}(AA^T)$). Alors la série exponentielle est bien définie. En effet,

$$\left\|\sum_{\ell\geq 0} \frac{1}{\ell!}A^\ell\right\| \leq \sum_{\ell\geq 0} \frac{1}{\ell!}\|A^\ell\| \leq \sum_{\ell\geq 0} \frac{1}{\ell!}\|A\|^k = \exp(\|A\|).$$

Ainsi, la série exponentielle converge. On écrit alors

$$\exp(A) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}A^\ell \ ; \ \left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell}\frac{1}{k^\ell}A^\ell.$$

Ainsi,

$$\exp(A) - \left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k = \sum_{\ell=0}^{k}\left(\frac{1}{\ell!} - \binom{k}{\ell}\frac{1}{k^\ell}\right)A^\ell + \sum_{\ell=k+1}^{+\infty}\frac{1}{\ell!}A^\ell.$$

Or,

$$\forall \ell \in [\![0,k]\!], \frac{1}{\ell!} - \binom{k}{\ell}\frac{1}{k^\ell} = \frac{1}{\ell!}\left(1 - \frac{k!\ell!}{\ell!(k-\ell)!}\frac{1}{k^\ell}\right) = \frac{1}{\ell!}\left(1 - \prod_{i=\ell+1}^{k}\frac{i}{k}\right) > 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\| \exp(A) - \left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k \| &= \left\| \sum_{\ell=0}^{k} \left(\frac{1}{\ell!} - \binom{k}{\ell}\frac{1}{k^\ell}\right) A^\ell + \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell \right\| \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{k} \left|\frac{1}{\ell!} - \binom{k}{\ell}\frac{1}{k^\ell}\right| \|A^\ell\| + \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \|A^\ell\| \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{k} \left|\frac{1}{\ell!} - \binom{k}{\ell}\frac{1}{k^\ell}\right| \|A\|^\ell + \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \|A\|^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} \left(\frac{1}{\ell!} - \binom{k}{\ell}\frac{1}{k^\ell}\right) \|A\|^\ell + \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \|A\|^\ell \\
&= \exp(\|A\|) - \left(1 + \frac{\|A\|}{k}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

On a bien la convergence souhaitée.

Chapitre 6

Topologie

Exercice 40. Soit E, un espace vectoriel normé. Soit $\varphi \in E^*$ non nul et $H = \ker(\varphi)$, hyperplan de E. Montrer que H est fermé ou dense dans E.

Corrigé : En dimension finie, un sous-espace vectoriel est bien fermé. *On rappelle la preuve. Soit x, une suite convergente de F sev de E. Alors x est bornée dans F. Il existe donc R tel que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B_f(0,R)$. Donc $B_f(0,R) \cap F$ est une boule fermée de E donc compact par dimension finie de F. Il existe donc une sous-suite convergente dans F. Par unicité, la limite de x est dans F.* Sinon, H est le noyau d'une application linéaire, continue par dimension finie. Donc H est fermé.
En dimension infinie, si φ est continue, alors H est fermé. Supposons donc que φ n'est pas continue. Alors φ n'est pas lipschitzienne : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in E, |\varphi(a_n)| > n\|a_n\|$.

Soit $x \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x + \lambda_n a_n$. Alors $\varphi(y_n) = 0$ pour $\lambda_n = -\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a_n)}$. Ainsi définie, $y_n \in H$ pour tout n. Or

$$\|y_n - x\| = \left\| \frac{\varphi(x)}{\varphi(a_n)} a_n \right\| = |\varphi(x)| \frac{\|a_n\|}{|\varphi(a_n)|} \leq \frac{|\varphi(x)|}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc H est bien dense dans E.

Il existe une alternative plus élémentaire mais je tiens à présenter cette méthode.

Exercice 41. Soit E, un espace vectoriel normé. Soit K, un compact non vide de E. Soit $f : K \to K$ vérifiant $\forall x \neq y \in \mathbb{K}, \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Montrer que f admet un unique point fixe. Montrer que ce dernier est obtenu par limite d'une suite vérifiant $u_0 \in X, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Corrigé : Soit $g : x \in K \mapsto \|f(x) - x\| \in \mathbb{R}^+$. g est clairement continue sur K donc par le théorème des bornes atteintes, g admet un minimum sur K compact. Notons-le α. Alors si $f(\alpha) \neq \alpha$), on a $g(f(\alpha)) = \|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\| < \|f(\alpha) - \alpha\| = g(\alpha)$, ce qui est absurde. Donc α est bien point fixe. Pour l'unicité, si α, β sont deux points fixes, on a $\|\alpha - \beta\| = \|f(\alpha) - f(\beta)\| < \|\alpha - \beta\|$. Cela signifie que $\alpha = \beta$.

Considérons maintenant la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $d_n = \|x_n - \alpha\|$ (α est point fixe de f). Alors d est une suite décroissante, minorée par 0, donc converge, disons vers ℓ. Par compacité de K, x admet une valeur d'adhérence, disons ξ. Par passage à la limite, on en déduit $\ell = \|\xi - \alpha\|$. En appliquant la même chose à $d_{n+1} = \|x_{n+1} - \alpha\| = \|f(x_n) - f(\alpha)\|$ et par continuité de f, on a $\ell = \|f(\xi) - f(\alpha)\|$. Donc $\xi = \alpha$. Ainsi, x admet une unique valeur d'adhérence qui est α : elle est donc convergente, et ce, vers α.

On présente dans ce qui suit trois résultats intéressants, pas si facile, assez utiles, de topologie.

Exercice 42. Soit E un espace vectoriel normé et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ. Montrer que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

Corrigé : Notons $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $K^{\mathbb{N}}$. Si $(y_n)_n$ prend la valeur de ℓ une infinité de fois, il est aisé de construire une extraction φ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, y_{\varphi(n)} = \ell$ donc $(y_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.

On suppose donc que ce n'est pas le cas. Notons $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Alors on peut construire une extraction φ de sorte que $(y_{\varphi(n)})_n$ soit à valeurs dans X.

- Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $y_{\varphi(k)} = x_{n_k}$. Notons $n_k = \psi(k)$.
- Alors on a $\forall k \in \mathbb{N}, y_{\varphi(k)} = x_{\psi(k)}$.
-
  - Si ψ est bornée, alors $(y_{\varphi(k)})_k$ prend un nombre fini de valeurs : elle admet donc une sous-suite convergente donc $(y_n)_n$ aussi.
  - Si ψ n'est pas bornée, alors il existe une extraction σ tel que $\psi \circ \sigma$ soit une extraction. On a alors
  $$y_{\varphi(\sigma(k))} = x_{\psi(\sigma(k))} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$
  donc $(y_n)_n$ admet une sous-suite convergente.

Exercice 43. Soit E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application continue bijective. Montrer que si E est compact, alors $f^{-1} : F \to E$ est continue.

Corrigé :

On va montrer que $f^{-1} : F \to E$ est continue par caractérisation séquentielle. Soit donc $(y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergente dans F, disons vers ℓ. On veut montrer que
$$f^{-1}(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f^{-1}(\ell).$$

Par hypothèse, on sait alors que $F = f(E)$ est compact. On va donc montrer que $(f^{-1}(y_n))$ admet une unique valeur d'adhérence qui est $f^{-1}(\ell)$ ce qui conclut quant à la convergence vers cette unique valeur.

Soit φ une extraction telle que $(f^{-1}(y_{\varphi(n)}))_n$ converge, disons vers a. Alors par continuité de f, on a
$$\ell \underset{n\to+\infty}{\longleftarrow} y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$$
donc par unicité de la limite, $\ell = f(a)$ donc $a = f^{-1}(\ell)$.

Ainsi, $f^{-1}(\ell)$ est l'unique valeur d'adhérence ce qui conclut quant à la continuité de f^{-1}.

Exercice 44. Soit E, un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit F, un fermé non vide de E. Montrer que $d(x, F) := \inf\limits_{y\in F} \|x - y\|$ est atteinte. Même question mais E est supposé de dimension infinie et F, un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Corrigé : On rappelle qu'un espace de dimension finie est fermé (rappelé en **??**. Il faut savoir le démontrer !). Soit $a \in F, d = \|x - a\|$. Soit $K = F \cap B_f(x, d) = \{y \in F : \|x - y\| \leq d\}$. K est inclus dans un fermé, et K est fermé borné. Ainsi, K est compact (dans K) car F est de dimension finie . L'application $y \mapsto \|y - x\|$ est continue sur K donc atteint son minimum en $c \in K$ par le théorème des bornes atteintes. Ainsi, $\forall y \in K, \|x - y\| \leq \|x - c\|$ donc $\|x - c\| \leq d$. Par ailleurs, $\forall y \in F \backslash K, \|x - y\| > d \geq \|x - c\|$. Ainsi, $d(x, F) \geq \|x - c\|$ mais puisque $c \in F$, on a égalité.

Exercice 45. Soit E, un espace vectoriel normé. Montrer que sa sphère unité fermée est compacte si, et seulement si, E est de dimension finie. *Indication : On pourra utiliser l'exercice 44 et regarder un vecteur unitaire u vérifiant $d(u, F) = 1$ pour F, un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et construire* *une suite d'éléments de $B_f(0,1)$ sans valeur d'adhérence.*

Corrigé : Si E est de dimension finie, c'est clair. Si E est de dimension infinie, pour F de dimension finie de E, on sait par l'exercice 44 qu'il existe $y \in F$, vérifiant $d(x,F) = \|x-y\|$ pour tout $x \in E \backslash F$. Posons donc $u = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$. Alors u est unitaire, donc $d(u,F) \leq \|u\| = 1$. Par ailleurs,

$$\forall z \in F, \|u-z\| = \frac{1}{\|x-y\|}\|x-(y+\|x-y\|z)\|.$$

De plus, $\|x - \underbrace{(y+\|x-y\|)z}_{\in F}\| \leq d(x,F) = \|x-y\|$. Donc $\|u-z\| \geq 1$, et ce, pour tout $z \in F$. Donc $d(u,F) = 1$ au final.

Considérons maintenant une suite u à valeurs dans $B_f(0,1)$ vérifiant $\forall n,p \in \mathbb{N}^2, n \neq p \Longrightarrow \|u_n - u_p\| \geq 1$. Cela signifie que u n'a pas de valeur d'adhérence, contredisant la compacité de la boule fermée de E.

On considère u_0, un élément unitaire quelconque. Supposons $u_0, \cdots, u_{n-1}$ construit. L'espace $\mathrm{Vect}(u_0, \cdots, u_{n-1})$ étant de dimension finie, le début de la preuve assure un élément u_n vérifiant $d(u_n, F_n) = 1$. Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \|u_n - u_k\| \geq 1$. D'où la construction de u_n. On construit ainsi une suite u satisfaisante.

Les deux exercices qui suivent peuvent utiliser les exercices 42 et 43.

<u>Exercice</u> 46. Soit E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ injective. Montrer que f est continue si, et seulement si, l'image de tout compact de E par f est un compact de F.

Corrigé : Par le cours, si f est continue, alors l'image d'un compact de E par f est un compact de F.

Réciproquement, soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente dans E, disons vers ℓ. On veut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\ell).$$

Soit $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ qui est un compact de E par l'exercice 42. Alors $K' = f(K)$ est compact. Soit $g = f_{|K}$. g est alors bijective de K dans K' et on note alors $g^{-1} : K' \to K$.

K étant compact, g^{-1} est continue : en effet, soit A un fermé de K compact donc A est compact. Montrons que l'image réciproque de A par g^{-1} est fermé. Si c'est le cas, c'est vrai pour tout fermé donc g^{-1} est continue. Pour montrer ce fait, il suffit de remarquer que $(g^{-1})^{-1}(A) = g(A)$ qui est compact car $g(A) = f(A)$ qui est compact.

g^{-1} étant continue et K' étant compact, par l'exercice 43, $(g^{-1})^{-1}$ est continue donc g est continue. En particulier, $f(x_n) = g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(\ell) = f(\ell)$ donc

$$f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$$

donc f est continue.

L'injectivité est cruciale ! Si on prend $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}$, alors l'image de tout compact de F est soit $\{0\}, \{1\}$ ou $\{0,1\}$ qui est compact.

<u>Exercice</u> 47.

1. Soit E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ continue. On suppose que l'image réciproque de tout compact de F par f est un compact de E. Montrer que f est fermée *i.e.* l'image de tout fermé de E par f est un fermé de F.
2. Soit F_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$. Montrer que F_n est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé :

1. Soit A un fermé de E. Soit $(y_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $f(A)$, disons vers ℓ. Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = f(x_n)$. On veut montrer que $y \in f(A)$.
   $K := \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est un compact de F par l'exercice 42. Ainsi, par hypothèse, $f^{-1}(K)$ est compact donc puisque $(x_n)_n \in f^{-1}(K)$, par compacité, il existe une extraction φ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge, disons vers ξ. Alors de l'égalité
   $$\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \xi$$
   on tire par continuité de f
   $$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{f(x_{\varphi(n)}}_{=y_{\varphi(n)}} = f(\xi).$$
   Par unicité de la limite, $\ell = f(\xi)$ et $\xi \in A$ donc $\ell \in f(A)$.
2. Il s'agit de montrer que
   $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) & \mapsto & \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k) \end{array}$$
   est une application fermée car $F_n = f(\mathbb{R}^n)$. f est clairement continue car polynômiale. Ainsi, montrons que l'image réciproque de tout compact de $\mathbb{R}_n[X]$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
   Soit K un compact de $\mathbb{R}_n[X]$.
   - $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie.
   - Par continuité de f, $f^{-1}(K)$ est fermé.
   - Comme K est compact, K est bornée pour la norme infinie (n'importe quelle norme puisqu'on est en dimension finie). Soit donc M une borne de sorte que $\forall P \in K, \|P\|_\infty \leq M$.
     Soit $\lambda := (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in f^{-1}(K)$. Soit $P = f(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ que l'on note
     $$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$
     avec $a_n = 1$ et $a_0, \cdots, a_{n-1}$ n réels. On va montrer que $\|\lambda\|_\infty \leq 1 + M$. Pour cela, soit $i \in [\![1, n]\!]$.
     - Soit $|\lambda_i| \leq 1$ et on ne fait rien.
     - Soit $|\lambda_i| > 1$ et alors
       $$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k + \lambda^n = 0$$
       donc
       $$|\lambda_i|^n = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k\right| \leq \|P\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda_i|^k.$$
       Ainsi,
       $$|\lambda_i| \leq \|P\|_\infty \frac{1 - \frac{1}{|\lambda_i|^n}}{|\lambda_i| - 1} \leq \|P\|_\infty.$$

     On a bien $|\lambda_i| \leq 1 + \|P\|_\infty \leq 1 + M$ et ce pour tout i. Ainsi, $\|\lambda\|_\infty \leq 1 + M$.

   Ainsi, $f^{-1}(K)$ est un fermé borné en dimension finie : c'est un compact.

Exercice 48. Soit F, un sous-espace vectoriel de E. On suppose que $\dim(E) = n \geq 2$ et $\dim(F) \leq n-2$. Montrer que $E \backslash F$ est connexe par arcs.

Corrigé : Soit $E = F \oplus G$. Soient π_F, π_G, projecteurs adaptés à cette décomposition. Remarquons que $x \in E\backslash F \iff \pi_G(x) \neq 0$. On sait que $\dim(G) \geq 2$. Alors $G\backslash\{0\}$ est connexe par arcs. *En effet, soit $x, y \in G\backslash\{0\}$. Soit $x = \|x\|u_x$ avec $\|u_x\| = 1$. Alors $\gamma : t \in t \in [1/\|x\|, 1] \mapsto tu_x \in G$ connecte x à la sphère unité.*

De même, pour y. Puisque la sphère unité est connexe par arcs, x et y sont continûment reliés. Donc $G\backslash\{0\}$ est connexe par arcs. Soit $x, y \in (E\backslash F)^2$. Alors $\pi_G(x), \pi_G(y)$ sont tous deux non nuls. Soit γ, un chemin continu reliant $\pi_G(x)$ à $\pi_G(y)$ à valeurs dans $G\backslash\{0\}$ (possible car $G\backslash\{0\}$ est connexe par arcs). Posons alors $\psi(t) : t \in [0,1] \mapsto (1-t)\pi_F(x) + t\pi_F(y) + \gamma(t)$. Alors $\forall t \in [0,1], \pi_G(\psi(t)) = \gamma(t)$ donc ψ est à valeurs dans $E\backslash F$. ψ est continue, $\psi(0) = x, \psi(1) = y$. Donc $E\backslash F$ est connexe par arcs.

6.1 Espaces complets

Définition 6.1. Soit (E, d) un espace métrique (dans le cadre du programme, considérons $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé). On dit que $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n, d(u_p, u_q) \leq \varepsilon (\text{ ou alors } \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon).$$

On dit que E est complet lorsque toute suite de Cauchy de E converge dans E.

Exercice 49. Soit $(E, \|\cdot\|)$, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme sur E. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que si $E = \mathbb{R}$, une suite est de Cauchy si, et seulement si, elle converge. *Indication : on pourra montrer que $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.*
2. On se place dans le cas général. On dit que E est complet lorsque pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, si u est de Cauchy, alors u converge. Montrer que E est complet si, et seulement si, toute série absolument convergente est convergente. *Indication : on pourra trouver une extraction φ de sorte $\sum \|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\|$ soit convergente.*

Corrigé :

1. Soit u une suite réelle convergente. Notons ℓ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$. Soit $p, q \geq N$. Alors $|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq 2\varepsilon/2 = \varepsilon$ donc u est de Cauchy.
   Réciproquement, montrons un lemme.

   Lemme 6.1. Une suite de Cauchy de E est bornée.

   Démonstration. Soit u de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N, \|u_p - u_N\| \leq \varepsilon$. Soit $M = \max\limits_{[0,N]} \|u\|$. Alors :

   $$\forall n \in [\![0, N]\!], \|u_n\| \leq M \; ; \; \forall n \geq N, \|u_p\| \leq \varepsilon + \|u_N\|.$$

   Ainsi, u est bornée par $\max(M, \varepsilon + \|u_N\|)$. □

   Soit maintenant u une suite réelle de Cauchy. Alors u est bornée, disons par M. u est à valeurs dans $[-M, M]$ qui est un compact de $\mathbb{K}$. Montrons alors que u n'a qu'une valeur d'adhérence (un résultat du cours nous dit alors que u converge). Soit ℓ, ℓ' deux valeurs d'adhérence de u. Soit φ, ψ deux extractions telles que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell, u_{\psi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

   (a) $\forall p, q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$,
   (b) $\forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$,
   (c) $\forall n \geq N, |u_{\psi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$.

Puisque $\psi(n) \geq n \geq N, \varphi(n) \geq n \geq N$, on a

$$|\ell - \ell'| = |\ell - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)} + u_{\psi(n)} - \ell'| \leq |u_{\psi(n)} - \ell| + |u_{\varphi(n)} - \ell| + |u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)}| \leq 3\varepsilon.$$

(cette inégalité, que j'appelle inégalité carrée, est une « méthode » à connaitre : pour aller à un point A à un point D, mieux vaut faire la ligne droite que de passer par B puis par C.) Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0)$, $|\ell - \ell'| \leq 3\varepsilon$ donc $\ell = \ell'$. Ainsi, u admet une unique valeur d'adhérence donc converge.

2. Supposons que E est complet. Soit $(u_n)_n$ une suite de E et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose que la série $(S_n)_n$ converge absolument, ce qui veut dire que $\sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$ converge quand $n \to +\infty$ ce qui signifie que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \|u_k\| < \varepsilon.$$

Soit $p \geq q \geq N$. Alors

$$\|S_p - S_q\| = \left\|\sum_{k=p}^{q-1} u_k\right\| \leq \sum_{k=p}^{q-1} \|u_k\| \leq \varepsilon.$$

Alors $(S_n)_n$ est de Cauchy donc converge.
Réciproquement, la stratégie repose sur le lemme plus général suivant que l'on démontrera après.

Lemme 6.2. Si u est de Cauchy sur E et a une valeur d'adhérence, elle converge.

Supposons que toute série absolument convergente converge. Soit u une suite de Cauchy dans E. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N_k \in \mathbb{N}$[1] tel que $\forall p, q \geq N, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$. Construisions une extraction φ par récurrence. Une première remarque que si on prend $k \in \mathbb{N}$, alors il existe un entier $\varphi(k)$ tel que $\forall p, q \geq \varphi(k), \|u_p - u_q\| \leq \frac{1}{2^k}$ ce qui implique que $\forall p \geq \varphi(k), \|u_p - u_{\varphi(k)}\| \leq \frac{1}{2^k}$.

(a) Il existe $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq \varphi(0), \|u_p - u_{\varphi(0)}\| \leq 1$.

(b) Il existe $\varphi(1) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq \varphi(1), \|u_p - u_{\varphi(1)}\| \leq \frac{1}{2}$. On peut alors supposer que $\varphi(1) \geq \varphi(0)$.

(c) On construit ainsi par récurrence $\varphi(k) > \varphi(k-1)$ tel que $\forall p \geq \varphi(k), \|u_p - u_{\varphi(k)}\| \leq \frac{1}{2^k}$.

Soit $v_n = u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}$. Alors $\|v_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ par construction. De fait, la série $\sum v_n$ converge absolument donc converge par hypothèse. Par télescopage, cela revient à dire que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge. u est une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence : elle converge.

Démonstration. Montrons le lemme. Soit u de Cauchy dans E. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$. Soit φ une extraction telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge, disons vers ℓ. Il existe alors un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0, \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \varepsilon$.
Soit $n_1 = \max(N, n_0)$. Alors $\forall n \geq n_1, n \geq N, \varphi(n) \geq n \geq N, n \geq 0$. De fait,

$$\forall n \geq n_1, \|u_n - \ell\| \leq \|u_n - u_{\varphi(n)}\| + \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, u converge. □

[1]. cet entier dépend de k

Exercice 50.

1. Soit E, F deux espaces vectoriels normés complets. Montrer qu'il existe une norme sur $E \times F$ de sorte que $E \times F$ soit complet. En déduire que $\mathbb{R}^n$ est complet.
2. Montrer que $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est complet pour une norme bien choisie. Montrer que $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ est complet pour une norme bien choisie.

Corrigé succinct :

1. Si on note $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F$ normes pour que E et F soient complets respectivement, considérons $\|\cdot\| : (x,y) \in E \times F \mapsto \|x\|_E + \|y\|_F$. Il est aisé de montrer que c'est une norme. Soit $(x_n, y_n)_n \in (E \times F)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. On montre assez facilement que $(x_n)_n$ est alors de Cauchy dans E et $(y_n)_n$ l'est aussi. On en déduit donc que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ converge respectivement dans E et F donc $(x_n, y_n)_n$ converge dans $E \times F$.
2. On utilise la complétude de $\mathbb{R}$. Munissons $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme infinie. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Alors
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon.$$
Soit donc $\varepsilon > 0$ et N comme précédent. Alors pour tout $p, q \geq N$, on a
$$\forall x \in [0,1], |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$
Ainsi, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc elle converge, disons vers $f(x)$. Montrons donc que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{unif.}} f$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N, \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon$. Alors
$$\forall p, q \geq N, \forall x \in [0,1], |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$
En faisant tendre p vers $+\infty$, on a : $\forall q \geq N, \forall x \in [0,1], |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$ donc $\forall q \geq N, \forall x \in [0,1], \|f - f_q\| \leq \varepsilon$: la convergence est donc uniforme. Il reste à montrer que f est dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ mais cela est assuré par le théorème de continuité des suites de fonctions.
Ainsi, $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est complet.
Méthode : pour montrer qu'un espace est complet, on prend une suite de Cauchy et on utilise la complétude d'un autre espace pour obtenir un candidat limite, puis on montre que ce candidat est effectivement limite de notre suite de Cauchy de départ : pour cela, il faut montrer que ça converge dans le bon espace et pour la bonne notion de convergence.
On montre aisément que $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty + \left\|\frac{\mathrm{d}\cdot}{\mathrm{d}x}\right\|_\infty$ en voyant l'application f comme étant (f, f') dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})^2$. Par contre, $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 51. Soit $(E, \|\cdot\|)$, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé complet. Soit F, un sous-espace vectoriel fermé de E et $f : F \to F$, une application k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$ (on dit que f est contractante). Montrer que f admet un et unique point fixe. *Indication : on pourra construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, puis montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.*
Ce résultat reste-t-il vrai lorsque seule une des itérées de f est contractante ?

Corrigé : Avant toute chose, F est complet en tant que fermé dans un complet.
L'unicité d'abord. Soit a, b deux point fixes de f. On a
$$\|a - b\| = \|f(a) - f(b)\| \leq k\|a - b\|$$
donc $\|a - b\|(1 - k) \leq 0$ sachant que $1 - k > 0$. On en déduit que $\|a - b\| \leq 0$ donc vaut 0 par positivité de la norme. Par séparation, $a = b$ et on a l'unicité.

Passons à l'existence. Soit $(u_n)_n$ une suite de F définie par $u_0 \in F, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Une telle suite est bien définie puisque $f(F) \subset F$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u_{n+1} - u_n\| = \|f(u_n) - f(u_{n-1})\| \leq k\|u_n - u_{n-1}\|$$

car f est k-contractante. Alors par récurrence immédiate,

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq k^n \|u_1 - u_0\|.$$

On veut montrer que u est de Cauchy. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$ et considérons p, q deux entiers naturels, $p > q$. Par télescopage,

$$\|u_p - u_q\| = \left\|\sum_{n=q}^{p-1} u_{n+1} - u_n\right\| \leq \sum_{n=q}^{p-1} \|u_{n+1} - u_n\| \leq \sum_{n=q}^{p-1} k^n \|u_1 - u_0\| = \|u_1 - u_0\| k^q \frac{1 - k^{p-q}}{k-1} \leq \frac{\|u_1 - u_0\|}{k-1} k^q.$$

Ainsi, pour q assez grand (donc p assez grand), on a $\|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$. u est donc de Cauchy donc converge, disons vers ℓ. Par continuité de f (lipschitzien implique continue), l'égalité $f(u_n) = u_{n+1}$ passe à la limite en $f(\ell) = \ell$ ce qui conclut l'existence.

Exercice 52. Soit (E, d) un espace métrique complet. On appelle diamètre de F le réel $\sup_{x,y \in F} d(x, y) =: D(F)$. Soit $(F_n)_n$ une suite de fermés tous non vide. On suppose que $(F_n)_n$ est décroissante pour l'inclusion et que la suite $(D(F_n))_n$ tend vers 0. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est non vide, réduite à un singleton.

Corrigé : Soit $(x_n)_n$ une suite de E de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$ ce qui est possible car F_n est non vide pour tout n. Puisque $D(F_n)$ tend vers 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, D(F_n) \leq \varepsilon$. Puisque les fermés sont décroissants, $\forall p, q \geq N, x_p, x_q \in F_n$: on a donc $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$ donc $(x_n)_n$ est de Cauchy.

Puisque E est complet, $(x_n)_{n \geq N}$ converge dans E, disons vers ℓ. On va alors montrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{\ell\}.$$

Si $\ell \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que F_{n_0} ne contienne pas ℓ. Ainsi, $\ell \in F_{n_0}^c$ qui est ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset F_{n_0}^c$ *i.e.* $F_{n_0} \subset B(\ell, r)^c$ donc $d(\ell, a) > r$ pour tout $a \in F_{n_0}$. Puisque $x_n \in F_n \subset F_{n_0}$ pour $n \geq n_0$, on en déduit que $\forall n \geq n_0, d(\ell, x_n) > r$: cela contredit la convergence de $(x_n)_n$ vers ℓ.

Soit maintenant $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, \ell \in F_n$ donc $d(\ell, x) \leq D(F_n)$. Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(\ell, x) \leq D(F_n) \leq \varepsilon.$$

On en déduit que $d(\ell, x) = 0$ donc $\ell = x$.

Exercice 53. Soit (E, d) un espace métrique complet.

1. Soit $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des ouverts denses de E. Montrer que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$ est dense dans E (théorème de Baire).
   On pourra utiliser la caractérisation des ouverts par des voisinages.
2. Soit $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des fermés d'intérieurs vide de E. Alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$ est d'intérieur vide dans E.
3. Soit F_n une suite de fermés tel que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathring{F}_n$ est dense dans E.

Corrigé :

1. Soit V un ouvert non vide de E. On souhaite montrer que $V \cap \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i \neq \emptyset$. On construit alors $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des boules fermées de E vérifiant
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est fermée de rayon $R \in \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$.
   (b) $B_0 \subset (\Omega_0 \cap V)$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} \subset \left(\Omega_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n\right).$$
   On aura ainsi construit une suite de boules fermées décroissantes pour l'inclusion qui se trouve dans tous les ouverts Ω_i.
   Ces boules existent. En effet, puisque $\Omega_0 \cap V$ est ouverte et Ω_0 dense dans E, l'intersection est un ouvert non vide : il existe donc une boule fermée de rayon fixé que l'on peut prendre inférieure à 1 dans Ω_0. Supposons ainsi construit $B_0, \cdots, B_n$. Alors $\Omega_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$ est ouverte et, par densité de Ω_{n+1}, est non vide. Ainsi, on peut effectivement construire B_{n+1}.
   On a donc une suite décroissante de fermés dans $V \cap \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$. Par complétude, le théorème des fermés emboités s'applique : il existe $x_0 \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$ et alors $x_0 \in V \cap \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$.
2. On utilise le fait que $E\backslash\overset{\circ}{F} = \overline{E\backslash F}$. On considère alors $\Omega_i = E\backslash F_i$. Alors les Ω_i sont des ouverts denses et par le théorème de Baire, on a
   $$E\backslash\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right)$$
   qui est dense dans E donc $\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right)$ est d'intérieur vide.
3. Soit $G = E\backslash\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_n\right)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, G \cap F_n$ est d'intérieur vide puisque
   $$\overset{\circ}{\overbrace{G \cap F_n}} \subset G \cap \overset{\circ}{F}_n = \emptyset.$$
   Par le théorème de Baire, puisque $G \cap F_n$ est fermé,
   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G \cap F_n)$$
   est d'intérieur vide ce qui signifie que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G \cap F_n) = G \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = G \cap E = G$ est d'intérieur vide. En prenant le complémentaire, on a le résultat voulu.

Exercice 54. 1. Montrer le théorème de la limite simple de Baire

Théorème 6.3. *Soit (E,d) un espace métrique complet, (F,δ) un espace métrique. Soit $(f_n)_n \in (\mathcal{C}^0(E,F))^{\mathbb{N}}$ telle que $(f_n)_n$ converge simplement, disons vers f. Alors l'ensemble des points de continuité contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.*

On pourra introduire les notations

$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in E : \forall p \geq n, \delta(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon\} \ ; \ G_p := \{x \in E : \delta(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon\}.$$

2. En déduire que si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, f' est continue sur un dense de $\mathbb{R}$.

Corrigé :

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note
$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in E : \forall p \geq n, \delta(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon\}.$$
Par continuité de f_n, f_p, δ, l'ensemble
$$G_p := \{x \in E : \delta(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon\}$$
est un fermé et
$$F_{n,\varepsilon} = \bigcap_{p \geq n} G_p.$$
On veut appliquer le corollaire précédent. On veut donc montrer que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{n,\varepsilon}$. Soit $x \in E$. Alors $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$ donc la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente donc de Cauchy. En notant
$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon},$$
on a, par le lemme, Ω_ε qui est un ouvert dense dans E. Soit donc $x_0 \in \Omega_\varepsilon$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 \in \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$. Par continuité de f_n, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0) \cap \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}, \forall x \in V, \delta(f_n(x_0), f_n(x)) \leq \varepsilon$. Puisque $V \subset \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}, \forall x \in V, \forall p \geq n, \delta(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon$. En faisant tendre p vers $+\infty$, on a donc
$$\delta(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$
Ainsi,
$$\forall x \in V, \delta(f(x_0), f(x)) \leq \delta(f(x), f_n(x)) + \delta(f_n(x), f_n(x_0)) + \delta(f_n(x_0), f(x_0)) \leq 3\varepsilon.$$
Ainsi, on va pouvoir montrer que f est continue sur $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_{1/n}$.

Soit $R = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_{1/n}$. Soit $x_0 \in R$ et $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Alors $x_0 \in \Omega_{1/n}$ donc
$$\exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in V, \delta(f(x), f(x_0)) \leq \frac{3}{n} \leq \varepsilon.$$
Ainsi f est continue sur R qui est une intersection d'ouverts dense dans E.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n}\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$. Alors $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{C.S.}} f'$ donc f' est continue sur une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$ qui est complet. Par le théorème de Baire, f' est continue sur un dense de $\mathbb{R}$.

6.2 Topologie des espaces matriciels

Exercice 55. Soit $n \in \mathbb{N}^*, r \in [\![0; n-1]\!]$. On considère $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \text{rg}(M) \leq r\}$. Montrer que A est fermé. Que dire de $B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \text{rg}(M) \leq r\}$?

Corrigé : Soit $(M_p)_p$, une suite de matrice de A. On suppose que cette suite converge, disons vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On va utiliser le fait qu'une matrice est de rang r si, et seulement si, r est la plus grande taille des sous-matrices carrées inversibles extraites de A. Par exemple, on aura le résultat en montrant que toute sous-matrice de taille $(r+1) \times (r+1)$ n'est pas inversible. Soit donc $(r+1) \times (r+1)$ indices de $[\![1, n]\!]^2$. On note $\tilde{A}_p$, l'extraite selon ces indices de A_p pour $p \in \mathbb{N}$. On fait de même pour $\tilde{A}$ et A. Puisque $A_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} A$, et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, on a la convergence coefficient par coefficient. De fait, $\tilde{A}_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \tilde{A}$. Par ailleurs,

$\det(\tilde{A_p}) = 0$ puisque A_p est de rang r et ce, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par continuité du déterminant, $\det(\tilde{A}) = 0$. Donc A n'admet pas de sous-matrice de taille $(r+1)\times(r+1)$ inversible. Son rang est donc au plus r. Pour B, cela ne tient pas. Considérons l'exemple simple $A_p = \begin{pmatrix} 1/p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les $(A_p)_p$ sont tous de rang 1. A_p tend vers 0 quand $p \to +\infty$ qui est de rang $0 \neq 1$.

Exercice 56. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Corrigé : Il suffit d'utiliser le lemme suivant :

$$\forall (a_1, \cdots, a_k) \in \mathbb{C}^k, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall i \neq j, a_i + \frac{i}{n} \neq a_j + \frac{j}{n}.$$

Démonstration. Considérons a_i, a_j quelconque, $i \neq j$. Si $a_i = a_j$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_i + \frac{i}{n} \neq a_j + \frac{j}{n}$. Si $a_i \neq a_j$, puisque $\mathbb{R}$ est séparé, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a_i, \varepsilon) \cap B(a_j, \varepsilon) = \emptyset$. Puisqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geq n_0, i/n \leq \varepsilon \wedge j/n \leq \varepsilon$, alors $\forall n \geq n_0 + 1, a_i + \frac{i}{n} \neq a_j + \frac{j}{n}$. Le n_0 dépend de i, j. Puisqu'il y a un nombre fini de i, j, il y a un nombre fini de n_0 candidats : on prend le plus grand. □

Maintenant, considérons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A = PTP^{-1}$ avec T, une matrice triangulaire supérieure de la diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}_{p \geq n_0}$, on note $T_p = T + \mathrm{diag}(1/p, 2/p, \cdots, n/p)$. Alors T_p est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples par le lemme. Donc $A_p = PT_pP^{-1}$ est diagonalisable, et ce, pour tout $p \geq n_0$. Puisque $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue et que $T_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} T$, on en déduit que $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$. Donc A est bien limite de matrices diagonalisables.

Exercice 57. Montrer que l'intérieur des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes. (*Indication : on montrera que, pour $(A_p)_p$ une suite tendant vers A et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $d(\lambda, \mathrm{Sp}(A_p)) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Corrigé : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tendant vers A. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Par continuité du déterminant (en fait du polynôme caractéristique, c.f. l'exercice 7.3), $\chi_{A_p}(\lambda) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_A(\lambda) = 0$. Soit maintenant $p \in \mathbb{N}$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, valeurs propres complexes de A. Alors

$$|\chi_{A_p}(\lambda)| = \left| \prod_{k=1}^{n} \lambda - \lambda_k \right| = \prod_{k=1}^{n} |\lambda - \lambda_k| \geq (d(\lambda, \mathrm{Sp}(A))^n.$$

L'inégalité passe à la limite quand $p \to +\infty$ et on a montré l'indication.

