Université Paris-Saclay

Département de Mathématiques

Mémoire de Master 2

Théorie spectrale d'opérateurs périodiques

Thomas Chen

encadré par Thierry Ramond

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

05 septembre 2025

Introduction

Dans ce mémoire, on souhaite étudier l'équation différentielle du premier ordre $-u'' + Vu = Eu$ où V est une fonction périodique *a minima* continue par morceaux. Dans une première partie, on s'intéresse à la théorie de Floquet et à l'équation de Hill

$$(P(x)y'(x))' + Q(x)y(x) = 0 \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

où P, Q sont α-périodiques et P est une fonction suffisamment régulière (voir sous-section 1.2). On s'intéresse à l'existence de solutions périodiques et/ou antipériodiques et introduit un critère utilisant une notion de discriminant de cette équation. Dans une seconde partie, on s'intéresse au problème aux valeurs propres

$$(Py')' + (\lambda s - Q)y = 0.$$

On étudie alors le discriminant en fonction du paramètre λ. Dans ces deux premières parties, nous utilisons des méthodes *ad hoc* qui ont du mal à se généraliser. Le but final de ce mémoire est d'aboutir à une thèse sur les opérateurs périodiques non autoadjoints. On introduit alors dans la troisième partie un outil plus général : l'intégrale directe d'espaces de Hilbert. Après avoir étudié quelques propriétés dont une forme de théorème spectral version calcul fonctionnel, on applique ces outils au problème de valeurs propres précédent.

Pour fixer les notations, dans toute la suite, les produits scalaires hermitiens seront linéaires à gauche et anti-linéraires à droite. Sauf mention explicite du contraire, $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \xi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} \mathrm{d}x \end{array}$$

et qui s'étend sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Table des matières

1 Théorie de Floquet

On suit de très près le livre de Eastham [2].

1.1 Généralités

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Dans toute la suite, τ_α désigne la translation par $+\alpha$: $\tau_\alpha : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \alpha \in \mathbb{R}$. On cherche à étudier l'équation différentielle

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0 \ ; \ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

où a_0, a_1, a_2 sont continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et α-périodiques. On suppose que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq 0$. Ainsi, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Sauf mention du contraire, (φ_1, φ_2) est un système fondamental de solutions de (1).

Proposition 1.1. Il existe $\rho \in \mathbb{C}^*$ et $\psi \not\equiv 0$ tel que $\psi \circ \tau_\alpha = \rho\psi$.

Démonstration. Soit (φ_1, φ_2) un système fondamental de solutions de (1) avec $W(\varphi_1, \varphi_2)(0) = I_2$. Comme $\varphi_1 \circ \tau_\alpha$ et $\varphi_2 \circ \tau_\alpha$ sont également solutions de (1), il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\phi \circ \tau_\alpha = M\phi \ ; \ \phi := \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant ψ une solution de (1). Alors il existe deux complexes λ_1, λ_2 tels que $\psi = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$. Ainsi, $\psi \circ \tau_\alpha = \lambda\varphi_1 \circ \tau_\alpha + \lambda_2\varphi_2 \circ \tau_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} M\phi$. On a alors, pour tout $\rho \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \psi \circ \tau_\alpha = \rho\psi &\iff \psi \circ \tau_\alpha = \rho \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \phi \\ &\iff \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} M - \rho \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) \phi = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} (\rho I_2 - M)\phi = 0 \\ &\underset{\text{Liberté}}{\iff} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} (\rho I_2 - M) = 0 \\ &\iff (\rho I_2 - M^T) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Comme $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$, on en déduit que $\rho I_2 - M^T \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ donc $\rho \in \mathrm{Sp}(M)$. Comme M transforme une base en une base, M est inversible donc ρ ne peut être nul.

Prenons donc $\rho \in \mathrm{Sp}(M)$ (possible car χ_M est scindé dans $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert-Gauss). Alors on a $\psi \circ \tau_\alpha = \rho\psi$ par les équivalences précédentes. $\square$

Proposition 1.2. Soit φ_1, φ_2 système fondamental de solutions avec $W(\varphi_1, \varphi_2)(0) = I_2$. La matrice M précédente, dite matrice de monodromie, vérifie

$$M = \Phi^{-1}(0)\Phi(\alpha) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha) & \varphi_2(\alpha) \\ \varphi_1'(\alpha) & \varphi_2'(\alpha) \end{pmatrix} \text{ où } \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On a $\Phi \circ \tau_\alpha = \Phi M$ donc $\Phi(\alpha) = \Phi(0)M$. Comme $\Phi(0) = I_2$ par les conditions initiales, on a le résultat. $\square$

Remarque 1.3. Les matrices de monodromie sont semblables entre elles. Ainsi, lorsqu'on énonce un résultat qui dépend de M mais qu'on reste invariant par similitude (comme $\mathrm{tr}(M)$ ou $\det(M)$), le résultat final ne dépend pas du système fondamental de solutions choisi. Dans la proposition qui suit, le résultat ne dépend donc pas du système (φ_1, φ_2) choisi.

Proposition 1.4. On a

$$\chi_M(X) = X^2 - (\varphi_1(\alpha) + \varphi_2'(\alpha))X + \exp\left(-\int_0^\alpha \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\mathrm{d}x\right).$$

Démonstration. On sait que $\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M)$. Ici, $\mathrm{tr}(M) = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2'(\alpha)$ et par la formule de Liouville (pour les wronskiens), on a

$$\det(M) = W(\varphi_1, \varphi_2)(\alpha) = W(\varphi_1, \varphi_2)(0) \exp\left(-\int_0^\alpha \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\mathrm{d}x\right)$$

ce qui conclut. $\square$

Proposition 1.5. Il existe un système fondamental de solutions ψ_1, ψ_2 tel qu'on ait l'alternative suivante :

1. Il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{C}$ et des fonctions p_1, p_2 α-périodiques de sorte que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi_1(x) = \exp(\lambda_1 x) p_1(x) \ ; \ \psi_2(x) = \exp(\lambda_2 x) p_2(x).$$
2. Il existe $m \in \mathbb{C}$ et des fonctions p_1, p_2 α-périodiques de sorte que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi_1(x) = \exp(\lambda x) p_1(x) \ ; \ \psi_2(x) = \exp(\lambda x)(x p_1(x) + p_2(x)).$$

Par ailleurs, si $\mathrm{Sp}(M) = \{\rho_1, \rho_2\}$, $m_k \in \mathbb{C}$ vérifie $\rho_k = \exp(m_k \alpha)$ pour $k \in \{1, 2\}$. Si $\mathrm{Sp}(M) = \{\rho\}$, alors $m \in \mathbb{C}$ vérifie $\rho_1 = \exp(m\alpha)$.

Démonstration. Distinguons plusieurs cas.

- Si le spectre de M est de cardinal 2, soit ρ_1, ρ_2 ces deux valeurs. Soit $k \in \{1, 2\}$. Alors $\rho_k I_2 - M$ n'est pas inversible donc il existe α_1^k, α_2^k des constantes non toutes nulles telles que $\psi_k := \alpha_1^k \varphi_1 + \alpha_2^k \varphi_2$ vérifient $\psi_k \circ \tau_\alpha = \rho_k \psi_k$ (comme dans la preuve de la proposition (1.1)). Le couple (ψ_1, ψ_2) forme donc un système fondamental de solutions. Soit $m_k \in \mathbb{C}$ tel que $\rho_k = \exp(m_k \alpha)$. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_k(x) = \exp(-m_k x)\psi_k(x)$. Alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, p_k(x+\alpha) = \exp(-m_k x)\exp(-m_k \alpha)\psi_k(x+\alpha) = \exp(-m_k x)\exp(-m_k\alpha)\rho_k \psi_k(x) = p_k(x)$$
donc p_k est bien périodique et on satisfait la première assertion de la proposition.
- Si le spectre de M est de cardinal 1, soit ρ la seule valeur propre. Soit ψ_1 tel que $\psi_1 \circ \tau_\alpha = \rho\psi_1$. Soit $m \in \mathbb{C}$ tel que $\rho = \exp(m\alpha)$. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_1(x) = \exp(-mx)\psi_1(x)$.
Soit ψ_2 une solution de (1) telle que (ψ_1, ψ_2) soit libre. Alors (ψ_1, ψ_2) est un système fondamental de solutions de (1) donc la solution $\psi_2 \circ \tau_\alpha$ s'écrit $\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$ où λ_1, λ_2 sont des constantes. On a alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, W(\psi_1 \circ \tau_\alpha, \psi_2 \circ \tau_\alpha)(x) = W(\rho\psi_1, \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)(x) = \rho\lambda_2 W(\psi_1, \psi_2)(x).$$
Par la formule de Liouville, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \rho\lambda_2 = \frac{W(\psi_1,\psi_2)(x+\alpha)}{W(\psi_1,\psi_2)(x)} = \exp\left(-\int_x^{x+\alpha} \frac{a_1(s)}{a_0(s)}\mathrm{d}s\right) = \exp\left(-\int_0^{\alpha} \frac{a_1(s)}{a_0(s)}\mathrm{d}s\right) = \det(B) = \rho^2$$
puisque B n'admet que ρ comme valeur propre. Comme $\rho \neq 0$, on a $\lambda_2 = \rho$. Il y a deux sous-cas à distinguer.
  - Si $\lambda_1 = 0$, alors $\psi_2 \circ \tau_\alpha = \exp(m\alpha)\psi_2$ et on est dans le cas précédent donc on satisfait l'assertion (1).
  - Sinon, posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_2(x) = \exp(-mx)\psi_2(x) - x\dfrac{\lambda_1}{\alpha\rho}\exp(-mx)\psi_1(x)$. Alors on a
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \psi_2(x) = \exp(mx)\left(\frac{\lambda_1}{\alpha\rho} x p_1(x) + p_2(x)\right).$$
  Ainsi, on satisfait l'assertion (2), en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$
  $$\Psi_1(x) = \exp(mx)p_1(x) \ ; \ P_2(x) := \frac{\alpha\rho}{\lambda_1}p_2(x) \ ; \ \Psi_2(x) = \exp(mx)(xp_1(x) + P_2(x)) = \frac{\alpha\rho}{\lambda_1}\psi_2(x).$$

□

Remarque 1.6. L'assertion (1) a lieu si, et seulement si, ou bien $\#\mathrm{Sp}(M) = 2$ ou bien $\#\mathrm{Sp}(M) = 1$ et M est une homothétie. En effet, dans le cas $\lambda_1 = 0$ évoqué précédemment, on avait conclu que $M = \exp(m\alpha)I_2$. D'ailleurs, comme les matrices de monodromie sont semblables, ce résultat est indépendant du système fondamental de solutions choisi). Dans les autres cas, c'est l'assertion (2) qui s'impose.

Définition 1.7. Les constantes ρ_1, ρ_2 sont appelées multiplicateurs caractéristiques et les constantes m_1, m_2 sont appelées exposants caractéristiques. Il existe donc une infinité d'exposants caractéristiques et en pratique, on les prendra dans l'intervalle $\left]\dfrac{-\pi}{\alpha}, \dfrac{\pi}{\alpha}\right]$.

1.2 Équation de Hill

On considère l'équation dite de Hill

$$(P(x)y'(x))' + Q(x)y(x) = 0 \ ; \ x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

où P, Q sont deux fonctions α-périodiques, $P \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash\{0\})$ et $P' \in \mathcal{C}^0_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est un cas particulier de l'équation de Floquet (1). Dans la suite de cette section sur la théorie de Floquet, on considère seulement l'équation de Hill. Soit (φ_1, φ_2) un système fondamental de solutions de (2). On note encore M la matrice de monodromie associée.

Pour l'équation (2), l'équation caractéristique devient

$$X^2 - (\varphi_1(\alpha) + \varphi_2'(\alpha))X + 1 = 0 \tag{3}$$

puisque $\exp\left(-\int_0^\alpha \frac{P'(t)}{P(t)}\mathrm{d}t\right) = \exp(\ln(P(\alpha)) - \ln(P(0))) = 1$. On note $D = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2'(\alpha)$. Ainsi, les multiplicateurs caractéristiques ρ_1, ρ_2 vérifient $\rho_1\rho_2 = 1$.

Théorème 1.8. *Il existe un système fondamental de solutions (ψ_1, ψ_2) et p_1, p_2 deux fonctions α-périodiques vérifiant*

1. *dans le cas $D > 2$, $\psi_1 = \exp(\mu\bullet)p_1$; $\psi_2 = \exp(-\mu\bullet)p_2$ où $\mu = \frac{\ln(\rho_1)}{\alpha}$.*
2. *dans le cas $D < -2$, $\psi_1 = \exp(m_+\bullet)p_1$; $\psi_2 = \exp(m_-\bullet)p_2$ où $m_\pm = \pm\left(\frac{\ln(-\rho_1)}{\alpha} + \frac{i\pi}{\alpha}\right)$.*
3. *dans le cas $D \in]-2, 2[$, $\psi_1 = \exp(i\theta\bullet)p_1$; $\psi_2 = \exp(-i\theta\bullet)p_2$ où $\theta = \frac{\arg(\rho_1)}{\alpha} \in \left]0, \frac{\pi}{\alpha}\right[$.*
4. *dans le cas $D = 2$,*
   (a) *si $M = I_2$, alors $\psi_1 = p_1, \psi_2 = p_2$.*
   (b) *si $M \neq I_2$, alors $\psi_1 = p_1$ et $\psi_2 = \bullet p_1 + p_2$.*
5. *dans le cas $D = -2$,*
   (a) *si $M = I_2$, alors $\psi_1 = \exp\left(i\frac{\pi}{\alpha}\bullet\right)p_1$ et $\psi_2 = \exp\left(i\frac{\pi}{\alpha}\bullet\right)p_2$.*
   (b) *si $M \neq I_2$, alors $\psi_1 = \exp\left(i\frac{\pi}{\alpha}\bullet\right)p_1$ et $\psi_2 = \exp\left(i\frac{\pi}{\alpha}\bullet\right)(\bullet p_1 + p_2)$.*

Démonstration. On rappelle que les solutions de l'équation caractéristique (3), notées ρ_1 et ρ_2, vérifient $\rho_1\rho_2 = 1$. Le discriminant associé étant $D^2 - 4$, on en déduit que $|D| \geq 2$ entraine que ρ_1, ρ_2 sont réels et donc de même signe. Par ailleurs, $D = \rho_1 + \rho_2$.

