Théorème de compacité de Riesz

Thomas Chen

Soit E un espace vectoriel normé. Si E est de dimension finie, alors les compacts de E sont les fermés bornés. En particulier, la boule unité fermée est compacte.

En dimension infinie, on ne peut pas caractériser les compacts par les fermés bornés. On a même plus fort : E est de dimension finie si, et seulement si, sa boule unité fermé est compacte. On présente deux preuves : une via Bolzano-Weierstrass, une autre via Borel-Lebesgue.

D'abord un petit lemme.

Exercice 1. Soit E, un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit F, un fermé non vide de E. Montrer que $d(x,F) := \inf\limits_{y\in F} \|x-y\|$ est atteinte. Même question mais E est supposé de dimension infinie et F, un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Corrigé : On rappelle qu'un espace de dimension finie est fermé. Soit $a \in F, d = \|x-a\|$. Soit $K = F \cap B_f(x,d) = \{y \in F : \|x-y\| \leq d\}$. K est inclus dans un fermé, et K est fermé borné. Ainsi, K est compact (dans K) car F est de dimension finie . L'application $y \mapsto \|y-x\|$ est continue sur K donc atteint son minimum en $c \in K$ par le théorème des bornes atteintes. Ainsi, $\forall y \in K, \|x-y\| \leq \|x-c\|$ donc $\|x-c\| \leq d$. Par ailleurs, $\forall y \in F \backslash K, \|x-y\| > d \geq \|x-c\|$. Ainsi, $d(x,F) \geq \|x-c\|$ mais puisque $c \in F$, on a égalité.

Voilà une preuve via Bolzano-Weierstrass.

Exercice 2. Soit E, un espace vectoriel normé. Montrer que sa sphère unité fermée est compacte si, et seulement si, E est de dimension finie. *Indication : On pourra utiliser l'exercice 1 et regarder un vecteur unitaire u vérifiant $d(u,F) = 1$ pour F, un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et construire une suite d'éléments de $B_f(0,1)$ sans valeur d'adhérence.*

Corrigé : Si E est de dimension finie, c'est clair. Si E est de dimension infinie, pour F de dimension finie de E, on sait par l'exercice 1 qu'il existe $y \in F$, vérifiant $d(x,F) = \|x-y\|$ pour tout $x \in E \backslash F$. Posons donc $u = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$. Alors u est unitaire, donc $d(u,F) \leq \|u\| = 1$. Par ailleurs,

$$\forall z \in F, \|u-z\| = \frac{1}{\|x-y\|}\|x-(y+\|x-y\|z)\|.$$

De plus, $\|x - \underbrace{(y+\|x-y\|)z}_{\in F}\| \leq d(x,F) = \|x-y\|$. Donc $\|u-z\| \geq 1$, et ce, pour tout $z \in F$. Donc $d(u,F) = 1$ au final.

Considérons maintenant une suite u à valeurs dans $B_f(0,1)$ vérifiant $\forall n,p \in \mathbb{N}^2, n \neq p \implies \|u_n - u_p\| \geq 1$. Cela signifie que u n'a pas de valeur d'adhérence, contredisant la compacité de la boule fermée de E.

On considère u_0, un élément unitaire quelconque. Supposons $u_0, \cdots, u_{n-1}$ construit. L'espace $\mathrm{Vect}(u_0,\cdots,u_{n-1})$ étant de dimension finie, le début de la preuve assure un élément u_n vérifiant $d(u_n, F_n) = 1$. Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \|u_n - u_k\| \geq 1$. D'où la construction de u_n. On construit ainsi une suite u satisfaisante.

Voilà une preuve via Borel-Lebesgue.

Exercice 3. On admet que X est compact si, et seulement si, pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, si $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, alors il existe $i_1, \cdots, i_n \in I$ vérifiant $X \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$ (propriété de Borel-Lebesgue).
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $B_f(0,1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ supposée compacte. On veut montrer que E est de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n \in E$ tel que
$$B_f(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right).$$
2. Soit $V = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$. Soit $x \in E\backslash\{0\}$. On veut montrer que $x \in V$.
   (a) Expliquer pourquoi il suffit de montrer le résultat pour $x \in B_f(0,1)$. On considère alors $x \in B_f(0,1)$.
   (b) Montrer qu'il existe une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \|x - y_k\| \leq \frac{1}{2^k}$. *On pourra procéder par récurrence et exploiter la question 3a).*
   (c) Conclure que $x \in V$ et $E = V$.
3. En déduire que $(E, \|\cdot\|)$ est de dimension finie si, et seulement si, $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est compact : c'est le théorème de compacité de Riesz.

Corrigé :

1. On a
$$B_f(0,1) \subset \bigcup_{x \in B_f(0,1)} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right).$$
Comme $B_f(0,1)$ est compacte, il existe $x_1, \cdots, x_n \in B_f(0,1)$ tel que
$$B_f(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right).$$

2. (a) Supposons que le résultat est vrai pour $x \in B_f(0,1)$. Comme $x \in E\backslash\{0\}$, en notant $\lambda = \frac{1}{\|x\|}$, on a $\lambda x \in B_f(0,1)$ donc $\lambda x \in V$. Comme V est un espace vectoriel, $\frac{1}{\lambda}\lambda x \in V$ donc $x \in V$.

   (b) Pour construire y_0, on sait que $x \in B_f(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right)$ donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x \in B\left(x_i, \frac{1}{2}\right)$ *i.e.*
$$\|x - x_i\| \leq \frac{1}{2}.$$
En posant $y_0 = x_i$, on a le résultat souhaité.

   Supposons donc construit $y_0, \cdots, y_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On veut construire y_{n+1}. Pour cela, on sait que
$$\|x - y_n\| \leq \frac{1}{2^n} \textit{ i.e. } \|2^n(x - y_n)\| \leq 1.$$
On en déduit que $2^n(x - y_n) \in B_f(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right)$ donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $2^n(x - y_n) \in B\left(x_i, \frac{1}{2}\right)$ *i.e.*
$$\|2^n(x - y_n) - x_i\| \leq \frac{1}{2}$$

donc
$$\left\| x - y_n - \frac{1}{2^n} x_i \right\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

En posant $y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{2^n} x_i \in V$, on a le résultat souhaité. On conclut par le principe de récurrence.

(c) Par encadrement, on a $y_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} x$ et comme V est fermée, $x = \lim\limits_{k \to +\infty} y_k \in V$ donc $x \in V$.

3. Si E est de dimension finie, on sait déjà que $B_f(0,1)$ est compacte.

Si $B_f(0,1)$ est compacte, alors E égale un espace vectoriel de dimension finie donc E est bien de dimension finie.