On raisonne par double inclusion. Considérons maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possédant n valeurs propres distinctes. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tendant vers A. On veut donc montrer que pour p assez grand, A_p est diagonalisable. Puisque les λ_i sont deux à deux distincts, par le caractère séparé de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall i \neq j, B(\lambda_i, \varepsilon) \cap B(\lambda_j, \varepsilon) = \emptyset.$$

Par l'indication, $d(\lambda_k, \mathrm{Sp}(A_p)) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc il existe un rang $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_k, B(\lambda_k, \varepsilon) \cap \mathrm{Sp}(A_p) \neq \emptyset$.

Posons $P = \max(p_k)$. Soit $r \geq P$. Il existe alors une valeur propre de A_r dans chaque boule. Les boules étant deux à deux disjointes, c'est aussi le cas pour les valeurs propres donc A_r est diagonalisable.

Pour l'inclusion réciproque, considérons donc une matrice A diagonalisable. On suppose que ses valeurs propres ne sont pas deux à deux disjointes. De fait, on va montrer que $A \notin \mathrm{Int}(A)$. A étant diagonalisable, il existe $\lambda, \lambda_3, \lambda_4, \cdots, \lambda_n$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P \underbrace{\mathrm{diag}(\lambda, \lambda_3, \lambda_4, \cdots, \lambda_n)}_{=:D} P^{-1}$. Posons alors $D_p = D + 1/pE_{12}$ et $A_p = PD_pP^{-1}$. D_p n'est pas diagonalisable. En effet, l'induit de D_p par (e_1, e_2) n'est pas diagonalisable donc D_p ne l'est pas. Donc A_p n'est pas diagonalisable, et ce, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc A est limite de suite non diagonalisable : $A \notin \mathrm{Int}(A)$.

Exercice 58. Montrer que l'adhérence des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Indication : on rappelle le résultat d'un exercice très classique : deux matrices réelles semblables dans $\mathbb{C}$ sont semblables dans $\mathbb{R}$.*

Corrigé : On procède par double inclusion. On note D, l'ensemble des matrices diagonalisables, T pour trigonalisable. On veut montrer que $\overline{D} = T$. Pour l'inclusion $\overline{D} \subset T$, il suffit de montrer que T est fermé, puisqu'il contient D. Faisons-le par caractérisation séquentielle. Soit $(A_p)_p$, une suite d'éléments de T convergente, disons vers A. Pour cela, on plonge les matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on trigonalise. Il suffit de montrer que les valeurs propres complexes de A sont en fait réelle. A sera ensuite trigonalisable. Comme dans l'exercice précédent, $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \chi_{A_p}(\lambda) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_A(\lambda) = 0$. Encore une fois, on peut donc écrire, en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A_p (qui sont réelles),

$$\forall p \in \mathbb{N}, |\chi_{A_p}(\lambda)| = \prod_{i=1}^{n} |\lambda - \lambda_i| = \prod_{i=1}^{n} |\Re(\lambda) - \lambda_i + i\Im(\lambda)| \geq \prod_{i=1}^{n} \Im(\lambda) = \Im(\lambda)^n.$$

L'inégalité passe à la limite quand $p \to +\infty$ et $\Im(\lambda) = 0$. D'où le résultat.

Maintenant, on souhaite montrer que $T \subset \overline{D}$. On fait comme dans 56. Soit $A \in T$. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = PTP^{-1}$ avec T, une matrice triangulaire supérieure de la diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}_{p\geq n_0}$, on note $T_p = T + \mathrm{diag}(1/p, 2/p, \cdots, n/p)$. Alors T_p est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples par le lemme. Donc $A_p = PT_pP^{-1}$ est diagonalisable, et ce, pour tout $p \geq n_0$. Puisque $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue et que $T_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} T$, on en déduit que $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$. Donc A est bien limite de matrices diagonalisables.

Chapitre 7

Algèbre linéaire

Exercice 59. Soit E de dimension n, et F, G, deux sous-espaces vectoriels de E isomorphes (donc de même dimension). Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.
La réciproque étant triviale, que se passe-t-il maintenant en dimension infinie ?

Corrigé : On procède par récurrence sur p. Initialisation : pour $p = n-1$, puisque $F \cup G \neq E$ (on utilise le fait qu'une union est un ev. lorsque l'un est inclus dans l'autre). Il existe alors $a \in E$ tel que $a \notin F, a \notin G$. Alors $\mathrm{Vect}(a)$ est un supplémentaire commun par Grassmann. (le caractère direct est clair).
Supposons acquis le résultat au rang $p+1$. Je prends un a comme précédemment. Soit $F_1 = F \oplus \mathrm{Vect}(a)$ et $G_1 = G \oplus \mathrm{Vect}(a)$. Alors par hypothèse de récurrence, il existe H tel que $F_1 \oplus H = E, G_1 \oplus H = E$. Ainsi, F et $\mathrm{Vect}(a) \oplus H$ sont en somme directe (c'est facile à montrer), et de même avec G. D'où l'hérédité, et donc la récurrence.

Pour la dimension infinie, le sens direct devient faux. En effet, soit $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto XP(X) \in X\mathbb{R}[X]$. Alors φ est clairement bijective et linéaire. Pour autant, le seul supplémentaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ est $\{0\}$, qui n'est pas supplémentaire de $X\mathbb{R}[X]$.

La réciproque est cependant vraie. Soit H tel que $F \oplus H = E$ et $G \oplus H = E$. Soit p un projecteur sur F parallèlement à H. La forme géométrique du théorème du rang assure que p induit un isomorphisme d'un supplémentaire de son noyau dans son image. Le noyau de p est H donc un supplémentaire de H est G. L'image de p est F donc $p_G : x \in G \mapsto p(x) \in F$ est un isomorphisme.

Exercice 60. Soit E de dimension n, $u_1, \cdots, u_n \in \mathcal{L}(E)$, nilpotents, qui commutent 2 à 2. Calculer $u_1 \circ \cdots \circ u_n$. *Remarque. On donnera une autre preuve dans l'exercice 79.*

Corrigé : On va montrer que ça fait 0. Déjà, il est clair que

$$\{0\} \subset \ker(u_1) \subset \ker(u_2 \circ u_1) \subset \cdot \ker(u_n \circ \cdots \circ u_1) \subset E.$$

Supposons qu'une des inclusions est une égalité, disons $\ker(u_k \circ \cdots \circ u_1) = \ker(u_{k+1} \circ u_k \circ \cdots \circ u_1)$ pour un certain k. Alors

$$\ker(u_k \circ \cdots \circ u_1) = \ker(u_{k+1} \circ u_k \circ \cdots \circ u_1) = \ker(u_{k+1}^2 \circ u_k \circ \cdots \circ u_1).$$

En effet, déjà,

$$\ker(u_{k+1} \circ u_k \circ \cdots \circ u_1) \subset \ker(u_{k+1}^2 \circ u_k \circ \cdots \circ u_1).$$

Soit $x \in \ker(u_{k+1}^2 \circ u_k \circ \cdots \circ u_1)$. Alors $u_{k+1} \circ (u_{k+1} \circ u_k \circ \cdots \circ u_1)(x) = 0$. Puisque les endomorphismes commutent 2 à 2, on a $(u_{k+1} \circ u_k \circ \cdots \circ u_1) \circ u_{k+1}(x) = 0$ ce qui signifie que $u_{k+1}(x) \in= \ker(u_{k+1} \circ u_k \circ \cdots \circ u_1) = \ker(u_k \circ \cdots \circ u_1)$ donc

$$u_k \circ \cdots \circ u_1(u_{k+1}(x)) = 0$$

et en utilisant la commutation encore une fois,

$$u_{k+1} \circ u_k \circ \cdots \circ u_1(x) = 0$$

et $x \in \ker(u_{k+1} \circ u_k \circ \cdots \circ u_1)$ d'où l'autre inclusion.

Ainsi, par récurrence immédiate,

$$\ker(u_k \circ \cdots \circ u_1) = \ker(u_{k+1}^p \circ u_k \circ \cdots \circ u_1)$$

et pour p égal à l'indice de nilpotence de u_{k+1}, on a

$$\ker(u_k \circ \cdots \circ u_1) = \ker(u_{k+1}^p \circ u_k \circ \cdots \circ u_1) = \ker(0 \circ u_k \circ \cdots \circ u_1) = \ker(0) = E.$$

Ainsi, $u_k \circ \cdots \circ u_1 = 0$ et donc $u_n \circ \cdots \circ u_1 = 0$ ce qui conclut.

Ainsi, il reste à traiter le cas où toutes les inclusions sont strictes. Puisque u_1 est nilpotente, $\ker(u_1) \neq \{0\}$ [1]. De fait, si on note d_k la dimension de $\ker(u_k \circ \cdots \circ u_1)$, on a

$$1 \leq d_1 < d_2 < \cdots < d_n \leq n$$

mais par stricte croissance des $(d_k)_{1 \leq k \leq n}$, on a $d_n \geq n$ donc $d_n = n$ et $\ker(u_n \circ \cdots \circ u_1) = E$ par dimension : on a bien $u_n \circ \cdots \circ u_1 = 0$.

Exercice 61. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les matrices considérées sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit A une matrice nilpotente. Montrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.
2. On suppose que AB est nilpotente. Montrer que $I_n - BA$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de l'inverse de $I_n - AB$.
3. On ne suppose plus que AB est nilpotente mais que $I_n - AB$ est inversible. Montrer que $I_n - BA$ est inversible.

Corrigé :

1. Puisque A est nilpotente, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_n$. Alors
$$\left(\sum_{p=0}^{k} A^p\right)(I_n - A) = \sum_{p=0}^{k} A^p - A^{p+1} = A^0 - A^{k+1} = I_n - 0_n.$$
Ainsi, $I_n - A$ est inversible d'inverse $\displaystyle\sum_{p=0}^{k} A^p$.
Cette technique doit faire écho à l'exercice 38
2. Si AB est nilpotente, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $(AB)^k = 0_n$. Alors $(BA)^{k+1} = B(AB)^k A = A0_nB = 0_n$ donc BA est nilpotente. Par la première question, on en déduit que $I_n - BA$ est inversible et on a
$$(I_n - BA)^{-1} = \sum_{p=0}^{k+1}(BA)^p = I_n + \sum_{p=1}^{k+1}(BA)^p = I_n + \sum_{p=0}^{k}(BA)^{p+1} = I_n + \sum_{p=0}^{k} B(AB)^p A = I_n + B\underbrace{\left(\sum_{p=0}^{k}(AB)^p\right)}_{=(I_n - AB)^{-1}} A.$$
3. Puisque $I_n - AB$ est inversible, l'écriture
$$I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$$
est légitime. Cette matrice est un bon candidat pour l'inverse de $I_n - BA$. Montrons-le.

[1]. un endomorphisme nilpotent ne saurait être injectif. En effet, en notant q indice de nilpotence de u nilpotent, on a $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$ donc $\{0\} \subsetneq \mathrm{Im}(u^{q-1}) \subset \ker(u)$

$$\begin{aligned}\left(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A\right)(I_n - BA) &= I_n - BA + B(I_n - AB)^{-1}A - B(I_n - AB)^{-1}ABA \\ &= I_n + B\left(-I_n + (I_n - AB)^{-1} - (I_n - AB)^{-1}AB\right)A.\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $-I_n + (I_n - AB)^{-1} - (I_n - AB)^{-1}AB = 0_n$. Montrons-le. Pour ce faire, mieux vaut multiplier par $I_n - AB$ pour ôter les -1 et puisque elle est inversible, cette opération induit une équivalence. On écrit

$$(I_n - AB)\left(-I_n + (I_n - AB)^{-1} - (I_n - AB)^{-1}AB\right) = -I_n + AB + I_n - AB = 0_n.$$

Ainsi, $-I_n + (I_n - AB)^{-1} - (I_n - AB)^{-1}AB = 0_n$ donc $(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A)(I_n - BA) = I_n$ et $I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$ est un inverse de $I_n - BA$. Ainsi, $I_n - BA$ est inversible d'inverse $I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$.

Exercice 62. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle. En déduire que toute matrice de trace nulle s'écrit $MN - NM$. On pourra montrer que toute matrice de diagonale nulle s'écrit $BD - DB$ avec $D = \operatorname{diag}(1, 2, \cdots, n)$ et B quelconque.

Corrigé : Soit M la matrice de trace nulle. On procède par récurrence sur n (le même n que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Pour $n = 1$, le résultat est immédiat.
Soit u, l'endomorphisme canoniquement associée à M. Si u est une homothétie, il est clair que u est de diagonale nulle (la trace d'une homothétie étant égale à $n\lambda$ si λ est le coefficient de l'homothétie).
Si u n'est pas une homothétie, alors je peux trouver un x non nul tel que $(x, u(x))$ ne soit pas liée (voir l'exercice **??**). Notons $\mathcal{B}$, la base obtenue par le principe de la base incomplète appliquée à la famille libre $\{x, u(x)\}$. J'ai donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ u & N \end{pmatrix}$$

avec u le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ composé que de 0 sauf en première ligne, et N une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Puisque M est semblable à $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, elles ont la même trace, donc $\operatorname{Tr}(N) = 0$. Par hypothèse de récurrence, je peux trouver Q inversible tel que QNQ^{-1} soit de diagonale nulle.
Je pose alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

de sorte que $P\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & QNQ^{-1} \end{pmatrix}$ qui est donc de diagonale nulle.

Continuons. Déjà, l'indication. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. On a $[DB - BD]_{i,j} = (i - j)[B]_{i,j}$. Il suffit alors de prendre $[B]_{ij} = \dfrac{1}{i - j}[A]_{ij}$ et n'importe quoi en coefficients diagonaux.
Pour conclure, soit M de trace nulle. Soit C de diagonale nulle et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = PCP^{-1}$. C s'écrit $DB - BD$. Donc $M = PDBP^{-1} - PBDP^{-1} = PDP^{-1}PBP^{-1} - PBP^{-1}PDP^{-1} = MN - NM$ avec $N = PBP^{-1}$ et $M = PDP^{-1}$.

Exercice 63. Soit E, $\dim(E) = n$ et $F_1, \cdots, F_k$, des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $\sum_{i=1}^{k} \dim(F_i) > n(k-1)$, alors $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \{0\}$.

Corrigé : Soit f l'application définie par

$$f : \begin{array}{ccc} F_1 \times \cdots \times F_k & \to & E^{k-1} \\ (x_1, \cdots, x_k) & \mapsto & (x_2 - x_1, \cdots, x_k - x_1). \end{array}$$

Alors $f(x_1, \cdots, x_k) = 0$ si, et seulement si $(x_1, \cdots, x_k) = (x, \cdots, x)$ pour $x \in \bigcap_{i=1}^{k} F_i$. Le théorème du rang nous donne donc

$$\dim(F_1 \times \cdots \times F_k) = \sum \dim(F_i) = \mathrm{rg}(f) + \dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i\right).$$

Puisque $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E^{k-1}) = n(k-1)$, on a bien $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i\right) > 0$.

Exercice 64. Soit A un anneau. On dit que I est un idéal bilatère de A lorsque

- $(I, +)$ est un sous-groupe de A.
- $\forall x \in I, \forall a \in A, ax \in I$ et $xa \in I$.

L'objectif est de montrer que les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont $\{0_n\}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit donc $I \neq \{0\}$ idéal bilatère de $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si $I_n \in A$, alors $I = A$. En déduire que $I \cap A^\times \neq \emptyset$, alors $I = A$.
2. Soit $M \in I$ de rang r. Soit U une matrice diagonale contenant exactement r fois le coefficient 1. Montrer que $U \in I$.
3. En déduire que $I \cap A^\times \neq \emptyset$.

Corrigé :

1. Si $I_n \in I$, alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M = MI_n \in I$ donc I contient $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui contient I puisque I en est un sous-groupe. Donc $I = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.[2] Si $I \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$, soit T dans cet ensemble. Alors T^{-1} existe et est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $T \in I$ donne $TT^{-1} \in I$ donc $I_n \in I$. Ainsi, $I = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.[3]

2. Remarquons que si A est une matrice de I, toute matrice B équivalente à A est aussi dans I. En effet, si A et B sont équivalentes, il existe P, Q inversibles telles que $B = PAQ$ et $AQ \in I$ et $P(AQ)$ est donc dans I. Ainsi, comme toute matrice de rang r est équivalente à J_r, A est équivalente à J_r donc $J_r \in A$.

   Considérons donc notre matrice U et $j_1, \cdots, j_r$, les indices des colonnes qui contiennent un « 1 ». Soit

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$$

   Alors par opérations élémentaires sur les colonnes, on a $J_r M_\sigma = U$.

   Rappel : Réaliser une opération élémentaire sur les lignes/colonnes induit une multiplication à gauche/droite par une matrice bien choisie. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$, réaliser $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, c'est multiplier à gauche par $(I_n + \lambda E_{ij})$. Ici, M_σ désigne $(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)})$ où $(e_1, \cdots, e_n)$ désigne la base canonique. En fait, on permute les colonnes de I_n selon σ. AM_σ permute les colonnes de A selon σ. Plus généralement, voilà ce qu'il faut retenir.

2. Ce fait est général. Si $(A, +, \times)$ est un anneau et I un idéal de A, si I contient le neutre pour $\times$, alors $I = A$. Les idéaux sont au programme seulement en MP, et tombe à 99% seulement à X-ENS aux écrits, et un peu aux oraux de tout concours. Je parle d'idéaux dans la sous-section ??.

3. Ce fait est encore général. Si I est un idéal de A et intersecte $A^\times$, alors $I = A$.

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit T une transformation d'une matrice vers une autre. Alors

si T réalise l'opération	alors on réalise
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$AT_{ij}(\lambda)$
$L_i \leftarrow \mu L_i$	$AD_i(\mu)$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$AM_{\tau_{ij}}$

où L_i désigne la i-ème ligne de A, λ, μ deux scalaires et μ non nul, $T_{ij}(\lambda)$ désigne $I_n + \lambda E_{ij}$, $D_i(\lambda)$ désigne $T_{ii}(\mu - 1)$ et $M_{\tau_{ij}}$ matrice identité où l'on a échangé les colonnes i et j. On a le même tableau pour les colonnes, sauf que cette fois-ci, la matrice A est multipliée par la droite mais avec une transposée.[a] Ces matrices en questions sont appelées matrices élémentaires, associées aux opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice, respectivement matrice de transvection, dilatation, permutation.

a. Si l'on réalise une permutation σ sur les lignes, on multiplie par $M_{\sigma^{-1}}$ à gauche. Si l'on réalise une permutation σ sur les colonnes, on multiplie par M_σ à droite.

3. Notons $\tau_i = (r\ i)$ où r est le rang définit précédemment. Alors

$$\forall i \in [\![r+1, n]\!], \underbrace{J_r M_{\tau_i}}_{\in I} = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0_{r-1,n-r+1} \\ 0_{n-r+1,r-1} & 0_{n-r+1} \end{pmatrix} + E_{ii} = J_{r-1} + E_{ii}.$$

Donc $((I, +)$ est un sous-groupe)

$$\underbrace{\sum_{k=r+1}^{n} J_r M_{\tau_i}}_{\in I} = (n-r)J_{r-1} + \begin{pmatrix} 0_{r-1} & 0_{r-1,n-r+1} \\ 0_{n-r+1,r-1} & I_{n-r-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Ainsi, I intersecte $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $I = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 65. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit E un espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On note

$$J_E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \mathrm{Im}(A) \subset E\}.$$

Montrer que J_E est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On souhaite montrer dans la suite que tous les idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont de la forme J_E.

2. *Lemme préliminaire* Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Soit $u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n, v : \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^n$ deux applications linéaires telles que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u)$. Montrer qu'il existe $w : \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p$ linéaire telle que $v = u \circ w$. *On utilisera dans la suite la version matricielle de ce lemme.*
3. Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$.
   (a) Soit $D = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$. Que vaut $\mathrm{Im}(D)$?
   (b) En déduire qu'il existe $W \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{K})$ telle que $C = DW$.
   (c) Montrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $C = AU + BV$.
4. Soit J un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer que la quantité $\max\{\mathrm{rg}(M) : M \in J\}$ est bien définie. On note cet élément r et on considère $M_0 \in J$ tel que $\mathrm{rg}(M_0) = r$.
   (b) Soit $M \in J$. Montrer par l'absurde que $\mathrm{Im}(M_0) \subset \mathrm{Im}(M)$.
   (c) Montrer que $J \subset J_{\mathrm{Im}(M_0)}$.
5. Conclure.

Corrigé :

1. - Déjà, $0_n \in J_E$. Soit $M, N \in J_E$. On veut montrer que $M - N \in J_E$. Or, $\mathrm{Im}(M-N) \subset \mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(N) \subset E$, où la première inclusion est claire via l'écriture

$$\mathrm{Im}(M-N) = \{(M-N)X : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\} = \{MX-NX : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\} \subset \{MX+NY : X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

   et la deuxième car $\mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Im}(N)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   Ainsi, $(J_E, +)$ est un sous-groupe additif de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$.
   - Soit $M \in J_E, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On veut montrer que $MA \in J_E$. Or, on a immédiatement $\mathrm{Im}(MA) \subset \mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Im}(M) \subset E$ donc $MA \in J_E$.

   Ainsi, J_E est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit E' supplémentaire de $\ker(u)$ dans $\mathbb{K}^p$ ($\mathbb{K}^p = E' \oplus \ker(u)$). Par le théorème du rang, il existe

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{u} : & E' & \to & \mathrm{Im}(u) \\ & x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

   telle que $\widetilde{u}$ soit un isomorphisme. Ainsi, pour tout élément $Z \in \mathrm{Im}(u)$, il existe un élément $Y \in E'$ tel que $\widetilde{u}(Y) = Z$ (et $\widetilde{u}(Y) = u(Y)$). Soit $(e_1, \cdots, e_q)$ une base de $\mathbb{K}^q$.
   Soit $i \in [\![1, q]\!]$. Alors il existe $Y_i \in E'$ tel que $\widetilde{u}(Y_i) = v(e_i)$ puisque $v(e_i) \in \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u)$. Soit alors w une application linéaire de $\mathbb{K}^q$ dans $\mathbb{K}^p$ tel que $w(e_i) = Y_i$ pour tout $i \in [\![1, q]\!]$.
   w est alors entièrement déterminé et on a

$$\forall i \in [\![1, q]\!], v(e_i) = u(w(e_i))$$

   donc v et $u \circ w$ coïncident sur une même base : elles sont égales.
3. (a) $\mathrm{Im}(D)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs colonnes composant D donc *a fortiori* est la somme $\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$ puisque D est la matrice $(A\ B)$.
   (b) Par le théorème admis, on a le résultat.
   (c) Notons $W = \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}$ avec $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors par produit par blocs, $DW = AU + BV$.
4. (a) $\{\mathrm{rg}(M) : M \in J\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ majorée par n car $J \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, non vide car $0 \in J$ donc 0 est dans la partie en question. Ainsi, cette partie admet un plus grand élément noté r.
   (b) Soit $M \in J$ et $\mathrm{Im}(M) \not\subset \mathrm{Im}(M_0)$.

   > Il s'agit d'utiliser la question 6 avec $A = M$ et $B = M_0$. On veut trouver C tel que $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(M_0)$ avec C de rang $r+1$. On aura donc une contradiction puisque $C \in J$.

   Soit C matrice d'un projecteur sur $\mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(M_0)$ parallèlement à un supplémentaire de cet espace dans E. Alors $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(M_0)$ et $\mathrm{rg}(C) = \dim(\mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(M_0))$. Or, puisque $\mathrm{Im}(M) \not\subset \mathrm{Im}(M_0)$, il existe $Y \in \mathrm{Im}(M)$ tel que $Y \notin \mathrm{Im}(M_0)$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(M_0)) > \dim(\mathrm{Im}(M_0)) = r$ donc C est de rang strictement supérieur à r. Ceci est une contradiction puisque C, qui est dans J en vertu de la question 6, est d'un rang supérieur strictement à r. Ainsi, $\mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Im}(M_0)$
   (c) Comme le résultat précédent est vrai pour tout $M \in J$, par définition de J_E, on a donc $J \subset J_{\mathrm{Im}(M_0)}$, et ce, pour tout J, idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
5. On va montrer que l'ensemble des idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble $\{J_E : E \text{ sev de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$.

   $\subset$ Soit J un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par la question 7, il existe une matrice M_0 tel que $J = J_{\mathrm{Im}(M_0)}$ donc on a l'inclusion.

   $\supset$ Réciproquement, tout idéal de la forme J_E est un idéal à droite par la question 4.

Exercice 66. Soit E, F de dimension strictement positive, $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $\mathrm{rg}(g) \leq \mathrm{rg}(f) \iff \exists h \in \mathrm{GL}(F), k \in \mathcal{L}(E), h \circ g = f \circ k$.

Corrigé : L'implication réciproque est facile. Soit $h \in \mathrm{GL}(F)$ et $k \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h \circ g = f \circ k$. Alors $g = h^{-1} f k$ donc $\mathrm{Im}(g) \subset h^{-1}(\mathrm{Im}(f))$. h étant inversible, $\mathrm{rg}(g) \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$. D'où le résultat.
Maintenant, regardons le sens direct. Soit $p = \mathrm{rg}(f), q = \mathrm{rg}(g)$. On suppose $q \leq p$. Soit $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$, une base de $\ker(f)$. Je la complète en une base de E, $(e_1, \cdots, e_n)$. Soit $(\varepsilon_{q+1}, \cdots, \varepsilon_n)$, une base de $\ker(g)$. Je la complète en une base de E, $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$. La famille $(g(\varepsilon_1), \cdots, g(\varepsilon_q))$ est une base de $\mathrm{Im}(g)$, que je complète en une base de F via $g_{q+1}, \cdots, g_m$. Pareillement, je construis une base de F $(f(e_1), \cdots, f_(e_p), f_{p+1}, \cdots, f_m)$.
Soit k définie par $k(\varepsilon_1) = e_1, \cdots, k(\varepsilon_q) = e_q, k(\varepsilon_{q+1} = \cdots = k(\varepsilon_n) = 0$.
Soit h, l'automorphisme qui transforme la base des g en la base des f.
Le résultat en découle.

Exercice 67. Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Corrigé : Soit M la matrice dont il faut calculer le déterminant. Soit C le vecteur colonne plein de 1 et $e_1, \cdots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\det(M) = \det(M^T) = \det(b_1 C + a_1 e_1, b_2 C + a_2 e_2, \cdots, b_n C + a_n e_n).$$

Or, dès lors que dans le déterminant, on a deux colonnes de la forme $b_i C$ et $b_j C$, alors le déterminant est nul. En réalisant le développement par $n-$linéarité du déterminant, on a au plus un seul terme de la forme $b_i C$. Ainsi, on a soit un terme de la forme $b_i C$, soit aucun. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \sum_{k=1}^{n} \det(a_1 e_1, \cdots, a_{k-1} e_{k-1}, b_k C, a_{k+1} e_{k+1}, \cdots, a_n e_n) + \det(a_1 e_1, \cdots, a_n e_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_k \underbrace{\det\left(a_1 e_1, \cdots, a_{k-1} e_{k-1}, \sum_{j=1}^{n} e_j, a_{k+1} e_{k+1}, \cdots, a_n e_n\right)}_{*} + \prod_{i=1}^{n} a_i \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_k \det(a_1 e_1, \cdots, a_{k-1} e_{k-1}, e_k, a_{k+1} e_{k+1}, \cdots, a_n e_n) + \prod_{i=1}^{n} a_i \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_k \prod_{i \neq k} a_i + \prod_{i=1}^{n} a_i.
\end{aligned}$$

On justifie le calcul dans $*$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\det\left(a_1 e_1, \cdots, a_{k-1} e_{k-1}, \sum_{j=1}^{n} e_j, a_{k+1} e_{k+1}, \cdots, a_n e_n\right) &= \sum_{j=1}^{n} \det(a_1 e_1, \cdots, a_{k-1} e_{k-1}, e_j, a_{k+1} e_{k+1}, \cdots, a_n e_n) \\
&= \det(a_1 e_1, \cdots, a_{k-1} e_{k-1}, e_k, a_{k+1} e_{k+1}, \cdots, a_n e_n),
\end{aligned}$$

car si $j \neq k$, par le caractère alterné, le déterminant est nul.

Exercice 68. Soit $m < n$ deux entiers naturels, $P_1, \cdots, P_n$ des polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$. Soit $a_1 \cdots a_n$, des réels. Calculer $\det(A)$ avec $[A]_{i,j} = P_i(a_j)$. En déduire la valeur de $\det(B)$ avec $[B]_{i,j} = (i + j - 1)^m$.

Corrigé : On écrit $P_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}X^k$. Alors on note B, la matrice de coefficient $[B]_{ik} = b_{ik}$. En notant v, la matrice de Vandermonde associée à $a_1, \cdots a_n$, on a $A = Bv$. De fait, $\det(A) = \det(B)\det(v) = \det(P_1, \cdots, P_n)\det(V)$. Remarquons que le déterminant est non nul si les a_i sont deux-à-deux distincts, et que les $P_1, \cdots, P_n$ sont libres, donc $n = m+1$. Application : on prend $P_j = (X+j-1)^m$ et $a_i = i$. Si $n > m+1$, alors les P_i sont liés et le déterminant est nul. Sinon, on a dans un premier temps

$$V(a_1, \cdots, a_n) = V(1, 2, \cdots, n) = \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(j-i) = \prod_{j=1}^{n-1} j!$$

. Dans un second temps, en utilisant la formule du binôme, on voit clairement que

$$\det(P_1, \cdots, P_n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\right)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2^{n-1} & \cdots & (n-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & 2^{n-2} & \cdots & (n-1)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1(=0^0) & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

On a

$$\prod_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = \prod_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} = (n-1)^{n-1}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(n-1-i)!} = (n-1)^{n-1}\left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}\right)^2.$$

Enfin, le déterminant est un Vandermonde, à condition qu'on retourne la liste des lignes : or, un renversement d'une liste à n éléments a, pour signature, $(-1)^{n(n-1)/2}$ (transformer $1-2-3-4-5$ en $5-4-3-2-1$). Ainsi,

$$\det(P_1, \cdots, P_n) = (-1)^{n(n-1)/2}(n-1)^{n-1}\left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}\right)^2.$$

Le déterminant cherché vaut donc

$$(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)^{n-1}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}$$

Exercice 69. Soit $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$, des complexes tels que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_i + b_j \neq 0$. Calculer $\det(C_n)$ avec $[C_n]_{i,j} = \dfrac{1}{a_i + b_j}$.

Corrigé : On multiplie chaque colonne j par $a_n + b_j$ de sorte d'avoir que des 1 en dernière ligne. On a

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_n+b_1)(a_n+b_2)\cdots(a_n+b_n)}\begin{vmatrix} \frac{a_n+b_1}{a_1+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_1+b_n} \\ \frac{a_n+b_1}{a_2+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

On utilise maintenant le lemme suivant :

$$\frac{a+b}{\alpha+b} = 1 + \frac{a-\alpha}{\alpha+b}.$$

De fait, en soustrayant chaque ligne par la dernière, j'ai

$$\begin{vmatrix} \frac{a_n+b_1}{a_1+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_1+b_n} \\ \frac{a_n+b_1}{a_2+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{a_1+b_1} & \frac{a_n-a_1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{a_1+b_n} \\ \frac{a_n-a_2}{a_2+b_1} & \frac{a_n-a_2}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{a_n-a_2}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Je peux donc sortir en facteur sur chaque ligne i, un terme $a_n - a_i$. Ainsi,

$$\det(C_n) = \frac{(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})}{(a_n+b_1)(a_n+b_2)\cdots(a_n+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

On a bien envie d'avoir beaucoup de 0 en dernière ligne. On retire à chaque colonne la dernière. En utilisant

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+\beta} = \frac{\beta - b}{(a+b)(a+\beta)},$$

on a

$$\det(C_n) = \frac{(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})}{(a_n+b_1)(a_n+b_2)\cdots(a_n+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la dernière ligne. On obtient alors

$$\det(C_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}{\prod_{i=1}^{n}(a_n+b_i)} \begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} \\ \frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_2+b_{n-1})(a_2+b_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{b_n-b_1}{(a_{n-1}+b_1)(a_{n-1}+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_{n-1}+b_2)(a_{n-1}+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_{n-1}+b_n)} \end{vmatrix}.$$

Sur chaque ligne i, on sort un facteur (a_i+b_n) et sur chaque colonne j, on sort un facteur (b_n-b_j). Cela donne

$$\det(C_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(a_n+b_i)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Donc

$$\det(C_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(a_n+b_i)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)}\det(C_{n-1}).$$

Pour conclure proprement, on fait une récurrence. Sinon, on écrit

$$\frac{\det(C_n)}{\det(C_{n-1})} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)\prod_{i=1}^{n-1}(b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(a_n + b_i)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i + b_n)}.$$

Donc

$$\det(C_n) = \prod_{j=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{j-1}(a_j - a_i)\prod_{i=1}^{j-1}(b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^{j}(a_j + b_i)\prod_{i=1}^{j-1}(a_i + b_j)} = \prod_{j=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{j-1}((a_j - a_i)(b_j - b_i))}{(a_j + b_j)\prod_{i=1}^{j-1}(a_j + b_i)(a_i + b_j)} = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j + b_j}\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{(a_j + b_i)(a_i + b_j)}.$$

Exercice 70. Soient $a_1, \cdots, a_n$, des complexes. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Corrigé : Notons d, le déterminant à chercher. On rajoute une colonne au trou : la colonne des a_i^k pour i allant de 1 à n. Enfin, pour la dernière ligne, on rajoute la ligne des X^j pour j allant de 0 à n. Alors le déterminant voulu est le mineur $\delta_{n+1,k+1}$.

Mais en développant par rapport à la dernière ligne, on obtient exactement un polynôme, dont le coefficient devant X^k est exactement $(-1)^{n+1+k+1}d$. Par ailleurs, le nouveau déterminant est un Vandermonde ! Il vaut $V(a_1, \cdots, a_n, X) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$. En utilisant les relations coefficients racines (formule de Viète), il vient

$$(-1)^{n+k}d = (-1)^{n-k}\sigma_{n-k}\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i),$$

avec $\sigma_{n-k} = \sum_{J\subset[\![1,n]\!],|J|=n-k}\prod_{j\in J}a_j$. Ainsi

$$d = \sigma_{n-k}\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i).$$

Chapitre 8

Réduction des endomorphismes

Exercice 71. Soit $F = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\Phi : P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto FP\%(X^n - 1) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Ecrire la matrice de Φ dans la base canonique. Calculer ses vecteurs propres et valeurs propres. Est-elle diagonalisable ?

Corrigé : Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, P, Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Soit $(Q_P, R_P), (Q_Q, R_Q)$ couple de la division euclidienne tels que

$$PF = Q_P(X^n - 1) + R_P \ , \ QF = Q_Q(X^n - 1) + R_Q.$$

Alors

$$(\lambda P + \mu Q)F = (\lambda Q_P + \mu Q_Q)(X^n - 1) + \lambda R_p + \mu R_Q$$

ce qui signifie que $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$ car $\deg(\lambda R_P + \mu R_Q) < n$ puis par unicité de la division euclidienne. ϕ est bien linéaire.

Maintenant, soit $\ell \in [\![0, n-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned} FX^\ell &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{k+\ell} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-\ell-1} a_k X^{k+\ell}}_{\text{de degré } \geq n-1 < n} + \sum_{k=n-\ell}^{n-1} a_k X^{k+\ell}. \end{aligned}$$

Pour $k \geq n-\ell, X^{k+\ell} = X^n X^{n-k-\ell}$. Ainsi, $X^{k+\ell} = (X^n - 1)X^{k+\ell-n} + X^{k+\ell-n}$ et $k+\ell-n \in [\![0, n]\!]$ $(n \leq k+\ell \leq 2n)$. D'où

$$\left(\sum_{k=n-\ell}^{n} a_k X^{k+\ell}\right) \%(X^n - 1) = \sum_{k=n-\ell}^{n-1} a_k X^{k+\ell-n}.$$

Ainsi,

$$\phi(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n-\ell-1} a_k X^{k+\ell} + \sum_{k=n-\ell}^{n-1} a_k X^{k+\ell-n} = \sum_{k=\ell}^{n-1} a_{k-\ell} X^k + \sum_{k=0}^{\ell-1} a_{n+k-\ell} X^k.$$

D'où

$$\phi(X^0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \ , \ \phi(X^1) = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_0 \\ \vdots \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \ , \ \cdots$$

ce qui donne

$$\mathrm{Mat}_{1,X,\cdots,X^{n-1}}(\phi)=\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice circulante. On veut ses valeurs propres. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\phi)$. Soit P tel que $\phi(P)=\lambda P$. Soit $Q\in\mathbb{C}[X]$ tel que $FP=(X^n-1)Q+\phi(P)$. Alors $(F-\lambda)P=(X^n-1)Q$. Soit $\omega\in\mathbb{U}_n$. Alors $(F(\omega)-\lambda)P(\omega)=0$. Si $F(\omega)\neq\lambda$ pour tout ω dans $\mathbb{U}_n$, alors $P=0$ (par degré, P est de degré $n-1<n=\mathrm{Card}(\mathbb{U}_n)$).