1. Supposons que $D > 2$. Alors comme $\rho_1 + \rho_2 > 2$, on en déduit que ρ_1 et ρ_2 sont strictement positifs. Par la proposition 1.5, il existe un système fondamental de solutions (ψ_1, ψ_2) et deux fonctions α-périodiques p_1 et p_2 tels que
$$\psi_1 = \exp(\mu\bullet)p_1$$
où $\exp(\mu\alpha) = \rho_1$ *i.e.* $\mu = \frac{\ln(\rho_1)}{\alpha} = -\frac{\ln(\rho_2)}{\alpha}$ (car $\rho_1 = 1/\rho_2$) et
$$\psi_2 = \exp(-\mu\bullet)p_1.$$
2. Supposons que $D < -2$. De $\rho_1 + \rho_2 < -2$, on en déduit que ρ_1 et ρ_2 sont strictement négatifs. Par la proposition 1.5, il existe un système fondamental de solutions (ψ_1, ψ_2) et deux fonctions α-périodiques p_1 et p_2 tels que
$$\psi_1 = \exp(m_+\bullet)p_1 \ ; \ \psi_2 = \exp(m_-\bullet)p_2$$
où m_+ est définie par $\exp(m_+\alpha) = \rho_1 = |\rho_1|e^{i\pi}$ et m_- est définie par $\exp(m_-\alpha) = \rho_2 = \frac{1}{\rho_1} = \exp(-m_+\alpha)$. m_+ s'écrit $a + ib$ donc $\exp(m_+\alpha) = \exp(a\alpha)\exp(ib\alpha)$ donc $\exp(a\alpha) = |\rho_1|$ *i.e.* $a = \frac{\ln(|\rho_1|)}{\alpha}$ et $b\alpha \equiv \pi[2\pi]$ donc $b = \frac{\pi}{\alpha}$ convient. On en déduit donc que $m_+ = \frac{\ln(-\rho_1)}{\alpha} + i\frac{\pi}{\alpha}$ et $m_- = -m_+$ conviennent.
3. Supposons que $D \in]-2, 2[$. Alors (3) a deux solutions complexes conjuguées de module 1. Soit ϑ un argument d'une solution. Alors avec $\theta = \frac{\vartheta}{\alpha}$, par la proposition 1.5, il existe un système fondamental de solutions (ψ_1, ψ_2) et deux fonctions α-périodiques p_1 et p_2 tels que
$$\psi_1 = \exp(i\theta\bullet)p_1 \text{ et } \exp(-i\theta\bullet)p_2.$$
(dans ce contexte, on demande que $\exp(i\vartheta) = \exp(m_k\alpha)$ donc θ convient).

4. Supposons que $D = 2$. Alors les exposants caractéristiques sont nuls.
   (a) Si $M = I_2$, alors par la proposition 1.5, il existe un système fondamental de solutions (ψ_1, ψ_2) et deux fonctions α-périodiques p_1 et p_2 tels que $\psi_1 = p_1$ et $\psi_2 = p_2$.
   (b) Si $M \neq I_2$, alors on est dans le cas (2) de la proposition 1.5 : il existe un système fondamental de solutions (ψ_1, ψ_2) et deux fonctions α-périodiques p_1 et p_2 tels que $\psi_1 = p_1$ et $\psi_2 = \bullet p_1 + p_2$.
5. Supposons que $D = -2$. Alors $\dfrac{i\pi}{\alpha}$ et $\dfrac{i\pi}{\alpha}$ sont les exposants caractéristiques.
   (a) Si $M = -I_2$, alors par la proposition 1.5, il existe un système fondamental de solutions (ψ_1, ψ_2) et deux fonctions α-périodiques p_1 et p_2 tels que $\psi_1 = \exp\left(i\dfrac{\pi}{\alpha}\bullet\right) p_1$ et $\psi_2 = \exp\left(i\dfrac{\pi}{\alpha}\bullet\right) p_2$.
   (b) Si $M \neq -I_2$, alors on est dans le cas (2) de la proposition 1.5 : il existe un système fondamental de solutions (ψ_1, ψ_2) et deux fonctions α-périodiques p_1 et p_2 tels que $\psi_1 = \exp\left(\dfrac{i\pi}{\alpha}\bullet\right) p_1$ et
   $\psi_2 = \exp\left(\dfrac{i\pi}{\alpha}\bullet\right)(\bullet p_1 + p_2)$.

□

1.3 Caractère borné et périodique des solutions

Définition 1.9. Pour P, Q donnés l'équation de Hill (2) est dite

- instable lorsque toute solution non triviale est non bornée en $\pm\infty$.
- conditionnellement stable lorsqu'il existe une solution bornée non triviale.
- stable lorsque toute solution est bornée.

Proposition 1.10. L'équation (2) est

- instable si, et seulement si, $|D| > 2$
- stable si, et seulement si, $|D| < 2$ ou ($|D| = 2$ et $M = \pm I_2$).
- conditionnellement stable si, et seulement si, $|D| = 2$ et $M \neq I_2$.

Démonstration. On procède par disjonction de cas.

- Supposons que $|D| > 2$. Par le théorème 1.8, il existe ψ_1, ψ_2, p_1, p_2 tels que $\psi_1 = \exp(m_1\bullet)p_1$ et $\psi_2 = \exp(m_2\bullet)p_2$. Soit $\psi = \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$ où $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$.
  - Dans le cas où $D > 2$, on a $m_1 = -m_2$ donc nécessairement, ψ est non bornée.
  - Dans le cas où $D < -2$, on a $|\exp(m_1\bullet)| = \exp(\Re(m_1)\bullet)$ et $|\exp(m_2\bullet)| = \exp(\Re(m_2)\bullet) = \exp(-\Re(m_1)\bullet)$. De même, nécessairement, ψ est non bornée.
- Supposons que $|D| < 2$. Par le théorème 1.8, il existe un système fondamental de solutions formé de fonctions bornées (puisque leurs modules sont périodiques). Ainsi, toute solution est bornée en tant que combinaison linéaire de fonctions bornées.
- Supposons que $|D| = 2$. Si $M = \pm I_2$, alors on est dans le même cas que précédemment. Sinon, par le théorème 1.8, il existe un système fondamental de solution constitué d'une fonction périodique et d'une fonction non bornée en $\pm\infty$. Ainsi, il existe une solution bornée non triviale.

Par disjonction de cas, nous avons les équivalences souhaitées. □

Proposition 1.11. L'équation de Hill (2) possède une solution non triviale

1. α-périodique si, et seulement si, $D = 2$.
2. α-antipériodique (*i.e.* $f(x + \alpha) = -f(x)$ pour tout x) si, et seulement si, $D = -2$.

L'équation de Hill (2) a toutes ses solutions non triviales

3. α-périodique si, et seulement si, $D = 2$ et $M = I_2$
4. α-antipériodique (*i.e.* $f(x + \alpha) = -f(x)$ pour tout x) si, et seulement si, $D = -2$ et $M = -I_2$.

Démonstration. Le théorème 1.8 assure que

- $D = 2$ entraîne l'existence d'une solution α-périodique.
- $D = -2$ entraîne l'existence d'une solution α-antipériodique.

Si $|D| > 2$, alors la proposition 1.10 nous assure que les solutions sont non bornées donc non périodiques. Si $|D| < 2$, en reprenant le résultat de le théorème 1.8, on constate que $\psi_k(\bullet + \alpha) = \rho_k \psi_k(\bullet)$ donc si ψ est une solution α-périodique, il existe λ_1, λ_2 tel que $\psi = \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2$ et l'α-périodicité de ψ entraîne que $\lambda_1(1-\rho_1) = 0$ et $\lambda_2(1-\rho_2) = 0$. Puisque $\rho_1 + \rho_2 \in]-2, 2[$, nécessairement, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc $\psi = 0$. On fait de même si ψ était une solution α-antipériodique.

Ainsi, par disjonction de cas, on a les deux premières équivalences.

Pour les deux suivantes, déjà, remarquons que les deux sens réciproques sont obtenus grâce au théorème 1.8. Ensuite, on constate que si toutes les solutions sont périodiques, alors elles sont bornées donc l'équation (2) est stable. Par la proposition 1.10, nécessairement, $|D| < 2$ ou $|D| = 2$ et $M = \pm I_2$. Ainsi,

- si toutes les solutions sont α-périodiques, alors il en existe au moins une donc $D = 2$ et si $M \neq I_2$, on serait conditionnellement stable ce qui est exclu donc $M = I_2$ (M ne peut être égal à $-I_2$ puisque $\mathrm{tr}(M) = D$).
- de même pour l'α-antipériodicité, on obtient $D = -2$ et $M = -I_2$.

$\square$

Avec cette proposition, on en déduit le résultat suivant dont la preuve est laissée en annexe (voir section 4.1).

Proposition 1.12. Une solution de l'équation de Hill (2) 2α-périodique est α-périodique ou α-antipériodique. Si l'équation de Hill (2) possède une solution $k\alpha$-périodique où $k \in \mathbb{N}^*$ mais pas de solution α ou 2α-périodique, alors toute solution est $k\alpha$-périodique.

On conclut cette sous-section par un résultat général lorsque les fonctions P et Q dans 2 sont paires. La preuve est laissée en annexe (voir section 4.2).

Proposition 1.13. On suppose que dans l'équation de Hill (2), P et Q sont paires. Alors l'équation (2) possède une solution non triviale qui est

1. α-périodique paire si, et seulement si, $\varphi_1'(\alpha/2) = 0$.
2. α-périodique impaire si, et seulement si, $\varphi_2(\alpha/2) = 0$.
3. α-antipériodique paire si, et seulement si, $\varphi_1(\alpha/2) = 0$.
4. α-antipériodique impaire si, et seulement si, $\varphi_2'(\alpha/2) = 0$.

1.4 Cas complexe

On ajoute un cas supplémentaire pour le théorème 1.8 puisque dans cette section, on considère l'équation de (2) avec P, Q à valeurs complexes.

6. Dans le cas $D \notin \mathbb{R}$, comme $\rho_1\rho_2 = 1$, on sait déjà que ρ_1 et ρ_2 n'ont pas le même module (sinon, leur somme, qui vaut D, serait réelle). Soit donc $r \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0, 1\}$ tel que $\rho_1 = re^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$. On a $\rho_2 = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$. Posons $m = \dfrac{\ln(r) + i\theta}{\alpha}$ de sorte que $\exp(\alpha m) = re^{i\theta} = \rho_1$. On a $\rho_2 = \exp(-\alpha m)$. Par la proposition 1.5, il existe p_1, p_2 α-périodique tels que
$$\psi_1 = \exp(m\bullet)p_1 \ ; \ \psi_2 = \exp(-m\bullet)p_2.$$
Comme $r\cos(\theta) = \Re(\rho_1) \neq 0$ (sinon, $\rho_1 + \rho_2 = 0$), le module de ψ_1 ou de ψ_2 n'est pas borné donc on est comme dans le cas 1 du théorème 1.8.

On sait étendre ces résultats aux systèmes (voir 4.3).

2 Intervalles de stabilité et d'instabilité

On regarde l'équation différentielle de Hill
$$(Py')' + (\lambda s - Q)y = 0 \tag{4}$$
où Q, s sont des fonctions continues par morceaux α-périodique avec s minorée par $m > 0$ et P est continue de signe constant (disons positive) de dérivée continue par morceaux. Les applications P, Q et s sont alors bornées : on minore P par $p_0 > 0$, Q par $q_0 \in \mathbb{R}$. On munit cette équation de la condition aux limites
$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}(\alpha) = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}(0). \tag{5}$$
Les solutions du problème sont alors α-périodiques. L'objectif de cette section est d'étudier l'équation différentielle selon le paramètre λ. Pour signaler la dépendance des solutions en λ, on notera $x \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_1(x, \lambda) \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_2(x, \lambda) \in \mathbb{C}$.

Puisque l'équation dépend de manière analytique en λ, les solutions dépendent aussi de manière analytique en λ (voir par exemple [1], paragraphe 1.7).

Si $\varphi_1(\bullet,\lambda),\varphi_2(\bullet,\lambda)$ est un système fondamental de solutions à λ fixé, alors on note $D(\lambda)$ le discriminant de l'équation (4) et

$$D(\lambda)=\varphi_1(\alpha,\lambda)+\varphi_2'(\alpha,\lambda)$$

et D est donc analytique en λ.

2.1 Périodicité, antipériodicité et valeurs propres

On définit la norme L^2-per par :

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}}=\int_0^\alpha |f(x)|^2 s(x)\mathrm{d}x$$

pour toute fonction f mesurable sur $\mathbb{R}$ α-périodique.

On note $\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}([0,\alpha])$ le quotient par l'égalité presque partout de l'ensemble des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure $s\mathrm{d}\lambda$ sur $[0,\alpha]$ qui sont α-périodiques.

On note

$$H^p_{\mathrm{per}}([0,\alpha])=\{u\in \mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}([0,\alpha]):\forall k\in [\![1,p]\!], u^{(k)}\in \mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}([0,\alpha])\}$$

muni de la norme $\|\bullet\|_{H^p_{\mathrm{per}}}$ défini par

$$\|f\|^2_{H^p_{\mathrm{per}}}=\sum_{k=0}^p \|f^{(i)}\|_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}}.$$

On définit l'opérateur $\mathcal{L}$ par

$$\forall x\in]0,\alpha[, \mathcal{L}y(x)=\frac{-1}{s(x)}\left[(Py')'-Qy\right](x)$$

et son domaine est $H^2_{\mathrm{per}}([0,\alpha])$. On note J_0 la forme quadratique associée à $\mathcal{L}$ sur le domaine $D(\mathcal{L})$.

Proposition 2.1. $(\mathcal{L},H^2_{\mathrm{per}}([0,\alpha]))$ est autoadjointe à résolvante compacte.

Démonstration.

- On a :

$$\begin{aligned}\forall u,v\in H^2_{\mathrm{per}}([0,\alpha],s\mathrm{d}\lambda),(\mathcal{L}u,v)&=\int_0^\alpha \frac{-1}{s(x)}[(Pu')'-Qu](x)\overline{v(x)}s(x)\mathrm{d}x\\&=-\int_0^\alpha (Pu')'(x)\overline{v(x)}\mathrm{d}x+\int_0^\alpha Q(x)u(x)\overline{v}(x)\mathrm{d}x\\&=-\left[u'(x)P(x)\overline{v(x)}\right]_0^\alpha+\int_0^\alpha u'(x)P(x)\overline{v'(x)}\mathrm{d}x+\int_0^\alpha Q(x)\overline{v(x)}u(x)\mathrm{d}x\\&=\left[u(x)P(x)\overline{v'(x)}\right]_0^\alpha-\int_0^\alpha u(x)(P\overline{v'})'(x)\mathrm{d}x+\int_0^\alpha Q(x)\overline{v(x)}u(x)\mathrm{d}x\\&=(u,\mathcal{L}v)\end{aligned}$$

  puisque les crochets d'intégrations sont nuls par périodicité. L'opérateur $\mathcal{L}$ est donc symétrique.

- Le domaine de l'adjoint est

$$D(\mathcal{L}^*)=\{v\in \mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}([0,\alpha]):\exists f\in \mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}([0,\alpha]),\forall u\in H^2_{\mathrm{per}}([0,\alpha]),(\mathcal{L}u,v)=(u,f)\}.$$

  Soit donc $v\in D(\mathcal{L}^*)$. Alors $\forall u\in H^2_{\mathrm{per}}([0,\alpha])$,

$$(\mathcal{L}u,v)=(u,f)\Longleftrightarrow (u,\mathcal{L}v)=(u,f)$$

  au sens des distributions. Ainsi, $\mathcal{L}v=f$ dans $\mathcal{D}'$ mais comme f est dans $\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}$, on a $\mathcal{L}v\in \mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}$. Ainsi, par régularité elliptique, on a $v\in H^2([0,\alpha])$. On a bien

$$D(\mathcal{L}^*)\subset D(\mathcal{L})$$

  donc $\mathcal{L}$ est bien autoadjointe.

