Fonction de Bessel

Thomas Chen

On étudie une équation différentielle dont les solutions sont appelées « fonctions de Bessel » .

Exercice 1. On note $(E) : xy'' + y' + xy = 0 \ ; \ x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
2. Montrer qu'il en existe une unique qui vaut 1 en 0. On la note f.
3. Soit g une autre solution sur $]0, \alpha[$ avec $\alpha > 0$. On suppose que (f, g) est libre. Montrer que g n'est pas bornée.
4. On note $J(x) := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(t))\mathrm{d}t$. Montrer que J est solution de (E).
5. Montrer que J est développable en série entière et donner son expression.

Corrigé :

1. Soit $f = \displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $x \in]-R, R[$.

$$xf''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} = \sum_{n=1} a_{n+1} n(n+1)x^n, f'(x) \quad = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)x^n, xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n.$$

Analyse : f est solution de (E) si, et seulement si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_{n+1}n(n+1) + a_{n+1}(n+1) + a_{n-1} \right) x^n + a_1 x^0 = 0$$

ce qui revient à demander par unicité des coefficients d'une série entière

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1}(n+1)^2 + a_{n-1} = 0, a_1 = 0.$$

Par récurrence, on a donc immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0 \ ; \ a_{2n+2} = \frac{-a_{2n}}{[2(n+1)]^2} = \cdots = \frac{(-1)^{n+1} a_0}{2^{2(n+1)}(n+1)!^2}.$$

On a donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n} a_0.$$

Synthèse : soit f série entière définit ci-avant. Montrons que son rayon de convergence est strictement positif. Pour cela, le lemme d'Abel nous dit que $R = +\infty$. En effet, en notant $b_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$,
la suite $(b_n R^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour tout $R > 0$. Il suffit d'écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}, n = 2p, \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} R^{2p} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par les calculs antérieurs à l'analyse, f est solution de (E) : c'est ce qu'il fallait démontrer.

2. On a un degré de liberté sur a_0. En fixant $a_0 = 1$, on a le résultat.
3. Soit g telle que (f, g) soit libre et g solution de (E). Soit W wronskien de f, g, c'est-à-dire, $W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$. Alors W est dérivable de dérivée $W' = f'g' + fg'' - f''g - f'g'$ donc $xW' = f(-g' - xg) - (-f' - xf)g = -fg' + f'g = -W$. Ainsi, $(xW)'$ est constant sur $]0, \alpha[$ donc il existe une constante réelle A tel que $\forall x \in]0, \alpha[, xW(x) = A$. A est non nulle : sinon, W est nulle ce qui contredit la liberté de (f, g). g étant bornée, je la prolonge en 0. Ainsi,
$$A = xf(x)g'(x) - xf'(x)g(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} xf(x)g'(x).$$
Puisque $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$, on a donc $g'(x) \underset{x \to 0^+}{A} /x$. Soit $x_0 \in]0, \alpha[$. Puisque $\displaystyle\int_0^{x_0} \frac{1}{t} \mathrm{d}t$ diverge, par théorème d'intégration d'équivalents, on a
$$g(x_0) - g(x) \underset{x \to 0}{\sim} A(\ln(x_0) - \ln(x)).$$
Cela contredit le caractère bornée de g. Ainsi, par l'absurde, on a g non bornée.
4. Soit $J : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(t)) \mathrm{d}t$. Soit $f : (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi] \mapsto \cos(x \sin(t)) \in \mathbb{R}$.
   - $\forall t \in [0, \pi], x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; $\forall t \in [0, \pi], \forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -\sin(t) \sin(x \sin(t)), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = -\sin^2 \cos(x \sin(t))$.
   - Pour tout x réel, ces dernières applications sont mesurables sur $[0, \pi]$.
   - Domination : chacune de ces applications sont continues sur le segment $[0, \pi]$ donc dominée sur $[0, \pi]$.

   Par le théorème de dérivation $\mathcal{C}^2$ sous le signe intégral, J est de classe $\mathcal{C}^2$ et
$$J'(x) = -\int_0^{\pi} \sin(t) \sin(x \sin(t)) \mathrm{d}t \ , \ J''(x) = -\int_0^{\pi} \sin^2 \cos(x \sin(t)) \mathrm{d}t.$$
Ainsi,
$$x(J''(x) + J(x)) = x \int_0^{\pi} (1 - \sin^2(t)) \cos(x \sin(t)) \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \cos(t)(x \cos(t)) \cos(x \sin(t)) \mathrm{d}t.$$
On réalise une intégration par parties, on est en présence de deux fonctions $\mathcal{C}^1$: on intègre $t \mapsto (x \cos(t)) \cos(x \sin(t))$ dont une primitive est $t \mapsto \sin(x \sin(t))$ et on dérive cos. On obtient alors
$$x(J''(x) + J(x)) = \underbrace{[\sin(x \sin(t)) \cos(t)]_0^{\pi}}_{=0} + \int_0^{\pi} \sin(t) \sin(x \sin(t)) \mathrm{d}t = -J'(x).$$
On a donc J solution de (E).
5. De plus, J est bornée sur $\mathbb{R}$. Par précédent, $J = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or, $J(0) = \pi = \lambda f(0) = \lambda$ donc $J = \pi f$.