Ainsi, $\mathrm{Sp}(\phi)\subset\{F(\omega)\,:\,\omega\in\mathbb{U}_n\}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $\omega\in\mathbb{U}_n$. Alors $X-\omega$ divise $F(X)-F(\omega)$ et X^n-1. Soit donc $Q\in\mathbb{C}_{n-1}[X], R\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$F(X)-F(\omega)=Q(X)(X-\omega)\ ,\ X^n-1=R(X)(X-\omega).$$

Alors

$$(F(X)-F(\omega))R(X)=(X^n-1)Q(X)$$

donc

$$F(X)R(X)=(X^n-1)Q(X)+F(\omega)R(X).$$

Puisque $\deg(R)=n-1<n$, par unicité de la division euclidienne, $\Phi(R)=F(\omega)(R)$ donc $F(\omega)\in\mathrm{Sp}(\phi)$.

Ainsi, $\mathrm{Sp}(\Phi)=\{F(\omega)\,:\,\omega\in\mathbb{U}_n\}$ et R est un vecteur propre pour les $F(\omega)$ de ϕ. Notons $\omega_1,\cdots,\omega_n$, les racines n-ème de l'unité et $R_1,\cdots,R_n$, vecteurs propres respectifs. Soit $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i R_i=0.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i R_i(\omega_j)=\lambda_j R_j(\omega_j)=0$$

pour tout $j\in[\![1,n]\!]$. On rappelle que $R_j=\dfrac{X^n-1}{X-\omega_j}$ ce qui donne $\lambda_j=0$. Ainsi, les $(R_i)_i$ sont libres donc forment une base par cardinalité : Φ est diagonalisable car possède une base de vecteurs propres.

Exercice 72. Soit A, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, $\forall n\in\mathbb{N}, \mathrm{tr}(A^n)=0$. (On pourra redémontrer pourquoi une matrice A est semblable à une matrice triangulaire stricte).

Corrigé : Il existe plusieurs preuves qui montrent qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire stricte. En voilà une qui ne met pas en jeu la structure de $\mathbb{C}$. Mettons que l'indice de nilpotence de A soit p. Soit $x_0\notin\ker(u^{p-1})$, possible car $u^{p-1}\neq 0$. Alors $(x_0,u(x_0),\cdots,u^{p-1}(x_0))$ est libre. En effet, soit $\lambda_0,\cdots,\lambda_{p-1}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k u^k(x_0)=0.$$

Soit $A=\{k\in[\![0,p-1]\!]\,:\,\lambda_k\neq 0\}$. Supposons que A est non vide. Étant alors une partie non vide de $\mathbb{N}$, A admet un plus petit élément k_0. Alors soit $k_0=0$, soit $\lambda_0=\cdots=\lambda_{k_0-1}=0$. Dans les deux cas, en composant par u^{p-k_0-1}, on a

$$0=u^{p-k_0-1}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k u^k(x_0)\right)=\sum_{k=k_0}^{p-1}\lambda_k u^{p-k_0-1+k}(x_0)=\lambda_{k_0}u^{p-1}(x_0)+0+\cdots+0.$$

Comme $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, on a λ_{k_0} donc $\lambda_{k_0} \notin A$: absurde. Ainsi, A est vide. Maintenant, pour avoir une base, puisque $u^{p-1}(x_0)$ est un vecteur non nul du noyau, on le complète en une base du noyau. La concaténation entre cette base et les $(x_0, \cdots, u^{p-2}(x_0))$ forme clairement une base de E. La représentation matricielle en découle.

Maintenant, si A est nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire stricte. Les traces tombent d'elles-même. A est trigonalisable par d'Alembert-Gauss : soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r$. A est alors semblable à une matrice triangulaire de diagonale $(0, \cdots, 0, \lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_r, \cdots, \lambda_r)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ – a priori, il se peut qu'il n'y ait pas de 0 –. Alors A^k est semblable à une matrice triangulaire de diagonale $(0, \cdots, 0, \lambda_1^k, \cdots, \lambda_1^k, \cdots, \lambda_r^k, \cdots, \lambda_r^k)$. Par hypothèse, on a donc

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i = 0 \ ; \ \cdots \ ; \ \mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k \ ; \ \cdots .$$

Cela se traduit en le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 m_1 & + & \lambda_2 m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r m_r & = & 0 \\ \lambda_1^2 m_1 & + & \lambda_2^2 m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r^2 m_r & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & & + & \vdots & = & \vdots \\ \lambda_1^r m_1 & + & \lambda_2^r m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r^r m_r & = & 0 \end{array} \right.$$

et matriciellement en

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0$$

Tous les $\lambda_i, 1 \leq i \leq r$ sont non nuls donc

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} = V(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \prod_{i=1}^{r} \lambda_i = \prod_{1 \leq p < q \leq r} (\lambda_q - \lambda_p) \prod_{i=1}^{r} \lambda_i \neq 0.$$

Ainsi, on a $(m_1, \cdots, m_r) = 0$ ce qui n'est pas. Ainsi, si ce n'est 0, A n'a pas de valeur propre. Donc A est semblable à une matrice triangulaire stricte : A est nilpotente.

Exercice 73. Résoudre l'équation matricielle $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé : Corrigé : On note A, le second membre. Si X est solution, X et A commutent. Donc X va laisser stable les sous-espaces propres de A. Etudions la diagonalisibilité de A. Plus généralement, je vais montrer que la matrice de $n \times n$ avec que des 1 est diagonalisables. En effet, c'est une matrice de rang 1 donc son noyau est de dimension $n-1$. Le noyau est le sous-espace propre associée à la valeur propre 0. Ici, 0 est donc de multiplicité $n-1$. Par ailleurs, cette matrice est stochastique en ligne (et en colonne). De fait, la somme des valeurs sur une ligne constitue une valeur propre associée au vecteur propre composée que de 1. Ainsi, cette matrice a n et 0 comme valeurs propres de multiplicités respectives au moins 1 et exactement $n-1$: elle est donc diagonalisable.

Bref, A est diagonalisable. On a $\mathcal{E}_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathcal{E}_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la remarque du début, si X est solution, $P^{-1}XP$ est diagonale, disons de coefficient α et β. On a donc

$$P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \beta^2\end{pmatrix}P + P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}P = P^{-1}AP$$

ce qui est donc équivalent à demander

$$\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \beta^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

On doit donc résoudre $\alpha^2+\alpha=0, \beta^2+\beta=2$. Les solutions sont les matrices $P\mathrm{diag}(\alpha,\beta)P^{-1}$ donc j'en ai 4 :

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Exercice 74. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. On pourra commencer par A inversible, puis A de rang $r < n$.

Corrigé :

1. On écrit

$$\chi_{AB} = \det(XI_n - AB) = \det(A(XA^{-1}-B)) = \det(A)\det(XA^{-1}-B) = \det(XA^{-1}-B)\det(A) = \det(XI_n-BA)$$

2. Si A est de rang r, A est équivalente à J_r. Etudions donc le cas $A = J_r$. Si $A = J_r$, alors en décomposant par blocs $B = \begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}$, on a

$$AB = \begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ 0 & 0_{n-r}\end{pmatrix}\ ,\ BA = \begin{pmatrix}B_1 & 0\\ B_3 & 0_{n-r}\end{pmatrix}$$

donc $\chi_{AB} = \chi_{B_1}\chi_{0_{n-r}} = \chi_{BA}$.

3. Maintenant, écrivons $A = PJ_rQ$ avec P, Q inversible.

$$\chi_{AB} = \chi_{PJ_rQB} \underset{1}{=} \chi_{J_rQBP} \underset{2}{=} \chi_{QBPJ_r} \underset{1}{=} \chi_{BPJ_rQ} = \chi_{BA}.$$

Exercice 75. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle i-ème disque de Gerschgorin de A l'ensemble $D_i = D(a_{ii}, R_i)$ avec $R_i = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$.

1. Montrer le théorème de Gerschgorin : toute valeur propre est dans un disque de Gerschgorin.
2. En déduire le lemme d'Hadamard :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{ij}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}| \Longrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

(on dit que A est à diagonale strictement dominante).

3. En déduire que si A est de diagonale dominante, alors $|\det(A)| \geq \prod_{i=1}^{n}(|a_{ii}| - R_i)$. Montrer que si A est de plus réelle à diagonale positive, alors $\det(A)$ est de plus strictement positif (on utilisera un argument de convexité).

Corrigé :

1. Soit λ, une valeur propre de A. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$, vecteur propre associée. Alors $AX - \lambda X = 0$. Considérons i, l'indice de $[\![1, n]\!]$ pour que $|x_i|$ soit maximal. Alors
$$(AX - \lambda X)_i = 0.$$
De fait,
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - \lambda x_k = 0.$$
De fait,
$$(a_{ii} - \lambda)x_i = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} a_{ik}x_k.$$
Ainsi,
$$|a_{ii} - \lambda| = \left| \sum_{k=1, k\neq i}^{n} a_{ik} \frac{x_k}{|x_i|} \right| \leq \sum_{k\neq i} |a_{ik}| \underbrace{\frac{|x_k|}{|x_i|}}_{\leq 1} \leq R_i.$$
Donc $\lambda \in D(a_{ii}, R_i)$.
2. Raisonnons par contraposée. Supposons que A ne soit pas inversible. Alors 0 est valeur propre de A. De fait, par le théorème de Gerschgorin, il existe un indice $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Ainsi, A n'est pas à diagonale dominante.
Continuons. Soit A' la matrice obtenue en mutlipliant la i-ème ligne de A par $\dfrac{1}{|a_{ii}| - R_i}$ pour $1 \leq i \leq n$. C'est possible puisque A est à diagonale dominante. Par n-linéarité du déterminant, on a
$$\det(A) = \det(A') \prod_{i=1}^{n} (|a_{ii}| - R_i).$$
Montrons donc que $|\det(A')| \geq 1$. On note $A' = (a'_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et R'_i rayon de Gerschgörin associé à A pour $1 \leq i \leq n$. On a, en mettant au même dénominateur,
$$|a'_{ii}| - R'_i = |a'_{ii}| - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a'_{ij}| \underset{\star}{=} \frac{|a_{ii}| - R_i}{||a_{ii}| - R_i|} = 1$$
et on a $\star$ car A est à diagonale dominante. Par les disques de Gerschgörin, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A')$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda - a'_{ii}| \leq R'_i$ donc par la seconde inégalité triangulaire,
$$R'_i \geq |\lambda - a'_{ii}| \geq |a'_{ii}| - |\lambda|.$$
Par l'inégalité précédente, on en déduit que $|\lambda| \geq 1$. Puisque A' est trigonalisable, le module de son déterminant est le produit des modules des valeurs propres donc $|\det(A')| \geq 1$.
Pour le cas réel, utilisons un argument de convexité. Soit
$$C = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall 1 \leq i \leq n, a_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}.$$
Il s'agit de montrer que C est convexe et par continuité du déterminant, puisque I_n est dans C, on aura le résultat. Soit donc $A, B \in C$ et $t \in [0, 1]$. Alors $tA + (1 - t)B$ est bien réelle. De plus, par inégalité triangulaire,
$$\sum_{j\neq i} |t[A]_{ij} + (1 - t)[B]_{ij}| \leq \sum_{j\neq i} (t\,|[A]_{ij}| + (1 - t)\,|[B]_{ij}|) = t \sum_{j\neq i} |[A]_{ij}| + (1 - t) \sum_{j\neq i} |[B]_{ij}| < ta_{ii} + (1 - t)b_{ii}$$
donc $tA + (1 - t)B$ est dans C donc C est convexe. Par continuité du déterminant, $\det(C)$ est donc un convexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle mais par le lemme d'Hadamard, cet intervalle ne contient pas 0 : cet intervalle est donc dans $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ mais ce dernier cas est à exclure puisque $I_n \in C$ et $\det(I_n) = 1 > 0$.

Exercice 76. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit semi-simple lorsque pour tout F sous-espace vectoriel de E stable par u, il existe un supplémentaire de F dans E stable par u. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que u est semi-simple si, et seulement si, u est diagonalisable.

Corrigé : Soit u diagonalisable. Soit B une base de vecteur propre de E pour u. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Notons $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de F. On complète cette base en une base de E avec les éléments de B. Soit $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ les vecteurs ajoutés. Alors $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ vérifie $E = F \oplus G$ et G est stable par u en tant que somme d'espaces stables par u.

Réciproquement, soit u semi-simple. Raisonnons par récurrence sur la dimension de E. Si E est de dimension 1, le résultat est clair. Supposons le résultat acquis au rang $n-1$. Soit E de dimension n. Soit λ une valeur propre de u (possible car χ_u est scindé vu qu'on est dans $\mathbb{C}$) et x un vecteur propre associé. Soit $F = \mathbb{C}x$ et G un supplémentaire de F (est de dimension $n-1$) stable par u (possible car u est semi-simple et F est stable par u). u_G l'induit de u sur G est alors bien défini et est semi-simple : en effet, soit A un sous-espace vectoriel de G stable par u. A est stable par u donc par semi-simplicité de u, il existe B supplémentaire de A dans E et stable par u. Considérons alors $H = B \cap G$. Alors H est supplémentaire de A dans G et est stable par u_G : u_G est semi-simple.

Finalement, u_G est semi-simple donc par hypothèse de récurrence, u_G est diagonalisable : il existe une base de G constituée de vecteurs propres pour u. Alors cette base concaténée avec $\{x\}$ est alors une base de E constituée de vecteurs propres pour u : u est diagonalisable.

Exercice 77. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est trigonalisable si, et seulement si, u stabilise un drapeau total.[a]
2. En supposant que χ_u est scindé, en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de u comptées avec multiplicité, montrer qu'il existe un drapeau total $(V_0, \cdots, V_n)$ stable par u tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], (u - \lambda_i \text{Id})(V_i) \subset V_{i-1}$.
3. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton : χ_u annule u.

a. On rappelle qu'un drapeau d'un espace vectoriel E de dimension finie est une famille $(F_0, \cdots, F_k)$ de sous-espace vectoriel de E telle que $F_0 = \{0\}, F_k = E$ et $\forall i \in [\![0, k-1]\!], F_i \subsetneq F_{i+1}$. Un drapeau $(F_0, \cdots, F_k)$ de E est dit total lorsque $\forall i \in [\![0, n]\!], \dim(F_i) = i$. Il est dit stable par u lorsque $\forall i \in [\![0, k]\!], u(F_i) \subset F_i$.

Corrigé :

1. Si u est trigonalisable, soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de trigonalisation. Soit $V_i = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_i), V_0 = \{0\}, V_n = E$. Alors $(V_i)_i$ est un drapeau (par liberté de la base de trigonalisation), total par construction, stable par u car c'est une base de trigonalisation.

   Réciproquement, soit $(F_0, \cdots, F_n)$ un drapeau total stable par u. On construit une base de trigonalisation par récurrence sur $i \in [\![1, n]\!]$.

   - Pour $i = 1$, soit $e_1 \in F_1 \backslash \{0\}$. Alors e_1 est un vecteur propre pour u puisque $u(e_1) \in F_1 = \text{Vect}(e_1)$.
   - Pour $i = 2$, on a construit e_1 et on prend $e_2 \in F_2 \backslash \text{Vect}(e_1)$ (possible car $\text{Vect}(e_1) = F_1$ et $F_1 \subsetneq F_2$). Alors (e_1, e_2) est une famille libre[1] de F_2 (car $F_1 \subset F_2$) donc c'est une base de F_2 par cardinalité. On a donc $u(\text{Vect}(e_1, e_2)) \subset \text{Vect}(e_1, e_2)$.
   - Supposons $e_1, \cdots, e_i$ construit tel que pour tout $1 \leq j \leq i$, $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_j)$ est stable par u et est égal à F_j. Pour construire e_{i+1}, on considère $e_{i+1} \in F_{i+1} \backslash \text{Vect}(e_1, \cdots, e_i)$. Alors $(e_1, \cdots, e_{i+1})$ est une famille libre donc c'est une base de F_{i+1} par cardinalité. Ainsi, $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_{i+1}) = F_{i+1}$ et donc $u(\text{Vect}(e_1, \cdots, e_{i+1})) \subset \text{Vect}(e_1, \cdots, e_{i+1})$.

   Par récurrence, on vient de construire une base de trigonalisation.

1. je rappelle qu'un hyperplan admet comme supplémentaire le Vect de n'importe quel vecteur qui ne lui appartient pas.

2. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de trigonalisation associée aux valeurs propres $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $V_i = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_i)$. Alors $(V_i)_{0 \leq i \leq n}$ est un drapeau total. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $x \in V_i$. Soit $\mu_1, \cdots, \mu_i$ tel que
$$x = \sum_{k=1}^{i} \mu_k e_k.$$
Alors
$$(u - \lambda_i \mathrm{Id})(x) = \sum_{k=1}^{i} \mu_k \lambda_k e_k - \sum_{k=1}^{i} \mu_k \lambda_i e_k = \sum_{k=1}^{i-1} \mu_k (\lambda_k - \lambda_i) e_k \in V_{i-1}.$$
3. Ainsi, par une récurrence immédiate,
$$(u - \lambda_n)(V_n) \subset V_{n-1} \ ; \ (u - \lambda_{n-1}\mathrm{Id})(V_{n-1}) \subset V_{n-2}...$$
donne
$$\prod_{i=1}^{n} (u - \lambda_i \mathrm{Id})(V_n) \subset V_0 = \{0\}$$
donc $\chi_u(u)(E) = \{0\}$: c'est le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 78. E désigne un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que f et g sont diagonalisables. Montrer que f et g sont co-diagonalisables (ou diagonalisables simultanément) : il existe $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f et la matrice de g dans cette base sont diagonales.
2. Soit I un ensemble et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E. On suppose que ces endomorphismes commutent deux à deux et sont tous diagonalisables. Montrer qu'ils sont co-diagonalisables.
3. *Application.* Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2 et $n, m \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ sont isomorphes si, et seulement si, $n = m$.
   (a) Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que tout élément de $G \backslash \{e_G\}$ est d'ordre 2. Montrer que les éléments de G sont commutatifs et diagonalisables.
   (b) En montrant qu'un tel G existe, conclure.

Corrigé :

1. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ les valeurs propres distinctes de f. Soit $1 \leq i \leq d$. Puisque f et g commutent, g stabilise $\mathcal{E}_{\lambda_i}(f)$. Ainsi, l'induit de g sur $\mathcal{E}_{\lambda_i}(f)$ est bien définie et on la note g_i. g_i est alors diagonalisable en tant qu'induit d'un diagonalisable : soit $\mathcal{B}_i$ une base de $\mathcal{E}_{\lambda_i}(f)$ composée de vecteurs propres de g. Ce sont donc aussi des vecteurs propres de f.

   En considérant $\mathcal{B} = \biguplus_{i=1}^{d} \mathcal{B}_i$, $\mathcal{B}$ est une base de E composée de vecteurs propres de f et g : f et g sont donc co-diagonalisables.
2. On procède par récurrence forte sur n. Si $n = 1$, c'est clair. Supposons que le résultat est acquis jusqu'au rang $n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Soit E un espace vectoriel de dimension n, $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'endomorphismes de E diagonalisables qui commutent entre eux. Si tous les $(f_i)_i$ sont des homothéties, c'est évident (elles sont déjà « diagonales »). Si ce n'est pas le cas, soit $i_0 \in I$ tel que f_{i_0} n'est pas une homothétie. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ les valeurs propres distinctes de f_{i_0}. Soit $j \in [\![1, d]\!]$. Puisque les $(f_i)_{i \in I}$ commutent avec f_{i_0}, pour tout $i \in I$, f_i stabilise $\mathcal{E}_{\lambda_j}(f_{i_0})$ donc l'induit de f_i sur $\mathcal{E}_{\lambda_j}(f_{i_0}$ est bien définie et on le note $f_{i,j}$. Alors $f_{i,j}$ est diagonalisable en tant qu'induit d'un diagonalisable. Par hypothèse de récurrence, puisque $\dim(\mathcal{E}_{\lambda_j}(f_{i_0}) \in [\![1, n-1]\!]$, il existe une base $\mathcal{B}_j$ de $\mathcal{E}_{\lambda_j}(f_{i_0})$ qui diagonalise $f_{i,j}$ pour tout $i \in I$.

   En considérant $\mathcal{B} = \biguplus_{j=1}^{d} \mathcal{B}_j$, $\mathcal{B}$ est une base de E composée de vecteurs propres de f_i pour tout $i \in I$.

3. (a) Le fait que G est commutatif provient de l'exercice 23. Puisque X^2-1 est annulateur des éléments de G, puisque X^2-1 est scindé à racines simples car $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ [2], on en déduit que les éléments de G sont diagonalisables et de spectre dans $\{-1,1\}$.

   (b) On considère G_n l'ensemble des matrices diagonales à coefficient dans $\{-1,1\}$. Alors G_n convient.

   On peut donc maintenant considérer un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que tout élément de $G\backslash\{e_G\}$ est d'ordre 2. Comme ses éléments sont codiagonalisables, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que pour tout $g \in G, P^{-1}gP$ est dans G_n. Ainsi, G est de cardinal $2^q \leq 2^n$.

   On peut désormais conclure. Soit φ un isomorphisme de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ où tout élément non nul est d'ordre 2. Alors $\varphi(G)$ satisfait cette même propriété. Alors $\varphi(G_n)$ est de cardinal 2^n et on a donc $Z^n \leq 2^m$ par le point précédent. On raisonne de même en considérant G_m et φ^{-1} pour avoir $2^m \leq 2^n$.

   Ainsi, $2^n = 2^m$ donc $n = m$.

Exercice 79. E désigne un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que f et g sont trigonalisables. Montrer que f et g sont co-trigonalisables (ou trigonalisables simultanément) : il existe $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f et la matrice de g dans cette base sont triangulaires supérieures.
2. Soit I un ensemble et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E. On suppose que ces endomorphismes commutent deux à deux et sont tous trigonalisables. Montrer qu'ils sont co-trigonalisables.
3. *Application.* Soit E de dimension n, $u_1, \cdots, u_n \in \mathcal{L}(E)$, nilpotents, qui commutent 2 à 2. Calculer $u_1 \circ \cdots \circ u_n$. *L'exercice a été fait autrement dans l'exercice* **??**

Corrigé :

1. On montre un lemme préliminaire très **classique**. f et g ont un vecteur propre en commun : en effet, soit λ une valeur propre de f (existe car f est trigonalisable). Alors comme f et g commutent, g stabilise $\mathcal{E}_\lambda(f)$ donc $g_{\mathcal{E}_\lambda(f)}$ l'induit de g sur $\mathcal{E}_\lambda(u)$ est aussi trigonaliable donc admet un vecteur propre $x \in \mathcal{E}_\lambda(f)$. x étant non nul, x est donc aussi un vecteur propre de f. C'est un vecteur propre en commun.

   On conclut par récurrence sur la dimension de E. Si $n=1$, c'est clair. Si le résultat est acquis pour $n-1$ avec $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, considérons un vecteur propre x en commun à f et g et complétons en une base de E notée $\mathcal{B} = (x, e_2, \cdots, e_n)$.

   On a la représentation matricielle par blocs suivante
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & * \\ 0_{n-1,1} & A_1 \end{pmatrix} \ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} b & * \\ 0_{n-1,1} & B_1 \end{pmatrix}$$
   et donc $\chi_f = (X-a)\chi_{A_1}$ et $\chi_g = (X-b)\chi_{B_1}$. Comme χ_f et χ_g sont scindés (car f et g sont trigonalisables), χ_{A_1} et χ_{B_1} le sont aussi donc A_1 et B_1 sont trigonalisables. En plus, par produit matriciel, l'égalité $fg = gf$ entraine $A_1B_1 = B_1A_1$. En notant $H = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_1)$ avec $\mathcal{B}_1 = (e_2, \cdots, e_n)$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ projecteur sur H parallèlement à $\mathrm{Vect}(x)$, on écrit que $f_1 = p \circ f_H$ et $g_1 = p \circ g_H$ qui sont des endomorphismes de H pour que
$$A_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_1) \ ; \ B_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(g_1)$$
   donc $f_1g_1 = g_1f_1$ et f_1, g_1 sont trigonalisables. Par hypothèse de récurrence, ils sont cotrigonalisables et on note $\widehat{\mathcal{B}}_1$ base commune de cotrigonalisation. Alors en notant $\widehat{\mathcal{B}} = \{x\} \uplus \widehat{\mathcal{B}}_1$, on a
$$\mathrm{Mat}_{\widehat{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} a & * \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{Mat}_{\widehat{\mathcal{B}}_1}(f) \end{pmatrix}$$
   qui est triangulaire supérieure car $\mathrm{Mat}_{\widehat{\mathcal{B}}_1}(f)$ l'est et de même pour $\mathrm{Mat}_{\widehat{\mathcal{B}}}(g)$.

2. dans ce cas, on aurait $1 = -1$ donc $X^2 - 1 = (X+1)^2$ donc n'est pas scindé à racines simples

2. Avant toute chose, si tous les endomorphismes sont des homothéties, le résultat est claire. On suppose donc qu'il existe $f \in \{f_i : i \in I$ qui ne soit pas une homothétie.

   - On montre déjà par récurrence forte sur la dimension qu'il existe un vecteur propre en commun. Pour $n = 1$, c'est immédiat. Supposons le résultat acquis pour jusqu'au rang $n-1$. Comme $\mathrm{Sp}(f) \neq \emptyset$, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Soit $i \in I$. Comme f_i commute avec f, $\mathcal{E}_\lambda(f)$ est stable par f_i. Ainsi, en notant $f_{i\mathcal{E}_\lambda(f)}$ l'induit de f_i sur $\mathcal{E}_\lambda(f)$, $f_{i\mathcal{E}_\lambda(f)}$ est trigonalisable (son polynôme caractéristique est scindé car il divise un polynôme scindé). Ainsi, tous les $(f_{i\mathcal{E}_\lambda(f)})_{i\in I}$ sont trigonalisables et commutent entre eux. Étant des endomorphismes de $\mathcal{E}_\lambda(f)$ qui est de dimension dans $[\![1, n-1]\!]$, ils admettent un vecteur propre en commun que l'on note x. On a donc
   $$\forall i \in I, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f_{i\mathcal{E}_\lambda(f)}(x) = \lambda_i x.$$
   donc
   $$\forall i \in I, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f_i(x) = \lambda_i x.$$
   x est un vecteur propre en commun à tous les $(f_i)_{i\in I}$. On conclut par principe de récurrence.
   - On conclut. On note (H_n) : si E est de dimension n et que $(f_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'endomorphismes de E trigonalisables qui commutent entre eux, alors ils sont cotrigonalisables.
     - Pour $n = 1$, c'est clair.
     - Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$ et E un espace vectoriel de dimension n. Soit $(f_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'endomorphismes de E trigonalisables qui commutent entre eux. Alors soit x un vecteur propre en commun. On complète $\{x\}$ en une base de E que l'on note $(x, e_2, \cdots, e_n) =: \mathcal{B}$. Soit $i \in I$. Alors on a la représentation matricielle suivante :
     $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i) = \begin{pmatrix} a_i & * \\ 0_{n-1,1} & A_i \end{pmatrix} \ ; \ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & * \\ 0_{n-1,1} & A \end{pmatrix}.$$
     Alors $\chi_{f_i} = (X - a_i)\chi_{A_i}$ donc χ_{f_i} étant scindé (on rappelle que f_i est trigonalisable), χ_{A_i} est scindé. De même avec χ_f, on en déduit que χ_A est scindé. Ainsi, A_i est trigonalisable de même que A. Par produit matriciel, on a $f_i f = f f_i$ qui entraine $A_i A = A A_i$. Notons alors $H = \mathrm{Vect}(\widetilde{\mathcal{B}})$ avec $\widetilde{\mathcal{B}} = (e_2, \cdots, e_n)$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ projecteur sur H parallèlement à $\mathrm{Vect}(x)$. On note $\widetilde{f_i} = p \circ f_{iH}$ [3] et $\widetilde{f} = p \circ f_H$. Alors ce sont des endomorphismes de H et
     $$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\widetilde{f_i}) = A_i \ ; \ \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\widetilde{f}) = A.$$
     On en déduit que $\widetilde{f_i}$ et $\widetilde{f}$ commutent.
     Cela étant vrai pour tout i, on en déduit que $(\widetilde{f_i})_{i\in I}$ est une famille quelconque d'endomorphismes de H trigonalisables et qui commutent entre eux. $\dim(H) = n - 1 < n$, on a donc l'existence d'une base de H de trigonalisation commune aux $(f_i)_{i\in I}$ qu'on note $\widehat{\mathcal{B}}$. Alors $\{x\} \uplus \widehat{\mathcal{B}}$ est une base de E qui trigonalise tous les $(f_i)_{i\in I}$.
     - Par principe de récurrence, on a le résultat.

3. Les $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ sont nilpotents donc trigonalisables et commutent deux à deux. Il existe donc, par la question précédente, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E qui trigonalise les $u_1, \cdots, u_n$. Comme ils sont nilpotents, dans la base $\mathcal{B}$, leurs matrices sont triangulaires supérieures strictes. Ainsi, on en déduit que $u_1(e_1) = 0, u_2(e_2) \in \mathrm{Vect}(e_1)$ et de manière générale,
$$\forall i \in [\![2, n]\!], u_i(\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_i)) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{i-1}).$$
Ainsi, de proche en proche, on a
$$u_1 \circ \cdots \circ u_n(\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)) \subset u_1 \circ \cdots \circ u_{n-1}(\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{n-1})) \subset \cdots \subset u_1(\mathrm{Vect}(e_1)) = \{0\}.$$
Ainsi, $u_1 \circ \cdots \circ u_n(E) \subset \{0\}$ et l'inclusion réciproque est claire donc $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

3. induit de f_i sur H

Exercice 80. Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 8.1 (Décomposition de Dunford (ou Jordan-Dunford)). *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que χ_f est scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ vérifiant :*

1. *d est diagonalisable.*
2. *n est nilpotent.*
3. *$f = d + n$.*
4. *$dn = nd$.*

De plus, n et d sont des polynômes en f.

Soit donc $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$, les valeurs propres distinctes de f et $\chi_f = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$ avec m_i multiplicité de λ_i pour $1 \leq i \leq d$. On note N_i espace caractéristique pour la valeur propre λ_i de f.

1. Rappeler pourquoi $E = \bigoplus_{i=1}^{d} N_i$.
2. Montrer que pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, il existe $p_i \in \mathbb{K}[f]$ projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ de sorte que
$$\sum_{i=1}^{d} p_i = \mathrm{Id}.$$
Indication : on pourra utiliser l'expression du polynôme caractéristique.
3. Conclure. On utilisera l'exercice 78.

Corrigé :

1. Le lemme des noyaux nous donne $E = \bigoplus_{i=1}^{d} N_i$ où $N_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{m_i}$, et m_i, multiplicité de λ_i dans χ_f.
2. Fixons $i \in [\![1, d]\!]$. Soit $M_i = X - \lambda_i$. Alors $M_i^{m_i}$ divise χ_f, et on note Q_i, le quotient. Les Q_i sont premiers entre eux dans leur ensemble donc par Bézout, il existe des polynômes U_i tel que
$$\sum_{i=1}^{r} U_i Q_i = 1.$$
Ainsi,
$$\sum_{i=1}^{r} U_i(f) \circ Q_i(f) = \mathrm{Id}. \tag{8.1}$$
Posons alors $p_i = U_i(f) \circ Q_i(f)$ pour $1 \leq i \leq r$. Montrons que

a) $\sum_{i=1}^{r} p_i = \mathrm{Id}$ b) $\forall 1 \leq i \leq r, p_i \in \mathbb{K}[f]$ c) $\forall i \neq j, p_i p_j = 0$

d) $\forall 1 \leq i \leq r, p_i^2 = p_i$. e) $\forall 1 \leq i \leq r, \mathrm{Im}(p_i) = N_i$. f) $\forall 1 \leq i \leq r, \ker(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$.

a) C'est en fait l'égalité 8.1.

b) Soit $1 \leq i \leq r$. Par construction de p_i, c'est un polynôme en f.

c) Soit $1 \leq i \neq j \leq r$. Alors en remarquant que $\chi_f | Q_i Q_j$, puisque $U_i(f), Q_i(f), U_j(f), Q_j(f)$ sont des polynômes en f, ils commutent et

$$p_i p_j = U_i(f) Q_i(f) U_j(f) Q_j(f) = Q_i(f) Q_j(f) U_i(f) U_j(f) = 0$$

par le théorème de Caylay-Hamilton.

d) Soit $1 \leq i \leq r$. Alors $p_i^2 = p_i \left(\mathrm{Id} - \sum_{j \neq i} p_j \right) = p_i - \sum_{j \neq i} p_i p_j = p_i$.

e) Soit $1 \leq i \leq r$. Montrons le résultat par double inclusion.
$\boxed{\subset}$: Soit $x \in E, y = p_i(x)$. Alors $(f - \lambda_i)^{m_i}(y) = (f - \lambda_i)^{m_i} U_i(f) Q_i(f)(x) = U_i(f) \chi_f(f)(x) = 0$. Donc $y \in N_i$.
$\boxed{\supset}$: Soit $x \in N_i$. Alors par 8.1, $x = \sum_{j=1}^{n} U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x)$ car pour tout $j \neq i$, $(X - \lambda_i)^{m_i} | Q_j$ ce qui donne $\forall j \neq i, N_i \subset \ker(Q_j(f))$.

f) Soit $1 \leq i \leq d$. Montrons le résultat par double inclusion.
$\boxed{\subset}$: Soit $x \in \ker(p_i)$. Alors toujours par 8.1, $x = \sum_{j \neq i} p_j(x) + \underbrace{p_i(x)}_{=0} \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$.
$\boxed{\subset}$: Soit $x \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$. Alors $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x)$. Mais pour tout $j \neq i, N_j \subset \ker(Q_i(f))$ puisque $(X - \lambda_j)^{m_j} | Q_i$ pour tout $j \neq i$.

3. Preuve de l'existence. On pose $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$. Alors d est par construction diagonalisable et est un polynôme en f. Posons $n = f - d$. Alors n est un polynôme en f donc commutent avec d. Par construction, $f = d + n$. Il suffit donc de montrer que n est nilpotente. Pour cela, on écrit

$$n = f - d = \sum_{i=1}^{d} f p_i - \sum_{i=1}^{d} \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^{d} (f - \lambda_i \mathrm{Id}) p_i.$$

Puisque $p_i p_j = 0$, une récurrence immédiate montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, n^k = \sum_{i=1}^{d} (f - \lambda_i \mathrm{Id})^k p_i.$$

Pour $k = \max(m_1, \cdots, m_d)$, on en déduit donc que $n^k = 0$ donc n est nilpotente.
Unicité. Considérons d, n, les endomorphismes montrés précédemment. Soit d', n', d'autres endomorphismes vérifiant les propriétés $1, 2, 3, 4$ du théorème. Alors $f = d' + n'$ et d, n sont des polynômes en f. Comme n' commute avec d', n' commute avec $d' + n' = f$ donc n' commute avec tout polynôme en f : de fait, n commute avec n', et de même, d commute avec d'. Ainsi, $n - n'$ est nilpotente par la formule du binôme et $d' - d$ est diagonalisable car d, d' sont codiagonalisables (c'est l'exercice 78). Puisque $u = d + n = d' + n'$, on a donc $d' - d = n - n'$ donc $d' - d$ est diagonalisable et nilpotente : elle est nulle. Ainsi, $d = d'$ et $n = n'$.