- Soit $y \in H^2_{\text{per}}([0,\alpha])$. Alors

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}y, y) &= -\int_0^\alpha (Py')'(x)\overline{y(x)}\mathrm{d}x + \int_0^\alpha Q(x)|y|^2(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\alpha P(x)|y'(x)|^2\mathrm{d}x + \int_0^\alpha Q(x)|y|^2(x)\mathrm{d}x \geq p_0\|y'\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}} + q_0\|y\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}} \\ &\geq \left(\frac{1}{C_P}p_0 + q_0\right)\|y\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}\end{aligned}$$

  par l'inégalité de Poincaré. Ainsi, $\mathcal{L}$ est bornée inférieurement donc son spectre est minoré par une constante $c > 0$.
- On sait de plus que J_0 est alors bornée inférieurement et fermable. On note J sa fermeture et son domaine contient $H^1_{\text{per}}([0,\alpha])$ donc contient en particulier l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions f continues sur $[0,\alpha]$ avec f' continue par morceaux sur $[0,\alpha]$.
- On considère alors $\lambda < q_0$ dans la suite (donc $\lambda < c$). Alors $\mathcal{L} - \lambda$ est bijective continue de $H^2_{\text{per}}([0,\alpha])$ dans $\mathrm{L}^2_{\text{per}}([0,\alpha])$ et sa réciproque l'est de $\mathrm{L}^2_{\text{per}}([0,\alpha])$ dans $\mathrm{L}^2_{\text{per}}([0,\alpha])$.
- Soit $f \in \mathrm{L}^2_{\text{per}}([0,\alpha])$ et $y \in H^2_{\text{per}}([0,\alpha])$ tel que $(\mathcal{L}-\lambda)y = f$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha P(x)|y'(x)|^2 + Q(x)|y(x)|^2\mathrm{d}x = (\mathcal{L}y, y) = (f + \lambda y, y) &= \int_0^\alpha sf\overline{y}\mathrm{d}x + \lambda\|y\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}} \\ &\leq \|s\|_\infty\|f\|_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}\|y\|_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}} + \lambda\|y\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}.\end{aligned}$$

  On a déjà obtenu

$$p_0\|y'\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}} + q_0\|y\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}} \leq \int_0^\alpha P(x)|y'(x)|^2 + Q(x)|y(x)|^2\mathrm{d}x.$$

  On en déduit

$$p_0\|y'\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}} \leq \|s\|_\infty\|f\|_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}\|y\|_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}} + (\lambda - q_0)\|y\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}} \leq \|s\|_\infty\|f\|_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}\|y\|_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}$$

  puisque $\lambda - q_0 \leq 0$. Par l'inégalité de Poincaré,

$$p_0\|y'\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}} \leq C_P\|s\|_\infty\|f\|_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}\|y'\|_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}$$

  donc au final,

$$\|y'\|_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}} \leq \frac{C_P\|s\|_\infty}{p_0}\|f\|_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}.$$

  Encore par l'inégalité de Poincaré, on en déduit que

$$\|y\|^2_{H^1} \leq (C_P^2 + 1)\|y'\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}} \leq (C_P^2 + 1)\left(\frac{C_P\|s\|_\infty}{p_0}\right)^2\|f\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}$$

- Ainsi, $(\mathcal{L}-\lambda)^{-1}$ est continue de $\mathrm{L}^2_{\text{per}}([0,\alpha])$ dans $H^1_{\text{per}}([0,\alpha])$ et par le théorème de Rellich, on a l'injection compacte $H^1([0,\alpha])$ dans $\mathrm{L}^2([0,\alpha])$. Finalement, $\mathcal{L}$ est autoadjointe à résolvante compacte.

□

Il existe donc $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$ qui compose le spectre de $\mathcal{L}$ où $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On peut alors trouver une base hilbertienne réelle de fonctions propres sur $[0,\alpha]$ pour le produit scalaire $\langle\bullet,\bullet\rangle_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}$ que l'on note $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On étend ces fonctions sur tout $\mathbb{R}$ par périodicité. On peut faire le même travail pour le problème antipériodique : on remplace la condition (5) par

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}(\alpha) = -\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}(0)$$

et en adaptant les notations, on montre que (4) est un problème autoadjoint et qu'il existe une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \cdots$ qui compose le spectre de l'opérateur $\mathcal{L}$ (sur un autre domaine pour avoir la antipériodicité) où $\mu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et une base hilbertienne réelle de fonctions propres sur $[0,\alpha]$ pour le produit scalaire $\langle\bullet,\bullet\rangle_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}$ que l'on note $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On étend encore ces fonctions sur tout $\mathbb{R}$ par périodicité.

Puisque les $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne, on peut considérer la décomposition de Fourier vis-à-vis de cette base. Notons $\mathcal{F}_\alpha$ désigne les fonctions de $\mathcal{F}$ satisfaisant (5). Alors en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n : f \in \mathcal{F}_\alpha \mapsto \int_0^\alpha f(x)\psi_n(x)s(x)\mathrm{d}x = \langle f, \psi_n\rangle_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}$, on a

$$\forall f \in \mathcal{F}_\alpha, f = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(f)\psi_n.$$

En particulier, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, J(f, \psi_n) = \lambda_n c_n(f).$$
On en déduit que
$$(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est orthonormale pour } J \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, J(\psi_n, \psi_n) = \lambda_n. \tag{6}$$
On a l'inégalité de Bessel pour la famille orthogonale $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la preuve est laissée en annexe (voir section 4.4).

Proposition 2.2. Soit $f \in \mathcal{F}_\alpha$. Alors
$$J(f, f) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n |c_n(f)|^2.$$
On rappelle le résultat sur les quotients de Rayleigh.

Proposition 2.3.
$$\forall k \in \mathbb{N}, \lambda_k = \min_{\substack{E \subset H^1_{\text{per}}([0,\alpha]) \\ \dim(E)=k}} \max_{f\in\mathcal{L}\setminus\{0\}} \frac{J(f,f)}{\|f\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}} = \min_{\substack{f\in H^1_{\text{per}}([0,\alpha])\setminus\{0\} \\ f\perp \mathrm{Vect}(\psi_1,\cdots,\psi_{k-1})}} \frac{J(f,f)}{\|f\|^2_{\mathrm{L}^2_{\text{per}}}}.$$
De plus, le minimum est atteint en f si, et seulement si, f est une fonction propre pour λ_k.

Proposition 2.4. On considère les équations
$$(Py')' + (\lambda s - Q)y = 0 \tag{7}$$
et
$$(P_1 y')' + (\lambda s_1 - Q_1)y = 0 \tag{8}$$
avec $P_1 \geq P, Q_1 \geq Q$ et $s_1 \leq s$. On note $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les valeurs propres pour (7) et $(\lambda_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ les valeurs propres pour (8).

1. $s_1 = s$ p.p. entraîne que $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_{1,n} = \lambda_n$
2. sinon, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_n \geq 0$, alors on a $\lambda_{1,n} \geq \lambda_n$.

Démonstration. Dans cette preuve, on note $\|f\|_{\mathrm{L}^2}$ la norme L^2 sur $[0, \alpha]$ pour la mesure $s\mathrm{d}\lambda$ et $\|f\|_{\mathrm{L}^2_1}$ la norme L^2 sur $[0, \alpha]$ pour la mesure $s_1\mathrm{d}\lambda$. On note $(\psi_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ les fonctions propres de (8) et
$$J_1 : (f, g) \in \mathcal{F}^2 \mapsto \int_0^\alpha P_1(x) f'(x)\overline{g'(x)} + Q_1(x) f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$
On a d'abord
$$\forall f \in \mathcal{F}, J_1(f, f) \geq J(f, f).$$

- Traitons le cas $n = 0$. Soit $f = \psi_{1,0}$. Alors
$$\lambda_{1,0} = J_1(\psi_{1,0}, \psi_{1,0}) \geq J(\psi_{1,0}, \psi_{1,0}) \geq \lambda_0 \|\psi_{1,0}\|^2_{\mathrm{L}^2}$$
et dans l'hypothèse du premier cas, on a $\|\Psi_{1,0}\|_{\mathrm{L}^2} = \|\Psi_{1,0}\|_{\mathrm{L}^2_1} = 1$ donc $\lambda_{1,0} \geq \lambda_0$, dans l'hypothèse du deuxième cas, $\|\Psi_{1,0}\|_{\mathrm{L}^2} > \|\Psi_{1,0}\|_{\mathrm{L}^2_1}$ donc $\lambda_{1,n} \geq \lambda_0$ si $\lambda_0 \geq 0$.
- Traitons le cas $n = 1$. Soit $f = c_0\psi_{1,0} + c_1\psi_{1,1}$ tel que $\langle f, \psi_0\rangle_{\mathrm{L}^2} = 0$ et $(c_0, c_1) \neq (0, 0)$. C'est possible puisque ${\psi_0}^\perp \cap \mathrm{Vect}(\psi_{1,0}, \psi_{1,1})$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (où $\perp$ désigne l'orthogonal pour $\mathrm{L}^2_{\text{per}}([0, \alpha])$). On normalise f pour la norme $\|\bullet\|_{\mathrm{L}^2_1}$.
Alors comme dans (6), $(\psi_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale pour J_1 et $\forall n \in \mathbb{N}, J_1(\psi_{1,n}, \psi_{1,n}) = \lambda_{1,n}$. Ainsi,
$$J_1(f, f) = J_1(c_0\psi_{1,0} + c_1\psi_{1,1}, c_0\psi_{1,0} + c_1\psi_{1,1}) = c_0^2\lambda_{1,0} + c_1^2\lambda_{1,1}$$
par le théorème de Pythagore. Comme $\lambda_{1,0} \leq \lambda_{1,1}$ on a
$$J_1(f, f) \leq \lambda_{1,1}(c_0^2 + c_1^2) = \lambda_{1,1}\|f\|_{\mathrm{L}^2_1} = \lambda_{1,1}.$$
Par la proposition (2.2), et comme $\langle f, \psi_0\rangle_{\mathrm{L}^2_{per}} = 0$,
$$J(f, f) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \left|\langle f, \psi_k\rangle_{\mathrm{L}^2_{per}}\right|^2 \geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle f, \psi_k\rangle_{\mathrm{L}^2_{per}}|^2 = \lambda_1 \int_0^\alpha |f(x)|^2 s(x)\mathrm{d}x$$
par la formule de Parseval. Ainsi,
$$\lambda_{1,1} \geq \lambda_1 \int_0^\alpha |f(x)|^2 s(x)\mathrm{d}x.$$
On en déduit le cas $n = 1$ comme dans le cas $n = 0$.

- Traitons le cas général. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Soit $f \in (\mathrm{Vect}(\psi_0, \cdots, \psi_{n-1}))^{\perp} \cap \mathrm{Vect}(\psi_{1,0}, \cdots, \psi_{1,n})$. On normalise f pour la norme $\|\bullet\|_{\mathrm{L}^2_1}$. Notons $c_0, \cdots, c_n$ tel que
$$f = \sum_{k=0}^{n} c_k \psi_{1,k}.$$
On raisonne comme dans le cas $n = 1$. On a
$$J_1(f, f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{1,k} c_k^2 \leq \lambda_{1,n} \sum_{k=0}^{n} c_k^2 = \lambda_{1,n}$$
et
$$J(f, f) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k |\langle f, \psi_k \rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}}|^2 = \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda_k |\langle f, \psi_k \rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}}|^2 \geq \lambda_n \sum_{k=n}^{+\infty} |\langle f, \psi_k \rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}}|^2 = \lambda_n \int_0^{\alpha} |f(x)|^2 s(x) \mathrm{d}x.$$
On conclut donc
$$\lambda_{1,n} \geq \lambda_n \int_0^{\alpha} |f(x)|^2 s(x) \mathrm{d}x$$
et on conclut comme dans le cas $n = 0$.

$\square$

Concluons cette sous-section par deux exemples explicites où l'on calcule les valeurs propres du problème périodique et antipériodique. Le détails des calculs est en annexe (voir section 4.5).

Cas particulier : $P = s = 1$ et $Q = 0$ On considère donc l'équation $y'' + \lambda y = 0$. Alors $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \dfrac{4\lfloor n/2 \rfloor^2 \pi^2}{\alpha^2}$ et de même pour les $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mu_n = \dfrac{(2\lfloor n/2 \rfloor + 1)^2 \pi^2}{\alpha^2}$ (voir annexe section 4.5.1 pour les calculs.)

On réalise le calculs des valeurs propres pour un exemple un peu moins élémentaire en annexe (voir section 4.5.2).

2.2 La fonction D

Théorème 2.5 (Valeurs propres embrassées)**.** *On note $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les valeurs propres du problème périodique associé à (4) et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les valeurs propres du problème antipériodique associé à (4). Alors*

1. *les valeurs propres sont embrassées : on a*
$$\lambda_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_2 \leq \mu_3 < \lambda_3 \leq \cdots$$
2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, D décroît strictement sur $[\lambda_{2k}, \mu_{2k}]$.*
3. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, D croît strictement sur $[\mu_{2k+1}, \lambda_{2k+1}]$*
4. *Pour tout $\lambda \in]-\infty, \lambda_0[\cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]\lambda_{2k+1}, \lambda_{2k+2}[$, on a $D(\lambda) > 2$.*
5. *Pour tout $\lambda \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]\mu_{2k}, \mu_{2k+1}[$, $D(\lambda) < -2$.*

On a besoin de lemmes pour alléger la preuve. Dans toute cette sous-section, on considère $\varphi_1(\bullet, \lambda), \varphi_2(\bullet, \lambda)$ le système fondamental de solutions tel que $W(\varphi_1, \varphi_2)(0) = I_2$. On a alors $D(\lambda) = \varphi_1(\alpha, \lambda) + \varphi_2'(\alpha, \lambda)$. Les preuves des trois lemmes suivant sont en annexe (voir section 4.6).

Lemme 2.6. Il existe $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \lambda \leq \Lambda$, $D(\lambda) > 2$.

Lemme 2.7. $D'(\lambda) \neq 0$ lorsque λ vérifie $|D(\lambda)| < 2$.

Lemme 2.8. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $D(\lambda_n) = 2$, alors $D'(\lambda_n) = 0 \iff \psi_2 = \psi_1' = 0$ où l'on note $\psi_1 = \varphi_1(\alpha, \lambda_n), \psi_1' = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\alpha, \lambda_n), \psi_2 = \varphi_2(\alpha, \lambda_n)$ et $\psi_2' = \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, \lambda_n)$. Dans le cas où $D'(\lambda_n) = 0$, on a $D''(\lambda_n) < 0$.

On a de même pour μ_n tel que $D(\mu_n) = -2$ avec la condition cette fois que $D'(\mu_n) = 0 \Longrightarrow D''(\mu_n) < 0$.

Ainsi, les zéros de $D \pm 2$ sont simples ou d'ordre 2. De plus, si λ est un zéro d'ordre 2 de $D + 2$ (resp. $D - 2$), alors c'est un maximiseur (resp. minimiseur). Passons maintenant à la preuve du théorème 2.5.

Démonstration du théorème 2.5

- Soit un Λ du lemme 2.6. Alors pour tout $\lambda < \Lambda, D(\lambda) > 2$. On en déduit que $\lambda_0 > \Lambda$. La fonction D reste strictement supérieur à 2 au-delà de Λ jusqu'à atteindre la valeur 2. En ce réel, on est valeur propre donc par minimalité, c'est λ_0. Ainsi, $\forall \lambda < \lambda_0, D(\lambda) > 2$.
  Supposons par l'absurde que $D'(\lambda_0) = 0$. Alors $D''(\lambda_0) < 0$ par le lemme 2.8 donc λ_0 est un maximum local. Or, dans un voisinage à gauche de λ_0, on a $D > 2$ ce qui est absurde.
  Ainsi, $D'(\lambda_0) \neq 0$ et $D < 2$ dans un voisinage à droite de λ_0 et on a de plus $D'(\lambda_0) < 0$.
- Par le lemme 2.7, $D'(\lambda) \neq 0$ tant que $\lambda > \lambda_0$ et $D(\lambda) < 2$. Comme il y a une infinité de zéros de $D + 2$, on a $D'(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in]\lambda_0, \mu_0[$. Comme $D'(\lambda_0) < 0$, on en déduit que $\forall \lambda \in]\lambda_0, \mu_0[, D'(\lambda) < 0$ donc D décroît de λ_0 vers μ_0.
-
  - Si μ_0 est simple, alors D décroît au-delà de μ_0. Comme il y a une infinité de zéros de $D + 2$, nécessairement, $D < -2$ sur $]\mu_0, \mu_1[$ et alors μ_1 est nécessairement simple en reprenant l'argument du point précédent avec λ_0.
  - Si μ_0 est double, il s'agit de montrer que $\mu_0 = \mu_1$ (μ_0 est double dans le spectre). Dans ce cas, par le lemme 2.8, on a $\psi_2 = \psi_1' = 0$ donc la matrice de monodromie est l'identité : on est donc dans le cas ($5a$) de le théorème 1.8 ce qui montre effectivement que μ_0 est double dans le spectre. On en déduit donc que $D'(\mu_0) = 0$ mais alors par le lemme 2.8, on a $D''(\mu_0) > 0$ donc D croît localement à droite de μ_0.
- On peut donc répéter l'argument du point précédent pour arriver jusqu'à λ_2 et ainsi de suite.

□

2.3 Équation de Mathieu

On étudie le cas particulier suivant :

$$y''(x) + (\lambda - 2q\cos(2x))y(x) = 0 \ ; \ x \in \mathbb{R} \tag{9}$$

où λ, q sont des réels. La preuve suivante est laissée en annexe (voir section 4.7).

Proposition 2.9. Il n'y a pas de couples $(\lambda, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tels que toutes les solutions de (9) sont π-périodiques ou π-antipériodiques.

3 Intégrale directe d'espaces de Hilbert

On introduit la notion d'intégrale directe en suivant [4] puis on suit assez vite, et de près, [5].

3.1 Généralités

Notation 3.1. $(\mathcal{H}', (\bullet, \bullet)_{\mathcal{H}'})$ désigne un espace de Hilbert. Dans la suite, les espaces de Hilbert sont séparables.

Notation 3.2. (X, d) désigne un espace métrique complet. Le triplet $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ désigne un espace borélien mesuré où μ est une mesure positive σ-finie.

Notation 3.3. On note $\mathcal{B}(\mathcal{H}')$ sa tribu borélienne engendrée par la topologie forte. On note $\mathrm{Bor}(X; \mathcal{H}')$ l'ensemble des fonctions boréliennes de $(X, \mathcal{B}(X))$ dans $(\mathcal{H}', \mathcal{B}(\mathcal{H}'))$.

Proposition 3.4. La structure borélienne de $\mathcal{H}'$ obtenue à partir de la topologie faible coïncide avec celle obtenue à partir de la topologie forte.

Démonstration. Cela vient du résultat suivant. Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable dense de $B(0,1)_{\mathcal{H}'}$, on a l'égalité :

$$\forall x_0 \in \mathcal{H}, \forall \varepsilon > 0, \{x \in \mathcal{H}' : \|x - x_0\|_{\mathcal{H}'} < \varepsilon\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \{x \in \mathcal{H}' : |(x - x_0, y_j)_{\mathcal{H}'}| < \varepsilon\}.$$

□

Proposition 3.5.

1. Soit ψ une application de X dans $\mathcal{H}'$. Alors $\psi \in \mathrm{Bor}(X; \mathcal{H}') \iff \forall u \in \mathcal{H}', (\psi(\bullet), u)_{\mathcal{H}'} \in \mathrm{Bor}(X)$.
2. Soit $\varphi, \psi \in \mathrm{Bor}(X; \mathcal{H}')$. Alors $x \in X \mapsto (\varphi(x), \psi(x))_{\mathcal{H}} \in \mathbb{C} \in \mathrm{Bor}(X)$.

Démonstration.

1. Soit $\psi \in \mathrm{Bor}(X;\mathcal{H}')$. Soit $u \in \mathcal{H}'$. Soit $f_u : v \in \mathcal{H}' \mapsto (v,u)_{\mathcal{H}'}$. Alors f_u est borélienne par continuité du produit scalaire. Ainsi, $f_u \circ \psi$ l'est aussi et c'est ce qu'on voulait. Réciproquement, par la proposition 3.4, il suffit de montrer que pour tous $\varepsilon > 0$ et $u \in \mathcal{H}'$, l'ensemble
$$\psi^{-1}(\{v \in \mathcal{H}' : |(v,u)_{\mathcal{H}'}| < \varepsilon\}) = \{x \in X : |(\psi(x),u)_{\mathcal{H}'}| < \varepsilon\}$$
est un borélien de X. Puisque $x \in X \mapsto (\psi(x),u)_{\mathcal{H}'}$ est une fonction borélienne, son module aussi donc finalement, $\psi \in \mathrm{Bor}(X;\mathcal{H}')$.
2. Soit $\varphi, \psi \in \mathrm{Bor}(X;\mathcal{H}')$. Comme $\mathcal{H}'$ est un Hilbert séparable, soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Alors
$$x \in X \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} (\varphi(x),e_n)_{\mathcal{H}'}\overline{(\psi(x),e_n)_{\mathcal{H}'}}$$
est une limite simple d'une somme de produits d'applications qui sont boréliennes par le point précédent : c'est donc une application borélienne et c'est ce qu'on voulait.

□

Définition 3.6. On note
$$\mathcal{L}^p(X,\mu;\mathcal{H}') = \left\{ f \in \mathrm{Bor}(X,\mathcal{H}') : \int_X \|f(x)\|^p_{\mathcal{H}'}\mathrm{d}\mu(x) < +\infty \right\}$$
et on munit $\mathcal{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}')$ du semi-produit scalaire $(\bullet,\bullet)$ définit par
$$\forall f,g \in \mathcal{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}'), (f,g) = \int_X (f(x),g(x))_{\mathcal{H}'}\mathrm{d}\mu(x).$$

Définition 3.7. On dit que $x \in X \mapsto A(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}')$ est μ-mesurable lorsque pour tout $(u,v) \in \mathcal{H}'$, $x \in X \mapsto (u, A(x)v)_{\mathcal{H}'}$ est μ-mesurable : l'ensemble de ces fonctions est alors noté $\mathrm{Mes}(X,\mathcal{L}(\mathcal{H}'))$.

On définit alors
$$\mathcal{L}^p(X,\mu;\mathcal{L}(\mathcal{H}')) := \left\{ f \in \mathrm{Mes}(X,\mathcal{L}(\mathcal{H}')) : \int_X \|f(x)\|^p_{\mathcal{L}(\mathcal{H}')}\mathrm{d}\mu(x) < +\infty \right\}$$
pour $p \in [1,+\infty[$. Pour $p = +\infty$,
$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu;\mathcal{L}(\mathcal{H}')) := \left\{ f \in \mathrm{Mes}(X,\mathcal{L}(\mathcal{H}')) : \sup_{x\in X} \|f(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}')} < +\infty \right\}$$

Définition 3.8. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Pour $\mathcal{B}$ égal à $\mathcal{H}'$ ou $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$, on note $\mathrm{L}^p(X,\mu;\mathcal{B})$ le quotienté de $\mathcal{L}^p(X,\mu;\mathcal{B})$ par la relation d'équivalence « égalité μ-presque partout ».

Définition 3.9. On note $\|f\|_{p,\mathcal{H}'}$ la quantité
$$\left(\int_X \|f(x)\|^p_{\mathcal{H}'}\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}$$
pour $1 \leq p < +\infty$ et
$$\|f\|_{\infty,\mathcal{H}'} = \mu - \underset{x\in X}{\text{ess.sup}}\|f(x)\|_{\mathcal{H}'}$$

On note dans la suite $\|f\|^2 = (f,f)$ pour $f \in \mathcal{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}')$.

Théorème 3.10. *Pour tout $p \in [1,+\infty]$, $(\mathrm{L}^p(X,\mu;\mathcal{H}'), \|\bullet\|_{p,\mathcal{H}'})$ est un espace de Banach.*

Démonstration. On montre facilement que $(\mathrm{L}^p(X,\mu;\mathcal{H}'), \|\bullet\|_{p,\mathcal{H}'})$ est un espace vectoriel normé pour $p \in [1,+\infty]$. On fait la preuve pour $p = 2$. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathrm{L}^2(X,\mu,\mathcal{H}')$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n un représentant de F_n dans $\mathcal{L}^2(X,\mu,\mathcal{H}')$. On souhaite construire une extraction φ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq \varphi(n), \|f_p - f_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Par hypothèse, on a la propriété de Cauchy
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, , \forall p,q \geq N_\varepsilon, \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon. \tag{10}$$

1. On applique (10) pour $\varepsilon = 1$. Il existe $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall r \geq \varphi(0), \|f_r - f_{\varphi(0)}\| \leq 1$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons construit $\varphi(0), \cdots, \varphi(k)$. On applique (10) pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2^{k+1}}$. Il existe alors $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall p, q \geq N_\varepsilon, \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon.$$
Posons $\varphi(k+1) = \max(N_\varepsilon, \varphi(k))$. On a alors en particulier
$$\forall p \geq \varphi(k+1), \|f_p - f_{\varphi(n+1)}\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$
3. On a bien construit une telle suite.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $h_k : x \in X \mapsto \|f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)\|_{\mathcal{H}'} \in \mathbb{R}$. Soit $g_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} h_k$. Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Puisque $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une série à terme général positif, on peut écrire
$$g = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k.$$
Par l'inégalité triangulaire pour $\|\bullet\|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|g_n\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} h_k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|h_k\| = \sum_{k=0}^{n} \|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 2.$$
Ainsi, par le lemme de Fatou,
$$\|g\|^2 = \int_X \|g(x)\|^2_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \liminf_{n\to+\infty} \|g_n(x)\|^2_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}\mu(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X \|g_n(x)\|^2_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}\mu(x) = \liminf_{n\to+\infty} \|g_n\|^2 \leq 4.$$
Ainsi, $x \in X \mapsto \|g(x)\|^2_{\mathcal{H}'} \in \overline{\mathbb{R}}$ est intégrable donc finie presque partout et g est aussi finie presque partout. Soit $A = \{x \in X : g(x) < +\infty\}$. Alors pour tout $x \in A$, la série de fonctions de X dans $\mathcal{H}'$ donnée par
$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}$$
converge absolument donc converge puisque $\mathcal{H}'$ est complet. Soit alors f la fonction
$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & \mathcal{H}' \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f_{\varphi(0)}(x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)})(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$
f est bien mesurable sur X et pour tout $x \in A$, par télescopage $f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_{\varphi(k)}$.

Montrons maintenant que $f \in \mathcal{L}^2(X, \mu, \mathcal{H}')$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \geq N_\varepsilon$. Alors par (10),
$$\forall n, p \geq N_\varepsilon, \|f_n - f_p\|^2 = \int_X \|f_n(x) - f_p(x)\|^2_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}\mu(x) \leq \varepsilon^2.$$
Encore par le lemme de Fatou,
$$\int_X \|f(x) - f_n(x)\|_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{k\to+\infty} \|f_{\varphi(k)} - f_n(x)\|_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}\mu(x) \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_X \|f_{\varphi(k)}(x) - f_n(x)\|_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}\mu(x) \leq \varepsilon^2.$$
On en déduit donc que $f - f_n \in \mathcal{L}^2(X, \mu, \mathcal{H}')$. En particulier, $f = f_n + (f - f_n) \in \mathcal{L}^2(X, \mu, \mathcal{H}')$. On a de plus l'estimation
$$\forall n \geq N_\varepsilon, \|f_n - f\| \leq \varepsilon$$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$. On note $F \in \mathrm{L}^2(X, \mu, \mathcal{H}')$ la classe d'équivalence de f. On conclut alors
$$\lim_{n\to+\infty} \|F_n - F\| = \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0.$$
Ainsi, la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ce qui montre la complétude de $\mathrm{L}^2(X, \mu, \mathcal{H}')$.

□

Notation 3.11. Dans la suite, on note $\displaystyle\int_X^{\oplus} \mathcal{H}' \mathrm{d}\mu := \mathrm{L}^2(X, \mu; \mathcal{H}')$ intégrale directe de $\mathcal{H}'$ sur X. L'espace $\displaystyle\int_X^{\oplus} \mathcal{H}' \mathrm{d}\mu$ est donc un espace de Hilbert.

3.2 Opérateurs bornés

Définition 3.12. Soit $\mathcal{A}$ un opérateur sur $\mathcal{H} = \int_X^{\oplus} \mathcal{H}'\mathrm{d}\mu$. L'opérateur $\mathcal{A}$ est dit décomposable en intégrale directe lorsque A agit fibre par fibre ; plus précisément, lorsqu'il existe une fonction $A \in \mathrm{L}^\infty(X, \mu; \mathcal{L}(\mathcal{H}'))$ vérifiant

$$\forall \mu - \text{pp } x \in X, \forall \psi \in \mathcal{H}, (\mathcal{A}\psi)(x) = A(x)\psi(x). \tag{11}$$

On note alors

$$\int_X^{\oplus} A(x)\mathrm{d}\mu(x) = \mathcal{A}.$$

On dit que les $A(x)$ sont les fibres de $\mathcal{A}$.

Propriété 3.13. Soit $A, B \in \mathrm{L}^\infty(X, \mu; \mathcal{L}(\mathcal{H}'))$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors

1. $\displaystyle\int_X^{\oplus} (\lambda A + \mu B)(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lambda \int_X^{\oplus} A(x)\mathrm{d}\mu(x) + \mu \int_X^{\oplus} B(x)\mathrm{d}\mu(x)$.
2. Si pour presque tout $x \in X$, $A(x)$ est inversible dans $\mathcal{H}'$, alors $\displaystyle\int_X^{\oplus} A(x)\mathrm{d}\mu(x)$ l'est aussi et on a
$$\left(\int_X^{\oplus} A(x)\mathrm{d}\mu(x)\right)^{-1} = \int_X^{\oplus} (A(x))^{-1}\mathrm{d}\mu(x).$$
3. $\displaystyle\left(\int_X^{\oplus} A(x)\mathrm{d}\mu(x)\right)^n = \int_X^{\oplus} A^n(x)\mathrm{d}\mu(x)$

Démonstration.