Exercice 81. 1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, f^2 l'est et $\ker(f) = \ker(f^2)$.

2. Que se passe-t-il si on se place dans $\mathbb{R}^n$?
3. Application : à quelle condition une matrice antidiagonale est diagonalisable ? On traitera le cas complexe puis le cas réel.

Corrigé :

1. Supposons que f est diagonalisable. Notons M, sa matrice dans la base canonique. Alors il existe $(P, D) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ tel que $M = PDP^{-1}$. De fait, $M^2 = PD^2M^{-1}$ donc M^2 est diagonalisable. De plus, $\ker(M) \subset \ker(M^2)$. Il suffit de conclure par dimension. Pour cela, remarquons que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}(D^2) = \mathrm{rg}(M^2)$. Donc par dimension, $\ker(M) = \ker(M^2)$.
   Supposons maintenant la réciproque. Alors
$$\begin{aligned} E &= \ker(f^2) \oplus \bigoplus_{i=2}^{d} \mathcal{E}_{\lambda_i}(f^2) \\ &= \ker(f) \oplus \bigoplus_{i=2}^{d} \ker(f^2 - \lambda_i \mathrm{Id}) \\ &= \ker(f) \oplus \bigoplus_{i=2}^{d} \ker(f^2 - \mu_i^2 \mathrm{Id}) \\ &= \ker(f) \oplus \bigoplus_{i=2}^{d} \ker((f - \mu_i \mathrm{Id})(f + \mu_i \mathrm{Id})) \\ &= \ker(f) \oplus \bigoplus_{i=2}^{d} (\ker(f - \mu_i \mathrm{Id}) \oplus \ker(f + \mu_i \mathrm{Id})). \end{aligned}$$
   En effet, $\ker(f) = \ker(f^2)$, il existe μ_i tel que $\mu_i^2 = \lambda_i$ car c'est un complexe, que $(X - \mu_i)$ et $(X + \mu_i)$ sont premiers entre eux car $\mu_i \neq 0$ (les valeurs propres de 2 à d sont non nulles car on a sorti le noyau) et donc par le lemme des noyaux, on a la dernière ligne. Donc on a décomposé E comme somme directe de sous-espaces propres de f : f est diagonalisable.
2. Le même résultat tient sur $\mathbb{R}$ dès lors qu'il existe une racine carré d'un réel. Il est donc suffisant de demander que $\mathrm{Sp}(f^2) \subset \mathbb{R}^+$. Il est aussi nécessaire car si f et f^2 sont diagonalisable, les valeurs propres de f^2 sont celles de f au carré !
3. Notons A, la matrice antidiagonale de coefficient $(a_1, \cdots, a_n)$. Traitons d'abord le cas complexe. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$, base canonique de $\mathbb{C}^n$. Alors $Ae_i = a_i e_{n-i+1}$ donc $A^2 = a_i a_{n-i+1} e_i$. Donc A^2 est diagonalisable car possède une base de vecteur propre. Pour que A soit diagonalisable, il faut et suffit que $\ker(A) = \ker(A^2)$ (*). (Conseil : calculer A^2. Puisque $\ker(A)$ est engendré par les e_i tels que $a_i = 0$ et que $\ker(A^2)$ est engendré par les e_i tels que $a_i a_{n-i+1} = 0$. Ainsi, $\ker(A) = \ker(A^2)$ est équivalent à demander $a_i a_{n-i+1} = 0 \Longrightarrow a_i = 0$. Cela est donc équivalent à $a_i = 0 \Longleftrightarrow a_{n-i+1} = 0$.
   Dans le cas réel, on prend aussi une base canonique et il faut ajouter au niveau de (*) la condition $a_i a_{n-i+1}$ soit positifs ou nuls. Ainsi, il suffit donc d'ajouter la condition « a_i et a_{n-i+1} de même signe ».

Exercice 82. Soit k, un corps de caractéristique nulle. (penser à $\mathbb{R}$ essentiellement). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite montrer que $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est nilpotente si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{N}^*, \mathrm{tr}(M^p) = 0$.

1. Montrer le sens direct.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(k)$. On suppose que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \mathrm{tr}(M^p) = 0$. On suppose par l'absurde que M n'est pas nilpotente.
   (a) Quelle est la forme du polynôme minimal de M par rapport au polynôme minimal attendu ?
   (b) On a donc écrit $\pi_M = X^k Q(X)$ avec $X^k \wedge Q = 1$. En notant $F = \ker(M^k), G = \ker(Q(M))$, donner une décomposition de $\mathbb{K}^n$ en sous-espaces stables par M.
   (c) On note u, endomorphisme de M canoniquement associé. En considérant l'induit de u sur G, montrer qu'il existe en entier $i \in [\![1, \deg(Q)]\!]$ tel que $\mathrm{tr}(u_G^i) = 0$.
   (d) Conclure.

Corrigé :

1. Puisque M est nilpotente, on peut noter p, son indice de nilpotence. Alors $M^p = 0$ donc M admet un polynôme annulateur scindé : M est donc trigonalisable d'unique valeur propre 0 : M est donc semblable

à une matrice triangulaire supérieure stricte, et cet ensemble est stable par multiplication. Ainsi, la trace étant invariante par similitude, les traces de M et ses itérés sont nulles.

2. (a) π_M est de la forme $X^kQ(X)$ avec $X \wedge Q = 1$. On aimerait que Q soit égal à 1 pour avoir π_M de la forme X^d ce qui donne le caractère nilpotent voulu. On suppose donc que G est non réduit à 0.
   (b) Par le lemme des noyaux, X et Q étant premier entre eux (donc X^k et Q aussi), on a donc $E = \ker(\pi_M(M)) = \ker(M^k) \oplus \ker(Q(M)) = F \oplus G$. F et G sont stables par M car M et $M^k, Q(M)$ commutent.
   (c) Puisque G est stable par u, l'induit u_G est bien défini. Par ailleurs, $\forall x \in G, Q(u_G)(x) = Q(u)(x) = 0$ donc $Q(u_G) = 0$. En écrivant Q de la forme

$$X^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i X^i,$$

   (Q est unitaire car X^k et π_M le sont), on a donc

$$M^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i M^i = 0.$$

   En prenant la trace, on a

$$\operatorname{tr}(M^\ell) + \sum_{i=1}^{\ell-1} a_i \operatorname{tr}(M^i) + \underbrace{a_0 \operatorname{tr}(\mathrm{Id}_G)}_{=a_0 \dim(G)} = 0.$$

   On sait que $a_0 \neq 0$ et $\dim(G) \neq 0$ (on a supposé que G n'est pas réduit à 0) donc le produit est non nul. On en déduit qu'une trace de M^i est non nulle.
   (d) Disons pour i_0. Alors $\operatorname{tr}(u^{i_0})) = \underbrace{\operatorname{tr}(u_F^{i_0})}_{\neq 0} + \operatorname{tr}(u_G^{i_0})$. Donc $\operatorname{tr}(u^{i_0}) \neq 0$: ABSURDE !

Chapitre 9

Algèbre euclidienne

Exercice 83. Soit M une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C_1, \cdots, C_n$, ses colonnes. Montrer que

$$|\det(M)| \leq \|C_1\| \cdots \|C_n\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$ (on identifie $\mathcal{M}_{n,1}$ à $\mathbb{R}^n$). On pourra traiter le cas M inversible ou non, et si M est inversible, essayer d'écrire $M = QR$ avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. Quel est le cas d'égalité ? (Ce résultat est connu sous le nom d'inégalité d'Hadamard).
Application : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\exists c \in \mathbb{R}^{+*}, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, |[M]_{i,j}| \leq c$. Montrer que $|\det(M)| \leq c^n n^{n/2}$.

Corrigé : Si les vecteurs colonnes sont liés, le déterminant est nul et le résultat est clair. Sinon, les $C_1, \cdots, C_n$ forment donc une base. On note $U_1, \cdots, U_n$, les vecteurs obtenus par Gram-Schmidt sur $C_1, \cdots, C_n$.

On rappelle le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On considère E un espace préhilbertien réel.
Entrée : on considère une famille libre $(e_1, \cdots, e_n)$.
Sortie : on obtient une famille orthonormale $(g_1, \cdots, g_n)$ vérifiant $\forall 1 \leq i \leq n, \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_i) = \mathrm{Vect}(g_1, \cdots, g_i)$.

Considérons donc une famille libre $(e_1, \cdots, e_n)$ dans E. On montre par récurrence finie sur $k \in [\![1,n]\!]$ l'existence d'une telle famille.

- Pour $k = 1$, on dispose de e_1 qui est non nul. Ainsi, en considérant $g_1 = \dfrac{1}{\|e_1\|} e_1$, on a $\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(g_1)$ et $\|g_1\| = 1$.
- Faisons le cas $k = 2$ pour la forme. Pour $k = 2$, on réalise deux étapes.
  1. On considère $f_2 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ de sorte que f_2 soit orthogonal à g_1.
  2. On normalise f_2 et on le note g_2.

  Pour la première étape, l'idée est de considérer $f_2 = e_2 - (e_2, g_1) g_1$. Alors $f_2 \in \mathrm{Vect}(e_2, g_1) = \mathrm{Vect}(e_2, e_1)$ et $(f_2, g_1) = (e_2, g_1) - (e_2, g_1)(g_1, g_1) = 0$ car $(g_1, g_1) = \|g_1\|^2 = 1$. *On retire la composante selon g_1 du vecteur e_2.*
  Pour la seconde étape, il suffit de vérifier que $f_2 \neq 0$. C'est le cas car la famille (e_2, g_1) est libre puisque (e_2, e_1) l'est. Ainsi, on peut considérer $g_2 = \dfrac{1}{\|f_2\|} f_2$.
  Il est primordial de savoir faire un dessin.

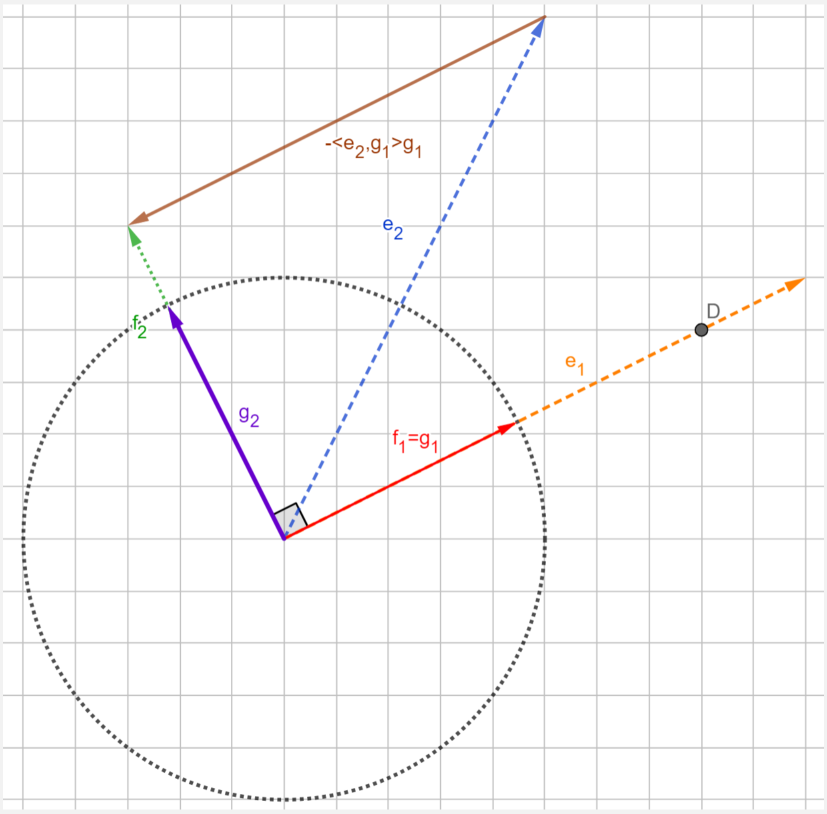

FIGURE 9.1 – Procédé de Gram-Schmidt sur deux vecteurs

On considère le vecteur e_1 et le vecteur e_2 qui forment une famille libre. On normalise le vecteur e_1 que l'on note g_1. Ensuite, on retire la composante de e_2 selon g_1 pour obtenir le vecteur f_2 que l'on normalise pour obtenir le vecteur g_2.
La famille (g_1, g_2) est donc bien orthonormée et vérifie $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(g_1), \text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(g_1, g_2)$.

- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et supposons construit $g_1, \cdots, g_k$ de sorte que $(g_1, \cdots, g_k)$ soit orthogonale et
$$\forall i \in [\![1, k]\!], \text{Vect}(e_1, \cdots, e_i) = \text{Vect}(g_1, \cdots, g_i).$$
Soit $f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(e_{k+1}, g_i)g_i$. Alors
$$\forall j \in [\![1, k]\!], (f_{k+1}, g_j) = (e_{k+1}, g_j) - \sum_{i=1}^{k}(e_{k+1}, g_i)\underbrace{(g_i, g_j)}_{=\delta_{i,j}} = (e_{k+1}, g_j) - (e_{k+1}, g_j) = 0.$$
De plus, $\sum_{i=1}^{k}(e_{k+1}, g_i)g_i \in \text{Vect}(g_1, \cdots, g_k) = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ donc $f_{k+1} \in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$. Par liberté des $(e_1, \cdots, e_{k+1})$, comme le coefficient devant e_{k+1} est non nul et que la somme n'est pas dans $\text{Vect}(e_{k+1})$, alors $f_{k+1} \neq 0$.
On peut donc considérer $g_{k+1} = \frac{1}{\|f_{k+1}\|}f_{k+1}$ et g_{k+1} est de norme 1 et orthogonaux aux autres $(g_i)_{1\leq i\leq k}$, aussi dans $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$ donc $\text{Vect}(g_1, \cdots, g_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$.
- Par le principe de récurrence, on a construit une telle famille.

Remarquons que l'on a $(g_k, e_k) = \frac{1}{\|f_k\|} > 0$.

Soit P matrice de passage de $(U_1, \cdots, U_n)$ vers $(C_1, \cdots, C_n)$. Alors C_i s'exprime en fonction de $U_1, \cdots, U_i$ car $\text{Vect}(C_1, \cdots, C_i) = \text{Vect}U_1, \cdots, U_i$ donc P est triangulaire supérieure. En notant M, la matrice de passage de la base canonique à $(C_1, \cdots, C_n)$, on a $M = (U_1|\cdots|U_n)P$. Puisque les $(U_1, \cdots, U_n)$ forment une famille orthonormale, $\det(U_1, \cdots, U_n) = 1$. De fait,

$$|\det(M)| = |\det(P)| = \left|\prod_{i=1}^{n} p_{i,i}\right|.$$

Or $|p_{i,i}| = |\langle C_i, U_i\rangle|$ étant donné que $\langle C_i, U_i\rangle$ donne exactement la composante devant U_i dans la décomposition de C_i dans la base $U_1, \cdots, U_n$ (on rappelle que $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$ avec (e_i) une base orthonormée de E). Enfin, par Cauchy-Schwarz,

$$|\langle C_i, U_i\rangle| \leq \|C_i\|^2 \|U_i\|^2 = \|C_i\|^2,$$

car les $(U_1, \cdots, U_n)$ sont de norme 1. Ainsi, on a bien le résultat voulu. Le cas d'égalité correspond au cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, ce qui signifie que $U_i = \lambda C_i$ avec $\lambda \geq 0$. Autrement dit, il faut et suffit que les C_i sont deux à deux orthogonaux pour obtenir l'égalité.

Remarquons qu'on vient de démontrer la décomposition QR : en notant $Q = (U_1|\cdots|U_n)$ et $R = P$, on a décomposé une matrice inversible M en QR avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive (les coefficients diagonaux de P sont égaux à $\langle C_i, U_i\rangle$ qui sont strictement positifs en vertu de la remarque à la fin du point sur Gram-Schmidt).

Application : il suffit de remarquer que $|C_i| \leq \sqrt{c^2 + c^2 + \cdots + c^2} = c\sqrt{n}$. Ainsi, $|\det(M)| \leq (\sqrt{n}c)^n = c^n n^{n/2}$.

Exercice 84. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (te^t - (at+b))^2 \mathrm{d}t$.

Corrigé : Reformulons le problème. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{t \in [0,1] \mapsto at + b \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}\}$. Notons $f : t \in [0,1] \mapsto te^t \in \mathbb{R}$. On constate que $F = \text{Vect}(\phi, \psi)$ où

$$\phi : t \in [0,1] \mapsto 1 \in \mathbb{R} \text{ et } \psi : t \in [0,1] \mapsto t \in \mathbb{R}.$$

On munit E du produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ défini par

$$(\cdot,\cdot) : \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x \end{array}.$$

On a alors

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (te^t - (at+b))^2 \mathrm{d}t = \inf_{g\in F} \|f - g\|^2 = \|f - \pi_F(f)\|^2.$$

(ϕ, ψ) est une base de F donc $\pi_F(f)$ s'écrit $a\phi + b\psi$. Comme $f - \pi_F(f) \in F^\perp$, on a

$$0 = (f - \pi_F(f), \phi) = (f, \phi) - (a\phi + b\psi, \phi) = (f, \phi) - a\|\phi\|^2 + b(\psi, \phi)$$

et de même,

$$0 = (f - \pi_F(f), \psi) = (f, \psi) - a(\phi, \psi) - b\|\psi\|^2.$$

On calcule :

- $(f, \phi) = \int_0^1 te^t \mathrm{d}t = 1$
- $(f, \psi) = \int_0^1 t^2 e^t \mathrm{d}t = e - 2$
- $(\phi, \psi) = \int_0^1 t\mathrm{d}t = 1/2$
- $\|\phi\|^2 = 1$
- $\|\psi\|^2 = 1/3$

ce qui donne

$$\begin{cases} a+\dfrac{b}{2}=1 \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}=e-2 \end{cases}$$

ce qui donne $a = 16-6e, b = 12e-30$.

Ensuite, il n'y a plus qu'à conclure.

$$\|f-\pi_F(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|\pi_F(f)\|^2 = \int_0^1 t^2e^{2t}\mathrm{d}t - \int_0^1 (a+bt)^2\mathrm{d}t = \frac{e^2-1}{4} - \left(\frac{b^2}{3}+ab+a^2\right)$$

En développant tout, on a

$$\|f-\pi_F(f)\|^2 = -\frac{1}{4}(305-240e+47e^2).$$

Exercice 85. Une symétrie par rapport à un hyperplan est appelée réflexion par rapport à cet espace. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. Le théorème de Cartan-Dieudonné assure que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ est engendré par n réflexions. Nous ne contenterons ici que de montrer que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ est engendré par des réflexions.

1. Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$ avec $\|X\| = \|Y\|$ et $X \neq Y$. Soit $H = (X-Y)^\perp$ et s une symétrie par rapport à H. Montrer que $s(X) = Y$.
2. Soit $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Soit F un sous-espace stable par M. Montrer que $F^\perp$ aussi.
3. Conclure.

Corrigé :

1. On remarque que $X+Y$ et $X-Y$ sont orthogonaux. En posant $X = \frac{1}{2}(X+Y)+\frac{1}{2}(X-Y)$, on a $s(X) = Y$.
2. Une isométrie est inversible donc $\dim(u(F)) = \dim(F)$. Ainsi, par dimension, $u(F) = F$. Soit $X \in F^\perp$. Alors $\forall y \in F, \langle u(X), u(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle = 0$. Donc $\forall Y \in F, u(X) \perp u(Y)$ donc $u(X) \perp u(F) = F$ donc $u(X) \in F^\perp$.
3. Montrons par récurrence sur $p \leq n$ que

   si $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ et $\dim(\ker(u-\mathrm{Id})) = p$, alors u s'écrit comme un produit de réflexions.

   Si $p = n$, alors $u = \mathrm{Id}$ qui est un produit de 0 réflexion. Supposons $H_n, \cdots, H_{p+1}$ pour $p \in [\![1, n-1]\!]$ vraie. Soit $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Soit $F = \ker(u-\mathrm{Id})$ de dimension p. On souhaite alors montrer qu'il existe une réflexion s telle que $\ker(s\circ u-\mathrm{Id})$ soit de dimension strictement supérieur à p.

   Soit $X \in F^\perp$. Alors $X \notin F$ donc $u(X) \neq X$ mais on a toujours $\|u(X)\| = \|X\|$. Appliquons donc la question 1. Soit s réflexion par rapport à $\langle X-u(X)\rangle^\perp$ vérifiant $s(u(X)) = X$. Alors on a $X \in \ker(s\circ u-\mathrm{Id})$. En montrant que $F \subset \ker(su-\mathbb{I})$, on aura le résultat : il suffit donc de montrer que pour tout $Z \in F$, $s(Z) = Z$. Par 2, $X-u(X) \in F^\perp$. De fait, $Z \in \langle X-u(X)\rangle^\perp$ et $s(Z) = Z$. Ainsi, $F \subset \ker(s\circ u-\mathrm{Id})$ mais X est orthogonal à F donc $F \oplus \mathrm{Vect}(X) \subset \ker(s\circ u-\mathrm{Id})$ qui est de dimension au moins $p+1$ mais majoré par n. Par récurrence forte, comme $s\circ u$ est une isométrie ($\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ est stable par composition), $s\circ u$ est un produit de réflexions donc en multipliant à gauche par $s^{-1} = s$ qui est une réflexion, on obtient que u est aussi un produit de réflexion.

   Par le principe de récurrence, pour tout $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, comme $\dim(\ker(u-\mathrm{Id})) \in [\![0, n]\!]$, u s'écrit comme un produit de réflexions.

Exercice 86. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit normal lorsque $uu^* = u^*u$. Les endomorphismes autoadjoints et les isométries sont normaux. On sait réduire les réduire mais on peut faire plus général : l'exercice propose de réduire des normaux. Soit donc E un espace euclidien [a] de dimension finie n.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u. Montrer qu'alors, si u est normal, u_F est normal.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Montrer que $\mathcal{E}_\lambda^\perp$ est stable par u^*.
3. Cas de la dimension 2. On suppose que $n = 2$ dans cette question. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Montrer que soit u est diagonalisable, soit u est une similitude, c'est-à-dire, s'écrit dans une base orthonormale,
$$M := \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
avec $b \neq 0$.
4. Montrer le théorème suivant : pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormale de E telle que
$$\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \boxed{s_1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{s_p} \end{pmatrix}$$
où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont des réels et $s_1, \cdots, s_p$ sont des similitudes.

a. on rappelle donc que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Corrigé :

1. Si F est $\{0\}$ ou E, il n'y a rien à faire. Soit donc F un sous-espace vectoriel non trivial de E. Alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$. Soit $\mathcal{B}_F$ base de F. En considérant une base $\mathcal{B}_{F^\perp}$ de $F^\perp$ et en les concaténant, on obtient une base $\mathcal{B}$ de E. Alors
$$M := \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
avec $A \in \mathcal{M}_{\dim(F)}(\mathbb{R})$. Mais M est alors normal donc par produit par blocs,
$$M^TM = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^TA & * \\ * & B^TB + C^TC \end{pmatrix}$$
et
$$MM^T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T + BB^T & * \\ * & CC^T \end{pmatrix}.$$
Ainsi, on a $A^TA = AA^T + BB^T$. En prenant la trace, puisque $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, on a $\mathrm{tr}(BB^T)$ donc $B = 0$ [1]. Ainsi,
$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
donc $u(F^\perp) \subset F^\perp$: $F^\perp$ est stable par u. De plus, $A^TA = AA^T$ donc A est normal et puisque A vaut $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F)$ (par stabilité de F par u, u_F est normal. $C^TC = CC^T$ et puisqu'on a finalement montré que $F^\perp$ est stable par u, on a $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{F^\perp}}(u_{F^\perp})$ donc $u_{F^\perp}$ est normal.
2. Comme u et u^* commutent, $\mathcal{E}_\lambda$ est stable par u^*. Par la question précédente, $\mathcal{E}_\lambda^\perp$ est stable par $u^{**} = u$.
3. Soit E de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal.

1. on rappelle que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB^T)$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- Si u admet une valeur propre réelle, soit x un vecteur propre que l'on prend unitaire, quitte à diviser par sa norme. Alors $x^\perp$ est une droite, disons engendré par un vecteur unitaire y. $\mathbb{R}y$ est stable par u en vertu du lemme donc u admet deux droites stables distinctes qui sont $\mathbb{R}x$ et $\mathbb{R}y$: u est diagonalisable et (x, y) forme une base orthonormée de E donc u est diagonalisable en base orthonormée.
- Sinon, u n'a pas de valeur propre réelle et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. M est normale donc $M^T M = MM^T$ et on obtient en identifiant les coefficients $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$ et $ab + cd = ac + bd$. Si $b = 0$, u admet des valeurs propres ce qui est exclu. Si $b = c$[2], $\chi_u = X^2-(a+d)X+ad-b^2$ de discriminant $(a+d)^2-4(ad-b^2) = (a-d)^2+4b^2 \geq 0$ donc u admet des valeurs propres ce qui est exclu. Donc $b = -c$ et nécessairement $a = d$. Ainsi, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

4. On fait une récurrence sur la dimension de E.
   - Si E est de dimension 1, il n'y a rien à faire.
   - La dimension 2 est traitée avant.
   - Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$ pour $n \geq 3$ et montrons le résultat au rang n. Soit donc E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.
     - Si u admet une valeur propre réelle λ, soit e_1 un vecteur propre unitaire associé à cette valeur propre pour u. Alors $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est un espace euclidien de dimension $n-1$ et puisque u est normal et stabilise $(\mathbb{R}e_1)$, il stabilise $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ et $u_{(\mathbb{R}e_1)^\perp}$ est normal en vertu du lemme : on applique alors l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$: on obtient alors une base orthonormale de $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ notée $\mathcal{B}_1$ où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ a la forme voulue : alors la concaténation $\mathcal{B}$ entre $\{e_1\}$ et $\mathcal{B}_1$ fournit une base orthonormée de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ a la forme voulue.
     - Si u n'admet pas de valeur propre réelle, considérons μ_u son polynôme minimal. μ_u n'admet pas de racines réelles – car sinon u admettrait une valeur propre réelle – donc on peut considérer $X^2 + aX + b =: P$ un facteur irréductible de μ_u et $N = \ker(P(u))$. Alors $N \neq \{0\}$[3] donc considérons $x \in N$ et montrons que $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u. Déjà, x et $u(x)$ forment une famille libre puisque x n'est pas vecteur propre pour u. $u^2(x) = -au(x) - bx$ donc $\mathcal{P}$ est bien stable par u. $u_{\mathcal{P}}$ est normal donc il existe (e_1, e_2) une base orthonormée de $\mathcal{P}$ telle que
     $$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u_{\mathcal{P}}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
     $u_{\mathcal{P}^\perp}$ est aussi normal d'après le lemme donc par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u_{\mathcal{P}})$ a la forme voulue. On conclut en concaténant les bases.

   Par principe de récurrence, on a le résultat voulu.

Exercice 87. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ des vecteurs de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espace préhilbertien réel.

1. On note $G(x_1, \cdots, x_n) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$, matrice de Gram de $(x_1, \cdots, x_n)$. Montrer que $G(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{rg}(G(x_1, \cdots, x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, \cdots, x_n)$. On suppose dans la suite que $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre et on note $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$.
2. Soit $x \in E$. Montrer que
$$(d(x, F))^2 = \frac{\det(G(x, x_1, \cdots, x_n))}{\det(G(x_1, \cdots, x_n))}.$$
3. En déduire les résultats suivants :

2. Il est important de souligner qu'on ne veut pas utiliser le théorème spectral. En effet, un corollaire important de ce théorème est justement le théorème spectral.

3. en notant $\mu_u = PQ$, on a $0 = P(u)Q(u)$ avec $Q(u) \neq 0$ (par minimalité du polynôme minimal) donc $P(u)$ ne peut être injectif

(a) $\det(G(x_1, \cdots, x_n)) \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.

(b) Si on se donne $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a $|\det(x_1, \cdots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_2$ où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$.

(c) Les cas d'égalités dans les deux cas sont lorsque $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthogonale ou contient un vecteur nul.

Corrigé :

1. Une matrice de Gram est clairement symétrique réelle. Pour tout $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, on a
$$\sum_{1\leq i,j\leq n} \langle x_i, x_j\rangle \lambda_i\lambda_j = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\|^2 \geq 0$$
donc elle est positive. Considérons u, l'application qui à $x \in F$ associe $(\langle x, x_i\rangle)_{1\leq i\leq n}$, une application clairement linéaire. Elle est injective puisqu'un vecteur orthogonal à tous les x_i est dans $F \cap F^\perp = \{0\}$ donc est nul. Ainsi, le rang est invariant par composition par u ce qui donne le résultat voulu.

2. Soit $x = y + h \in F \oplus F^\perp$ [4] de sorte que $d := d(x, F) = \|h\|$. On a $\langle x, x\rangle = d^2 + \langle y, y\rangle$ et $\langle x, x_i\rangle = \langle y, x_i\rangle$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi, la première colonne de $G(x, x_1, \cdots, x_n)$ est
$$\begin{pmatrix} \|h\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle y, y\rangle \\ \langle y, x_1\rangle \\ \vdots \\ \langle y, x_n\rangle \end{pmatrix}.$$
et la première ligne est $(\|h\|^2 + \langle y, y\rangle, \langle y, x_1\rangle, \cdots, \langle y, x_n\rangle)$. Ainsi, en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, on a
$$\det(G(x, x_1, \cdots, x_n)) = \begin{vmatrix} \|h\|^2 & * \\ 0 & G(x_1, \cdots, x_n) \end{vmatrix} + G(y, x_1, \cdots, x_n).$$
Ce deuxième déterminant est nul et le premier vaut, par développement par rapport à la première colonne
$$\det(G(x, x_1, \cdots, x_n)) = \|h\|^2 \det(G(x_1, \cdots, x_n)).$$

3. On fait tout en même temps. Si la famille est liée – par exemple en contenant 0 –, il n'a rien à faire. Montrons par récurrence H_n : pour tout $(x_1, \cdots, x_n)$ famille libre de E, $\det(G(x_1, \cdots, x_n)) \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$ avec égalité si, et seulement si, la famille est orthogonale.
   - Pour $n = 1$, c'est clair.
   - Supposons le résultat acquis au rang n. Soit $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ une famille libre et on note F le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \cdots, x_n)$. Par la proposition précédente,
$$\begin{aligned}\det(G(x_1, \cdots, x_{n+1}) &= \det(G(x_1, \cdots, x_n))\|x_{n+1} - \pi_F(x_{n+1})\|^2 \\ &\leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \|x_{n+1} - \pi_F(x_{n+1})\|^2 \\ &\leq \prod_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2\end{aligned}$$

4. On rappelle que F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale dans E préhilbertien réel si F est de dimension finie. En fait, il suffit que F soit fermé (donc F de dimension infinie ne dérange pas) mais encore mieux, la complétude suffit.

puisque $\|x_{n+1}-\pi_F(x_{n+1})\|^2 = \|x_{n+1}\|^2 - \|\pi_F(x_{n+1})\|^2 \leq \|x_{n+1}\|^2$. Il y a égalité dans la première inégalité si, et seulement si $(x_1,\cdots,x_n)$ est orthogonale. Il y a égalité dans la deuxième si, et seulement si, $\|\pi_F(x_{n+1})\|^2 = 0$ ce qui signifie que $x_{n+1} \in F^\perp$. On a donc montré H_{n+1}.

Par principe de récurrence, on a le premier point. En notant M la matrice de vecteurs colonnes les $(x_i)_i$ on a $G(x_1,\cdots,x_n) = M^TM$ et $\det(M^T) = \det(M)$ ce qui conclut.

Exercice 88. Soit E un espace euclidien et u autoadjoint positif (resp. défini positif). Montrer qu'il existe un unique endomorphisme autoadjoint positif (resp. défini positif) v tel que $u = v^2$. Montrer de plus que $v \in \mathbb{K}[u]$.

Corrigé : Soit $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres pour u et $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ des réels positifs valeurs propres associées respectivement aux $e_1,\cdots,e_n$. On définit $v(e_i) = \sqrt{\lambda_i}e_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors v convient clairement.

Réciproquement, soit w autoadjoint vérifiant $w^2 = u$. Alors w commute avec u donc laisse stable les espaces propres de u. Regardons w sur $\mathcal{E}_\lambda(u)$. Alors $w_{\mathcal{E}_\lambda(u)}$ est un endomorphisme autoadjoint positif dont le carré vaut $\lambda\mathrm{Id}$. Si cet induit admet une valeur propre, au carré, elle vaut λ_i donc cette valeur propre vaut nécessairement $\sqrt{\lambda_i}$ puisque par positivité de l'induit, les valeurs propres sont positives. Puisque l'induit conserve la diagonalisabilité, on en déduit que $w_{\mathcal{E}_\lambda(u)}$ vaut $\sqrt{\lambda}\mathrm{Id}$. Ainsi, pour tout $1 \leq i \leq n, w(e_i) = v(e_i)$ donc $w = v$ car ils coïncident sur une base.

Ensuite, on construit P, un polynôme vérifiant $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ par Lagrange. On a alors $P(u) = v$ car ils coïncident sur une base.

Exercice 89.
1. Soit $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Montrer que si M est injective, alors M^TM est inversible.
2. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En utilisant l'exercice 88, montrer qu'il existe un unique couple $(O,S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.
3. On ne suppose plus inversible. Montrer que l'on peut faire de même mais S sera symétrique positive seulement. A-t-on unicité ?
4. Application 1. Soit E un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\rho := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$ le rayon spectral de u. Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$ où $|||\cdot|||_2$ désigne la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$.
5. Application 2. Soit G un compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset G$. Montrer que $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé :

1. Soit $x \in \ker(M^TM)$. Alors $M^TMx = 0$ donc $Mx \in \ker(M^T)$ mais $Mx \in \mathrm{Im}(M)$. Puisque $\mathrm{Im}(M) \perp \ker(M^T)$, on a $Mx = 0$ donc $x = 0$ par injectivité de M. Ainsi, M^TM est injective. C'est une matrice carrée : elle est inversible.
2. Supposons l'existence d'un tel couple. Alors $A^TA = S^TO^TOS = S^TS = S^2$. Donc S est racine carrée de A^TA qui est inversible. Elle est clairement symétrique positive donc A^TA est symétrique définie positive. Par l'exercice précédent, S est la racine carré de A^TA. Elle est donc inversible et $O = AS^{-1}$. Conclusion : pour A inversible, on note S, la racine carré de A^TA et $O = AS^{-1}$. Alors $A = OS$ clairement. S est symétrique définie positive et $O^TO = (AS^{-1})^TAS^{-1} = {S^{-1}}^TA^TAS^{-1} = I_n$ donc O est bien orthogonale.
3. On raisonne par densité des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une suite de matrices inversibles convergeant vers A. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on écrit $A_p = O_pS_p$ comme précédent. Puisque $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, de la suite $(O_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il existe une extraction φ tel que $O_{\varphi(n)}$ converge, disons vers $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. En considérant la suite $S_{\varphi(p)} = O_{\varphi(p)}^{-1}A_{\varphi(p)}$, elle converge vers une matrice S qui conserve la symétrie et le caractère positif par continuité du produit scalaire (du produit matriciel ici). Donc on obtient $A = OS$ comme souhaité. On perd l'unicité car avec $A = 0$, pour toute isométrie $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $0 = O \times 0$ car $0 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

4. Soit $(O,S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Alors comme O est une isométrie, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|OSX\|_2 = \|SX\|_2$ donc $|||A|||_2 = |||S|||_2$.
   Maintenant, comme S est diagonalisable en base orthonormée (théorème spectral) à spectre dans $\mathbb{R}^{+*}$, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_i = \rho(S)$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $SX = \lambda_i X$ avec X de norme 1 (puisque S est diagonalisable en base orthonormée). Ainsi, $|||A|||_2 = \|SX\|_2 = \lambda_i \|X\|_2 = \sqrt{\lambda_i^2} = \sqrt{\rho(S^2)} = \sqrt{\rho(A^TA)}$ puisque $A^TA = S^TO^TOS = S^2$.
5. Soit G un tel groupe et $g \in G$. On veut montrer que $g \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Soit $(o,s) in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}$ tel que $g = os$. Comme cette décomposition est unique, on veut montrer que $s = I_n$. Pour cela, regardons ses valeurs propres. La question précédente assure que $\rho(s) = \lambda_i$ avec $\lambda_i > 0$ pour un certain i. On peut raisonner de même et avoir que $\rho(s^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda_j}$ où λ_j est la plus petite valeur propre. Or G est compact donc borné : on en déduit que la suite $(s^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est aussi bornée dans G donc par équivalence des normes, $({|||s|||^k}_2)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée. Ainsi, comme $\forall k \geq 1, {|||s|||^k}_2 = \lambda_i^k$; ${|||s|||^{-k}}_2 = \lambda_j^{-k}$, on en déduit que $\lambda_i \leq 1$ et $\lambda_j \geq 1$ pour avoir le caractère borné. Ainsi, on a $1 \leq \lambda_j \leq \lambda_i \leq 1$ donc la plus petite valeur propre égale la plus grande : le spectre est réduit à $\{1\}$ donc $s = I_n$.