1. Soit $\psi \in \mathcal{H}$. On a $\lambda A + \mu B \in \mathrm{L}^\infty(X, \mu; \mathcal{L}(\mathcal{H}'))$ donc on peut définir son intégrale directe. On a alors
$$\begin{aligned} \forall x \in X, \left(\int_X^{\oplus} (\lambda A + \mu B)(x)\mathrm{d}\mu(x)\right)\psi(x) &= (\lambda A(x) + \mu B(x))\psi(x) \\ &= \lambda A(x)\psi(x) + \mu B(x)\psi(x) \\ &= \left(\lambda \int_X^{\oplus} A(x)\mathrm{d}\mu(x) + \mu \int_X^{\oplus} B(x)\mathrm{d}\mu(x)\right)\psi(x) \end{aligned}$$
2. Notons $\mathcal{A} = \displaystyle\int_X^{\oplus} A(x)\mathrm{d}\mu(x)$. Soit $v \in \mathcal{H}$ et $u = \mathcal{A}^{-1}v$. Alors pour presque tout $x \in X$, on a $A(x)u(x) = v(x)$ donc $u(x) = (A(x))^{-1}v(x)$ donc $u = \displaystyle\int_X^{\oplus} (A(x))^{-1}\mathrm{d}\mu(x)$. Ainsi, $\mathcal{A}^{-1}$ et $\displaystyle\int_X^{\oplus} (A(x))^{-1}\mathrm{d}\mu(x)$ coïncident.
3. Soit $\psi \in \mathcal{H}$. Alors par récurrence immédiate, $\forall x \in X, \mathcal{A}^n\psi(x) = (A(x))^n\psi(x)$. Comme A^n reste dans $\mathrm{L}^\infty(X, \mu; \mathcal{L}(\mathcal{H}'))$, on a $(A(x))^n\psi(x) = \displaystyle\int_X^{\oplus} (A(x))^n\mathrm{d}\mu(x)\psi(x)$ ce qui conclut.

□

Remarque 3.14. Pour le deuxième point, on n'a utilisé que le caractère borné de A^{-1}. On verra ci-dessous l'intégrale directe pour les opérateurs non bornés et ce résultat tient donc encore.

Proposition 3.15. Si $A \in \mathrm{L}^\infty(X, \mu; \mathcal{L}(\mathcal{H}'))$, alors il existe un unique opérateur $\mathcal{A}$ sur $\displaystyle\int_X^{\oplus} \mathcal{H}'\mathrm{d}\mu$ vérifiant (11). De plus,

$$\|\mathcal{A}\|_{op} = \mu - \underset{x \in X}{\text{ess.sup}} \|A(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}')}$$

où $\|\mathcal{A}\|_{op}$ désigne la norme d'opérateur de $\mathcal{A}$.

Démonstration. Si j'ai deux tels opérateurs, ils coïncident μ-presque partout donc sont égaux sur $\displaystyle\int_X^{\oplus} \mathcal{H}'\mathrm{d}\mu$. Pour l'égalité des normes, on procède par double inégalité.

- Soit $v \in \mathrm{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}')$. Comme $\mathcal{A}$ est décomposable de fibres $A(x)$, on a

$$\|\mathcal{A}v\|^2 = \int_X \|(\mathcal{A}v)(x)\|_{\mathcal{H}'}^2 \mathrm{d}\mu(x)$$

donc

$$\|\mathcal{A}v\|^2 = \int_X \|A(x)v(x)\|_{\mathcal{H}'}^2 \mathrm{d}\mu(x) \leq \int_X \|A(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}')}^2 \|v(x)\|_{\mathcal{H}'}^2 \mathrm{d}\mu(x) \leq \mu - \underset{x\in X}{\text{ess.sup}} \|A(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}')}^2 \|v\|^2$$

donc $\|\mathcal{A}\|_{op} \leq \mu - \underset{x\in X}{\text{ess.sup}} \|A(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}')}$.

- Soit $\omega \in \mathcal{H}$ tel que $\|\omega\| \leq 1$ et S un sous-ensemble de X de mesure finie. Alors

$$\int_S \|A(x)\omega\|_{\mathcal{H}'}^2 \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \|A(x)\omega\|_{\mathcal{H}'}^2 \mathbb{1}_S(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \|[\mathcal{A}(\mathbb{1}_S\omega)](x)\|_{\mathcal{H}'}^2 \mathrm{d}\mu(x) = \|\mathcal{A}(\mathbb{1}_S\omega)\|^2$$
$$\leq \|\mathcal{A}\|_{op}^2 \|\mathbb{1}_S\omega\|^2 = \int_S \|\mathcal{A}\|_{op}^2 \|\omega\|_{\mathcal{H}}^2 \mathrm{d}\mu(x).$$

Ainsi, pour tout S de mesure finie,

$$\int_S (\|A(x)\omega\|_{\mathcal{H}}^2 - \|\mathcal{A}\|_{op}^2 \|\omega\|_{\mathcal{H}}^2)\mathrm{d}\mu(x) \leq 0$$

donc il existe un négligeable N_ω dans X tel que

$$\forall x \in X\backslash N_\omega, \|A(x)\omega\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathcal{A}\|_{op}\|\omega\|_{\mathcal{H}}.$$

Soit donc $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense dans $B_f(0,1)_{\mathcal{H}}$. En notant $N = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_{\omega_j}$, lui aussi négligeable, on a

$$\forall x \in X\backslash N, \forall j \in \mathbb{N}, \|A(x)\omega_j\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathcal{A}\|_{op}\|\omega_j\|_{\mathcal{H}}.$$

Par densité, on a

$$\forall x \in X\backslash N, \forall \omega \in B_f(0,1), \|A(x)\omega\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathcal{A}\|_{op}\|\omega\|_{\mathcal{H}}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in X\backslash N, \|A(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|\mathcal{A}\|_{op}.$$

En passant au supremum essentiel,

$$\mu - \underset{x\in X}{\text{ess.sup}} \|A(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|\mathcal{A}\|_{op}.$$

□

Proposition 3.16. Soit $\mathcal{A}$ un opérateur décomposable sur $\mathcal{H} = \int_X^{\oplus} \mathcal{H}'\mathrm{d}\mu$ et $A(x)$ ses fibres. Alors $\mathcal{A}$ est un opérateur borné (resp. opérateur unitaire, opérateur positif, projecteur, isométrie partielle) si, et seulement si, pour presque tout $x \in X$, $A(x)$ vérifie l'est également.

Démonstration. Avant de démarrer la preuve, on peut constater que $\forall u, v \in \mathcal{H}$

$$(\mathcal{A}u, v) = \int_X (\mathcal{A}(x)u(x), v(x))_{\mathcal{H}'}\mathrm{d}\mu(x) = \int_X (u(x), (\mathcal{A}(x))^* v(x))_{\mathcal{H}'}\mathrm{d}\mu(x) = (u, \mathcal{A}^* v)$$

avec $\mathcal{A}^*$ l'application $v \in \mathcal{H} \mapsto (x \in X \mapsto \mathcal{A}(x)^* v(x) \in \mathcal{H}') \in \mathcal{H}$.

- (caractère borné) C'est un corollaire immédiat du théorème précédent.
- (caractère unitaire) Supposons que $\mathcal{A}$ soit unitaire. Alors $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{Id}$ donc pour tout $x \in X$, pour tout $v \in \mathcal{H}$, on a

$$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)(x)v(x) = A(x)A^*(x)v(x) \text{ et } (\mathcal{A}^*\mathcal{A})(x)v(x) = A(x)^* A(x)v(x).$$

Ainsi, comme v est arbitraire, $\mathcal{A}$ est unitaire si, et seulement si, pour presque tout $x \in X$, on a $A(x)A(x)^* = A(x)^* A(x) = \mathrm{Id}$ ce qui revient à dire que $A(x)$ est unitaire pour presque tout $x \in X$.

- (caractère positif) Supposons que pour presque tout $x \in X$, $A(x)$ est un opérateur positif. Soit $v \in \mathcal{H}'$. Alors
$$(\mathcal{A}v, v) = \int_X (A(x)v(x), v(x))_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}x \geq 0.$$
Réciproquement, supposons que $\mathcal{A}$ soit positif. Soit $v \in \mathcal{H}'$.
Soit E un ensemble mesurable de mesure finie et $\psi : x \in X \mapsto \mathbb{1}_E(x)v$. Alors $\psi \in \mathcal{H}$ et
$$(A\psi, \psi) = \int_X (A(x)\mathbb{1}_E(x)v, \mathbb{1}_E(x)v)_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}x = \int_E (A(x)v, v)\mathrm{d}x \geq 0.$$
Puisque ceci est vrai pour tout ensemble mesurable de mesure finie, on en déduit qu'il existe un négligeable N_v tel que $\forall x \notin N_v, (A(x)v, v)_{\mathcal{H}'} \geq 0$.
Considérons maintenant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense de $\mathcal{H}'$. Alors il existe une famille dénombrable de négligeable $(N_{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \notin N_{v_n}, (A(x)v_n, v_n)_{\mathcal{H}'} \geq 0$. Notons $N = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} N_{v_n}$ (qui est négligeable en tant qu'union dénombrable de négligeable). Alors
$$\forall x \notin N, \forall w \in \mathrm{Vect}((v_n)_{n\in\mathbb{N}}), (A(x)w, w) \geq 0.$$
Par continuité du produit scalaire, puisque $\overline{\mathrm{Vect}((v_n)_{n\in\mathbb{N}})} = \mathcal{H}'$, on a
$$\forall x \notin N, \forall w \in \mathcal{H}', (A(x)w, w) \geq 0.$$
Ainsi, $A(x)$ est positif pour presque tout $x \in X$.
- (Projection) Puisque $\mathcal{A}^*$ est l'intégrale directe des $A(x)^*$ et $\mathcal{A}^2$ est l'intégrale directe des $A(x)^2$, on a bien l'équivalence entre ($\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$) avec ($A(x)^2 = A(x)$ et $A(x) = A(x)^*$ pour presque tout $x \in X$).
- (Isométrie partielle) On rappelle que A est une isométrie partielle si et seulement si AA^* est une projection. Par le point précédent, $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ est une projection si, et seulement si, pour presque tout $x \in X, A(x)A(x)^*$ l'est donc $\mathcal{A}$ est une isométrie partielle si, et seulement si, pour presque tout $x \in X$, $A(x)$ l'est.

□

Définition 3.17. Un opérateur T sur $\mathcal{H} = \int_X^{\oplus} \mathcal{H}' \mathrm{d}\mu$ est dit diagonalisable s'il est de la forme $\phi(\bullet)I$ avec $\phi \in \mathrm{L}^\infty(X, \mu)$ *i.e.*
$$\exists \phi \in \mathrm{L}^\infty(X, \mu), \forall h \in \mathcal{H}, \forall \mu - \text{pp } x \in X, T(h)(x) = \varphi(x)h(x).$$

Théorème 3.18. *Un opérateur sur $\mathcal{H} = \int_X^{\oplus} \mathcal{H}' \mathrm{d}\mu$ est décomposable si, et seulement si, il commute avec tout opérateur diagonalisable.*

Démonstration. Soit T un opérateur décomposable et S un opérateur diagonalisable. Soit donc $\phi \in \mathrm{L}^\infty(X, \mu)$ tel que $S = \phi(\bullet)I$. Alors pour tout $x \in X$ et tout $v \in \mathcal{H}$,
$$TS(v)(x) = T(x)(\phi(x)v(x)) = \phi(x)T(x)v(x) = (\phi(x)I)(Tv)(x) = ST(v)(x)$$
donc T commute avec tout opérateur diagonalisable.

Regardons maintenant le sens réciproque. Posons quelques notations.

- Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que T commute avec tout opérateur diagonalisable.
- Soit $\psi \in \mathrm{L}^2(X, \mu; \mathbb{C})$ à valeurs dans $]0, +\infty[$.
- Pour tout $h \in \mathcal{H}$, on note $\psi_h : x \in X \mapsto \psi(x)h$ et $v_h \in \mathrm{L}^2(X, \mu; \mathcal{H}')$ définie par $v_h = T(\psi_h)$.
- Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$. C'est un corps puisque $X^2 + 1$ est irréductible dans l'anneau principal $\mathbb{Q}[X]$.
- Soit S une famille dénombrable dense dans $\mathcal{H}'$ et $H_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(S)$. Alors H_0 est un sous-espace vectoriel dénombrable dense de $\mathcal{H}'$.

Soit $h \in \mathcal{H}, \phi \in \mathrm{L}^\infty(X, \mu; \mathbb{C})$. Alors
$$\begin{aligned}\int_X |\phi(x)|^2 \|v_h(x)\|^2_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}\mu(x) &= \|(\phi(\bullet)I)v_h\|^2 = \|(\phi(\bullet)I)T(\psi_h)\|^2 = \|T(\phi(\bullet)I)(\psi_h)\|^2 \\ &\leq \|T\|^2_{op} \|\phi(\bullet)I(\psi_h)\|^2 = \|T\|^2_{op} \int_X |\phi(x)|^2 \psi(x)^2 \|x\|^2_{\mathcal{H}} \mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$
Ceci étant vrai pour tout $\phi \in \mathrm{L}^\infty(X, \mu; \mathbb{C})$, on a
$$\forall \mu - \text{pp } x \in X, \|v_h(x)\|_{\mathcal{H}'} \leq \|T\|_{op} \psi(x) \|h\|_{\mathcal{H}}.$$
Il existe alors N, négligeable, tel que pour tout $x \in X \backslash N$,

1. $h \in \mathcal{H}_0 \mapsto v_h(x) \in \mathcal{H}$ est $\mathbb{K}$-linéaire.
2. $\|v_h(x)\|_{\mathcal{H}'} \leq \|T\|_{op}\|h\|_{\mathcal{H}}\psi(x)$ pour tout $h \in \mathcal{H}_0$.

Par densité, on en déduit que

$$\forall h \in \mathcal{H}, \forall x \in X\backslash N, \|\psi^{-1}(x)v_h(x)\|_{\mathcal{H}'} \leq \|T\|_{op}\|h\|_{\mathcal{H}}.$$

On peut donc poser :

$$A : x \in X \mapsto \begin{cases} h \mapsto A(x)h := \psi(x)^{-1}v_h(x) & \text{si } x \in X\backslash N \\ 0 & \text{si } y \in N \end{cases}$$

et $\mathcal{A} = \displaystyle\int_X^{\oplus} A(x)\mathrm{d}\mu(x)$. Alors par ce qui précède,

$$\forall x \in X, \|A(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}')} \leq \|T\|_{op}.$$

Ainsi, $A \in \mathrm{L}^\infty(X, \mu; \mathcal{L}(\mathcal{H}'))$. On souhaite monter que $\mathcal{A} = T$ sur $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(X, \mu; \mathcal{H}')$. Or, il y a une isométrie bijective entre $\mathrm{L}^2(X, \mu; \mathcal{H}')$ et $\mathrm{L}^2(X, \mu) \otimes \mathcal{H}'$ (voir annexe section 4.8). Ainsi, $\{x \mapsto \psi(x)h : (\psi, h) \in \mathrm{L}^2(X, \mu) \times \mathcal{H}'\}$ est dense dans $\mathcal{H}$ et en notant $(\phi\psi)_h : x \in X \mapsto \phi(x)\psi(x)h \in \mathcal{H}$, on a $\forall z \in X$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((\phi\psi)_h)(z) &= A(z)(\phi\psi)(z)h = (\phi\psi)(z)A(z)h = (\phi\psi)(z)\psi^{-1}(z)v_h(z) \\ &= ((\phi(\bullet)I)v_h)(z) = (\phi(\bullet)I)T(\psi_h)(z) = T(\phi(\bullet)I)\psi_h(z) \\ &= T(\phi(\bullet)\psi_h)(z). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{A}$ égale T sur une partie dense de $\mathcal{H}$ donc égale T sur $\mathcal{H}$ par continuité. □

3.3 Opérateurs non bornés

Définition 3.19. Une fonction A de X vers l'ensemble des opérateurs autoadjoints non bornés de $\mathcal{H}'$ est dite mesurable lorsque $(A(\bullet) + i)^{-1}$ est mesurable. Dans ce cas, on peut définir l'opérateur $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H} = \displaystyle\int_X^{\oplus} \mathcal{H}'\mathrm{d}\mu$ de domaine

$$D(\mathcal{A}) = \left\{\psi \in \mathcal{H} : \forall\mu - \text{pp } x \in X, \psi(x) \in D(A(x)), \int_X \|A(x)\psi(x)\|^2_{\mathcal{H}'}\mathrm{d}\mu(x) < +\infty\right\}$$

par

$$\forall \psi \in D(\mathcal{A}), \mathcal{A}\psi = x \mapsto A(x)\psi(x).$$

On note alors $\mathcal{A} = \displaystyle\int_X^{\oplus} A(x)\mathrm{d}\mu(x)$. On dit que l'opérateur $\mathcal{A}$ est non bornée décomposable et que les $A(x)$ sont ses fibres.