Exercice 90. Soit $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En utilisant l'exercice 88, montrer que AB est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+$.
2. Que dire du cas général ?

Corrigé :

1. A est symétrique définie positive. Il existe donc S racine carrée de A dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a alors $AB = S^2B = SSBSS^{-1}$. Donc AB est semblable à SBS qui est diagonalisable car symétrique réelle. Donc AB est diagonalisable.
2. On écrit encore $A = S^2$ mais avec S seulement symétrique positive. Alors SBS est encore symétrique positive (petit exercice). Notons r son rang et $X_1, \cdots, X_r$, vecteurs propres associées aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ strictement positive de SBS. On a donc $SBSX_k = \lambda_k X_k$ donc $AB(SX_k) = \lambda_k SX_k$.
   Comme $\mathrm{Vect}(X_1, \cdots, X_k) \cap \ker(SBS) = \{0\}$, on a $\mathrm{Vect}(X_1, \cdots, X_k) \cap \ker(S) = \{0\}$. Ainsi, $(SX_1, \cdots, SX_r)$ est libre : c'est le théorème du rang ! La restriction de S à un supplémentaire de $\ker(S)$ est injective ! On a donc une famille libre de r vecteurs propres de valeurs propres strictement positives.
   Concluons. Pour avoir AB diagonalisable de spectre positif, il faudrait que $\dim(AB) = n - r$. On sait déjà que $\ker(A) = \ker(S)$ par construction. Donc $\ker(AB) = \ker(SB)$ et $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(SB)$. On va maintenant montrer que $\ker(SBS) = \ker(BS)$ ce qui va conclure. Pour cela, soit T racine carrée de S, T étant symétrique positive. Soit $X \in \ker(SBS)$. Alors $0 = X^TSBSX = X^TSTTSX = X^TS^TT^TTSX = \|TSX\|^2$ donc $TSX = 0$ et $BSX = 0$ donc $X \in ker(BS)$. L'autre inclusion est claire donc on a finalement $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(SBS)$.

Exercice 91. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On définit l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \dfrac{\langle AX, X \rangle}{\|X\|^2} \end{array}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne associée.

1. A l'aide du théorème spectral, montrer que f est bornée et atteint ses bornes.
2. Sans utiliser le théorème spectral, montrer le même résultat.
3. On note $\lambda = \sup\limits_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}} f(X)$. Montrer que $\lambda I_n - A$ est symétrique positive. En déduire que λ est une valeur propre de A.

4. Démontrer le théorème spectral.

Corrigé :

1. Par le théorème spectral, il existe $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ valeurs propres de A et $e_1, \cdots, e_n$ vecteurs propres associées aux valeurs propres respectivement telle que $(e_1, \cdots, e_n)$ forment une base orthogonale. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0$ et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ des réels tels que
$$X = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k.$$
Alors
$$\langle AX, X\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \mu_i A e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mu_i \mu_j \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i^2.$$
Ainsi,
$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2.$$
Puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = \langle X, X\rangle$, on a finalement
$$\lambda_1 \leq f(X) \leq \lambda_n.$$
f est donc bornée. f atteint ses bornes puisque $f(e_1) = \lambda_1$ et $f(e_n) = \lambda_n$.
2. Par bilinéarité du produit scalaire, on a
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}, f(X) = \left\langle A\frac{1}{\|X\|}X, \frac{1}{\|X\|}X \right\rangle.$$
Ainsi, en notant $S = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \|X\| = 1\}$, puisque $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}, \dfrac{1}{\|X\|}X \in S$, on a
$$\inf_{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}} f(X) = \inf_{Y\in S} f(Y)\ , \quad \sup_{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}} f(X) = \sup_{Y\in S} f(Y).$$
S est bornée et $S = \|\cdot\|^{-1}(\{1\})$ donc est fermé car $\|\cdot\|$ est continue – par exemple, par la deuxième inégalité triangulaire, elle est 1-lipschitzienne – et $\{1\}$ est un fermé : S était donc l'image réciproque d'un fermé par une application continue. S étant inclus dans E de dimension finie, S est compact.
$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto AX$ est continue car linéaire en dimension finie. $X \mapsto \langle AX, X\rangle$ est continue puisque par Cauchy-Schwarz, $|\langle AX, X\rangle| \leq \|AX\|\|X\| \leq \|\|A\|\|\|X\|^2$.[5] Ainsi, en particulier, $X \in S \mapsto \langle AX, X\rangle$ et continue et atteint ses bornes par le théorème des bornes atteintes : il existe donc $a, b \in S$ tel que
$$\inf_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = \inf_{y\in S} f(y) = f(a)\ , \quad \sup_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = \sup_{y\in S} f(y) = f(b).$$
Ainsi, f est bornée sur $E\backslash\{0\}$ et atteint ses bornes.
3. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$. Alors
$$\langle(\lambda I_n - A)X, X\rangle = \lambda\langle X, X\rangle - \langle AX, X\rangle = \lambda\|X\|^2 - \|X\|^2 f(X) = (\lambda - f(X))\|X\|^2 \geq 0.$$
Ainsi, $\lambda I_n - A$ est symétrique (car A l'est) positive. Notons B cette matrice. Alors

5. On peut aussi dire que $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto \langle AX, Y\rangle$ est bilinéaire donc continue car on est en dimension finie et que $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto (X,X)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ est continue : on conclut par composition.

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle BX, Y\rangle^2 \leq \langle BX, X\rangle\langle BY, Y\rangle.$$

Ceci est vrai pour toute matrice symétrique positive. Je présente deux preuves.

(a) On redémontre Cauchy-Schwarz et c'est la même méthode. Par contre, on n'a pas le cas d'égalité car lui nécessite le caractère défini du produit scalaire ! $X, Y \mapsto \langle BX, Y\rangle$ est symétrique si B l'est, positif si B l'est.

(b) On écrit C racine carrée de B obtenu dans l'exercice 88. C est donc symétrique. On a alors, pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle BX, Y\rangle^2 &= \langle C^T CX, Y\rangle^2 \\ &= \langle CX, CY\rangle^2 \\ &\underset{C.S.}{\leq} \|CX\|^2\|CY\|^2 \\ &= \langle CX, CX\rangle\langle CY, CY\rangle \\ &= \langle BX, X\rangle\langle BY, Y\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $X_0 \in S$ tel que $f(X_0) = \lambda$, on a $\langle BX_0, X_0\rangle = 0$ et donc

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle BX_0, Y\rangle^2 \leq 0.$$

Ainsi, $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}, \langle BX_0, Y\rangle = 0$ donc $BX_0 = 0$. Ainsi, $\lambda X_0 - AX_0 = 0$ donc λ est valeur propre de A et X_0 est un vecteur propre.

4. On conclut par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est clair. Supposons que l'on puisse trouver une base orthonormale de diagonalisation pour A lorsque $A \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et u endomorphisme canoniquement associée (on rappelle que la base canonique est orthonormée). Par la question précédente, il existe un couple valeur propre/vecteur propre (λ, x_0)[6] dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$. Soit $H = (x_0)^\perp$. Alors u stabilise $\mathrm{Vect}(x_0)$ donc $u = u^*$ stabilise H. Ainsi, u_H, l'induit de u sur H est bien défini et est un endomorphisme de H qui est de dimension $n-1$. Ainsi, il existe une base de H orthonormale qui diagonalise u_H. On concatène cette base avec $\{x_0\}$ et on obtient une base orthonormale (puisque $x_0 \perp H$) qui diagonalise u.

   Par le principe de récurrence, le théorème spectral est démontré.

6. et x_0 est de norme 1

Chapitre 10

Séries entières

Exercice 92. Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $r \in]0, R[$.

1. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}, 2\pi r^k a_k = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} \mathrm{d}\theta.$$
2. On suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante. C'est presque le théorème de Liouville !

Corrigé :

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [0, 2\pi], |a_n r^n e^{i(n-k)\theta}| = |a_n r^n| \in \ell^1(\mathbb{N}).$$
Donc la série converge normalement sur tout $[0, 2\pi]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Alors
$$f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} = \sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{i(n-k)\theta}.$$
On vient d'établir la convergence normale de cette série. Par le théorème d'interversion série-intégrale sous convergence normale, on a
$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} \mathrm{d}\theta = \sum_{n \geq 0} a_n r^n \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} \mathrm{d}\theta}_{2\pi\delta_{n,k}} = 2\pi a_k r^k.$$
2. Soit M tel que $|f| \leq M$. Alors
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, |a_k| = \frac{1}{2\pi r^k} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} \mathrm{d}\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} M \mathrm{d}\theta = \frac{M}{r^k}.$$
Lorsque r tend vers l'infini, on a donc $a_k = 0$ pour tout $k \geq 1$. Donc $f = a_0$.

Exercice 93. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit D_n le nombre de dérangement dans $[\![1, n]\!]$ (c'est-à-dire des éléments de $\mathfrak{S}_n$ sans point fixe).

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.
2. On considère la série génératrice exponentielle de $(D_n)_n$ (à savoir $\displaystyle\sum_{n \geq 0} D_n \frac{z^n}{n!}$) et on note D sa somme. Montrer que son rayon de convergence R est supérieur ou égal à 1. En déduire $D(z)$ pour $z \in D(0, 1)$.

3. Calculer D_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé :

1. On compte les permutations de $\mathfrak{S}_n$ comme suit :
   - On fixe le nombre de points fixes d'une permutation. Disons k.
   - On choisit les points fixes. Il y a $\binom{n}{k}$ choix.
   - On dérange les éléments restants (il ne doit pas y avoir de points fixes). Il y a, par définition, D_{n-k} choix.
   - On obtient alors de manière unique une permutation.

   Ainsi,
$$|\mathfrak{S}_n| = n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k.$$

2. Clairement, $0 \leq \frac{D_k}{k!} \leq 1$ pour tout $k \geq 0$. Ainsi, D définit une série entière de rayon $R \geq 1$ par le lemme d'Abel. Remarquons qu'en divisant par $n!$, on a
$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{D_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{p+q=n} \frac{D_p}{p!} \frac{1}{q!}.$$
   On reconnait un produit de Cauchy. En fait, pour tout $|z| < 1$,
$$\sum_{n\geq 0} \frac{D_n}{n!} z^n \sum_{\ell \geq 0} \frac{z^\ell}{\ell!} = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{p+q=n} \frac{D_p}{p!} \frac{1}{q!} \right) z^n = \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$
   donc $\forall |z| < 1, D(z) e^z = \frac{1}{1-z}$. On en déduit
$$\forall |z| < 1, D(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

3. Eh bien, calculons $D(z)$ pour $|z| < 1$. On a
$$\frac{e^{-z}}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n \sum_{\ell=0}^{+\infty} z^\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!} z^n.$$
   Par unicité du développement en série entière,
$$\forall k \geq 0, \frac{D_k}{k!} = \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p}{p!}.$$
   On reconnait à droite une série alternée. Notons $R_k = \sum_{n \geq k+1} \frac{(-1)^n}{n!}$. Alors
$$\forall k \geq 0, \frac{D_k}{k!} = \frac{1}{e} - R_k.$$
   Ainsi,
$$\frac{k!}{e} + \frac{1}{2} = D_k + \frac{1}{2} + k! R_k.$$
   Par le critère spécial des séries alternées, $|R_k| \leq \frac{1}{(k+1)!}$ pour $k \geq 1$, donc $|k! R_k| < \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, $\frac{1}{2} + k! R_k$ est compris entre 0 et 1 donc la partie entière de $D_k + \frac{1}{2} + k! R_k$ est D_k (car D_k est entier) pour tout $k \geq 1$. De fait,
$$\forall k \geq 1, D_k = \left\lfloor \frac{k!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Exercice 94. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant

$$c_0 = 1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}.$$

On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ pour x réel de rayon de convergence $R > 0$.

1. Montrer que $\forall x \in]-R, R[, f(x) = 1 + xf^2(x)$.
2. Donner une expression de f (on remarquera qu'il suffit d'imposer une condition sur R pour avoir une expression simple).
3. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ est développable en série entière sur $]-1/4, 1/4[$.
4. En déduire une expression close de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On cherche à donner du contexte sur l'apparition des $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On se place dans le carré $[\![0, n-1]\!]^2$. Une particule se trouve en position $(0, 0)$ et ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut de sa position (tout en restant dans le carré). Combien existe-t-il de chemin la menant vers $(n-1, n-1)$ sachant qu'elle ne peut se trouver en position (i, j) avec $j > i$?
   (b) On dit qu'un mot est bien parenthésé lorsqu'il est soit vide, soit pour toute parenthèse fermée, il existe une parenthèse ouverte placée avant qui enferme un mot bien parenthésé. Par exemple, « (()) » est bien parenthésé, « ())(» ne l'est pas. Combien existe-t-il de mot bien parenthésé de taille $2n$?
   (c) On considère un cercle et $2n$ points de ce cercle. A chaque point, on le relie à un unique autre point. On dit que la configuration des cordes est admissible lorsque aucune corde ne s'intersecte entre elles. Combien de configurations admissibles existe-t-il ?

Corrigé :

1. Soit $x \in]-R, R[$. Alors par produit de Cauchy,

$$f^2(x) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} c_p x^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} c_q x^q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} c_p c_q\right) x^n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
1 + xf^2(x) &= 1 + x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} c_p c_q\right) x^n \\
&= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} c_p c_q\right) x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\sum_{p+q=n-1} c_p c_q\right)}_{=c_n} x^n \\
&= c_0 x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

2. Soit $x \in]0, R[$. Alors

$$xf^2(x) - f(x) + 1 = 0 \Longleftrightarrow f^2(x) - \frac{1}{x}f(x) + \frac{1}{x} = 0 \Longleftrightarrow \left(f(x) - \frac{1}{2x}\right)^2 \underbrace{-\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x}}_{=-\frac{1-4x}{4x^2}}.$$

Ainsi, dès lors que $1 - 4x \geq 0$ à savoir $x \leq \frac{1}{4}$, on a $f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. Si le signe devant la racine est $+$, alors en 0, f tend vers l'infini ce qui n'est pas : c'est donc un $-$. On a le même résultat sur $]-R, 0[$. Ainsi, pour $R < 1/4$, on a

$$\forall x \in]-R, R[\setminus\{0\}, f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

3. On rappelle le D.S.E. de $\sqrt{1-x}$. Pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-(n-1))}{n!}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{2}-k)}{n!}(-1)^n x^n.\end{aligned}$$

Or

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-2k}{2}\right) = \frac{1}{2^n}(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1}(2k-1) = \frac{1}{2^n}(-1)^{n+1} \prod_{k=1, k \text{ impair}}^{2n-3} k.$$

Pour conclure, on écrit

$$\prod_{k=1, k \text{ impair}}^{2n-3} k = \frac{1}{2n-1} \prod_{k=1, k \text{ impair}}^{2n-1} k = \frac{1}{2n-1} \frac{\overbrace{\prod_{k=1, k \text{ impair}}^{2n-1} k \prod_{k=1, k \text{ pair}}^{2n} k}^{=(2n)!}}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

On a donc

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{4^n n!(2n-1)}.$$

Finalement,

$$\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{2}-k)}{n!}(-1)^n = -\frac{(2n)!}{n!^2}\frac{1}{4^n(2n-1)}$$

ce qui donne

$$\sqrt{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \frac{1}{2n-1} x^n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} &= \frac{1}{2x}\left(1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}\frac{1}{2n-1}(4x)^n\right) \\ &= \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}x^n \\ &= \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2n+1}x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{4n+2}x^n.\end{aligned}$$

4. Pour $x \in]-1/4, 1/4[$, on a donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{4n+2} x^n.$$

Par unicité du D.S.E., on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{4n+2} = \frac{(2n)!(2n+1)2(n+1)}{n!^2(n+1)^2} \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{(2n)!}{n!^2(n+1)} = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}.$$

5. (a) Pour $n = 0$, il y a 1 seul chemin. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour construire un tel chemin, il suffit de construire un chemin qui va de $(0,0)$ à (k,k) (il y a par hypothèse c_k chemins possibles) puis de (k,k) à (n,n) (c'est-à-dire autant de chemin que pour aller de $(0,0)$ à $(n-k, n-k)$ à savoir c_{n-k-1} choix) et ce, pour chaque k dans $[\![0, n-1]\!]$. On a donc

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}.$$

(b) Pour $n = 0$, il y a un seul mot qui est le mot vide, bien parenthésé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour construire un mot bien parenthésé de taille $2n$, je note $0, \cdots, 2n-1$ les positions des parenthèses. Je note alors N la position de la parenthèse fermée qui ferme la parenthèse ouverte en position 0. k est nécessairement impair, je le note $2k+1$. Alors il suffit de construire un mot bien parenthésé entre les indices 0 et $N-1$ (donc un mot de taille $2k+1-1 = 2k$ donc c_k choix) puis un mot bien parenthésé entre les indices $N+1$ et $2n-1$ (donc un mot de taille $2n-1-N-1+1 = 2(n-k-1)$ donc c_{n-1-k} choix). Choisir N revient à choisir k dans $[\![0, n-1]\!]$ donc

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}.$$

(c) C'est la même preuve que le cas précédent, les arêtes étant davantage géométrique.

Exercice 95. Soit (E) l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) développable en série entière qui vaut 1 en 0.
2. Montrer que toute autre solution définie sur $]0, \alpha[$ pour $\alpha > 0$ non proportionnelle à celle-ci est non bornée.
3. En déduire que la solution trouvée en question 1 est

$$J : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(t)) \mathrm{d}t \in \mathbb{R}.$$

Corrigé :

1. Soit $f = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $x \in]-R, R[$.

$$xf''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-1} = \sum_{n=1} a_{n+1} n(n+1) x^n.$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1) x^n.$$

$$xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n.$$

Analyse : f est solution de (E) si, et seulement si

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_{n+1}n(n+1)+a_{n+1}(n+1)+a_{n-1}\right)x^n+a_1x^0=0$$

ce qui revient à demander par unicité des coefficients d'une série entière

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, a_{n+1}(n+1)^2+a_{n-1}=0, a_1=0.$$

Par récurrence, on a donc immédiatement

$$\forall n\in\mathbb{N}, a_{2n+1}=0\ ;\ a_{2n+2}=\frac{-a_{2n}}{[2(n+1)]^2}=\cdots=\frac{(-1)^{n+1}a_0}{2^{2(n+1)}(n+1)!^2}.$$

Si on impose $f(0)=1$ à savoir $a_0=1$, on a donc

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}.$$

Synthèse : soit f série entière définit ci-avant. Montrons que son rayon de convergence est strictement positif. Pour cela, le lemme d'Abel nous dit que $R=+\infty$. En effet, en notant $b_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^p}{4^p(p!)^2} & \text{si } n=2p\\ 0 & \text{si } n=2p+1\end{cases}$, la suite $(b_nR^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $R>0$. Il suffit d'écrire

$$\forall p\in\mathbb{N}, n=2p, \frac{(-1)^p}{4^p(p!)^2}R^{2p}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Par les calculs antérieurs à l'analyse, f est solution de (E) et $f(0)=1$: c'est ce qu'il fallait démontrer.

2. Soit g telle que (f,g) soit libre et g solution de (E). Soit W wonskien de f,g, c'est-à-dire, $W=\begin{vmatrix} f & g\\ f' & g'\end{vmatrix}=fg'-f'g$. Alors W est dérivable de dérivée $W'=f'g'+fg''-f''g-f'g'$ donc $xW'=f(-g'-xg)-(-f'-xf)g=-fg'+f'g=-W$. Ainsi, $(xW)'$ est constant sur $]0,\alpha[$ donc il existe une constante réelle A tel que $\forall x\in]0,\alpha[, xW(x)=A$. A est non nulle : sinon, W est nulle ce qui contredit la liberté de (f,g). g étant bornée, f' aussi au voisinage de 0 – car f' est continue sur $\mathbb{R}$ –, gf' est aussi continue au voisinage de 0. Ainsi, puisque W diverge en 0^+,

$$A=xf(x)g'(x)-xf'(x)g(x)\underset{x\to0^+}{\sim}xf(x)g'(x).$$

Puisque $f(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}1$, on a donc $g'(x)\underset{x\to0^+}{\sim}A/x$. Soit $x_0\in]0,\alpha[$. Puisque $\displaystyle\int_0^{x_0}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge, par théorème d'intégration d'équivalents, on a

$$g(x_0)-g(x)\underset{x\to0}{\sim}A(\ln(x_0)-\ln(x)).$$

Cela contredit le caractère bornée de g. Ainsi, par l'absurde, on a g non bornée.

3. Soit $f:(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\pi/2]\mapsto\cos(x\sin(t))\in\mathbb{R}$.

- $\forall t\in[0,\pi/2], x\mapsto f(x,t)\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; $\forall t\in[0,\pi/2],\forall x\in\mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)=-\sin(t)\sin(x\sin(t))$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)=-\sin^2\cos(x\sin(t))$.
- Pour tout x réel, ces dernières applications sont mesurables sur $[0,\pi/2]$.
- Domination : chacune de ces applications sont continues sur le segment $[0,\pi/2]$ donc dominée sur $[0,\pi/2]$.

Par le théorème de dérivation $\mathcal{C}^2$ sous le signe intégral, J est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$J'(x) = -\int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin(x\sin(t))\mathrm{d}t \ , \ J''(x) = -\int_0^{\pi/2} \sin^2\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$x(J''(x)+J(x)) = x\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2(t))\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\cos(t)(x\cos(t))\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t.$$

On réalise une intégration par parties, on est en présence de deux fonctions $\mathcal{C}^1$: on intègre $t \mapsto (x\cos(t))\cos(x\sin(t))$ dont une primitive est $t \mapsto \sin(x\sin(t))$ et on dérive cos. On obtient alors

$$x(J''(x)+J(x)) = \underbrace{[\sin(x\sin(t))\cos(t)]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2}\sin(t)\sin(x\sin(t))\mathrm{d}t = -J'(x).$$

On a donc J solution de (E). De plus, J est bornée sur $\mathbb{R}$. Par précédent, $J = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or, $J(0) = 1 = \lambda f(0) = \lambda$ donc $J = f$.

Exercice 96. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)$.

Corrigé : On commence par étudier la convergence de la série.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$. On veut appliquer le critère spécial des séries alternées.

Décroissance de (u_n).

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2k+1} \\ &= \frac{1}{n+2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2n+3}\right) \\ &= \frac{1}{n+2}\left((n+1)u_n + \frac{1}{2n+3}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2}\left((n+1)u_n + \frac{1}{2n+3} - (n+2)u_n\right) = \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{2n+3} - u_n\right).$$

Or $(u_n)_n$ est la moyenne de $n+1$ termes supérieurs à $\dfrac{1}{2n+1}$, d'où $u_n \geq \dfrac{1}{2n+1} \geq \dfrac{1}{2n+3}$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et $(u_n)_n$ est décroissante.

Limite de (u_n).

$$(n+1)u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} \leq \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} \sim \ln(2n+1) \sim \ln(n)$$

Ainsi $u_n = O\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ et en particulier, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Comme de plus $(u_n)_n$ est une suite décroissante, d'après le critère spécial des séries alternées, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n u_n$ converge.

On s'intéresse maintenant au calcul de la somme.

On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n x^n$ et on note R son rayon de convergence. On veut calculer $g(1)$.

D'après l'étape précédente, $g(1)$ converge et donc $R \geq 1$. *On peut montrer avec le critère de d'Alembert que* $R = 1$. Cela nous assure que g est continue sur $]-1, 1[$ au pire, mais on aimerait que g soit continue en 1.

Montrons donc que g est continue sur $[0, 1]$. Soit $x \in [0, 1]$:

— La suite $(u_n x^n)_n$ est à termes positifs ;

— La suite $(u_n x^n)_n$ est décroissante (c'est un produit de deux suites positives décroissantes) ;

— La suite $(u_n x^n)_n$ converge vers 0.

D'après le critère spécial des séries alternées :

— $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n x^n$ converge ;

— Le reste $R_n(x)$ vérifie : $\forall x \in [0, 1]$, $|R_n(x)| \leq |u_n x^n| \leq u_n$.

Donc $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et la série converge uniformément.

Par théorème de continuité des séries de fonctions, g est continue sur $[0, 1]$.

On souhaite trouver une autre formule pour

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2k+1} (-x)^n \right) \right).$$

Cette dernière expression suggère de calculer le produit de Cauchy de deux séries bien choisies :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{2n+1} \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} (-1)^{n-k} \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{2k+1} \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_n (-x)^n.
\end{aligned}$$

Mais on connait une expression pour chacune de ces deux séries. Soit $x \in [0, 1[$.

D'une part,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x},$$

d'autre part,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{x}} = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

On obtient donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) u_n x^n = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Comme la série converge normalement sur $]-1, 1[$ et donc sur $[0, x]$ pour $x \in [0, 1[$, on peut intégrer terme à terme :

$$\forall x \in [0, 1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n x^{n+1} = \int_0^x \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt,$$

le terme de gauche valant $xg(x)$. Par continuité de g en 1, on a alors

$$\begin{aligned}
g(1) &= \int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt \\
&= \int_0^1 \frac{\arctan(u)}{u(1+u^2)} 2udu \qquad \text{en posant } t = u^2,\ dt = 2udu \\
&= \int_0^1 2\arctan'(u)\arctan(u) du \\
&= \left[(\arctan(u))^2 \right]_0^1 \\
&= \frac{\pi^2}{16}.
\end{aligned}$$

Chapitre 11

Dénombrabilité, sommabilité

Exercice 97. On dit que $x \in \mathbb{C}$ est un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$ lorsqu'il existe un polynôme P à coefficient dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(x) = 0$. Sinon, il est dit transcendant. Montrer l'existence de réels transcendants.

Corrigé : Il suffit de montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable. En notant A cet ensemble, on a $(\mathbb{C}\backslash A) \cap \mathbb{R}) = \mathbb{R}\backslash A \neq \emptyset$ car sinon, $\mathbb{R}$ serait dénombrable ce qui n'est pas. On conclut en écrivant :

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{P\in\mathbb{Q}_n[X]} \{x \in \mathbb{C} : P(x) = 0\}.$$

Cet ensemble est dénombrable car l'ensemble des racines d'un polynôme de degré fixé est fini, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc $\mathbb{Q}_n[X] \simeq \mathbb{Q}^{n+1}$ l'est aussi et $\mathbb{N}$ est dénombrable donc A l'est.

Exercice 98. Soit G un groupe. Montrer que si G admet une partie génératrice finie, alors G est au plus dénombrable. Que dire de la réciproque ?

Corrigé : Soit $S = \{g_1, \cdots, g_n\}$. Soit $r \in \mathbb{N}$ et $G_r = \{\prod_{i\in I} h_i : h_i \in S \wedge \#I = r\}$. Alors clairement, $G = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} G_r$. Les G_r sont finis car de cardinal majoré par $r \times n$, r étant la taille maximale du produit, et n le choix pour chaque facteur. On en déduit donc que G est dénombrable ou fini.

La réciproque est fausse. Par exemple, je prends $\mathbb{Q}$. Supposons qu'il existe $(q_1, \cdots, q_n)$ qui génère $\mathbb{Q}$. En les écrivant sous forme irréductible, je note b_i, les dénominateurs respectifs. Alors $\dfrac{1}{b_1 b_2 \cdots b_n + 1} \in \mathbb{Q}\backslash\langle\{q_1, \cdots, q_n\rangle\}$.)

Exercice 99. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est semi-convergente. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha.$$

Indication : on pourra poser $E^+ = \{n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0\}$ et $E^- = \{n \in \mathbb{N} : u_n < 0\}$ et montrer que E^+ et E^- sont dénombrables.

Corrigé :

On partitionne $\mathbb{N}$ en deux sous-ensembles On partitionne $\mathbb{N}$ en deux sous-ensembles $E^+ = \{n \in \mathbb{N} | u_n \geq 0\}$ et $E^- = \{n \in \mathbb{N} | u_n < 0\}$. Ces deux ensembles sont alors infinis. En effet, supposons par l'absurde que $\text{card}(E^-) <$

$+\infty$. Alors la suite $(u_n)n \in \mathbb{N}$ est à termes positifs à partir d'un certain rang et la convergence absolue de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ équivaut à sa convergence, ce qui contredit le fait que la série est semi-convergente. De même, on ne peut pas avoir $\mathrm{card}(E^+) < +\infty$.

Construction par récurrence de l'extraction Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\max(0, u_n) = \dfrac{u_n + |u_n|}{2}$ et $\min(0, u_n) = \dfrac{u_n - |u_n|}{2}$ donc les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \max(0, u_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \min(0, u_n)$ divergent.

On construit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On pose $\sigma(0) = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s(n) = \{\sigma(k) : k \in [\![0, n-1]\!]$ et :

$$\sigma(n) = \begin{cases} \min\left(E^+ \backslash s(n)\right) & \text{si} \quad \sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} \leq \alpha \\ \min\left(E^- \backslash s(n)\right) & \text{si} \quad \sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} > \alpha \end{cases}$$

On montre que $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ σ est injective par construction. Il reste à montrer qu'elle est surjective. Supposons par l'absurde qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \notin \sigma(\mathbb{N})$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $N \in E^+$. Alors l'ensemble $E^+ \cap \sigma(\mathbb{N})$ est fini : en effet, par construction de σ, si N n'est pas atteint par σ, alors N n'est jamais le minimum de E^+ en enlevant des $\sigma(k)$, donc tous les éléments de $E^+ \cap \sigma(\mathbb{N})$ sont inférieurs à N.

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\sigma(n) \in E^-$. Ainsi, dès que $n \geq n_0$, $\sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} > \alpha$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)}$ est alors à termes négatifs à partir d'un certain rang et que ses sommes partielles sont minorées (par α) donc la série converge.

En construisant de façon analogue à σ l'application $\varphi : \mathbb{N} \to E^-$ bijective et strictement croissante, on a que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\varphi(n)}$ ne diffèrent que d'un nombre fini de termes donc sont de même nature. Or, les sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\varphi(n)}$ sont majorées par celles de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \min(0, u_n)$ qui diverge (vers $-\infty$).

Ainsi, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\varphi(n)}$ diverge, ce qui est absurde.

Ainsi, σ est surjective donc bijective d'où $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$.

On montre que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha$ Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $|u_n| \leq \varepsilon$. Par injectivité, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} | \sigma(k) \leq n_1\}$ est fini donc, en posant $n_0 := \max\{k \in \mathbb{N} | \sigma(k) \leq n_1\}$, si $n > n_0$, $\sigma(n) > n_1$ donc $|u_{\sigma(n)}| \leq \varepsilon$.

Comme les $\sigma(n)$ ne peuvent pas rester uniquement dans E^+ ou dans E^-, alors il existe $N > n_0$ tel que $\sigma(N) \in E^+$ et $\sigma(N+1) \in E^-$. On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$. Comme $\sigma(N) \in E^+$, alors $S_{N-1} \leq \alpha$ et comme $\sigma(N+1) \in E^-$, alors $S_N > \alpha$. Or, $|S_N - S_{N-1}| = |u_{\sigma(N)}| \leq \varepsilon$ donc

$$\alpha < S_N \leq S_{N-1} + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon.$$

Soit $n > N$. On suppose par l'absurde que $S_n > \alpha + \varepsilon$. Comme on passe de S_{n-1} à S_n par un saut de longueur $|u_{\sigma(n)}| \leq \varepsilon$, alors $S_{n-1} > \alpha$. Cela entraîne que $u_{\sigma(n)} < 0$ et donc $S_{n-1} \geq S_n$. De proche en proche, on a donc

$$\alpha + \varepsilon < S_n \leq S_{n-1} \leq \cdots \leq S_N \leq \alpha + \varepsilon$$

et on aboutit à une contradiction.

Ainsi, pour tout $n > N$, $S_n \leq \alpha + \varepsilon$. On aboutit à la même contradiction si on suppose que pour tout $n > N$, on a $S_n < \alpha - \varepsilon$. Finalement, on a donc que pour tout $n > N$, $|S_n - \alpha| \leq \varepsilon$, ce qui prouve bien qu'avec ce $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ bien construit, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha$.

Chapitre 12

Probabilités

Exercice 100. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'événements. On définit

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k}_{=:B_n}.$$

1. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que ω réalise $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ si, et seulement si, $\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\}$ est de cardinal infini (dit en français, A_n est réalisé une infinité de fois).
   (b) Lemme de Borel-Cantelli. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n) = 0$.
2. Loi du zéro-un de Borel. On suppose que les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des événements indépendants. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n)$ vaut 0 ou 1 selon que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge ou diverge.

Corrigé :

1. Par définition, on a ω réalise $\limsup A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, \omega \in A_k$.

2. Il est aisé de montrer que $(B_n)_n$ est décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante, on a donc

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

   Or, par σ-sous-additivité,

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Si la série converge, on a déjà le résultat et pas besoin d'indépendance. Prenons donc la série divergente. L'astuce est d'utiliser l'inégalité de convexité $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déjà,

$$\Omega\backslash B_n = \Omega\backslash \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \Omega\backslash A_k.$$

Fixons alors $N \geq n$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega \backslash B_n) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \Omega \backslash A_k\right) \\ &\underset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{k=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\ &\leq \prod_{k=n}^{N} \exp(-\mathbb{P}(A_k)) \\ &= \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)\right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\Omega \backslash B_n) = 0$. Par σ-sous-additivité, on a donc

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega \backslash B_n) = 0.$$

En passant au complémentaire, on a le résultat.

Exercice 101. Soit X, une variable aléatoire réelle. Soit $\alpha > 0$.

1. Soit $\lambda \geq 0$. Montrer que
$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X] + \lambda)^2] = \mathrm{Var}(X) + \lambda^2.$$
2. Montrer que $\forall \lambda > 0$,
$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \geq \alpha) \leq \frac{\mathrm{Var}(X) + \lambda^2}{(\alpha + \lambda)^2}.$$
3. En déduire que
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha) \leq \frac{2\mathrm{Var}(X)}{\alpha^2 + \mathrm{Var}(X)},$$
et comparer avec Bienaymé-Tchebychev.

Corrigé : On note $m = \mathbb{E}[X], \sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

1.
$$\mathbb{E}[(X - m + \lambda)^2] = \mathbb{E}[(X - m)^2] + 2\lambda(\mathbb{E}[X] - m) + \lambda^2 = \sigma^2 + \lambda^2.$$
2. On a
$$\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) = \mathbb{P}(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda) \leq \mathbb{P}((X - m + \lambda)^2 \geq (\alpha + \lambda^2)) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - m + \lambda)^2]}{(\alpha + \lambda)^2} = \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\alpha + \lambda)^2}.$$
3. Soit $\varphi : \lambda \mapsto \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\lambda + \alpha)^2}$. On dérive φ et on montre que $\varphi'(\lambda) = 0$ si, et seulement si, $\lambda = \dfrac{\sigma^2}{\alpha}$. Mais alors, $\varphi(\sigma^2/\alpha) = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}$, d'où le résultat. En remplaçant $X - m$ par $-(X - m$, le raisonnement ci-dessus en change pas. On a donc
$$\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2},$$
et
$$\mathbb{P}(-X + m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$
Ainsi,
$$\mathbb{P}(|X - m| \leq \alpha) = \mathbb{P}(X - m \geq \alpha) + \mathbb{P}(-X + m \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$
(Je laisse la comparaison avec Bienaymé-Tchebychev pour vous).

<u>Exercice</u> 102. 1. Soit $x \in [-1,1], t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$

2. Soit X une variable aléatoire discrète ayant une espérance. On la suppose centrée bornée par 1. Montrer que e^{tX} admet une espérance et que

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] \leq e^{t^2/2}.$$

3. Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes centrées indépendantes. On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!], |X_i|$ est bornée par un réel a_i. En notant $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}\left[e^{tS_n}\right] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

4. En déduire

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right).$$

Remarque. Si on ne suppose plus les variables centrées, le résultat tient à condition d'estimer $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geq \varepsilon)$.

Corrigé :

1. exp est convexe donc par l'inégalité de convexité, on a

$$\forall x \in [-1,1], \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tx) = \exp\left(\frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}t\right) \leq \frac{1-x}{2}\exp(-t) + \frac{1+x}{2}\exp(t)$$

puisque $\frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2} = 1$ et que ces deux termes que l'on somme sont dans $[0,1]$, x étant lui dans $[-1,1]$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $tX \leq |t||X| \leq |t|$ donc par croissance de exp, on a $0 \leq \exp(tX) \leq \exp(|t|)$. Ainsi, $\exp(tX)$ est positive bornée donc elle admet une espérance. Par ailleurs, X est bornée par 1 donc par la question précédente, on a

$$\exp(tX) \leq \frac{1-X}{2}\exp(-t) + \frac{1+X}{2}\exp(t).$$

Par croissance puis linéarité de l'espérance, puisque X est centrée (donc $\mathbb{E}[X] = 0$), on a

$$\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \frac{1-\mathbb{E}[X]}{2}\exp(-t) + \frac{1+\mathbb{E}[X]}{2}\exp(t) = \frac{1}{2}(\exp(-t)+\exp(t)) = \cosh(t).$$

Or, on a l'inégalité classique

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cosh(t) \leq \exp(t^2/2).$$

Pour cela, on va utiliser les séries entières. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cosh(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}t^{2n} \ , \ \exp(t^2/2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!2^n}t^{2n}.$$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \leq \prod_{k=n+1}^{2n} k$$

donc

$$\frac{1}{(2n)!} \leq \frac{1}{n!2^n}$$

donc par positivité de t^{2n} pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\cosh(t) \leq \exp(t^2/2).$$

Finalement, on a bien $\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp(t^2/2)$.

3. Assurons-nous de l'existence des objets. Soit $t \in \mathbb{R}$. S_n est bornée comme somme finie de variables aléatoires bornées donc $\exp(tS_n)$ l'est aussi et admet donc une espérance. Par indépendance des $(X_i)_i$, on a alors l'indépendance des $(\exp(tX_i))_i$ ce qui donne

$$\mathbb{E}[\exp(tS_n)] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \exp(tX_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(tX_i)].$$

On veut utiliser la question précédente. Pour obtenir X_i bornée par 1, il suffit de diviser par a_i donc on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq i \leq n, \mathbb{E}\left[\exp(tX_i/a_i)\right] \leq \exp(t^2/2).$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq i \leq n, 0 \leq \mathbb{E}\left[\exp(tX_i)\right] \leq \exp(a_i^2 t^2/2).$$

Ainsi, par produit, on a

$$\mathbb{E}[\exp(tS_n)] \leq \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i^2 t^2/2) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

4. Fixons maintenant $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. Par positivité de $\exp(tS_n)$, par Markov, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\exp(tS_n) \geq \exp(t\varepsilon)) \leq \frac{\mathbb{E}[\exp(tS_n)]}{\exp(t\varepsilon)} \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j^2 - t\varepsilon\right).$$

Cela étant vrai pour tout t, il faut trouver un t « optimal ». Posons $a = \sum_{j=1}^{n} c_j^2$ et $f : t \geq 0 \mapsto \frac{t^2}{2}a - t\varepsilon \in \mathbb{R}$.

f est polynomiale : elle atteint un unique minimum en ε/a et f vaut $-\varepsilon^2/2a$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \exp(-\varepsilon^2/2a) = \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right).$$

Exercice 103. Soit S_n variable aléatoire tel que $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p), x > 0, q = 1 - p$.

1. Soit $\lambda > 0$. Montrer que
$$\mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda(S_n - np)}\right]}{e^{n\lambda x}}.$$
2. Montrer que $\mathbb{E}\left[e^{\lambda(S_n-np)}\right] = \left(pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p}\right)^n$.
3. Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t^2} + t - e^t$. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = (4t^2+2)e^{t^2} - e^t = e^{t^2}(4t^2 + 2 - e^{t-t^2}).$$
4. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, e^t \leq e^{t^2} + t$.
5. En déduire que
$$\mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq e^{n(\lambda^2 - \lambda x)}.$$

6. Conclure que
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq x\right)\leq 2e^{\frac{-nx^2}{4}}.$$

Corrigé :

1. On a
$$\{S_n-np\geq nx\}=\{\lambda(S_n-np)\leq n\lambda x\}=\left\{e^{\lambda(S_n-np)}\geq e^{n\lambda x}\right\}.$$
Par Markov, puisque $e^{\lambda(S_n-np)}\geq 0$,
$$\mathbb{P}(S_n-np\geq nx)\leq\frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda(S_n-np}\right]}{e^{n\lambda x}}.$$
2. Par le théorème de transfert,
$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda(S_n-np)}\right]=e^{-n\lambda p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^\lambda p)^k q^{n-k}=e^{-n\lambda p}(e^\lambda p+q)^n=(pe^{\lambda q}+qe^{-\lambda p})^n.$$
3. On pose $f:t\mapsto e^{t^2}+t-e^t$. Alors f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R}, f'(t)=2te^{t^2}+1-e^t$ puis
$$\forall t\in\mathbb{R}, f''(t)=(4t^2+2)e^{t^2}-e^t=e^{t^2}(4t^2+2-e^{t-t^2}).$$
4. On distingue deux cas. Si $t\notin[0,1]$, alors $t^2\geq t$ donc $e^{t^2}\geq e^t$ puis $f''(t)\geq 0$. Si $t\in[0,1]$, on utilise l'inégalité classique $t-t^2\leq\dfrac{1}{4}$ pour avoir $2-e^{t-t^2}\geq 0$ donc $f''(t)\geq 0$. Ainsi, $e^t\leq e^{t^2}+t$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.
5. f' est donc croissante. Comme $f'(0)=0$, f' est négative sur $]-\infty,0]$ positive sur $[0,+\infty[$. Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty,0]$ puis croissante sur $[0,+\infty[$ donc $f\geq f(0)=0$ donc f est positive. On applique l'inégalité précédente à λq et $-\lambda p$. On a
$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda(S_n-np}\right]\leq\left(p(e^{\lambda^2q^2}+\lambda q)+q(e^{\lambda^2p^2}-\lambda p)\right)\leq((p+q)e^{\lambda^2})^n\leq e^{n\lambda^2}.$$
Puis,
$$\mathbb{P}(S_n-np\geq nx)\leq e^{n(\lambda^2-\lambda x)}.$$
6. On minimise à droite. On trouve $\lambda=x/2$. On a donc $\mathbb{P}(S_n-np\geq nx)\leq e^{-nx^2/4}$. On montre de même que $\mathbb{P}(S_n-np\leq -nx)\leq e^{-nx^2/4}$. D'où
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq x\right)=\mathbb{P}(S_n-np\geq nx)+\mathbb{P}(S_n-np\leq -nx)\leq 2e^{-nx^2/4}.$$

Exercice 104. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Soit $s>1$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=n)=\frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

1. Est-ce une loi d'une variable aléatoire ?
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement "n divise X". Montrer que $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille d'événements indépendants. En déduire
$$\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right).$$
3. Calculer la probabilité qu'aucun carré outre 1 ne divise X.

Corrigé :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{n^{-s}}{\zeta(s)} > 0$ et
$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} = 1$$
par définition.

2. Remarquons que $A_n = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}^*} \{X = nj\}$ est un événement et
$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{j\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = nj) = \sum_{j\geq 1} \frac{n^{-s}j^{-s}}{\zeta(s)} = n^{-s}.$$
Soit $(p_i)_{i\in I}$, une liste de nombres premiers distincts. Par le lemme de Gauss, on a
$$\bigcap_{i\in I} A_{p_i} = A_{\prod_{i\in I} p_i}.$$
Ainsi,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_{p_i}\right) = \mathbb{P}(A_{\prod_{i\in I} p_i}) = \left(\prod_{i\in I} p_i\right)^{-s} = \prod_{i\in I} p_i^{-s} = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_{p_i}).$$
Les $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont donc indépendants et leurs complémentaires dans Ω le sont aussi. Notons $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des nombres premiers. On note $E_n = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_{p_i}}$ vérifiant $E_{n+1} \subset E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, en notant, $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(E).$$
Or $E = \{1\}$ puisque ne pas être divisible par un nombre premier revient à être inférieur strictement à 2 en valeur absolue. On est dans $\mathbb{N}^*$ donc il ne reste que 1. Ainsi, il suffit de calculer $\mathbb{P}(E_n)$ puisque $\mathbb{P}(E) = \dfrac{1}{\zeta(s)}$. On a
$$\mathbb{P}(E_n) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_{p_i}) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)$$
où la deuxième égalité provient de l'indépendance des $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$. Ainsi, le produit de droite admet une limite quand $n \to +\infty$ et cette limite vaut $\mathbb{P}(E)$.

3. Si on note E, cet événement, on montre facilement que
$$E = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_{p^2}}.$$
A la question précédente, on a montré en réalité que si $(p_i)_i$ sont une famille d'élements deux à deux premiers entre eux, alors $(A_{p_i})_i$ sont indépendants. On en déduit l'indépendance des $(A_{p^2})_{p\in\mathcal{P}}$ donc

l'indépendance de leurs événements contraires. On écrit alors, par continuité décroissante,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_{p^2}}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_{p_k^2}}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_{p_k^2}}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{p_k^{2s}}\right) \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right) = \frac{1}{\zeta(2s)}.
\end{aligned}$$

Exercice 105. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Rademarcher de paramètre $p\in]0,1[$ (c'est une loi de support $\{-1,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1)=p; \mathbb{P}(X=-1)=1-p$). On note $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n\geq 1$ et $S_0=0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\exists n\geq 1 : S_n=0)=1 \iff \mathbb{P}(\forall k\in\mathbb{N}, \exists n\geq k, S_n=0)=1$. Interpréter.
2. On note $T=\inf\{n\geq 1 : S_n=0\}$ avec la convention $\inf(\emptyset)=+\infty$, $u_n=\mathbb{P}(S_n=0)$ et $f_n=\mathbb{P}(T=n)$ pour $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $u_n=\sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}$. En déduire que $\forall s\in[0,1[, U(s)-1=U(s)F(s)$ avec U, F séries génératrices des suites u et f respectivement (donc $U(s)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n s^n$).
3. En déduire l'équivalence des trois assertions suivantes (i.o. = infinitely often = infiniment souvent) :
   a) $\sum \mathbb{P}(S_n=0)$ diverge.
   b) $\mathbb{P}(\exists n\geq 1 : S_n=0)=1$.
   c) $\mathbb{P}(S_n=0 \text{ i.o.})=1$.

   On pourra utiliser le lemme de Borel-Cantelli, exercice 100.
4. Montrer qu'il existe une seule valeur de p pour que la série diverge et que dans les autres cas, la série diverge. *Indication : on pourra regarder S_{2n}.*

Corrigé :

1. Montrons l'implication directe, la réciproque étant triviale. Notons R l'instant de la dernière visite en 0 (on pose $S_0=0$). On note $R=\sup\{n\geq 0 : S_n=0\}$ et on souhaite montrer que $\mathbb{P}(R=+\infty)=1$ Puisque R est à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, il suffit de montrer que $\mathbb{P}(R=k)=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Fixons $k\in\mathbb{N}$. Par définition,
$$\mathbb{P}(R=k)=\mathbb{P}((S_k=0)\cap(\forall n>k, S_n-S_k\neq 0)).$$
L'événement $(S_k=0)$ est un événement qui ne dépend que des valeurs de $X_1,\cdots,X_k$. L'événement $\left(\bigcap_{n>k}\{S_n-S_k\neq 0\}\right)$ ne dépend que des valeurs de $(X_n)_{n>k}$. Par le lemme des coalitions, ils sont indépendants.
On a donc
$$\mathbb{P}(R=k)=\mathbb{P}\left((S_k=0)\cap(\forall n>k, S_n-S_k\neq 0)\right)=\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(\forall n>k, S_n-S_k\neq 0).$$

Or, on a l'égalité $(S_n - S_k)_{n>k} = (S_{n-k})_{n>k} = (S_n)_{n\geq 1}$ en loi (il suffit d'écrire les événements avec une intersection multi-indicée). Ainsi,

$$\mathbb{P}(\forall n > k, S_n - S_k \neq 0) = \mathbb{P}(\forall n \geq 1, S_n \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(\exists n \geq 1, S_n = 0) = 1 - 1 = 0.$$

De fait,

$$\mathbb{P}(R = k) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(\forall n > k, S_n - S_k \neq 0) = \mathbb{P}(S_k = 0) \times 0 = 0.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(R \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}) = 1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(R = k) + \mathbb{P}(R = +\infty) = 0 + \mathbb{P}(R = +\infty).$$

Ainsi, $\mathbb{P}(R = +\infty) = 1$. C'est ce qu'on voulait.

2. On remarque que $(S_n = 0) = \bigsqcup_{k=1}^{n} (S_n = 0 \cap T = k)$, que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, si $T = k$, alors $S_k = 0$ et que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, les événements $(S_n - S_k = 0)$ et $(T = k) = 0$ sont indépendantes puisque $S_n - S_k$ est une fonction de $X_{k+1}, \cdots, X_n$ et $T = k$ une fonction de $X_1, \cdots, X_k$ par le lemme des coalitions (alors que $S_n = 0$ et $T = k$ ne sont pas indépendants, d'où l'astuce machiavélique de retirer S_k (qui vaut 0 puisque $T = k$), et enfin, que $S_n - S_k$ et $S_n - k$ pour $n > k$ ont même loi. Ainsi,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{P}(S_n = 0 \cap T = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_n - S_k = 0)\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}.$$

Ainsi,

$$U(s) - 1 = \sum_{n\geq 1} u_n s^n = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k} s^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} f_k u_{n-k} s^n = U(s)F(s)$$

par produit de Cauchy.

3. On a donc $U(s)(1 - F(s)) = 1$ pour $0 \leq s < 1$. En faisant tendre s vers 1^- on a $U(1)(1 - F(1)) = 1$ (il y a convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque U et F sont croissantes (théorème de la limite monotone)). Par définition, on a, toujours dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)\right)(1 - \mathbb{P}(\exists n \geq 1 : S_n = 0)) = 1.$$

Passons maintenant à la preuve de l'équivalence.

Pour (1) implique (2), la divergence de la série entraine, vu que le produit vaut 1, que le deuxième terme est nul *i.e.* $\mathbb{P}(\exists n \geq 1 : S_n = 0) = 1$ ce qui est (2).

Pour (2) implique (3), on l'a montré question 1.

Pour (3) implique (1), montrons que $\neg(1)$ implique $\neg(3)$. $\neg(1)$ est la série converge. Par Borel-Cantelli (exercice 100), on sait alors que $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ i. o.}) = 0$ (petit jeu d'écriture) ce qui implique que $\neg(1)$.

4. Déjà,

$$\forall k \in [\![-n, n]\!], \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{\alpha} p^{\alpha}(1 - p)^{\beta}$$

avec α le nombre de $+1$ et β le nombre de -1 dans les valeurs prises par $X_1, \cdots, X_n$. Ainsi, $\alpha = \dfrac{n+k}{2}$ et $\beta = \dfrac{n-k}{2}$. De fait,

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}(p(1 - p))^n \sim \frac{(4p(1 - p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Pour $p \neq 1/2$, la série converge, pour $p = 1/2$, la série diverge par comparaison.

Exercice 106. Soit $\lambda \in]0,1[$, X variable aléatoire réelle strictement positive. Montrer que

$$(1-\lambda)^2\mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{P}(X \geq \lambda\mathbb{E}[X])\mathbb{E}[X^2].$$

Corrigé : Soit $a > 0$. Alors $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X<a}X] + \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geq a}X] \leq a + \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geq a}X]$. Il suffit maintenant de prendre $a = \lambda\mathbb{E}[X]$. J'ai donc

$$\mathbb{E}[X] - \lambda\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X\geq\lambda\mathbb{E}[X]}X].$$

Finalement,

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}[(1-\lambda)X])^2 &\leq \left(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X\geq\lambda\mathbb{E}[X]}X]\right)^2\\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{1}^2_{X\geq\lambda\mathbb{E}[X]}]\mathbb{E}[X^2] \text{ par Cauchy-Schwarz}\\ &= \mathbb{P}(X \geq \lambda\mathbb{E}[X])\mathbb{E}[X^2].\end{aligned}$$

Exercice 107. Soit N une loi de Poisson et (X_k) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi binomiale de paramètre (n,p) indépendant avec N.

1. On considère $n = 1$. Donner la loi de $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$.
2. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{N} X_i := Y$ est une variable aléatoire.
3. On considère $n = 1$. Donner la loi de Y.
4. Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$.
5. On appelle espérance conditionnelle de X selon l'événement A, l'espérance de X selon la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot \mid A)$. Exprimer $\mathbb{E}[Y]$ avec $\mathbb{E}[Y \mid N = i]$ pour tout i puis calculer $\mathbb{E}[Y]$.

Corrigé :

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On écrit,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k \;\middle|\; N = j\right)\mathbb{P}(N = j) &(12.1)\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j} X_i = k\right)\mathbb{P}(N = j) &(12.2)\\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} p^k(1-p)^{j-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} &(12.3)\\ &= \frac{1}{k!}e^{-\lambda}p^k\lambda^k \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{(j-k)!}(1-p)^{j-k}\lambda^{j-k} &(12.4)\\ &= \frac{1}{k!}e^{-\lambda}p^k\lambda^k \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}(1-p)^{j}\lambda^{j} &(12.5)\\ &= \frac{1}{k!}e^{-\lambda}(\lambda p)^k e^{(1-p)\lambda} &(12.6)\\ &= \frac{1}{k!}e^{-p\lambda}(p\lambda)^k &(12.7)\end{aligned}$$

et on justifie chaque ligne comme suit :

(1) par la formule des probabilités totales $(N = j)_{j\in\mathbb{N}}$ formant un système complet d'événements,

(2) par indépendance des $(X_i)_i$ avec N (on rappelle que si A et B sont indépendants, $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$,

(3) car les $(X_i)_i$ sont à valeurs dans $\{0,1\}$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} X_i \geq j$ ce qui impose $j \geq k$,

(4) ensuite, c'est du calcul.

On reconnait une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

2. On va beaucoup utiliser $\mathbb{P}(Y = n \mid N = k) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{k} X_i = n\right)$. En effet,

$$\mathbb{P}(Y = n \mid N = k) = \frac{\mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{N} X_i = n \cap N = k\right)}{\mathbb{P}(N = k)} = \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{k} X_i = n \cap N = k\right) \underset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{k} X_i = n\right).$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(Y = n) &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\left(Y = n \cap N = k\right) \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{k} X_i = n \cap N = k\right) \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{k} X_i = n \mid N = k\right)\mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(N = k) \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{k} X_i = n \mid N = k\right) \quad \text{[Fubini-Tonelli]} \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(N = k) \\
&= 1. \quad [N \text{ variable aléatoire}]
\end{aligned}$$

comme $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{k} X_i = n \mid N = k\right) = 1$ car $\prod_{i=1}^{k} X_i$ est une variable aléatoire (produit fini déterministe).

3. Comme $n = 1$, pour tout $i \in \{1\}$, $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ donc $Y(\Omega) = \{0,1\}$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 1) &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Y = 1 \mid N = k)\mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} X_i = 1\right)\mathbb{P}\left(N = k\right) \\
&= \sum_{k\geq 0} p^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}e^{p\lambda} = e^{(p-1)\lambda}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $Y \sim \mathcal{B}\left(e^{(p-1)\lambda}\right)$.

4. On calcule,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=0) &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Y=0 \mid N=k)\mathbb{P}(N=k) \\
&= \sum_{k\geq 0} \left[1-\mathbb{P}(Y\neq 0 \mid N=k)\right]\mathbb{P}(N=k) \\
&= \sum_{k\geq 0} \left[1-\mathbb{P}(X_1\neq 0)^k\right]\mathbb{P}(N=k) \\
&= \sum_{k\geq 0} \left[1-(1-\mathbb{P}(X_1=0))^k\right] e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k\geq 0} \left[1-(1-(1-p)^n)^k\right] e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} - e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{[\lambda(1-(1-p)^n)]^k}{k!} \\
&= 1-e^{-\lambda}e^{\lambda(1-(1-p)^n)} \\
&= 1-e^{-\lambda(1-p)^n}.
\end{aligned}$$

5. On écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \sum_{n\geq 0} k\mathbb{P}(Y=n) \\
&= \sum_{n\geq 0} k \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(Y=n \mid N=k)\mathbb{P}(N=k) \\
&= \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{n\geq 0} k\mathbb{P}(Y=n \mid N=k)\right)\mathbb{P}(N=k) \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}(Y \mid N=k)\mathbb{P}(N=k)
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\sum_{n\geq 0} k\mathbb{P}(Y=n \mid N=k) = \sum_{n\geq 0} k\mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^k X_i = n\right) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^k X_i\right] \underset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{E}[X_1]^k = (np)^k.$$

Exercice 108. On se donne une pièce qui donne face avec une probabilité $p \in]0,1[$. On suppose les lancers indépendants.

- On note X_k variable aléatoire qui donne 1 si au k-ème lancer, on a « face » et 0 sinon.
- On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et T_i le temps d'attente du i-ème succès avec comme convention $T_i = +\infty$ si ce i-ème succès n'est pas réalisé.
- On note $\tau_1 = T_1$ et $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ lorsque $i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

On cherche la loi des τ_i.

1. Quel est la loi de T_1 ? On considère $i \geq 2$ dans la suite.
2. Quel est la loi de T_i pour $i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$? *Indication : on pourra exprimer $T_i = k$ grâce à S_{k-1} et X_k.* La loi de T_i est appelée loi de Pascal ou loi binomiale négative.
3. Calculer la fonction génératrice des T_i pour $i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.
4. En déduire que T_i a la même loi que la somme de i variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant $\mathcal{G}(p)$.

5. *On souhaite montrer que T_i égale une telle somme ce qui est bien plus fort.*
   (a) Quelle est la loi de τ_i ? *Indication : on pourra s'aider de T_{i-1}.*
   (b) Montrer que les $(\tau_i)_i$ sont indépendants.
   (c) Conclure.

Corrigé :

1. Le cours assure que c'est une loi géométrique.

2. Remarquons déjà que S_n suit une $\mathcal{B}(n,p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $i \geq 2$. Alors $T_i(\Omega) \subset \mathbb{N}_{\geq i} \cup \{+\infty\}$. Soit donc $k \in \mathbb{N}, k \geq i$. L'événement $(T_i = k)$ égale l'événement $(S_{k-1} = i-1) \cap (X_k = 1)$. Par ailleurs, par le lemme des coalitions, comme $S_{k-1} = f(X_1, \cdots, X_{k-1})$ avec $f(x_1, \cdots, x_{k-1}) = \sum_{j=1}^{k-1} x_j$, S_{k-1} et X_k sont indépendantes. On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_i = k) &= \mathbb{P}(S_{k-1} = i-1 \cap X_k = 1)\\ &= \mathbb{P}(S_{k-1} = i-1)\mathbb{P}(X_k = 1)\\ &= \binom{k-1}{i-1} p^{i-1}(1-p)^{k-i}p\\ &= \binom{k-1}{i-1} p^{i}(1-p)^{k-i}.\end{aligned}$$

Pour conclure que $T_i(\Omega) = \mathbb{N}_{\geq i}$, il y a deux choix. Ou bien on montre que $\mathbb{P}(T_i = +\infty) = 0$, ou bien on montre que

$$\sum_{k=i}^{+\infty} \mathbb{P}(T_i = k) = 1.$$

- Si l'événement $T_i = +\infty$ est réalisé, alors l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} : X_k = 1\}$ est majoré. Étant une partie de $\mathbb{N}$, elle est soit non vide et on note k_0 son plus grand élément, soit $k_0 = 1$. Alors

$$(T_i = +\infty) \subset (\forall k \geq k_0, X_k = 0) = \bigcap_{k \geq k_0} (X_k = 0).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(T_i = +\infty) \leq \prod_{k \geq k_0} \mathbb{P}(X_k = 0) = \prod_{k \geq k_0} (1-p) = 0.$$

On obtient donc $\mathbb{P}(T_i = +\infty) = 0$.

- On calcule :

$$\sum_{k=i}^{+\infty} \mathbb{P}(T_i = k) = \sum_{k=i}^{+\infty} \binom{k-1}{i-1} p^i (1-p)^{k-i} = p^i \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+i-1}{i-1} (1-p)^k.$$

On rappelle que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
(1+x)^{-i} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (-i-j) x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{\displaystyle\prod_{j=i}^{i+n-1} j \prod_{j=1}^{i-1} j}{\displaystyle\prod_{j=1}^{i-1} j} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{(n+i-1)!}{(i-1)!} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n+i-1}{i-1} (-1)^n x^n.
\end{aligned}$$

On note $(\star)$ la relation :

$$\forall x \in]-1,1[, (1+x)^{-i} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n+i-1}{i-1} (-1)^n x^n.$$

Ici, on reconnait donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+i-1}{i-1} (1-p)^k = (1-(1-p))^{-i} = p^{-i}.$$

On obtient donc

$$\sum_{k=i}^{+\infty} \mathbb{P}(T_i = k) = p^i p^{-i} = 1.$$

3. On rappelle que $G_X(t) = \mathbb{E}[t^X] \underset{\text{transfert}}{=} \sum_{n \in X(\Omega)} t^n \mathbb{P}(X=n)$ pour tout $t \in]-R,R[$ avec $R \geq 1$. Ici, il existe donc $R \geq 1$ tel que

$$\begin{aligned}
\forall t \in]-R,R[, G_{T_i}(t) &= \sum_{n=i}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(T_i = n) \\
&= \sum_{n=i}^{+\infty} t^n \binom{n-1}{i-1} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= p^i t^i \sum_{n=i}^{+\infty} \binom{n-1}{i-1} [t(1-p)]^{n-i} \\
&= (tp)^i \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+i-1}{i-1} (t(1-p))^n \\
&\underset{\star}{=} (tp)^i (1-t(1-p))^{-i} = \left(\frac{tp}{1-t(1-p)} \right)^i
\end{aligned}$$

la relation $(\star)$ étant établie à la question précédente.

4. Soit $A_1, \cdots, A_i$ i variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $A_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors l'indépendance de X et Y donne $G_X G_Y = G_{X+Y}$ donc comme $G_{A_1}(t) = \dfrac{tp}{1-t(1-p)}$ pour $t \in]-1,1[$, on a

$$G_{T_i}(t) = \left(\frac{tp}{1-t(1-p)} \right)^i = \prod_{j=1}^{i} G_{A_1}(t) = \prod_{j=1}^{i} G_{A_j}(t) = G_{\sum_{j=1}^{i} A_j}(t).$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, T_i suit la même loi de $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} A_j$.

5. (a) Soit $k \in \tau_i(\Omega) \subset \mathbb{N}_{\geq i-1} \cup \{+\infty\}$. Alors

$$\mathbb{P}(\tau_i = k) = \mathbb{P}(T_i - T_{i-1} = k).$$

On conditionne selon la valeur de T_{i-1}. Comme $(T_{i-1} = j)_{j \geq i-1}$ forme un système complet d'événements, alors

$$\mathbb{P}(T_i - T_{i-1} = k) = \sum_{j=i-1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_i - T_{i-1} = k \mid T_{i-1} = j)\mathbb{P}(T_{i-1} = j).$$

Or on a l'égalité des événements

$$(T_i - T_{i-1} = k \mid T_{i-1} = j) = (T_i = j + k \mid T_{i-1} = j) = (X_j = 1) \cap (X_{j+k} = 1) \cap \bigcap_{p=j+1}^{j+k-1} (X_p = 0).$$

Par indépendance, on a donc

$$\mathbb{P}(T_i - T_{i-1} = k \mid T_{i-1} = j) = \mathbb{P}(X_{j+k} = 1) \prod_{p=j+1}^{j+k-1} \mathbb{P}(X_p = 0) = p(1-p)^{k-1}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(\tau_i = k) = \sum_{j=i-1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_i - T_{i-1} = k \mid T_{i-1} = j)\mathbb{P}(T_{i-1} = j) = p(1-p)^{k-1} \underbrace{\sum_{j=i-1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{i-1} = j)}_{=1} = p(1-p)^{k-1}.$$

Ainsi, τ_i suit une loi géométrique de paramètre p.

(b) Soit $J \subset \mathbb{N}^*$ fini. On note $J = \{j_1, \cdots, j_N\}$. Soit $k_j \in \tau_j(\Omega), j \in J$. Alors

$$\bigcap_{i=1}^{N} \{\tau_{j_i} = k_{j_i}\} = \bigcap_{i=0, i \notin \{k_j : j \in J\}}^{K} \{X_i = 0\} \cap \bigcap_{i \in k_j : j \in J} \{X_i = 1\}$$

avec $K = \sum_{j \in J} k_j$. Cet événement signifie que l'on a

- un premier succès au temps k_{j_1},
- on attend ensuite k_{j_2} étapes pour avoir un deuxième succès,
- $\cdots$
- on a donc card(J) succès aux instants $k_{j_1}, \cdots, k_{j_N}$

Ainsi, par indépendance,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} \tau_j = k_j\right) = \prod_{i=0, i \notin \{k_j : j \in J\}}^{K} \mathbb{P}(X_i = 0) \prod_{i \in k_j : j \in J} \{X_i = 1\} = (1-p)^{K - \mathrm{card}(J)} p^{\mathrm{card}(J)}.$$

Or, comme les $(\tau_j)_j$ suivent une loi géométrique de paramètres p, on a

$$\prod_{j \in J} \mathbb{P}(\tau_j = k_j) = \prod_{j \in J} p \prod_{j \in J} (1-p)^{k_j - 1} = p^{\mathrm{card}(J)} (1-p)^{\sum_{j \in J} k_j - 1} = p^{\mathrm{card}(J)} (1-p)^{K - \mathrm{card}(J)}.$$

Ainsi, les $(\tau_j)_j$ sont bien mutuellement indépendant.

(c) Puisque $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, par télescopage,

$$\sum_{j=1}^{i} \tau_j = \sum_{j=2}^{i} \tau_j + T_1 = T_i - T_1 + T_1 = T_i$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Chapitre 13

Équations différentielles ordinaires

Quelques exercices de calculs se trouvent dans la planche pour MP.

Exercice 109. On note $(E) : xy'' + y' + xy = 0 \ ; \ x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
2. Montrer qu'il en existe une unique qui vaut 1 en 0. On la note f.
3. Soit g une autre solution sur $]0, \alpha[$ avec $\alpha > 0$. On suppose que (f, g) est libre. Montrer que g n'est pas bornée.
4. On note $J(x) := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(t)) \mathrm{d}t$. Montrer que J est solution de (E).
5. Montrer que J est développable en série entière et donner son expression.

Corrigé :

1. Soit $f = \displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $x \in]-R, R[$.

$$xf''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} = \sum_{n=1} a_{n+1} n(n+1)x^n, f'(x) \quad = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)x^n, xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n.$$

Analyse : f est solution de (E) si, et seulement si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_{n+1}n(n+1) + a_{n+1}(n+1) + a_{n-1}\right) x^n + a_1 x^0 = 0$$

ce qui revient à demander par unicité des coefficients d'une série entière

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1}(n+1)^2 + a_{n-1} = 0, a_1 = 0.$$

Par récurrence, on a donc immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0 \ ; \ a_{2n+2} = \frac{-a_{2n}}{[2(n+1)]^2} = \cdots = \frac{(-1)^{n+1}a_0}{2^{2(n+1)}(n+1)!^2}.$$

On a donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n} a_0.$$

Synthèse : soit f série entière définit ci-avant. Montrons que son rayon de convergence est strictement positif. Pour cela, le lemme d'Abel nous dit que $R = +\infty$. En effet, en notant $b_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$, la suite $(b_nR^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $R>0$. Il suffit d'écrire

$$\forall p\in\mathbb{N}, n=2p, \frac{(-1)^p}{4^p(p!)^2}R^{2p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par les calculs antérieurs à l'analyse, f est solution de (E) : c'est ce qu'il fallait démontrer.

2. On a un degré de liberté sur a_0. En fixant $a_0=1$, on a le résultat.
3. Soit g telle que (f,g) soit libre et g solution de (E). Soit W wronskien de f,g, c'est-à-dire, $W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg'-f'g$. Alors W est dérivable de dérivée $W' = f'g'+fg''-f''g-f'g'$ donc $xW' = f(-g'-xg)-(-f'-xf)g = -fg'+f'g = -W$. Ainsi, $(xW)'$ est constant sur $]0,\alpha[$ donc il existe une constante réelle A tel que $\forall x\in]0,\alpha[, xW(x)=A$. A est non nulle : sinon, W est nulle ce qui contredit la liberté de (f,g). g étant bornée, je la prolonge en 0. Ainsi,

$$A = xf(x)g'(x)-xf'(x)g(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} xf(x)g'(x).$$

Puisque $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, on a donc $g'(x) \underset{x\to 0^+}{A}/x$. Soit $x_0\in]0,\alpha[$. Puisque $\displaystyle\int_0^{x_0}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge, par théorème d'intégration d'équivalents, on a

$$g(x_0)-g(x) \underset{x\to 0}{\sim} A(\ln(x_0)-\ln(x)).$$

Cela contredit le caractère bornée de g. Ainsi, par l'absurde, on a que g est non bornée.
4. Soit $J : x\in\mathbb{R}\mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$. Soit $f:(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\pi]\mapsto\cos(x\sin(t))\in\mathbb{R}$.
   - $\forall t\in[0,\pi], x\mapsto f(x,t)\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; $\forall t\in[0,\pi],\forall x\in\mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -\sin(t)\sin(x\sin(t))$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = -\sin^2\cos(x\sin(t))$.
   - Pour tout x réel, ces dernières applications sont continues par morceaux sur $[0,\pi]$.
   - Domination : chacune de ces applications sont continues sur le segment $[0,\pi]$ donc dominée sur $[0,\pi]$.

   Par le théorème de dérivation $\mathcal{C}^2$ sous le signe intégral, J est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$J'(x) = -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\mathrm{d}t\ ,\ J''(x) = -\int_0^\pi \sin^2\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t.$$

   Ainsi,

$$x(J''(x)+J(x)) = x\int_0^\pi (1-\sin^2(t))\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(t)(x\cos(t))\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t.$$

   On réalise une intégration par parties, on est en présence de deux fonctions $\mathcal{C}^1$: on intègre $t\mapsto (x\cos(t))\cos(x\sin(t))$ dont une primitive est $t\mapsto\sin(x\sin(t))$ et on dérive cos. On obtient alors

$$x(J''(x)+J(x)) = \underbrace{[\sin(x\sin(t))\cos(t)]_0^\pi}_{=0} + \int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\mathrm{d}t = -J'(x).$$

   On a donc J solution de (E).
5. De plus, J est bornée sur $\mathbb{R}$. Par précédent, $J=\lambda f$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. Or, $J(0)=\pi=\lambda f(0)=\lambda$ donc $J=\pi f$.

Exercice 110. Soit $\lambda>0$.

1. Résoudre $(E) : xy'+\lambda y = \dfrac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^+$.

3. Déterminer les solutions de $xy' + \lambda y = \dfrac{1}{1+x}$ développables en série entière au voisinage de 0.
4. Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}.$$

Corrigé :

1. C'est une équation d'ordre 1. Les solutions homogènes sont de la forme $Cx^{-\lambda}$ pour C un réel. Par variation de la constante, on cherche une fonction dérivable $x \mapsto C(x)$ tel que $y : x \mapsto C(x)x^{-\lambda}$ soit solution. On en déduit que $xC'(x)x^{-\lambda} = \dfrac{1}{1+x}$ ce qui donne $C'(x) = \dfrac{x^{1-\lambda}}{1+x}$. $x \mapsto \dfrac{x^{1-\lambda}}{1+x}$ est positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est intégrable au voisinage de 0[1]. Il existe alors A réel tel que $\forall x > 0, C(x) = A + \displaystyle\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.
2. Soit y solution. Alors y coïncide avec une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc est de la forme
$$y(x) = x^{-\lambda}\left(A + \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\mathrm{d}t\right)$$
avec A un réel. y étant continue en 0, puisque $x^{-\lambda} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, l'intégrale étant nul quand $x \to 0$, A est nécessairement nul. Ainsi, $\forall x > 0$,
$$y(x) = x^{-\lambda}\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\mathrm{d}t \underset{u=1/x}{=} \int_0^1 \frac{u^{\lambda-1}}{1+xu}\mathrm{d}u.$$
Appliquons le théorème de convergence dominée. Soit $f : (x,u) \in \mathbb{R}^+ \times]0,1] \mapsto \dfrac{u^{\lambda-1}}{1+xu} \in \mathbb{R}$.
   - C'est une fonction continue en u pour tout x.
   - $\forall u \in [0,1], f(u,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} u^{\lambda-1}$.
   - Domination : $\forall u \in]0,1], \forall x \geq 0, |f(x,u) \leq u^{\lambda-1} \in \mathrm{L}^1(]0,1])$.