Proposition 3.20. Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux opérateurs sur $\mathcal{H}$ de fibres respectives $A(x)$ et $B(x)$. Si $\mathrm{Im}(\mathcal{B}) \subset D(\mathcal{A})$, alors $\mathcal{AB}$ est un opérateur non borné décomposable sur $D(\mathcal{B})$ de fibres $AB(x)$.

Démonstration. On a

$$\forall \psi \in D(\mathcal{B}), \forall x \in X, \mathcal{AB}\psi(x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\psi)(x) = A(x)(\mathcal{B}\psi)(x) = A(x)B(x)\psi(x) = (AB)(x)\psi(x).$$

□

Proposition 3.21. Soit A une fonction de X à valeurs dans l'ensemble des opérateurs non bornés autoadjoints.

1. Si A est mesurable, alors $\displaystyle\int_X^{\oplus} A(x)\mathrm{d}\mu(x)$ est autoadjointe.
2. Un opérateur autoadjoint $\mathcal{A}$ est de la forme $\displaystyle\int_X^{\oplus} A(x)\mathrm{d}\mu(x)$ si, et seulement si, $(\mathcal{A} + i)^{-1}$ est un opérateur borné décomposable.

Démonstration.

1. On a
$$\forall u, v \in D(\mathcal{A}), (\mathcal{A}u, v) = \int_X (A(x)u(x), v(x))_{\mathcal{H}'}\mathrm{d}x = \int_X (u(x), A(x)v(x))_{\mathcal{H}'}\mathrm{d}x = (u, \mathcal{A}v)$$
donc $\mathcal{A}$ est symétrique. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{Im}(\mathcal{A} \pm i) = \mathcal{H}$. Soit $C(x) = (A(x) + i)^{-1}$ pour $x \in X$. Alors C est bien définie puisque pour tout $x \in X$, $A(x)$ est autoadjointe. On sait de plus que $\|C(x)\| \leq \dfrac{1}{\mathrm{Im}(i)} = 1$. Ainsi, $C \in \mathrm{L}^\infty(X, \mu; \mathcal{L}(\mathcal{H}'))$ donc on peut définir $\mathcal{C} = \displaystyle\int_X^{\oplus} C(x)\mathrm{d}\mu(x)$.

Soit $\eta \in \mathcal{H}$ et $\psi = \mathcal{C}\eta$. Alors pour presque tout $x \in X$, on a $\psi(x) \in \mathrm{Im}(C(x)) = D(A(x))$ et

$$\|A(x)\psi(x)\| = \|(A(x)+i)C(x)\eta(x) - iC(x)\eta(x)\| \leq 2\|\eta(x)\|.$$

Comme $\eta \in \mathcal{H} = \mathrm{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}')$, on en déduit que $\psi \in D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}+i)$ donc $(\mathcal{A}+i)\psi = \eta$. On a bien $\eta \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}+i)$. On fait de même pour $\mathcal{A} - i$ et on obtient le caractère autoadjoint de $\mathcal{A}$.

2. Supposons que $\mathcal{A} = \int_X^{\oplus} A(x)\mathrm{d}\mu(x)$. Puisque les fibres $A(x)$ sont autoadjointes, pour presque tout $x \in X$, i est dans la résolvante de $A(x)$. On en déduit que $(A(x)+i)^{-1}$ existe et est bornée : on a alors déjà vu que

$$(\mathcal{A}+i)^{-1} = \int_X^{\oplus} (A(x)+i)^{-1}\mathrm{d}\mu(x).$$

Ainsi, $(\mathcal{A}+i)^{-1}$ est décomposable.

Réciproquement, soit $B \in \mathrm{L}^{\infty}(X,\mu;\mathcal{L}(\mathcal{H}'))$ tel que $(\mathcal{A}+i)^{-1} = \int_X^{\oplus} B(x)\mathrm{d}\mu(x)$. Alors pour presque tout $x \in X$, $B(x)$ est inversible. Soit $\widetilde{A}(x) = B(x)^{-1} - i$. Comme $(\mathcal{A}+i)^{-1}$ est autoadjointe, on a

$$\int_X^{\oplus} (B(x))^* \mathrm{d}\mu(x) = ((\mathcal{A}+i)^{-1})^* = (\mathcal{A}+i)^{-1} = \int_X^{\oplus} B(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

donc pour presque tout $x \in X$, $B(x)$ est autoadjointe. Ainsi, pour presque tout $x \in X$, $\widetilde{A}(x)$ est autoadjointe. On peut donc écrire

$$\mathcal{A} = \int_X^{\oplus} (B(x)^{-1} - i)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X^{\oplus} \widetilde{A}(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

□

<u>Théorème</u> 3.22. *Soit A une fonction de X à valeurs dans l'ensemble des opérateurs non bornés autoadjoints. On suppose que A est mesurable. Soit $\mathcal{A} = \int_X^{\oplus} A(x)\mathrm{d}\mu(x)$. Si F une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors*

$$F(A) = \int_X^{\oplus} F(A(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

<u>Corollaire</u> 3.23. Dans les hypothèses précédentes,

1. $\lambda \in \sigma(A)$ si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \mu\left(\{x \in X : \sigma(A(x)) \cap]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[= \emptyset\}\right) > 0.$$

2. λ est une valeur propre de $\mathcal{A}$ si, et seulement si,

$$\mu(\{x \in X : \lambda \text{ est une valeur propre de } A(x)\}) > 0.$$

3. Si pour tout $x \in X$, $A(x)$ a un spectre absolument continu, alors $\mathcal{A}$ a un spectre absolument continu.
4. Soit $\mathcal{B} = \int_X^{\oplus} B(x)\mathrm{d}\mu(x)$ où B est mesurable de X dans l'ensemble des opérateurs autoadjoints. Si $\mathcal{B}$ est $\mathcal{A}$-bornée de borne a, alors pour presque tout $x \in X$, $B(x)$ est $A(x)$-bornée par une borne $a(x) \leq a$. Si $a < 1$, alors

$$A + B = \int_X^{\oplus} (A(x) + B(x))\mathrm{d}\mu(x)$$

est autoadjointe.

Pour démontrer ces deux résultats, nous avons besoin de deux théorèmes.

3.3.1 Théorème de convergence dominée

Théorème 3.24 (Théorème de convergence dominée pour les intégrales directes)**.** *Soit $\mathcal{F}_n$ une suite d'opérateurs sur $\mathcal{H}$ décomposables telle que*

1. *il existe un opérateur décomposable $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{H}$ de sorte que, en notant $F_n(x)$ et $F(x)$, les fibres respectives de $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}$, on ait $F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F(x)$ fortement sur $D(F(x)) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(F_n(x)) =: D(x)$*
2. *en notant $D = D(F) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(F_n)$, pour tout $\psi \in D$, il existe $g_\psi \in \mathrm{L}^2(X,\mu)$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \|F_n(x)\psi(x)\|_{\mathcal{H}'} \leq g_\psi(x).$$

Alors $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $\mathcal{F}$ sur D ce qui s'écrit

$$\int_X^{\oplus} F_n(x)\mathrm{d}\mu(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_X^{\oplus} F(x)\mathrm{d}\mu(x) \text{ sur } D$$

Démonstration. Soit $\psi \in D$. Alors

$$\left\| \int_X^{\oplus} (F_n(x) - F(x))\mathrm{d}\mu(x)\psi \right\|_{\mathrm{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}')} = \int_X \|(F_n(x) - F(x))\psi(x)\|^2_{\mathcal{H}'}\mathrm{d}\mu(x).$$

Soit donc $f_n(x) = \|(F_n(x) - F(x))\psi(x)\|^2_{\mathcal{H}'}$ pour tout $x \in X$. Par inégalité triangulaire, $f_n(x) \leq 2g_\psi(x)$ donc f_n^2 est dominée par $4g_\psi^2 \in \mathrm{L}^1(X,\mu)$. La convergence simple de f_n vers 0 (provient de $(F_n(x))_n$ qui converge fortement vers $F(x)$ pour presque tout $x \in X$) entraîne, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, que

$$\left\| \int_X^{\oplus} (F_n(x) - F(x))\mathrm{d}\mu(x)\psi \right\|_{\mathrm{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}')} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci montre donc la convergence forte de $\left(\int_X^{\oplus} F_n(x)\mathrm{d}\mu(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\int_X^{\oplus} F(x)\mathrm{d}\mu(x)$ sur D. □

Corollaire 3.25 (Théorème de convergence dominée pour les intégrales directes via le calcul fonctionnel)**.** Soit $(A, D(A))$ un opérateur autoadjoint. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})$ qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{B}^\infty_{loc}(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq |f(x)|$. Alors $\int_X^{\oplus} f_n(A(x))\mathrm{d}\mu(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_X^{\oplus} f(A(x))\mathrm{d}\mu(x)$ sur le domaine de l'intégrale directe limite.

Démonstration. Par le calcul fonctionnel, pour presque tout $x \in X$, la suite d'opérateurs $(f_n(A(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $f(A(x))$ sur $D(f(A(x)))$.

Soit $\psi \in D = D\left(\int_X^{\oplus} f(A(x))\mathrm{d}\mu(x)\right)$. Soit $n \in \mathbb{N}, x \in X$. Alors

$$\|f_n(A(x))\psi(x)\|_{\mathcal{H}'} = \int_{\mathbb{R}} |f_n(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_\psi(\lambda) \leq \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_\psi(\lambda) = \|f(A(x))\psi(x)\|_{\mathcal{H}'}.$$

Par définition de D, $x \mapsto \|f(A(x))\psi(x)\|_{\mathcal{H}'}$ est dans $\mathrm{L}^2(X,\mu)$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour les intégrales directes pour conclure. □

3.3.2 Théorème de Fubini-Tonelli-Lebesgue

Définition 3.26. Soit A une fonction qui à $x \in X$ associe $A(x)$ un opérateur. On suppose qu'il existe une partie D dense dans $\mathcal{H}$ telle que $\forall \mu - \text{pp } x \in X, D \subset D(A(x))$. On définit alors l'opérateur $I(A)$ de domaine

$$D(I(A)) := \{\psi \in \mathcal{H} : \forall x \in X, \psi \in D(A(x)) \; ; \; \forall \phi \in \mathcal{H}, x \mapsto \langle \phi, A(t)\psi \rangle \in \mathrm{L}^1(X,\mu)\}$$

définit au sens faible

$$\forall \psi \in D(I(A)), \forall \phi \in \mathcal{H}, \langle \phi, I(A)\psi \rangle = \int_X \langle \phi, A(x)\psi \rangle \mathrm{d}\mu(x).$$

Remarque 3.27. Dans la suite, on notera $I(A) = \int_X A(x)\mathrm{d}\mu(x)$ et on transposera les notations de l'intégrale « standard » sur cette notion d'intégrale d'opérateurs.

<u>Théorème</u> 3.28 (Fubini-Tonelli-Lebesgue pour les intégrales directes)**.** *Soit $A : (t,x) \in (Y \times X) \mapsto A(t,x)$ de sorte que pour tout $x \in X$, $t \mapsto A(t,x)$ soit mesurable. On définit*

$$J = \int_Y \int_X^{\oplus} A(t,x)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{dt} \ ; \ K = \int_X^{\oplus} \int_Y A(t,x)\mathrm{dt}\mathrm{d}\mu(x)$$

de domaine

$$D(J) = D\left(I\left(\int_X^{\oplus} A(\bullet,x)\mathrm{d}\mu(x)\right)\right) \text{ et } D(K) = D(I(A(t,\bullet))$$

Alors $J \subset K$.

Démonstration. Déjà, réécrivons proprement les domaines. Notons $\mathcal{A}(t) = \displaystyle\int_X^{\oplus} A(t,x)\mathrm{d}\mu(x)$ pour $t \in Y$.

$$\begin{aligned} D(J) &= \left\{u \in \mathcal{H} : \forall \mu - \text{pp } t \in Y, u \in D(\mathcal{A}(t)); \forall v \in \mathcal{H}, \int_Y \int_X |\langle v(x), A(t,x)u(x)\rangle| \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{dt} < +\infty\right\} \\ &= \left\{u \in \mathcal{H} : \forall \mu - \text{pp } t \in Y, \forall \mu - \text{pp } x \in X, u(x) \in D(A(t,x)); \int_Y \int_X \|A(t,x)u(x)\|_{\mathcal{H}'}^2 \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{dt} < +\infty\right\} \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} D(K) &= \left\{u \in \mathcal{H} : \forall \mu - \text{pp } x \in X, u(x) \in D\left(\int_Y A(t,x)\mathrm{dt}\right); \int_X \left\|\int_Y A(t,x)\mathrm{dt}u(x)\right\|_{\mathcal{H}'}^2 < +\infty\right\} \\ &= \left\{u \in \mathcal{H} : \forall \mu - \text{pp } x \in X, \forall \mu - \text{pp } t \in Y, u(x) \in D(A(t,x)); \forall v \in \mathcal{H}, \int_Y |\langle v, A(t,x)u(x)\rangle| \mathrm{dt} < +\infty; \right. \\ &\qquad \left. \int_X \left\|\int_Y A(t,x)\mathrm{dt}u(x)\right\|_{\mathcal{H}'}^2 < +\infty\right\} \end{aligned}$$

Ainsi, $D(J) \subset D(K)$. Soit maintenant $u \in D(J)$ et $v \in \mathcal{H}$. On a

$$\begin{aligned} \left(\int_Y \int_X^{\oplus} A(t,x)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{dt}u, v\right) &= \int_Y \int_X (A(t,x)u(x), v(x))_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{dt} \\ &\underset{\text{FL}}{=} \int_X \int Y (A(t,x)u(x), v(x))_{\mathcal{H}'} \mathrm{dt}\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \left(\int_X^{\oplus} \int_Y A(t,x)\mathrm{dt}\mathrm{d}\mu(x)u, v\right) \end{aligned}$$

où FL désigne l'utilisation de Fubini-Lebesgue, licite car

$$\int_Y \int_X |\langle A(t,x)u(x), v(x)\rangle_{\mathcal{H}'}| \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{dt} < +\infty$$

par hypothèse. Ainsi, $J \subset K$. $\square$

3.3.3 Preuve du théorème 3.22 et du corollaire 3.23

On démontre ici le théorème 3.22 puis le corollaire 3.23.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = \left\{F \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}) : F(A) = \displaystyle\int_X^{\oplus} F(A(x))\mathrm{d}\mu(x)\right\}$. Par le théorème de convergence dominée pour les intégrales directes via le calcul fonctionnel, on sait que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{F}$ qui converge simplement vers f et que $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, alors $f \in \mathcal{F}$.