   Par le théorème de convergence dominée,
$$y(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \int_0^1 u^{\lambda-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda} =: y(0).$$
Ainsi, $y : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+xt}\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Il reste à montrer le caractère $\mathcal{C}^1$. Pour cela, on applique le théorème de dérivation sous le signe intégral.
   - $\forall u \in]0,1], f(\cdot,u) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$; $\forall u \in]0,1], \forall x \in \mathbb{R}^+$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = -\frac{u^\lambda}{(1+xu)^2}$$
   - $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x,\cdot) \in \mathcal{C}^0_{pm}(]0,1],\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^1(]0,1]$.
   - Domination : $\forall u \in]0,1], \forall x \geq 0$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(u,x)\right| \leq u^\lambda \in \mathrm{L}^1(]0,1]).$$

   Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, y est bien $\mathcal{C}^1$.

1. c'est équivalent $x^{\lambda-1}$ et $\lambda - 1 > -1$ donc par Riemann, on a le résultat

3. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ série entière de rayon de convergence $R > 0$. On a, pour $|x| < R$
$$xf'(x) + \lambda f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+\lambda) a_n x^n.$$
Ainsi, f est solution de (E) si, et seulement si, $(-1)^n = (n+\lambda)a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+\lambda}{n+1+\lambda} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $R = 1$. Ainsi, une telle série entière existe : il n'existe qu'une seule solution de E développable en série entière au voisinage de 0. C'est
$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\lambda} x^n.$$
4. f coïncide avec y obtenu en question 2 sur $]0,1[$: on a
$$\forall x \in]0,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\lambda} x^n = \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+xt} \mathrm{d}t.$$
On prend alors $\lambda = \frac{1}{3}$ et $x = \frac{1}{8}$. On a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{3}} \frac{1}{8^n} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)} = \int_0^1 \frac{t^{-2/3}}{1+t/8} \mathrm{d}t.$$
Il reste à calculer cette intégrale. On le fait en posant $u = t^{1/3}$ ce qui donne
$$\int_0^1 \frac{t^{-2/3}}{1+t/8} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{u^{-2}}{8+u^3} 3u^2 \mathrm{d}u = 3 \int_0^1 \frac{1}{8+u^3} \mathrm{d}u.$$
Une décomposition en éléments simples donne aisément :
$$\frac{1}{8+u^3} = \frac{1}{12(2+v)} + \frac{-2u+2}{24(u^2-2u+4)} + \frac{1}{4((u-1)^2+3)}.$$
L'intégration se déroule tranquillement et on obtient
$$3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)} = 3 \times 8 \times \int_0^1 \frac{1}{8+u^3} \mathrm{d}u = \ln(3) + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$
Ainsi, la somme à calculer vaut
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)} = \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi.$$

Exercice 111. Soit $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0, t \in I$ avec I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et a, b continues sur I. Soit y une solution non nulle de (E). Soit t_0 un zéro de y. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, y ne s'annule qu'en t_0. En déduire que y n'admet qu'un nombre fini de zéros sur tout segment de $\mathbb{R}$ (c'est le lemme des zéros isolés).

Corrigé : Soit t_0 tel que $y(t_0) = 0$. Si $y'(t_0) = 0$, alors par Cauchy-Lipschitz linéaire, on a $y = 0$ ce qui n'est pas. Donc $y'(t_0) \neq 0$. Par continuité de y', il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], y'(t) \neq 0$. Par la contraposée du théorème de Rolle, $\forall a \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], y(a) = y(t_0) = 0 \Longrightarrow a = t_0$.

Supposons par l'absurde qu'il en existe une infinité dans $[a, b]$. Soit u, une suite de tels zéros. u est à valeurs dans $[a, b]$ compact : le théorème de Bolzano-Weierstrass assure donc qu'il existe φ extraction telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge, disons vers ℓ. Par continuité de y, $y(\ell) = 0$ et par précédent, ℓ est isolé. Soit un η comme précédent. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\eta}{2}$. Comme $u_{\varphi(n)}$ est un zéro dans $[\ell - \eta, \ell + \eta]$, il vaut ℓ. Ainsi, $(u_{\varphi(n)})_n$ stationne à ℓ ce qui est absurde.

Exercice 112. Soit q_1, q_2 deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $q_1 \geq q_2$. Soit $y''(t) + q_i(t)y(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ (E_i) pour $i \in \{1, 2\}$.

1. Soit y_1 et y_2 solutions de (E_1) et (E_2). Soit α, β deux zéros de y_2 consécutifs. Montrer que y_1 s'annule sur $]\alpha, \beta[$. *On pourra calculer la monotonie du wronskien* $W(y_1, y_2)$. C'est le théorème d'entrelacement de Sturm.
2. On considère l'équation (E) : $y''(t) + e^t y(t) = 0, t \in \mathbb{R}^+$. Soit y une solution de (E). Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui constitue les zéros de y.*On pourra montrer que y s'annule sur un intervalle de la forme $[\alpha, \alpha + \pi \exp(\alpha/2)]$ grâce à une équation auxiliaire bien choisie.*
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \pi e^{-t_{n+1}/2} \leq t_{n+1} - t_n \leq \pi e^{-t_n/2}$. En déduire un équivalent de $(t_n)_n$.

Corrigé :

1. Soit $f = W(y_1, y_2)$. Alors $f = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ donc
$$f' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1(-q_2 y_2) - y_2(-q_1 y_1) = y_1 y_2 (q_1 - q_2).$$
Comme $q_1 \geq q_2$, f' est du signe de $y_1 y_2$. Comme y_2 est continue sur $]\alpha, \beta[$ et ne s'y annule pas, elle est de signe constant, disons positif.
Supposons par l'absurde que y_1 ne s'annule pas. Alors y_1 est de signe constant par continuité, disons positif. Alors f' est aussi positive donc f croit. On obtient alors
$$f(\alpha) \leq f(\beta)$$
ce qui donne
$$y_1(\alpha) y_2'(\alpha) \leq y_1(\beta) y_2'(\beta) \ ; \ (\star).$$
Concluons grâce à l'argument suivant. Soit $\beta > t > \alpha$. Alors
$$\frac{y_2(t) - y_2(\alpha)}{t - \alpha} = \frac{y_2(t)}{t - \alpha} \geq 0.$$
L'inégalité passe à la limite en $y_2'(\alpha) \geq 0$. De même, $y_2'(\beta) \leq 0$. Ces inégalités sont strictes car par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $y_2 \neq 0$ donne $\neg(y_2(\alpha) = 0 \wedge y_2'(\alpha) = 0$ ce qui donne $y_2'(\alpha) \neq 0$ et on a la même chose pour β.
Ainsi, par positivité de y_1, $y_1(\alpha) y_2'(\alpha) > 0$ et $y_1(\beta) y_2'(\beta) < 0$ ce qui contredit $(\star)$.
2. On applique le lemme des zéros isolés (exercice 111). On en déduit que sur chaque compact $[k, k+1], k \in \mathbb{N}$, il existe un nombre fini de zéros sur $[k, k+1]$. Comme $\mathbb{R}^+$ s'écrit comme l'union dénombrable des $[k, k+1[, k \in \mathbb{Z}$ (caractère archimédien de $\mathbb{R}$), cet ensemble de zéros est au plus,dénombrable. On peut donc construire $(t_n)_{n\in I}$ une suite de tels zéros et les ranger dans l'ordre croissant. Le caractère isolé rend cette suite strictement croissante. Montrons que I est infini. On en déduira que I est équipotent à $\mathbb{N}$.
Pour cela, appliquons la question précédente. Soit $\alpha \geq 0$. Considérons $q_1 = \exp$ et $q_2 = \exp(\alpha)$ (fonction constante). Les solutions de (E_2) sont de la forme
$$y_2(t) = A \sin(\exp(\alpha/2)(t - \varphi)) \ ; \ A, \varphi \in \mathbb{R}.$$
Posons donc $A = 1$ et $\varphi = \alpha$. Alors $y_2(t) = \sin(\exp(\alpha/2)(t - \alpha)$ donne une solution de (E_2) qui possède α comme zéro. Le prochain zéro de y_2 est, grâce à la fonction sinus, $\alpha + \pi \exp(-\alpha/2)$. Le théorème d'entrelacement de Sturm s'applique sur $I = [\alpha, \alpha + \pi \exp(-\alpha/2)]$ et comme $q_1 \geq q_2$ sur I, y s'annule sur $[\alpha, \alpha + \pi \exp(-\alpha/2)]$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, y possède bien une infinité de solutions.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons l'intervalle $[t_n, t_{n+1}] = I$. Soit $q_2 = \exp(t_{n+1})$. Alors $q_2 \geq q_1$ donc par le théorème d'entrelacement de Sturm, toute solution de (E_2) admet un zéro dans $[t_n, t_{n+1}]$. Les solutions de (E_2) sont de la forme $t \mapsto A \sin(\exp(t_{n+1}/2)(t - \varphi))$ donc avec $A = 1$ et $\varphi = t_n$, les zéros de cette

fonction sont les $t_n + k\pi\exp(-t_{n+1}/2) =: u_k$. Ils sont rangés dans l'ordre croissant selon k et comme $u_0 \notin I$ et $u_1 \geq t_n$ nécessairement, $u_1 \in I$ ce qui donne $t_n + \pi\exp(-t_{n+1}/2) \in [t_n, t_{n+1}]$. Cela donne donc $\pi\exp(-t_{n+1}/2) \leq t_{n+1} - t_n$.

Pour l'autre morceau, on applique la question précédente avec $\alpha = t_n$ ce qui donne que y s'annule entre t_n et $t_n + \pi\exp(-t_n/2)$ et le prochain zéro de y après t_n est t_{n+1} donc $t_{n+1} \in [t_n, t_n + \pi\exp(-t_n/2)$ ce qui donne $t_{n+1} - t_n \leq \pi\exp(-t_n/2)$.

Concluons. Comme $(t_n)_n$ converge vers $+\infty$, $\exp(-t_n/2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, $t_{n+1} - t_n$ tend vers 0. Il est bien connu que $\exp(f) \underset{a}{\sim} \exp(g)$ si, et seulement si $f - g \underset{a}{\longrightarrow} 0$ ce qui donne que $\pi\exp(-t_n/2) \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\exp(-t_{n+1}/2)$. Par encadrement, $t_{n+1} - t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\exp(-t_n/2)$.

Obtenons maintenant un équivalent de $(\exp(t_n/2) =: v_n)_n$. Alors $2\ln(v_n) = t_n$ donc

$$2\ln(v_{n+1}) - 2\ln(v_n) = t_{n+1} - t_n \sim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{v_n}.$$

On écrit aussi

$$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_{n+1}}{v_n} - 1$$

puisque $\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\ln(x) \underset{x\to1}{\sim} x - 1$. Par transitivité de l'équivalent, on en déduit que

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

Par le théorème de Cesàro, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi n}{2}$. Ainsi, $2\ln(v_n) = 2\ln(\pi/2) + 2\ln(n) = t_n$ donc $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)$.

Exercice 113.
- Dans cet exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Pour tout $(E, \|\cdot\|)$) $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$, on note

$$\|f\|_{\infty,J} = \sup_{t\in J} \|f(t)\|.$$

  pour $J \subset I$.
- On considère donc $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $|||\cdot|||$ est la norme d'opérateur associée à $\|\cdot\|$.
- Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in E$.
- Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E)), b \in \mathcal{C}^0(I, E)$.
- Soit

$$(P)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} (E) & : & y'(t) = a(t)(y(t)) + b(t)\ ;\ t \in I \\ (CI) & : & y(t_0) = y_0 \end{array}\right. .$$

On souhaite montrer que (P) admet une et unique solution.

1. Dans cette question, K est un compact de I contenant t_0. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{C}^0(I, E))^{\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation suviante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, f_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)(f_n(s))\mathrm{d}s.$$

   Montrer qu'il existe $M, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in K, \|f_n(t)\| \leq M\frac{(\alpha|t - t_0|)^n}{n!}.$$

2. Conclure sur l'unicité de la solution de (P).
3. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I par $\forall t \in I, g_0(t) = y_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, g_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)[g_n(s)] + b(s))\,\mathrm{d}s.$$

   Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I et que cette limite est solution de (P).

Corrigé :

1. f_0 est continue de K dans E donc par le théorème des bornes atteintes, f_0 est bornée. Ainsi, $\|f_0\|_\infty =: M$ existe et est bien défini. Ensuite, a est continue de K dans $\mathcal{L}(E)$ donc de même, a est bornée. Ainsi, $|||a|||_\infty =: \alpha$ existe et est bien défini.
   Cela signifie que
   $$\forall t \in K, \|f_0(t)\| \leq M \ ; \ \forall t \in K, |||a(t)||| \leq \alpha.$$
   Procédons par récurrence.
   - Si $n = 0$, on a $\forall t \in K, f_n(t) = f_0(t)$ ce qui donne $\|f_n(t)\| \leq M = M\dfrac{(\alpha|t-t_0|)^0}{0!}$.
   - Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
     $$\forall t \in K, \|f_n(t)\| \leq M\frac{(\alpha|t-t_0|)^n}{n!}.$$
     Alors
     $$\forall t \in K, \|f_{n+1}(t)\| = \left\|\int_{t_0}^t a(s)(f_n(s))\mathrm{d}s\right\| \leq \int_{(t_0,t)} \|a(s)(f_n(s))\|\mathrm{d}s$$
     où (t_0, t) désigne l'intervalle $[t_0, t]$ ou $[t, t_0]$. Ensuite, on sait que pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E, F), \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq |||u|||\|x\|_E$ donc ici,
     $$\forall t \in K, \forall s \in (t_0, t), \|a(s)(f_n(s))\| \leq |||a(s)|||\|f_n(s)\| \leq \alpha M\frac{(\alpha|s-t_0|)^n}{n!}.$$
     On en déduit que
     $$\forall t \in K, \|f_{n+1}(t)\| \leq M\frac{\alpha^{n+1}}{n!}\int_{(t_0,t)}|s-t_0|^n\mathrm{d}s = M\frac{\alpha^{n+1}}{n!}\frac{|t-t_0|^{n+1}}{n+1} = M\frac{(\alpha|t-t_0|)^{n+1}}{(n+1)!}.$$
   - Par le principe de récurrence, on obtient l'assertion souhaitée.

   Cette question nous indique donc que la série $\sum f_n$ converge normalement sur tout compact de I contentant t_0.
2. Soit y_1, y_2 deux solutions de (P). Notons $z = y_1 - y_2$. On a déjà $z(t_0) = 0$. De plus, pour tout $t \in I$,
   $$z'(t) = y_1'(t) - y_2'(t) = a(t)[y_1(t)] - a(t)[y_2(t)] = a(t)[y_1(t) - y_2(t)] = a(t)[z(t)].$$
   Ainsi, en intégrant sur le segment (t_0, t), on en déduit que
   $$z(t) - z(t_0) = z(t) = \int_{t_0}^t a(s)[z(s)]\mathrm{d}s.$$
   On applique donc la question précédente : la série $\sum z$ converge normalement sur tout compact de I contenant t_0 : nécessairement, z est nulle donc $y_1 = y_2$.
3. Posons $h_n = g_{n+1} - g_n$. Alors
   $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, h_{n+1}(t) &= g_{n+2}(t) - g_{n+1}(t)\\ &= y_0 + \int_{t_0}^t (a(s)[g_{n+1}(s)] + b(s))\mathrm{d}s - y_0 - \int_{t_0}^t (a(s)[g_n(s)] + b(s))\mathrm{d}s\\ &= \int_{t_0}^t (a(s)[g_{n+1}(s) - g_n(s)])\mathrm{d}s\\ &= \int_{t_0}^t a(s)[h_n(s)]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$
   $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait donc la question 1) : la série $\sum h_n$ converge normalement sur tout compact de I contenant t_0 et par télescopage, on en déduit la même chose pour $(g_n)_n$. On souhaite maintenant montrer

la même chose pour $(a \circ g_n + b)_n$. Déjà, elle converge simplement vers $a \circ g + b$ par continuité de a. On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \|a(t)[g_n(t)] + b(t) - a(t)[g(t)] - b(t)\| &= \|a(t)[(g_n - g)(t)]\| \\ &\leq |||a(t)||| \|g_n(t) - g(t)\| \\ &\leq |||a|||_\infty \|g_n(t) - g(t)\|.\end{aligned}$$

On en déduit que la convergence normale de $(g_n)_n$ sur tout compact de I contenant t_0 entraîne celle de $(a \circ g_n + b)_n$.
Notons maintenant g la limite de $(g_n)_n$. L'égalité

$$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t a(s)[g_n(s)] + b(s)\mathrm{d}s$$

passe donc à la limite quand $n \to +\infty$ en vertu du théorème d'interversion limite-intégrale sous convergence normale. On obtient

$$\forall t \in I, g(t) = y_0 + \int_{t_0}^t a(s)[g(s)] + b(s)\mathrm{d}s.$$

Comme $(g_n)_n$ est continue sur I et qu'on a convergence normale sur tout segment de I contenant t_0, le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique et g est continue. Par continuité de a, b et que a est à valeurs dans $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}_c(E)$ (car E est de dimension finie), $t \mapsto a(t)[g(t)] + b(t)$ est continue donc par le théorème fondamental de l'analyse, g est $\mathcal{C}^1$. Ainsi, en dérivant la relation obtenue sur g, g vérifie (E) et $g(t_0) = y_0$ donc g vérifie (CI). Ainsi, g vérifie (P) ce qui conclut.

Exercice 114. On considère le système différentiel linéaire

$$(S) \ : \ X'(t) = AX(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}$$

avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. L'objectif est de tracer le portrait de phase de (S) (à savoir les courbes paramétrées $y(t)$ fonction de $x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Soit X et $\widetilde{X}$ deux solutions passant par X_0. Montrer que $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{\widetilde{X}(t) : t \in \mathbb{R}\}$.
2. Soit B une matrice semblable à A et $(\widetilde{E}) \ : \ \widetilde{X}'(t) = B\widetilde{X}(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}$. Exprimer les solutions de $(\widetilde{E})$ en fonction des solutions de (E).
3. Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que l'on a une et une seule des propositions suivantes :

   a) $A \underset{\mathbb{R}}{\sim} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ b) $A \underset{\mathbb{R}}{\sim} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ c) $A \underset{\mathbb{R}}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

   où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$. La dernière matrice s'appelle matrice de similitude.
4. Traiter chacun des cas pour obtenir les différentes trajectoires.

Corrigé :

1. Notons $t_0, \widetilde{t_0}$ tels que $X(t_0) = X_0, \widetilde{X}(\widetilde{t_0}) = X_0$. Soit $Z : t \in \mathbb{R} \mapsto \widetilde{X}(t - t_0 + \widetilde{t_0})$. Alors $Z(t_0) = X_0$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, Z'(t) = \widetilde{X}'(t - t_0) = A\widetilde{X}(t - t_0) = AZ(t)$$

donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $Z = X$ ce qui signifie que $X = \widetilde{X}(\cdot - t_0 + \widetilde{t_0})$. Ainsi, comme $\mathbb{R} = \mathbb{R} - t_0 + \widetilde{t_0}$, on a bien

$$\{X(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{\widetilde{X}(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

De ce fait, donner le portrait de phase reviendra à se donner un point X_0 du plan et l'ensemble des points $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ telle qu'il existe $t_1 \in \mathbb{R}, X(t_1) = X_0$.

2. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} P\widetilde{X} \text{ est solution de } (E) &\iff P\widetilde{X}' = AP\widetilde{X} \\ &\iff P\widetilde{X}' = PBP^{-1}P\widetilde{X} \\ &\iff \widetilde{X}' = B\widetilde{X} \\ &\iff \widetilde{X} \text{ est solution de } (\widetilde{E}). \end{aligned}$$

3. Regardons le polynôme caractéristique de A et son discriminant Δ.
   (a) Premier cas : $\Delta > 0$ *i.e.* χ_A est scindé à racines simples. Alors A est diagonalisable.
   (b) Deuxième cas : $\Delta = 0$ *i.e.* χ_A est de la forme $(X-\lambda)^2$. Alors on a l'alternative suivante :
      i. A est diagonalisable. Alors A est semblable à λI_2 donc $A = \lambda I_2$.
      ii. A n'est pas diagonalisable. On en déduit que $A - \lambda I_2$ est non nulle donc il existe $e_2 \notin \ker(A - \lambda I_2)$. Notons $e_1 = (A-\lambda I_2)(e_2)$ Comme $(A-\lambda I_2)^2 = 0$ par Cayley-Hamilton, $(A-\lambda I_2)(e_1) = 0$ [2]. Par le théorème de changement de base, en considérant la base (e_1, e_2) [3], on en déduit que $A - \lambda I_2$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: J$ donc A est semblable à $\lambda I_2 + J$ [4].
   (c) Troisième cas $\Delta < 0$ donc χ_A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Notons z_1, z_2 ses racines (complexes non réelles). On rappelle que $z_1 = \overline{z_2}$. Notons $z_1 = z = \alpha - i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ [5] avec $\beta > 0$. Soit w vecteur propre de A pour la valeur propre z. Alors

$$Aw = zw \text{ et } A\overline{w} = \underbrace{\overline{z}}_{=z}\,\overline{w}$$

   donc $\overline{w} \neq 0$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\overline{z}$.
   Notons $\Re(w) = e_{\Re}$ et $\Im(w) = e_{\Im}$. Alors on a

$$Ae_{\Re} + iAe_{\Im} = (\alpha - i\beta)(e_{\Re} + ie_{\Im}) = \alpha e_{\Re} + \beta e_{\Im} + i(\alpha e_{\Im} - \beta e_{\Re}). \tag{13.1}$$

   On a aussi

$$Ae_{\Re} - iAe_{\Im} = \alpha e_{\Re} + \beta e_{\Im} - i(\alpha e_{\Im} - \beta e_{\Re}). \tag{13.2}$$

   En réalisant $\frac{1}{2}[(13.1) + (13.2)]$, on obtient

$$Ae_{\Re} = \alpha e_{\Re} + \beta e_{\Im} \tag{13.3}$$

   et en réalisant $\frac{1}{2i}[(13.1) - (13.2)]$, on a

$$Ae_{\Im} = -\beta e_{\Re} + \alpha e_{\Im}. \tag{13.4}$$

   On conclut dès lors que l'on montre que $(e_{\Re}, e_{\Im})$ est libre. Pour cela, exploitons la liberté de $(w, \overline{w}) = (e_{\Re} + ie_{\Im}, e_{\Re} - ie_{\Im})$ ce qui est équivalent à la $\mathbb{C}$-liberté de $(e_{\Re}, e_{\Im})$. Comme ce sont des matrices colonnes de $\mathbb{R}$, la $\mathbb{C}$-liberté entraine la $\mathbb{R}$-liberté.
   Finalement, $(e_{\Re}, e_{\Im})$ est libre donc forme une base. Par le théorème de changement de base, au vu de (13.3) et (13.4), A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

---

2. Cayley-Hamilton est un peu exagéré. Comme χ_A est scindé, A est trigonalisable et sa diagonale est $\{\lambda, \lambda\}$. Ainsi, $A - \lambda I_2$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(A - \lambda I_2)^2 = 0$.
3. C'est bien une base. En effet, si $\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 = 0$, alors $(A - \lambda I_2)(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2) = \mu_1 \underbrace{(A - \lambda I_2)(e_1)}_{\neq 0} = 0$ donc $\mu_1 = 0$. Ainsi, $\mu_2 e_2 = 0$ donc $\mu_2 = 0$ et (e_1, e_2) est libre. Par cardinalité, c'est une base.
4. et une matrice de passage est donc $(e_1 \mid e_2)$
5. on aurait pu prendre $z = \alpha + i\beta$ mais on n'aurait pas le même résultat à la fin β étant changé en $-\beta$

Remarque. On aurait pu écrire la matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ *et se rendre compte qu'en notant* $P = (w \mid \overline{w})$, *on a*

$$A = PR \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} (PR)^{-1}$$

avec $PR \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

4. Traitons chaque cas.

(a) Soit λ, μ les deux valeurs propres de A et notons $B = \mathrm{diag}(\lambda, \mu)$. Alors $\exp(B) = \mathrm{diag}(e^{\lambda}, e^{\mu})$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} x_0 \\ e^{t\mu} y_0 \end{pmatrix}.$$

Si $x_0 = 0$, alors x est constante égale à 0 et si $y_0 = 0$, y est constante égale à 0. Sinon, on a alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left(\frac{x(t)}{x_0} \right)^{\mu} = e^{t\lambda\mu} = \left(\frac{y(t)}{y_0} \right)^{\lambda}$$

donc il existe une constante C tel que $y = C|x|^{\lambda/\mu}$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et étudions le cas $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Alors on obtient le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & \lambda x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & \lambda y(t) \end{array} \right. : t \in \mathbb{R}$$

On obtient donc que $y(t) = y_0 \exp(\lambda t)$. L'équation en x n'est plus qu'une simple EDL d'ordre 1 que l'on résous. Les solutions homogènes sont les $C \exp(\lambda \cdot)$. En considérant $C \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$x'(t) = \lambda x(t) + y(t) \Longrightarrow \exp(-\lambda t) x'(t) - \lambda \exp(-\lambda t) x(t) = \exp(-\lambda t) y(t) = y_0.$$

Ainsi, $t \mapsto \exp(-\lambda t) x(t)$ a pour dérivée y_0 donc il existe C telle que $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \exp(\lambda t)(y_0 t + C)$. Obtenons une expression de t. Si $y_0 = 0$, alors $y = 0$ et x est de la forme $t \mapsto C \exp(\lambda t)$. Sinon, on a

$$\frac{y(t)}{y_0} = \exp(\lambda t)$$

donc

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{y(t)}{y_0} \right) = \widetilde{C} + \frac{1}{\lambda} \ln(|y(t)|).$$

On en déduit que

$$x(t) = y(t) \left(\widetilde{C} + \frac{C}{y_0} + \frac{1}{\lambda} \ln(|y(t)|) \right) = \widetilde{\widetilde{C}} y(t) + \frac{1}{\lambda} y(t) \ln(|y(t)|)$$

avec $\widetilde{\widetilde{C}} = \dfrac{C}{y_0} + \widetilde{C} = \dfrac{C}{y_0} - \dfrac{\ln(|y_0|)}{\lambda}$.

(c) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$. On cherche à calculer $\exp(B)$ avec $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. On présente deux méthodes.

- Méthode brutale. On note $B = \alpha I_2 + \beta S$ avec $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $S^2 = -I_2$. Ainsi, $S^{2N} =$

$(-1)^N I_2$ et $S^{2N+1} = (-1)^N S$. Ensuite, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\exp(tB) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}(\alpha I_2 + \beta S)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{p+q=k} \binom{k}{p} \alpha^p \beta^q S^q = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p+q=k} \frac{t^p t^q}{p! q!} \alpha^p \beta^q S^q \\
&\underset{\star}{=} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} \alpha^p I_2 \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{t^q}{q!} \beta^q S^q \right) \\
&= \exp(t\alpha) I_2 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\beta)^{2k}}{(2k)!} S^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\beta)^{2k+1}}{(2k+1)!} S^{2k+1} \right) \\
&= \exp(t\alpha) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\beta)^{2k}(-1)^k}{(2k)!} I_2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\beta)^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!} S \right) \\
&= \exp(t\alpha)(\cos(\beta t) I_2 + \sin(\beta t) S) \\
&= \exp(t\alpha) \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où $(\star)$ se justifie par produit de Cauchy. On en déduit que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$x(t)e^{-\alpha t} = \cos(\beta t) x_0 - \sin(\beta t) y_0 \ ; \ y(t) e^{-\alpha t} = \sin(\beta t) x_0 + \cos(\alpha t) y_0.$$

Ainsi,

$$e^{-2\alpha t} \left(x^2(t) + y^2(t) \right) = x_0^2 + y_0^2$$

donc

$$x^2(t) + y^2(t) = e^{2\alpha t} R^2$$

avec $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

- Méthode plus subtile. On présente une alternative si l'on veut éviter ce calcul d'exponentielle. Pour cela, posons $z = x + iy$. Alors on montre que $z' = (\alpha + i\beta) z$ donc

  $$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = C \exp((\alpha + i\beta)t) = C \exp(\alpha t)(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)).$$

  On veut maintenant extraire partie réelle et partie imaginaire et il faut faire attention car C est complexe. En notant $C = x_0 + i y_0$, on obtient

  $$x(t) + iy(t) = e^{\alpha t} \left(x_0 \cos(\beta t) - y_0 \sin(\beta t) + i \left(x_0 \cos(\beta t) + y_0 \sin(\beta t) \right) \right)$$

  donc en identifiant partie réelle et partie imaginaire, on obtient le même résultat.

On indique ici un code qui permet de dessiner des portraits de phases pour le système $X' = (PDP^{-1})X$ avec $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels que l'on peut faire bouger le long d'un curseur de $[-3, 3]$ d'incrément 0.1. Le code a été rédigé sur JupyterNotebook. Il se trouve dans un fichier .txt que vous trouverez en cliquant sur cette phrase.

On dessine quelques portraits de phases à la page suivante. Davantage de détails se trouvent en cliquant sur cette phrase. On y reprend l'exercice.

Nœud impropre répulsif

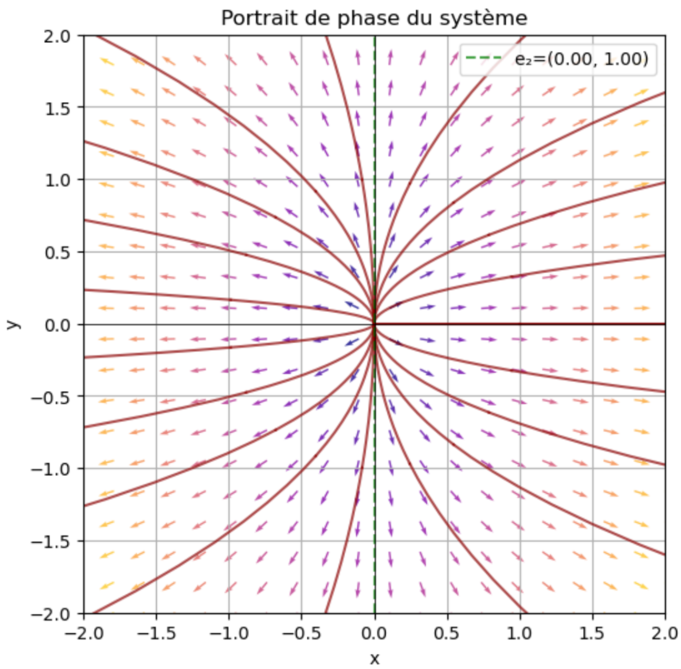

FIGURE 13.1 – $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P = I_2$

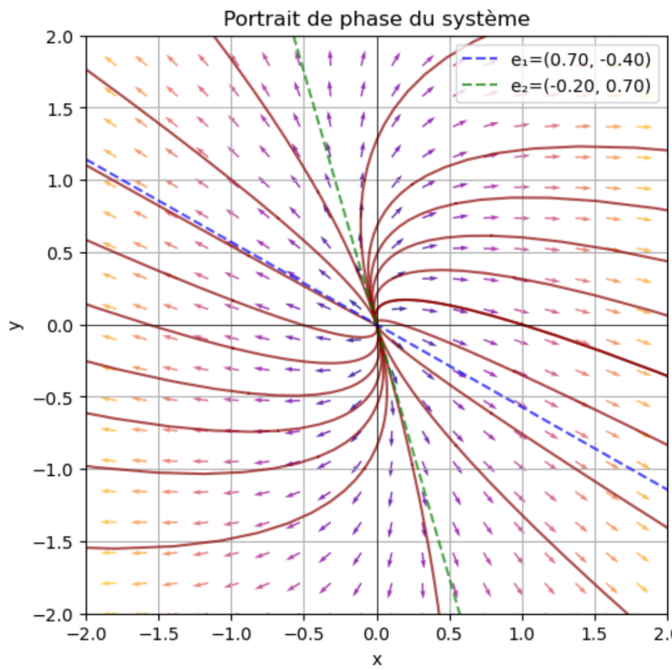

FIGURE 13.2 – $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$

Point col

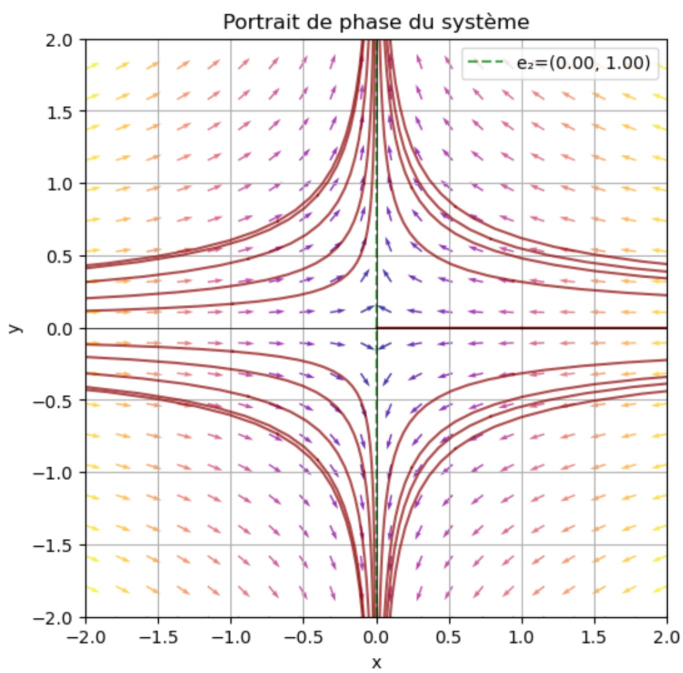

FIGURE 13.3 – $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P = I_2$

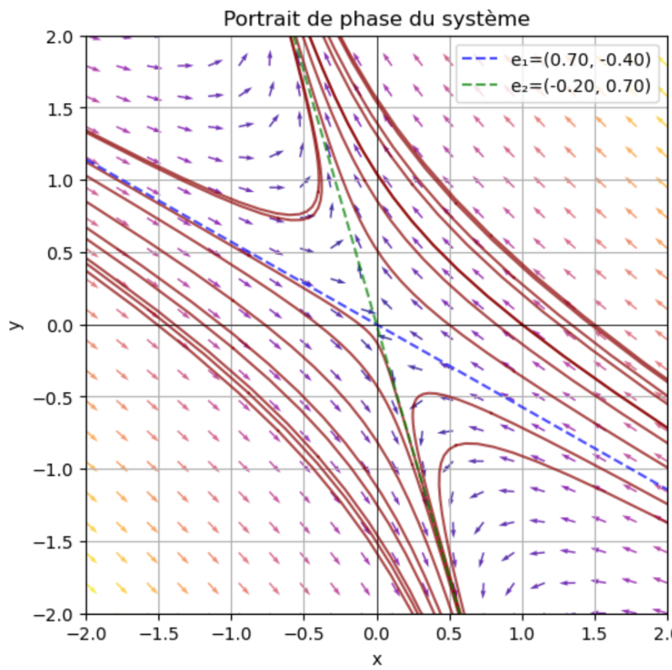

FIGURE 13.4 – $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$

Nœud dégénéré attractif

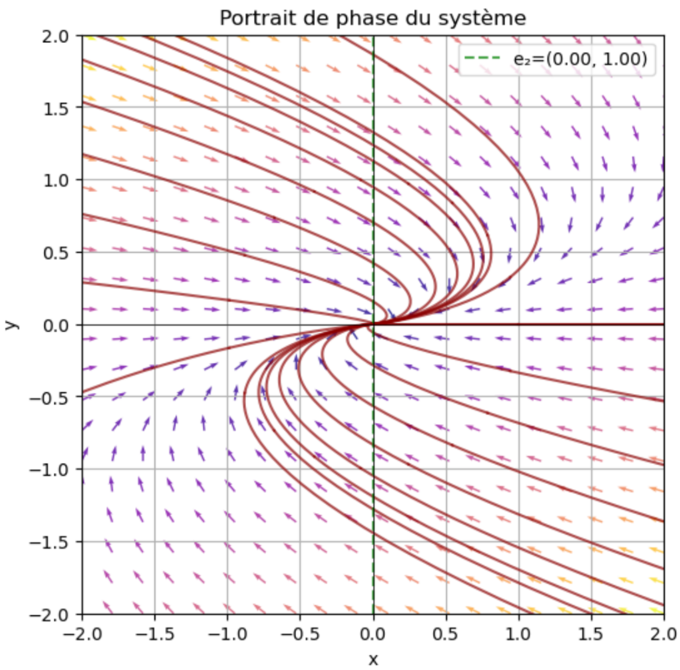

Figure 13.5 – $D = \begin{pmatrix} -0.6 & 1 \\ 0 & -0.6 \end{pmatrix}$; $P = I_2$