- Étape 1 : le cas où $F = \exp(it\bullet)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Soit $f_n : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \left(1 - \dfrac{it\lambda}{n}\right)^{-n}$. Par les propriétés générales de l'intégrale directe,

$$\left(1 - \frac{it}{n}A\right)^{-n} = \int_X^{\oplus} \left(1 - \frac{it}{n}A(x)\right)^{-n} \mathrm{d}\mu(x).$$

Déjà, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\exp(it\bullet)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(\lambda)|^2 = \left(1 + \left(\frac{t\lambda}{n}\right)^2\right)^{-n} \leq 1 = |\exp(it\lambda)|.$$

Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{B}^\infty$. Ainsi, par le calcul fonctionnel,

$$\forall v \in \mathcal{H}, \left\| \left(\left(1 - \frac{it}{n}A\right)^{-n} - e^{itA} \right) v \right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème de convergence dominée pour les intégrales directes via le calcul fonctionnel, on a aussi

$$\int_X^\oplus \left(1 - \frac{it}{n}A(x)\right)^{-n} \mathrm{d}\mu(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_X^\oplus e^{itA(x)}\mathrm{d}\mu(x)$$

sur le domaine de $\displaystyle\int_X^\oplus e^{itA(x)}\mathrm{d}\mu(x)$. Montrons que ce domaine, noté D, vaut $\mathcal{H}$. On a

$$u \in D \Longleftrightarrow (u \in \mathcal{H}) \wedge \left(\forall \mu - \text{pp } x \in X, u(x) \in D(e^{itA(x)}) = \mathcal{H}'\right) \wedge \left(\int_X \|e^{itA(x)}u(x)\|_{\mathcal{H}'}^2 < +\infty\right).$$

Or,

$$\int_X \|e^{itA(x)}u(x)\|_{\mathcal{H}'}^2 = \|e^{itA}u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{it\lambda}|^2 \mathrm{d}\mu_u(\lambda) = \|u\|^2 < +\infty$$

pour $u \in \mathcal{H}$. Ainsi, $D = \mathcal{H}$.
On en déduit donc que

$$e^{itA} = \int_X^\oplus e^{itA(x)}\mathrm{d}\mu(x).$$

- Étape 2 : le cas où $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Notons $G(A) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(t)e^{itA}\mathrm{d}t$. Alors

$$\begin{aligned} D_G &= \left\{ u \in \mathcal{H} : \forall \mu - \text{pp } t \in \mathbb{R}, \forall \mu - \text{pp } x \in X, u(x) \in D(e^{itA(x)}) = \mathcal{H}'; \int_X \|e^{itA(x)}u(x)\|_{\mathcal{H}'}^2 \mathrm{d}\mu(x) < +\infty \right\} \\ &= \mathcal{H} = D_F \end{aligned}$$

car F est bornée. Ensuite, pour tout $u, v \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} (g(A)u, v) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(t)(e^{itA}u, v)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda}\mathrm{d}\mu_{u,v}(\lambda)\mathrm{d}t \\ &\underset{\star}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(t)e^{it\lambda}\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu_{u,v}(\lambda) \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} F(\lambda)\mathrm{d}\mu_{u,v}(\lambda) = 2\pi(F(A)u, v) \end{aligned}$$

où $\star$ provient de Fubini puisque $\mu_{u,v}$ est une mesure finie et F est dans la classe de Schwartz. On en déduit donc que

$$F(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(t)e^{itA}\mathrm{d}t.$$

Or

$$2\pi F(A) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(t)e^{itA}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \int_X^\oplus \widehat{F}(t)e^{itA(x)}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}t.$$

Soit donc $B(t, x) = \widehat{F}(t)e^{itA(x)}$. A x fixé, $B(\bullet, x)$ est bien mesurable par produit de fonctions mesurables, $e^{itA(x)}$ l'étant en tant que limite simple de fonctions mesurables. On en déduit par le théorème de Fubini-Tonelli-Lebesgue pour les intégrales directes que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_X^\oplus \widehat{F}(t)e^{itA(x)}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}t = \int_X^\oplus \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(t)e^{itA(x)}\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu(x) = 2\pi \int_X^\oplus F(A(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

On en déduit que $F(A) = \displaystyle\int_X^\oplus F(A(x))\mathrm{d}\mu(x)$ et ce, sur $D_F = \mathcal{H}$ ce qui conclut.

- Étape 3 : cas où $F \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de la classe de Schwartz telle que
  1. $\|F_n - F\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  2. $\forall n \in \mathbb{N}, \|F_n\|_\infty \leq \|F\|_\infty$.

  Une telle suite existe bien. Alors $F \in \mathcal{F}$.
- Étape 4 : cas général. Montrons que $\mathcal{F}$ contient $\mathbb{1}_{]a,b[}$ pour $a < b$ deux réels. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\eta = b - a$ et

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]a,b[\\ 1 & \text{si } x \in \left]a + \dfrac{\eta}{n}, b - \dfrac{\eta}{n}\right[\\ \dfrac{n(x-a)}{\eta} & \text{si } x \in \left]a, a + \dfrac{\eta}{n}\right[\\ \dfrac{n(b-x)}{\eta} & \text{si } x \in \left]b - \dfrac{\eta}{n}, b\right[\end{cases} \end{array}.$$

  Alors ainsi définie, $f_n \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ donc par l'étape 3, $f_n \in \mathcal{F}$ et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. De plus, $(f_n)_n$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{]a,b[}$ et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \|f_n\|_\infty \leq 1$. Ainsi, $\mathbb{1}_{]a,b[} \in \mathcal{F}$.

  On va maintenant montrer que $\mathcal{F}$ contient toutes les fonctions boréliennes bornées. Pour cela, soit $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mathbb{1}_B \in \mathcal{F}\}$.
  - G contient les ouverts finis de la forme $]a,b[$, $a < b$ des réels. L'ensemble $\mathcal{F}$ contient aussi 0 et 1 donc $\mathcal{G}$ contient $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.
  - Soit $B \in \mathcal{G}$. Alors $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\backslash B} = 1 - \mathbb{1}_B$ donc

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}\backslash B}(A) = (1 - \mathbb{1}_B)(A) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - \int_X^\oplus \mathbb{1}_B(A(x))\mathrm{d}\mu(x) = \int_X^\oplus (1 - \mathbb{1}_B)(A(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

    Ainsi, $\mathbb{R}\backslash B \in \mathcal{G}$.
  - Soit $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{G}$. Alors la formule du crible de Poincaré donne

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n U_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{U_i})$$

    donc comme $\mathcal{F}$ est une algèbre, $\mathcal{G}$ est stable par union finie. Par ailleurs, on a la convergence simple de la suite de fonctions (de norme infinie égale à 1) $\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n U_i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{+\infty} U_i}$ donc par le calcul fonctionnel, $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{+\infty} U_i}$ est bien dans $\mathcal{F}$. Ainsi, $\mathcal{G}$ est stable par union dénombrable.

  On en déduit que $\mathcal{G}$ est une tribu qui contient les ouverts de la forme $]a,b[$. L'ensemble $\mathcal{G}$ contient donc $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On applique donc le théorème de la classe monotone (Durrett, *Probability : Theory and Examples*, Version 5 : théorème 5.2.2 page 275) pour avoir que $\mathcal{F}$ contient les fonctions bornées mesurables pour la tribu borélienne c'est-à-dire $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})$.

□

Prouvons maintenant le corollaire 3.23.

Démonstration.

1. On applique le théorème 3.22 avec $F = \mathbb{1}_{]a,b[}$: on a alors

$$\mathbb{1}_{]a,b[}(A) = \int_X^\oplus \mathbb{1}_{]a,b[}(A(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

   Ainsi, $\lambda \in \sigma(A)$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0, \mathbb{1}_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[}(A) \neq 0$. Puisque $\displaystyle\int_X^\oplus A(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0 \iff \forall \mu-\text{pp } x \in X, A(x) = 0$, on a le résultat souhaité.
2. On applique le théorème 3.22 avec $F = \mathbb{1}_{\{\lambda\}}$.
3. Soit $\psi \in \mathcal{H}$ et $\mathrm{d}\nu$ mesure spectrale de $\mathcal{A}$ pour ψ. Soit $\mathrm{d}\nu_x$ mesure spectrale de $\mathcal{A}(x)$ pour ψ pour tout $x \in X$. De l'égalité

$$F(A) = \int_X^\oplus F(A(x))\mathrm{d}\mu(x),$$

on tire pour tout $\psi \in \mathcal{H}$,

$$(F(A)\psi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} F(\lambda)\mathrm{d}\nu(\lambda)$$

et

$$\left(\int_X^{\oplus} F(A(x))\mathrm{d}\mu(x)\psi, \psi\right) = \int_X (F(A(x))\psi, \psi)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \int_{\mathbb{R}} F(\lambda)\mathrm{d}\nu_x(\lambda)\mathrm{d}\mu(x).$$

Ainsi, on écrit

$$\mathrm{d}\nu = \int_X \mathrm{d}\nu_x \mathrm{d}\mu(x)$$

dans le sens où

$$\int_{\mathbb{R}} F(\lambda)\mathrm{d}\nu(\lambda) = \int_X \int_{\mathbb{R}} F(\lambda)\mathrm{d}\nu_x(\lambda)\mathrm{d}\mu(x).$$

Soit $x \in X$ et $g_x \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{d}\nu_x(t) = g_x(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{\mathbb{R}} g_x(t)\mathrm{d}t = \|\psi(x)\|^2_{\mathcal{H}'}$. Alors en posant

$$g(t) = \int_X g_x(t)\mathrm{d}\mu(x),$$

par le théorème de Fubini, $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et donc

$$\mathrm{d}\nu = g(t)\mathrm{d}t.$$

4. Soit $\varphi \in \mathcal{H}$ et $\psi = (\mathcal{A} + ik)^{-1}\varphi$ avec $k \in \mathbb{N}$: ψ est bien défini puisque le caractère autoadjoint de $\mathcal{A}$ entraîne que ik est dans la résolvante de $\mathcal{A}$. Par le théorème spectral, en notant $f : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\lambda}{\lambda + ik}$, on a

$$\|f(\mathcal{A})\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \mathrm{d}\mu_\psi(\lambda)$$

ce qui donne

$$\|\mathcal{A}(\mathcal{A} + ik)^{-1}\varphi\|^2_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + k^2}}_{\leq 1} \mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda) \leq \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}}.$$

On en déduit que

$$\|\mathcal{B}(\mathcal{A} + ik)^{-1}\varphi\| = \|\mathcal{B}\psi\| \leq a\|\mathcal{A}\psi\| + b\|\psi\| \leq a\|\varphi\| + b\frac{1}{k}\|\varphi\|$$

donc

$$\|\mathcal{B}(\mathcal{A} + ik)^{-1}\|_{op} \leq a + \frac{b}{k}.$$

En particulier, l'opérateur $\mathcal{B}(\mathcal{A} + ik)^{-1}$ est bornée décomposable de fibre $B(A + ik)^{-1}$. Ainsi,

$$\|\mathcal{B}(\mathcal{A} + ik)^{-1}\|_{op} = \mu - \underset{x \in X}{\text{ess.sup}} \|[B(A + ik)^{-1}](x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq a + \frac{b}{k}.$$

On en déduit que $\forall \mu -$ pp $x \in X, \|B(x)(A(x) + ik)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq a + \dfrac{b}{k}$. Maintenant, soit N le négligeable sur lequel l'inégalité précédente ne tient pas et soit $x \in X \backslash N$ et $u \in D(A(x))$. Alors comme $A(x)$ est autoadjointe, on peut prendre $v = (A(x) + ik)(u)$ et

$$\|B(x)u\| = \|B(x)(A(x) + ik)^{-1}v\| \leq \left(a + \frac{b}{k}\right)\|v\| = \left(a + \frac{b}{k}\right)\|(A(x) + ik)u\|$$

donc $u \in D(B(x))$. Montrons que $\limsup_{k \to +\infty} \|B(x)(A(x) + ik)^{-1}\|_{\mathcal{H}'} = a(x)$. On a déjà

$$\|B(x)(A(x) + ik)^{-1}\|_{\mathcal{H}'} \leq a(x) + \frac{b(x)}{k}$$

si $\|B(x)u\|_{\mathcal{H}'} \leq a(x)\|A(x)u\|_{\mathcal{H}'} + b\|u\|_{\mathcal{H}'}$. En passant à la limite supérieure, on a l'inégalité $\leq$. Si l'inégalité est stricte, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|B(x)(A(x) + ik)^{-1}\|_{\mathcal{H}'} \leq a(x) - \varepsilon$ à partir d'un certain rang. Soit $u \in D(A(x))$. On a

$$\|B(x)u\|_{\mathcal{H}'} = \|B(x)(A(x) + ik)^{-1}(A(x) + ik)u\|_{\mathcal{H}'} \leq (a(x) - \varepsilon)\|A(x)u\|_{\mathcal{H}'} + (a(x) - \varepsilon)k\|u\|_{\mathcal{H}'}.$$

Ainsi, $B(x)$ est $(a(x)-\varepsilon)$-borné ce qui contredit la minimalité de $a(x)$. Ainsi, $\limsup_{k\to+\infty} \|B(x)(A(x)+ik)^{-1}\|_{\mathcal{H}'} = a(x)$ et de

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \|B(x)(A(x)+ik)^{-1}\|_{\mathcal{H}'} \leq a + \frac{b}{k},$$

on tire $a(x) \leq a$. Si $a < 1$, par le théorème de Kato-Rellich, $A(x) + B(x)$ est autoadjointe sur $D(A(x))$. Cela étant vrai pour presque tout $x \in X$, on en déduit que $A + B$ est autoadjointe.

$\square$

3.4 Opérateurs de Schrödinger

Définition 3.29. On note $\mathrm{h}^2(\mathbb{Z})$ l'ensemble

$$\{u \in \ell^2(\mathbb{Z}) : (n^2 u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})\}$$

et pour $u, v \in \mathrm{h}^2(\mathbb{Z})$, on note

$$(u,v)^2_{\mathrm{h}}(\mathbb{Z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^4)\overline{u_n} v_n$$

ainsi que

$$\|u\|^2_{\mathfrak{h}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^4)|u_n|^2.$$

Proposition 3.30. $\mathrm{h}^2(\mathbb{Z})$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. On constate que $\mathrm{h}^2(\mathbb{Z})$ est un sous-espace vectoriel de ℓ^2 et que $(\bullet,\bullet)_{\mathrm{h}^2(\mathbb{Z})}$ est un produit scalaire. On montre maintenant la complétude souhaitée. On rappelle que par le théorème de Riesz-Fischer pour les séries de Fourier, on a une isométrie entre $\mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$ via les coefficients de Fourier. Notons

$$\mathcal{F} : f \in \mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbb{R}) \mapsto (c_n(f))_n \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Alors pour tout $u \in \mathrm{h}^2(\mathbb{Z})$, il existe $f, g \in \mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) = u$ et $\mathcal{F}^{-1}((n^2 u_n)_n) = g$. Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a donc $\mathcal{F}(\partial^2 f) = -(n^2 u_n)_n \in \ell^2(\mathbb{Z}) = \mathcal{F}(g)$ donc en prenant $\mathcal{F}^{-1}$, on obtient $\partial^2 f = -g \in \mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. Finalement, $f \in H^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathrm{h}^2(\mathbb{Z})$ et $H^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ sont homéomorphes donc la complétude de $H^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ entraîne la complétude de $\mathrm{h}^2(\mathbb{Z})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. De même, la densité de $H^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ entraine la densité de $\mathrm{h}^2(\mathbb{Z})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. $\square$

Lemme 3.31. Soit $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ deux Hilbert et $(A, D(A))$ un opérateur sur $\mathcal{H}$, $(B, D(B))$ un opérateur sur $\mathcal{H}'$. Soit $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ un opérateur unitaire. Alors $UA = BU$ sur $D(A)$ entraîne $UAU^{-1} = B$ sur $D(B)$.