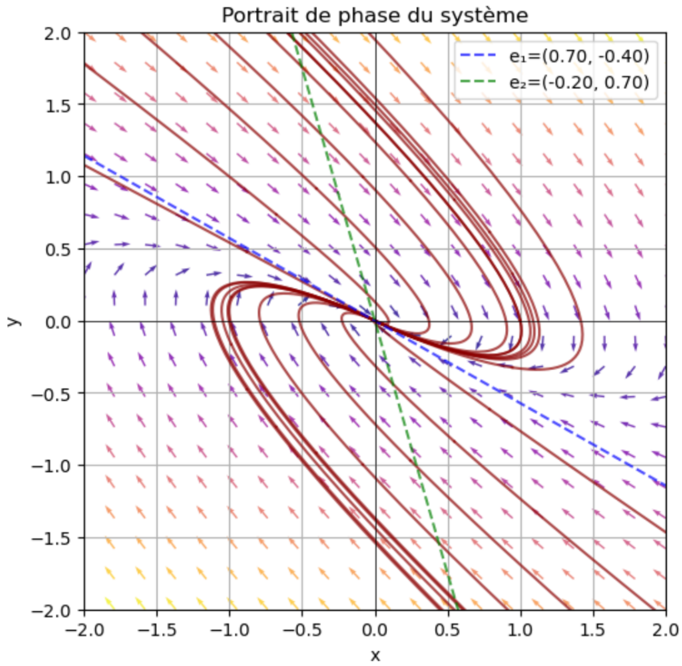

Figure 13.6 – $D = \begin{pmatrix} -0.6 & 1 \\ 0 & -0.6 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$

Spirale attrative

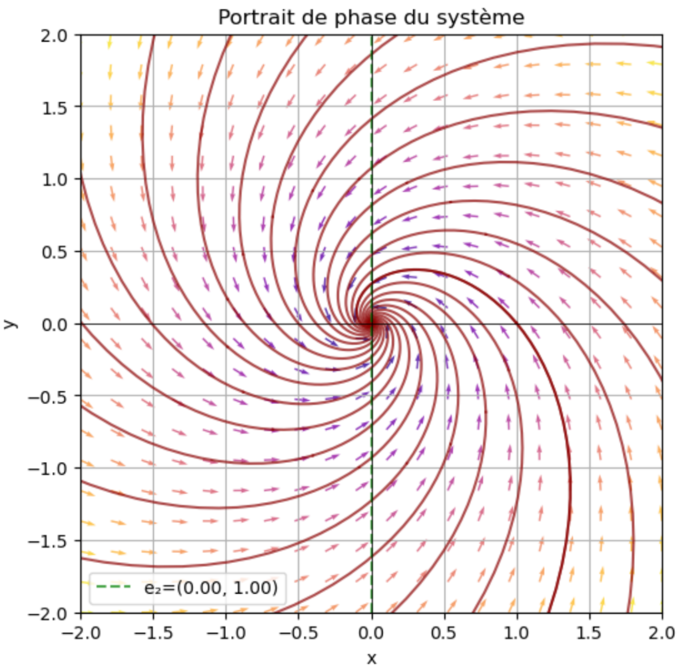

Figure 13.7 – $D = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.6 \\ 0.6 & -0.5 \end{pmatrix}$; $P = I_2$

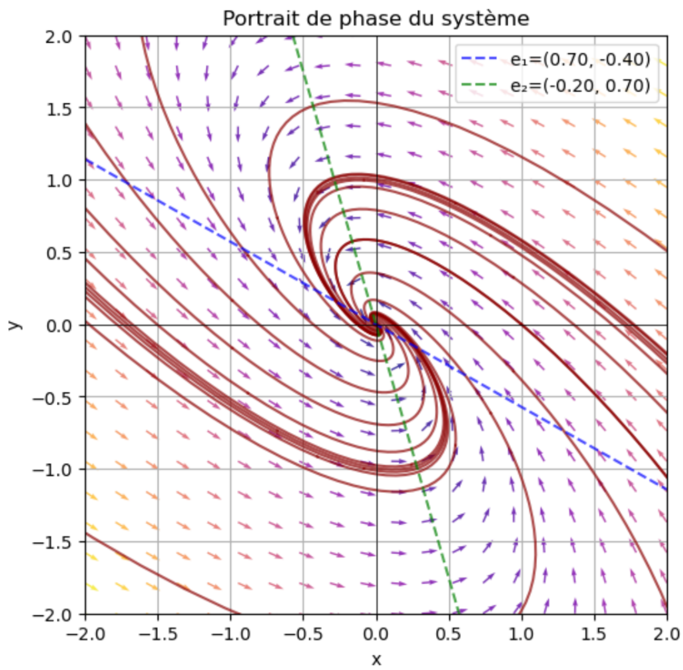

Figure 13.8 – $D = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.6 \\ 0.6 & -0.5 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$

Chapitre 14

Calcul différentiel

Quelques exercices de calculs se trouvent dans la planche pour MP.

Exercice 115. Soit $\varphi_p : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que φ_p est différentiable et calculer sa différentielle pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Corrigé : On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\|\cdot\|$ d'algèbre[1] On écrit

$$\varphi_p(M+H) = (M+H)^p = M^p + \sum_{i=1}^{p} M^{i-1}HM^{p-i} + \eta(M,H)$$

où $\eta(M,H)$ est une somme de produit de matrices M et H contenant au moins deux fois H dans le produit. Par sous-multiplicativité de la norme $\|\cdot\|$, $\|\eta(M,H)\| \leq \|H\|^2\|C(M,H)\|$ où $C(M,H)$ est bornée par un produit de $\|M\|$ et de $\|H\|$. On a donc

$$\varphi_p(M+H) = M^p + \sum_{i=1}^{p} M^{i-1}HM^{p-i} + o(H)$$

et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} M^{i-1}HM^{p-i}$ est linéaire en H. Ainsi,

$$d(\varphi_p)_M(H) = \sum_{i=1}^{p} M^{i-1}HM^{p-i}.$$

Exercice 116. Soit $\mathrm{Inv} : M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que Inv est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. On souhaite calculer la différentielle de l'inverse.
   (a) Première méthode. Déterminer les dérivées partielles de Inv en I_n, puis en déduire la différentielle de Inv en I_n et le cas général.
   (b) Deuxième méthode. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $|||\cdot|||$. Soit H telle que $|||H||| < 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} H^k$ converge. En déduire que $I_n + H$ est inversible puis déterminer la différentielle de Inv en I_n puis le cas général.
   (c) Troisième méthode. Etudier la différentielle de l'application $M \mapsto M \times \mathrm{Inv}(M)$.

Corrigé :

1. il en existe. Par exemple, la norme d'opérateur associée à M pour la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$, ou encore la norme euclidienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déjà, Inv a pour ensemble de départ un ouvert [2].Pour une matrice M quelconque, on a $A[\mathrm{Com}(A)]^T = \det(A)I_n$. Alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}[\mathrm{Com}(A)]^T$ et A^{-1} est alors une fraction rationnelle en les coefficients de A ($\det(A)$ est polynômial en les coefficients de A, $\mathrm{Com}(A)$ aussi car les mineurs le sont) donc Inv est $\mathcal{C}^\infty$.
2. (a) On note $(E_{ij})_{i,j}$ base canonique et on note une matrice M par ses coefficients (m_{ij}). Alors
$$\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial m_{ij}}(I_n)(M) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left([I_n + tE_{ij}]^{-1} - I_n\right).$$
Si $i = j$,
$$\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial m_{ii}}(I_n)(M) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\left[\frac{1}{t+1} - 1\right]\right)E_{ii} = -E_{ii}.$$
Si $i \neq j$,
$$\forall t \in \mathbb{R}, (I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij}$$
car $E_{ij}^2 = 0$. Ainsi, $\dfrac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial m_{ij}}(I_n)(M) = -E_{ij}$. Ainsi, vu que Inv est $\mathcal{C}^1$, l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles est
$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d\mathrm{Inv}_{I_n}(H) = \sum_{1\le i,j\le n} h_{ij}\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial m_{ij}}(I_n) = -H.$$
Repartons dans le cas général. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour H suffisamment petit, $M+H$ est inversible (car $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est inversible) donc
$$\begin{aligned}(M+H)^{-1} &\underset{\star}{=} (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1}\\ &= \mathrm{Inv}(I_n + M^{-1}H)M^{-1} = (\mathrm{Inv}(I_n) + d\mathrm{Inv}_{I_n}(M^{-1}H) + o(H))M^{-1}\\ &= \mathrm{Inv}(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(H)\end{aligned}$$
quand $H \to 0$. Attention à $\star$: les matrices ne commutent *a priori* pas ! On a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$! On en déduit que
$$\forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d\mathrm{Inv}_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}.$$
(b) Une norme d'algèbre est sous-multiplicative. Ainsi,
$$\sum_{k=0}^{n}\left|\!\left|\!\left|H^k\right|\!\right|\!\right| \le \sum_{k=0}^{n}|\!|\!|H|\!|\!|^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-|\!|\!|H|\!|\!|}.$$
La série $\sum_{k\ge 0} H^k$ converge alors absolument donc converge. Ainsi, on peut considérer
$$(I_n - H)\sum_{k=0}^{+\infty} H^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(H^k - H^{k+1}) = I_n.$$
Ainsi,
$$(I_n + H)\sum_{k=0}^{+\infty}(-H)^k = I_n$$
et
$$(I_n + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-H)^k = I_n - H + o(H)$$

2. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$

quand H tend vers 0. On retrouve alors les résultats de la méthode précédente et on continue de même :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d\mathrm{Inv}_{I_n}(H) = -H.$$

Repartons dans le cas général. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour H suffisamment petit, $M+H$ est inversible (car $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est inversible) donc

$$\begin{aligned}(M+H)^{-1} &\underset{\star}{=} (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} \\ &= \mathrm{Inv}(I_n + M^{-1}H)M^{-1} \\ &= (\mathrm{Inv}(I_n) + d\mathrm{Inv}_{I_n}(M^{-1}H) + o(H))M^{-1} \\ &= \mathrm{Inv}(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(H)\end{aligned}$$

quand $H \to 0$. Attention à $\star$: les matrices ne commutent *a priori* pas ! On a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$! On en déduit que

$$\forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d\mathrm{Inv}_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}.$$

(c) $\varphi : M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M\mathrm{Inv}(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est constante égale à I_n donc de différentielle nulle. En fait, en notant $\psi : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AB$ est différentiable et ici, $\varphi(M) = \psi(M, \mathrm{Inv}(M))$. Par la règle de la chaîne [3], on a

$$0 = d\varphi_M(H) = \mathrm{Id}(H)\mathrm{Inv}(M) + Md\mathrm{Inv}_M(H)$$

ce qui donne

$$-M^{-1}HM^{-1} = d\mathrm{Inv}_M(H).$$

<u>Exercice</u> 117. Montrer que le déterminant $\det : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M) \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle.

Corrigé : On utilise ici la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [4].

On calcule la différentielle de det en I_n. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors $\det(I_n + tH) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i)$, où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(H)$, donc

$$\det(I_n + tH) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i) = 1 + t\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}_{=\mathrm{tr}(H)} + o_{t\to 0}(t)$$

donc $d\det_{I_n}(H) = \mathrm{tr}(H)$.
On calcule la différentielle de det en $P \in \mathrm{GL}_(\mathbb{R})$. Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\det(P+H) &= \det\left(P\left(I_n + P^{-1}H\right)\right) = \det(P)\det(I_n + P^{-1}H) \\ &= \det(P)\left(1 + \mathrm{Tr}(P^{-1}H) + o(H)\right) \\ &= \det(P) + \det(P)\mathrm{Tr}(P^{-1}H) + o(H) \\ &= \det(P) + \mathrm{Tr}(\det(P)P^{-1}H) + o(H)) \\ &= \det(P) + \mathrm{Tr}([\mathrm{Com}(P)]^T H) + o(H)\end{aligned}$$

3. plus simplement, la différentielle d'une application bilinéaire
4. Ce n'est pas dur. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(M + xI_n)$ est polynômiale en x donc n'a qu'un nombre fini de racines. Soit alors x_0, la racine de module la plus petite. On considère alors la suite $(1/p)_{p\geq p_0}$ tel que $|1/p_0| < |x_0|$. On construit ainsi $(M + \frac{1}{p}I_n)_{p\geq p_0}$ suite de matrices inversibles qui tend vers M en $+\infty$.

quand $H \to 0$ car $P[\mathrm{Com}(P)]^T = \det(P) I_n$. Ainsi, $d\det_P(H) = \mathrm{tr}((\mathrm{Com}(P))^T H)$.

On calcule la différentielle de det en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit une suite de matrices M_p inversibles tel que $M_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} M$. Alors

$$d\det_{M_p}(H) = \mathrm{tr}((\mathrm{Com}(M_p))^T H).$$

Par continuité de la comatrice, par continuité de la différentielle du déterminant, on a donc

$$d\det_M(H) = \mathrm{tr}((\mathrm{Com}(M))^T H).$$

Exercice 118. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2\backslash 0, \mathbb{R})$ et $g : (r,\theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in \mathbb{R}$. Calculer $\Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ en fonction des dérivées partielles de g (on rappelle que pour une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans F, $\Delta f = \partial^2_{xx} f + \partial^2_{yy} f$). *Indication : on pourra le faire pour $\partial_1 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ dans un premier temps.*

Corrigé : On calcule les dérivées partielles de g d'abord. Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. En notant $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$,

$$\partial_1 g(r,\theta) = \cos(\theta)\partial_1 f(x,y) + \sin(\theta)\partial_2 f(x,y)$$

et

$$\partial_2 g(r,\theta) = -r\sin(\theta)\partial_1 f(x,y) + r\cos(\theta)\partial_2 f(x,y).$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \partial_1 g(r,\theta) \\ \partial_2 g(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}.$$

On inverse la matrice carrée pour obtenir

$$\partial_1 f(x,y) = \cos(\theta)\partial_1 g(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_2 g(r,\theta) =: \varphi(r,\theta)\ ,\ \partial_2 f(x,y) = \sin(\theta)\partial_1 g(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial_2 g(r,\theta) =: \psi(r,\theta).$$

Pour plus de lisibilité, on a défini φ, ψ.

Prenons du recul sur ce qu'on vient de montrer. Si on a $F(x,y) = G(r,\theta)$, on vient de montrer que

$$\partial_1 F(x,y) = \cos(\theta)\partial_1 G(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_2 G(r,\theta)$$

et

$$\partial_2 F(x,y) = \sin(\theta)\partial_1 G(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial_2 G(r,\theta).$$

On applique alors le résultat pour $F = \partial_1 f$ ou $F = \partial_2 f$ ce qui donne

$$\partial^2_{xx} f(x,y) = \cos(\theta)\partial_1\varphi(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_2\varphi(r,\theta)$$

et

$$\partial^2_{yy} f(x,y) = \sin(\theta)\partial_1\psi(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial_2\psi(r,\theta).$$

Alors [5]

$$\partial_1\varphi(r,\theta) = \cos(\theta)\partial^2_{rr} g(r,\theta) + \frac{\sin(\theta)}{r^2}\partial_2 g(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial^2_{r\theta} g(r,\theta)$$

et

$$\partial_2\varphi(r,\theta) = -\sin(\theta)\partial_1 g(r,\theta) + \cos(\theta)\partial^2_{r\theta} g(r,\theta) - \frac{\cos(\theta)}{r}\partial_2 g(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial^2_{\theta\theta} g(r,\theta).$$

De plus,

$$\partial_1\psi(r,\theta) = \sin(\theta)\partial^2_{rr} g(r,\theta) - \frac{\cos(\theta)}{r^2}\partial_2 g(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial^2_{r\theta} g(r,\theta)$$

5. on utilise dès qu'on le voit le théorème de Schwarz, nos fonctions étant de classe $\mathcal{C}^2$

et
$$\partial_2\psi(r,\theta) = \cos(\theta)\partial_1 g(r,\theta) + \sin(\theta)\partial^2_{r\theta}g(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_2 g(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial^2_{\theta\theta}g(r,\theta).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\partial^2_{xx}f(x,y) &= \cos(\theta)\partial_1\varphi(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_2\varphi(r,\theta)\\
&= \cos^2(\theta)\partial^2_{rr}g(r,\theta) + \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\partial_2 g(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\partial^2_{r\theta}g(r,\theta)\\
&+ \frac{\sin(\theta)^2}{r}\partial_1 g(r,\theta) - \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{r}\partial^2_{r\theta}g(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)\sin(\theta}{r^2}\partial_2 g(r,\theta) + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2}\partial^2_{\theta\theta}g(r,\theta)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\partial^2_{yy}f(x,y) &= \sin(\theta)\partial_1\psi(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial_2\psi(r,\theta)\\
&= \sin^2(\theta)\partial^2_{rr}g(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\partial_2 g(r,\theta) + \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\partial^2_{r\theta}g(r,\theta)\\
&+ \frac{\cos^2(\theta)}{r}\partial_1 g(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{r}\partial^2_{r\theta}g(r,\theta) - \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2}\partial_2 g(r,\theta) + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2}\partial^2_{\theta\theta}g(r,\theta).
\end{aligned}$$

Heureusement pour nous, les termes se ressemblent et on peut sommer facilement terme à terme :

$$\partial^2_{xx}f(x,y) + \partial^2_{yy}f(x,y) = \partial^2_{rr}g(r,\theta) + \frac{1}{r}\partial_1 g(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta}g(r,\theta).$$

Exercice 119. *Cet exercice est en lien avec l'exercice 91.* Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$. On appelle quotient de Rayleigh associée à u l'application

$$\begin{array}{rccc} R(u,\cdot): & E\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \dfrac{\langle u(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}\end{array}$$

que l'on note f dans cet exercice. On note $\|\cdot\|$ norme euclidienne associée.

1. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.
2. Montrer que f est différentiable sur $E\backslash\{0\}$ et calculer sa différentielle en tout point de $E\backslash\{0\}$.
3. En déduire une preuve du théorème spectral.

Corrigé :

1. Cette question est classique. Nous présentons ici deux preuves. Une première plutôt algébrique, celle qu'on attend en général, une plutôt topologique qui doit être utilisée pour cet exercice. En effet, la preuve algébrique utilise le théorème spectral mais c'est ce qu'on cherche à démontrer à la question 3 !

   Méthode 1 : Par le théorème spectral, il existe $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ valeurs propres de u et $e_1,\cdots,e_n$ vecteurs propres associées aux valeurs propres respectivement telle que $(e_1,\cdots,e_n)$ forment une base orthogonale. Soit $x \in E, x \neq 0$ et $\mu_1,\cdots,\mu_n$ des réels tels que

$$x = \sum_{k=1}^n \mu_k e_k.$$

   Alors
$$\langle u(x),x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \mu_i u(e_i), \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\right\rangle = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \mu_i\mu_j\lambda_i \underbrace{\langle e_i,e_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i\mu_i^2.$$

Ainsi,

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2.$$

Puisque $\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = \langle x, x \rangle$, on a finalement

$$\lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n.$$

f est donc bornée. f atteint ses bornes puisque $f(e_1) = \lambda_1$ et $f(e_n) = \lambda_n$.
Méthode 2 : Par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\forall x \in E\backslash\{0\}, f(x) = \left\langle u\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|}\right\rangle.$$

Ainsi, en notant $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$, puisque $\forall x \in E\backslash\{0\}, \dfrac{x}{\|x\|} \in S$, on a

$$\inf_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = \inf_{y\in S} f(y) \ , \quad \sup_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = \sup_{y\in S} f(y)$$

S est bornée et $S = \|\cdot\|^{-1}(\{1\})$ donc est fermé car $\|\cdot\|$ est continue – par exemple, par la deuxième inégalité triangulaire, elle est 1-lipschitzienne – et $\{1\}$ est un fermé : S était donc l'image réciproque d'un fermé par une application continue. S étant inclus dans E de dimension finie, S est compact.
u est continue car linéaire en dimension finie. $x \mapsto \langle u(x), x\rangle$ est continue puisque par Cauchy-Schwarz, $|\langle u(x), x\rangle| \leq \|u(x)\|\|x\| \leq \|\|u\|\|\|x\|^2$. Enfin, $x \mapsto \|x\|^2$ est continue donc par quotient bien définie d'applications continues sur $E\backslash\{0\}$, f est continue sur cet ensemble. En particulier, f est continue sur S.
Par le théorème des bornes atteintes, f_S est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $a, b \in S$ tel que

$$\inf_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = \inf_{y\in S} f(y) = f(a) \ , \quad \sup_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = \sup_{y\in S} f(y) = f(b).$$

Ainsi, f est bornée sur $E\backslash\{0\}$ et atteint ses bornes.

2. *On rappelle que le calcul différentiel dans un autre espace que $\mathbb{R}^n$ amène à des délicatesses. Dans $\mathbb{R}^n$, on dispose d'une base canonique où la plupart des calculs sont faits dans cette base. Ici, E est de dimension finie donc on pourrait plonger dans $\mathbb{R}^n$ mais cela serait maladroit. Contentons-nous de la définition de la différentielle, à savoir un développement limité.*
Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire, en notant $B(x) = \langle u(x), x\rangle$

$$\forall h \in E, B(x+h) = \langle u(x+h), x+h\rangle = \langle u(x)+u(h), x+h\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(h), x\rangle + \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), h\rangle.$$

u étant symétrique, $\langle u(x), h\rangle = \langle u(h), x\rangle$ pour tout $x, h \in E$. De plus, par Cauchy-Schwarz, $|\langle u(h), h\rangle| \leq \|u(h)\|\|h\| \leq \|\|u\|\|\|h\|^2 = o_{h\to 0}(\|h\|)$ [6]. Finalement,

$$\forall h \in E, B(x+h) = B(x) + 2\langle u(x), h\rangle + o_{h\to 0}(\|h\|).$$

De plus,

$$\forall h \in E, \|x+h\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + o_{h\to 0}(\|h\|).$$

Ainsi, par quotient,

$$\forall h \in E, \frac{1}{\|x+h\|^2} = \frac{1}{\|x\|^2} \frac{1}{1 + \frac{2\langle x,h\rangle}{\|x\|^2} + o_{h\to 0}(\|h\|)} = \frac{1}{\|x\|^2}\left(1 - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^2} + o_{h\to 0}(\|h\|)\right).$$

6. On n'a pas besoin d'être si précis. u étant continue et $u(0) = 0$, la première estimée donnait déjà le $o(|h|)$ souhaité.

Ainsi, par produit,

$$\forall h \in E, f(x+h) = \frac{1}{\|x\|^2}\left(\langle u(x), x\rangle + 2\langle u(x), h\rangle - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^2}\langle u(x), x\rangle + o_{h\to 0}(\|h\|)\right) = f(x)+a_x(h)+o_{h\to 0}(\|h\|)$$

avec

$$a_x(h) = \frac{2}{\|x\|^2}\left(\langle u(x), h\rangle - \langle x, h\rangle f(x)\right) = \left\langle \frac{2(u(x) - f(x)x)}{\|x\|^2}, h\right\rangle.$$

Ainsi, f est différentiable en x pour tout $x \in E\backslash\{0\}$ et

$$df_x(h) = \left\langle \frac{2(u(x) - xf(x))}{\|x\|^2}, h\right\rangle \text{ et } \nabla f(x) = \frac{2(u(x) - f(x)x)}{\|x\|^2}.$$

3. Montrons donc le théorème spectral par récurrence sur la dimension de E.
   - Si $n = 1$, c'est clair.
   - Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$. La question 1 nous a donné $a \in S$ tel que $\inf\limits_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = f(a)$. Puisque $\{0\}$ est un fermé, $E\backslash\{0\}$ est un ouvert donc tout extremum de f dans $E\backslash\{0\}$ est point critique de f car f y est différentiable. Ainsi, $\nabla f(a) = 0$ donc $u(a) - f(a)a = 0$ et $u(a) = f(a)a$: a est non nul donc a est vecteur propre pour u pour la valeur propre $f(a)$.
     - Si $\mathcal{E}_{f(a)}(u) = E$, alors $u = f(a)\mathrm{Id}_E$ donc u est diagonalisable en base orthonormée.
     - Si ce n'est pas le cas, comme $\mathcal{E}_{f(a)}(u)$ est stable par u et u est symétrique, l'orthogonal $\left(\mathcal{E}_{f(a)}(u)\right)^\perp$ est stable par $u^* = u$. Ainsi, on peut définir $\widetilde{u}$ l'induit par u sur $\left(\mathcal{E}_{f(a)}(u)\right)^\perp$. Par hypothèse de récurrence, comme $\dim\left(\left(\mathcal{E}_{f(a)}(u)\right)^\perp\right) \in [\![1, n-1]\!]$, on dispose d'une base de $\left(\mathcal{E}_{f(a)}(u)\right)^\perp$ de diagonalisation orthonormée pour $\widetilde{u}$.

     En concaténant une base de $\mathcal{E}_{f(a)}(u)$ et la base précédente, on obtient une base de diagonalisation orthonormée de u. Le théorème spectral est démontré pour la dimension n.

   Par principe de récurrence, le théorème spectral est démontré.

Exercice 120. Déterminer les triangles d'aire maximale dans un cercle de centre 0 de rayon 1.

Corrigé : Tout d'abord, une première esquisse. Soit C cercle de centre 0 de rayon 1. Soit $f : (A, B, C) \in C^3 \mapsto \mathcal{A}_{ABC} \in \mathbb{R}$ où l'on note $\mathcal{A}_{ABC}$ aire du triangle ABC. Alors

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{2}$$

où A, B, C sont rangés dans le sens direct. On cherche à maximiser f. Déjà, en notant R_θ rotation d'angle θ, on a

$$\overrightarrow{R_\theta(A)R_\theta(B)} = R_\theta\left(\overrightarrow{AB}\right).$$

Ainsi, pour tout $A, B, C \in C^3$, on a

$$f(R_\theta(A), R_\theta(B), R_\theta(C)) = \frac{\det\left(\overrightarrow{R_\theta(A)R_\theta(B)}, \overrightarrow{R_\theta(A)R_\theta(C)}\right)}{2} = \det(R_\theta)\frac{\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{2} = f(A, B, C)$$

car une matrice de rotation est de déterminant 1. Par ailleurs, $f(A, B, C) = f(A, C, B)$. Ainsi, le problème est invariant par rotation et par orientation. On peut donc poser $A = (1, 0)$, $B = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $C =$

$(\cos(\theta'), \sin(\theta'))$ avec $0 \leq \theta \leq \theta' \leq 2\pi$. Avec ces notations,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{ABC} &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos(\theta)-1 & \cos(\theta')-1 \\ \sin(\theta) & \sin(\theta') \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2\sin^2(\theta/2) & -2\sin^2(\theta'/2) \\ 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) & 2\cos(\theta'/2)\sin(\theta'/2) \end{vmatrix} \\
&= 2\sin(\theta/2)\sin(\theta'/2)\begin{vmatrix} -\sin(\theta/2) & -\sin(\theta'/2) \\ \cos(\theta/2) & \cos(\theta'/2) \end{vmatrix} \\
&= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) =: g(\theta,\theta').
\end{aligned}$$

Soit D le domaine qu'on cherche à optimiser $D = \{(\theta,\theta') : 0 \leq \theta \leq \theta' \leq 2\pi\}$. Par définition,

$$\partial D = (\{\theta = 0\} \cup \{\theta' = 2\pi\} \cup \{\theta = \theta'\}) \cap D.$$

Ainsi, g est nulle sur ∂D et est strictement positive sur $\overset{\circ}{D}$. Par compacité de D et continuité de g, le maximum de g existe et est atteint en un point critique. On calcule donc les dérivées partielles :

$$\begin{aligned}
\forall(\theta,\theta') \in \overset{\circ}{D}, \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta,\theta') &= 2\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)\right) \\
&= \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta'}{2}-\theta\right).
\end{aligned}$$

De même, j'ai

$$\forall(\theta,\theta') \in \overset{\circ}{D}, \frac{\partial g}{\partial \theta'}(\theta,\theta') = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}-\theta'\right).$$

Sur l'intérieur de D, les sin d'angle moitié ne s'annule jamais donc (θ,θ') est point critique si, et seulement si

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \sin\left(\frac{\theta'}{2}-\theta\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}-\theta'\right) = 0 \end{cases}
&\iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, 2\theta' - \theta = 2k\pi \\ \exists K \in \mathbb{Z}, 2\theta - \theta' = 2K\pi \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, 2\theta' - \theta = 2k\pi \\ \exists K \in \mathbb{Z}, 3\theta = (4K+2k)\pi \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, 6\theta' - 4K\pi - 2K\pi = 2k\pi \\ \exists K \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{4K+2k}{3}\pi \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \theta' = \frac{4\pi}{3}(K+k) \\ \exists K \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2\pi}{3}(2K+k) \end{cases}.
\end{aligned}$$

On conserve les solutions dans $\overset{\circ}{D}$ à savoir $K = 0$ et $k = 1$. On a alors

$$\theta' = \frac{4\pi}{3}\ ,\ \theta = \frac{2\pi}{3}$$

donc

$$\mathcal{A}_{ABC} = g\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Remarque : si on veut un cercle de rayon quelconque noté R, alors l'aire est multiplié par R^2. L'exercice original était pour une ellipse. Toute ellipse se ramène à un cercle par une transformation très simple. En effet, l'équation cartésienne d'une ellipse est

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\ ;\ (\mathcal{E})$$

où $a, b > 0$ désigne respectivement le demi-grand axe et demi-petit axe. On considère alors $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (ax, by) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\varphi(C) = \mathcal{E}$. En effet, pour $x, y \in \mathbb{R}$, notons $(u, v) = \varphi(x, y)$. On a alors

$$1 = x^2 + y^2 = \left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2.$$

Ainsi, $(u, v) \in \mathcal{E}$. Par ailleurs, φ est clairement $\mathcal{C}^1$ et bijective : sa réciproque aussi est clairement $\mathcal{C}^1$ (on parle de $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme). Comme $\det(\varphi) = ab > 0$, on obtient que $ab\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{\varphi(ABC)}$ où $\varphi(ABC)$ désigne le triangle transformé par φ (il suffit de dessiner le triangle $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)$).

Exercice 121. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2}\|y - x\|^2.$$

1. Montrer que f est coercive (*i.e.* $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$).
2. En déduire que f admet un minimum que l'on va noter a.
3. Montrer que ce minimum est unique. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = 0 \iff x = a$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{a\}$. On note $\varphi_x : t \in \mathbb{R} \mapsto f(x + t\nabla f(x)) \in \mathbb{R}$. Montrer que φ_x admet un et unique minimum noté $t_{n,x}$.
5. On construit la suite récurrente $x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + t_{n,x_n} d_n$ où $d_n = \nabla f(x_n)$ et $t_{n,x} = \begin{cases} 0 \text{ si } x = a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. On souhaite montrer que $(x_n)_n$ converge vers le zéro de ∇f.
   (a) Montrer que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $x_{n_0} = a$, alors $(x_n)_n$ stationne. *On suppose dans la suite que ce n'est jamais le cas.*
   (b) Montrer que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) En déduire qu'à une sous-suite près, $(x_n)_n$ converge, disons vers x.
   (d) En déduire que $\|\nabla f(x)\|^2 = 0$.
   (e) Conclure.

Corrigé :

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors
$$f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Ainsi, f est coercive.
2. En particulier, il existe $A > 0$ tel que $\forall \|x\| > A, f(x) \geq f(0)$. Sur le compact $B_f(0, A)$, f est continue donc admet un minimum noté a. Ainsi, $f(0) \geq a$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq a$.
3. Soit b un minimum de f. Alors
$$f(b) - f(a) = 0 \geq \langle \nabla f(a), b - a \rangle + \frac{\alpha}{2}\|b - a\|^2$$
mais a est point critique donc $0 \geq \|b - a\|^2$: $b = a$. On en déduit que si $\nabla f(x) = 0$, alors par coercivité, $f(a) - f(x) \geq 0 + \frac{\alpha}{2}\|a - x\|^2$ donc $f(x) \leq f(a)$. Par minimalité de f en a, $f(x) = f(a)$ et par unicité du minimiseur, $x = a$.
4. Supposons que $\nabla f(x) \neq 0$. φ est coercive par composition de limite. Par continuité, elle admet un minimum. Il manque l'unicité. Ce minimum est point critique, disons t_0. On a donc $\varphi'(t_0) = 0$. Or,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \mathrm{d}f_{x+t\nabla f(x)}(\nabla f(x)) = \langle \nabla f(x + t\nabla f), \nabla f(x) \rangle.$$
En $t = t_0$, on a donc
$$\langle \nabla f(x + t_0\nabla f), \nabla f(x) \rangle = 0.$$

(c'est important, on va l'utiliser à ($\star$)). On a alors

$$\varphi(t) = f(x + t\nabla f(x)) \geq f(x + t_0\nabla f(x)) + \langle \nabla f(x + t_0\nabla f), (t - t_0)\nabla f(x)\rangle + \frac{\alpha}{2}(t - t_0)^2\|\nabla f(x)\|^2$$

donc $\varphi(t) > \varphi(t_0)$ pour tout $t \neq t_0$. On a bien unicité du minimum.

5. (a) Supposons que $x_{n_0} = a$. Alors $\nabla f(x_{n_0}) = 0$ donc $x_{n_0+1} = x_{n_0} + 0 \times 0$ et la suite stationne à partir du rang n_0.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $x_{n+1} = x_n + t_{n,x_n}\nabla f(x_n)$ donc

$$f(x_{n+1}) = f(x_n + t_{n,x_n}\nabla f(x_n)) = \varphi_{x_n}(t_{n,x_n}) \leq \varphi_{x_n}(t_{n,x_n}) = f(x_n + 0\nabla f(x_n)) = f(x_n).$$

   (c) Comme f est coercive, il existe $A > 0$ tel que $\forall \|x\| > A, f(x) \geq f(x_0)$. Par la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(x_0)$ donc par contraposée, $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq A$. Ainsi, la suite $(x_n)_n$ vit dans $B_f(0, A)$ qui est compacte (fermée bornée en dimension finie). Elle admet donc une sous-suite convergente, notée $(x_{\varphi(n)})_n$ et on note x la limite.

   (d) On écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = \underbrace{\langle \nabla f(x_{n+1}), t_{n,x_n}\nabla f(x_n)\rangle}_{=0 \text{ par } (\star)} + \frac{\alpha}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \geq 0.$$

   Comme $(f(x_n))_n$ est décroissante minorée (par le minimum de f qu'est a), elle converge donc par encadrement, $\|x_{n+1} - x_n\|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que

$$0 = \langle \nabla f(x_{\varphi(n)+1}, \nabla f(x_{\varphi(n)})\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle \nabla f(x), \nabla f(x)\rangle = \|\nabla f(x)\|^2$$

   puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est continue de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, ∇f est continue sur $\mathbb{R}^n$ par le caractère $\mathcal{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}^n$ et que

$$x_{\varphi(n)+1} = \underbrace{x_{\varphi(n)+1} - x_{\varphi(n)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

   (e) Ainsi, $\nabla f(x) = 0$ donc $x = a$. Ainsi, $(x_n)_n$ admet une unique valeur d'adhérence qu'est a : comme elle est à valeurs dans un compact, elle converge.