Démonstration. Soit $y \in D(B)$, il existe un unique $x \in \mathcal{H}$ tel que $Ux = y$. Alors UAx existe dans $\mathcal{H}'$ donc $U^{-1}UAx = Ax$ existe dans $\mathcal{H}$ donc $x \in D(A)$. On en déduit donc que U envoie bijectivement de $D(A)$ dans $D(B)$. Ainsi, UAU^{-1} existe dans $D(B)$. Ensuite, soit $y \in D(B)$. Soit l'unique $x \in D(A)$ tel que $Ux = y$. Alors

$$UAU^{-1}y = UAx = BUx = By$$

donc $UAU^{-1} = B$ sur $D(B) = UD(A)$. $\square$

Lemme 3.32 (Fubini - L^2)**.** Soit $(X, \mathrm{d}\mu), (Y, \mathrm{d}\nu)$ deux espaces mesurés complets. Soit $f, g \in \mathrm{L}^2(X \times Y, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$. Alors

$$\int_X \int_Y f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) < +\infty.$$

Démonstration. On a

$$\int_X \int_Y |f(x,y)g(x,y)|\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_X \|f(x,\bullet)\|_{\mathrm{L}^2(Y,\mathrm{d}\nu)} \|g(x,\bullet)\|_{\mathrm{L}^2(Y,\mathrm{d}\nu)} \mathrm{d}\mu(x) \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(X\times Y,\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu)} \|g\|_{\mathrm{L}^2(X\times Y,\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu)}$$

Ainsi, on a l'intégrabilité de fg sur $(X \times Y, \mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu)$ donc par le théorème de Fubini-Lebesgue, on a l'interversion souhaitée.

$\square$

On peut maintenant décomposer l'opérateur $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V$ grâce à la transformée de Fourier.

Proposition 3.33. Soit $\mathcal{H}' = \ell^2(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{H} = \int_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}^{\oplus} \mathcal{H}'\mathrm{d}x$. Soit $V \in \mathcal{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$. Pour $q \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, on définit l'opérateur $H(q)$ sur le domaine $\mathrm{h}^2(\mathbb{Z})$ par

$$\forall u \in \mathrm{h}^2(\mathbb{Z}), \forall k \in \mathbb{Z}, (H(q)u)_k = (q+k)^2 u_k + \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(V)u_{k-n}$$

où $c_n(V)$ désigne le n-ème coefficient de Fourier de V. Soit $U : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}$ défini par

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall q \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}, [(Uf)(q)]_n = \mathcal{F}(f)(q+n).$$

Alors U est une isométrie de $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\bullet\|_{\mathrm{L}^2})$ dans $\mathcal{H}$ et admet un unique prolongement continu sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathrm{d}x)$ que l'on note encore U : de plus, U est unitaire. Soit maintenant $H = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V$ de domaine $H^2(\mathbb{R})$. Alors $UHU^{-1} \in \mathcal{H}$ et on a

$$UHU^{-1} = \int_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}^{\oplus} H(q)\mathrm{d}q.$$

Remarque. Étant donné que $\mathcal{H}$ est un espace de fonctions à valeurs dans un espace de suite, on le voit comme un espace de suites de fonctions. Par ailleurs, on peut aussi voir $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(X\times\mathbb{Z}, \mathrm{d}x\mathrm{d}N)$ où $\mathrm{d}N$ désigne la mesure de comptage.

Démonstration. La preuve est découpée en plusieurs étapes. On note $X = \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

- Étape 1 : on va montrer que U est bien définie et que c'est une isométrie bijective. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors

$$\|U(f)\|^2_{\mathcal{H}} = \int_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \|U(f)(q)\|^2_{\mathcal{H}'}\mathrm{d}q = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}(f)(q+n)|^2\mathrm{d}q = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n-1/2}^{n+1/2} |\mathcal{F}(f)(q)|^2\mathrm{d}q = \|\mathcal{F}(f)\|^2_{\mathrm{L}^2} = \|f\|^2_{\mathrm{L}^2}.$$

Ainsi, U est une isométrie de $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\bullet\|_{\mathrm{L}^2})$ dans $\mathcal{H}$ donc est en particulière uniformément continue. Comme $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\bullet\|_{\mathrm{L}^2})$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathrm{d}x)$ et que $\mathcal{H}$ est complet, par le théorème de prolongement des applications linéaires continues, U admet un unique prolongement continu sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathrm{d}x)$ qui reste une isométrie. On continue à le noter U. On veut montrer que U est unitaire.
Déjà, U est une isométrie donc $U^*U = \mathrm{Id}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathrm{d}x)}$. Pour conclure, calculons U^* et montrons que U^* est une isométrie.
Notons maintenant $\mathcal{V}$ défini par

$$\mathcal{V} : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathrm{d}x) \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & f \end{array}$$

où f est définie par sa transformée de Fourier : $\mathcal{F}(f) : \xi \in \mathbb{R} \mapsto f_n(x)$ où ξ est décomposé dans $\left]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right] + \mathbb{Z}$ de manière unique avec $\xi = x+n$. Pour montrer que $\mathcal{V}$ est bien défini, il suffit de montrer que $\mathcal{F}(f)$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ (puis utiliser que $\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$). On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2\mathrm{d}\xi &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2\mathrm{d}\xi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\mathcal{F}(f)(x+n)|^2\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n(x)|^2\mathrm{d}x \\ &= \|(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^2_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{V}$ est bien défini et de surcroît, c'est une isométrie. Montrons que $U^* = \mathcal{V}$. Soit $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathrm{d}x), g \in \mathcal{H}$. Alors

$$\begin{aligned}(Uf,g)_{\mathcal{H}} &= \int_X (Uf(x), g(x))_{\mathcal{H}'}\mathrm{d}x = \int_X \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(k+x)\overline{g(x)(k)}\mathrm{d}x \underset{\text{Fub. - L}^2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_X \mathcal{F}(f)(k+x)\overline{g}(x)(k)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_X \mathcal{F}(f)(x+k)\overline{\mathcal{F}(\mathcal{V}g)}(x+k)\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{X+k} \mathcal{F}(f)(\xi)\overline{\mathcal{F}(\mathcal{V}g)}(\xi)\mathrm{d}\xi = (\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(\mathcal{V}g))_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathrm{d}x)} \\ &= (f, \mathcal{V}g)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathrm{d}x)}.\end{aligned}$$

On peut utiliser Fubini - L^2 puisque

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_X |\mathcal{F}(f)(x+k)|^2\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{X+k} |\mathcal{F}(f)(x)|^2\mathrm{d}x = \|\mathcal{F}(f)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \text{ et } \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_X |\overline{g}(x)(k)|^2\mathrm{d}x = \|g\|^2_{\mathcal{H}}$$

Ainsi, on a $U^* = \mathcal{V}$. On en déduit, de $U^{**} = U$ que $UU^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$. L'application U est bien une isométrie et on a l'expression de son adjoint : c'est $\mathcal{V}$.

- Étape 2 : montrons que l'opérateur $H(q)$ admet bien $\mathrm{h}^2(\mathbb{Z})$ comme domaine. Pour cela, il suffit de contrôler la norme ℓ^2 de $H(q)u$ pour $u \in \mathrm{h}^2(\mathbb{Z})$. Par l'inégalité triangulaire, il suffit de montrer que

  - pour tout $u \in \mathrm{h}^2(\mathbb{Z}), ((q+n)^2 u_n)_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$
  - pour tout $u \in \mathrm{h}^2(\mathbb{Z}), \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(V) u_{k-n} \right|^2 < +\infty.$

  Pour le premier point, il suffit de remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}, (q+n)^2 u_n = q^2 u_n + 2qnu_n + n^2 u_n$ donc par somme, $((q+n)^2 u_n)_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Pour le deuxième point, on rappelle que pour tout $u \in \ell^1(\mathbb{Z}), v \in \ell^p(\mathbb{Z})$, $\|u * v\|_{\ell^p} \leq \|u\|_{\ell^1} \|v\|_{\ell^p}$. Ainsi, on en déduit donc que $\forall n \in \mathbb{N}, \|(c_n(V))_n * u\|_{\ell^2} \leq \|(c_n(V))_n\|_{\ell^1} \|u\|_{\ell^2}$ et comme $V \in \mathcal{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$, le membre de droite est fini. Ainsi, $H(q)$ est bien défini sur $\mathrm{h}^2(\mathbb{Z})$.

- Étape 3 : regardons déjà le cas lorsque les fonctions sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit donc $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nous voulons montrer que

  $$UH(f) = \int^{\oplus}_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} H(q)\mathrm{d}qU(f).$$

  On a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}((-\partial_x^2 + V)f)(\xi) = \xi^2 \mathcal{F}(\xi) + \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(V) * \mathcal{F}(f)(\xi)$. Comme $V \in \mathcal{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$, V égale sa série de Fourier et cette série converge uniformément. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, V(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(V) e^{inx}$. Or,

  $$\int_{\mathbb{R}} f(x)V(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(V) e^{inx}\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(V) \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(V)\mathcal{F}(f)(-n)$$

  Ainsi, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

  $$(\mathcal{F}(V), f) = (V, \mathcal{F}(f)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(V) \underbrace{\mathcal{F}^2(f)(-n)}_{=2\pi f(n)} = 2\pi \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(V)\delta(\bullet - n), f \right).$$

  Ainsi, $\mathcal{F}(V) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(V)\delta(\bullet - n)$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Finalement, toujours dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

  $$\mathcal{F}((-\partial_x^2 + V)f)(\xi) = \frac{1}{2\pi}\xi^2\mathcal{F}(\xi) + \langle \mathcal{F}(V), \mathcal{F}(f)(\xi - \bullet)\rangle = \xi^2 \mathcal{F}(f)(\xi) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(V) \underbrace{\langle \delta(\bullet - n), \mathcal{F}(f)(\xi - \bullet)\rangle}_{=\mathcal{F}(f)(p-n)}.$$

  Ainsi, on a l'égalité

  $$\mathcal{F}((-\partial_x^2 + V)f)(\xi) = \xi^2 \mathcal{F}(f)(\xi) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(V)\mathcal{F}(f)(p-n)$$

  dans $\mathcal{S}'$ et comme la série converge, on a l'égalité presque partout donc sur $\mathcal{S}$. Comme $V \in \mathcal{C}^\infty_{2\pi}$, V est bornée et toutes ses dérivées le sont aussi. Ainsi, $Vf \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $Hf \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On peut donc calculer UHf. Soit $q \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], n \in \mathbb{N}$. On a

  $$[UHf(q)]_n = \mathcal{F}(Hf)(q+n) = (q+n)^2\mathcal{F}(q+n) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(V)\mathcal{F}(f)(q+n-k).$$

  Ensuite,

  $$\left[\left(\int^{\oplus}_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} H(q)\mathrm{d}qUf \right)(q) \right]_n = [H(q)(Uf)(q)]_n = (q+n)^2\mathcal{F}(f)(q+n) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(V)\mathcal{F}(f)(q+n-k).$$

  Ainsi, on a bien $UH = \int^{\oplus}_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} H(q)\mathrm{d}qU$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Par densité, on a aussi le résultat sur $H^2(\mathbb{R})$.

- Conclusion : comme U est une isométrie, on a l'égalité $UHU^{-1} = \int^{\oplus}_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} H(q)\mathrm{d}q$ sur $D\left(\int^{\oplus}_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} H(q)\mathrm{d}q \right)$.

$\square$

On peut aussi décomposer notre opérateur directement sans faire un détour par Fourier avec une preuve n'utilisant pas le résultat précédent.

Proposition 3.34. Soit $X = [0, 2\pi]$ et $\mathcal{H}' = \mathrm{L}^2(X, \mathrm{d}x)$. Soit $\mathcal{H} = \int_X^{\oplus} \mathcal{H}' \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$. Soit $U : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}$ défini par

$$\forall \theta \in X, \forall \mathrm{pp} x \in X, (Uf)(\theta)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\theta} f(x + 2\pi n).$$

Alors U est une isométrie de $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\bullet\|_{\mathrm{L}^2})$ dans $\mathcal{H}$ et admet un unique prolongement continu sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$ que l'on note encore U. Par les injections de Sobolev, $H^2(X) \hookrightarrow \mathcal{C}^1(X)$. On peut donc définir, pour tout $\theta \in X$, $\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)_\theta =: -\Delta_\theta$ opérateur sur $\mathrm{L}^2([0, 2\pi], \mathrm{d}x)$ de domaine $D(\theta)$

$$D(\theta) = \{\psi \in H^2([0, 2\pi]) : \psi(2\pi) = e^{i\theta}\psi(0), \partial\psi(2\pi) = e^{i\theta}\partial\psi(0)\}.$$

Alors $U(-\Delta)U^{-1} = \int_X^{\oplus} \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)_\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ où $(\Delta, H^2(\mathbb{R}))$ est le laplacien.

Remarque 3.35. Dans la suite, si u est une fonction telle que pour un certain θ,

$$u(2\pi) = e^{i\theta}u(0) \ ; \ u'(2\pi) = e^{i\theta}u'(0) \tag{12}$$

on dira que u satisfait les conditions aux bords (12).

Démonstration. La preuve est découpée en plusieurs étapes. On note $(A, D(A))$ l'opérateur de droite dans l'égalité précédente.

- Étape 1 : on va montrer que U est bien définie et que c'est une isométrie bijective. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
\|Uf\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^{2\pi} \|Uf(\theta)\|_{\mathrm{L}^2} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\theta} f(x+2\pi n)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\theta \underset{\text{Fub.}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\theta} f(x+2\pi n)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+2\pi n)|^2 \mathrm{d} \underset{\text{Fub.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathrm{d}x)}^2.
\end{aligned}$$

  Comme à la preuve précédente, on étend U en une isométrie. Pour conclure sur l'unitarité de U, on calcule U^* et on montre que U^* est une isométrie comme dans la preuve précédente. Notons maintenant $\mathcal{V}$ défini par

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} : \ \mathcal{H} &\to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x) \\
g &\mapsto \left(x + 2\pi n \mapsto \int_0^{2\pi} e^{in\theta} g(\theta)(x) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right).
\end{aligned}$$

  Alors pour tout $g \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{V}g\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathrm{d}x)}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |U^*g(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} |U^*g(x+2n\pi)|^2\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} e^{in\theta}g(\theta)(x)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right|^2\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left|\int_0^{2\pi} e^{in\theta}g(\theta)(x)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right|^2}_{=|c_n(g)|^2}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(\theta)(x)|^2\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(\theta)(x)|^2\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \\
&= \|g\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathcal{V}$ est bien défini. Par ailleurs, pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), g \in \mathrm{L}^2(X, \mathcal{C}_c^\infty(X))$,

$$\begin{aligned}
(Uf, g)_{\mathcal{H}} &= \int_0^{2\pi} (Uf(\theta), g(\theta))_{\mathcal{H}'}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{g(\theta)(x)}Uf(\theta)(x)\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{g(\theta)(x)}Uf(\theta)(x)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{g}(\theta)e^{-in\theta}f(x+2n\pi)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi}\overline{g}(\theta)e^{-in\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}f(x+2n\pi)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{\mathcal{V}g(x+2n\pi)}f(x+2n\pi)\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\overline{\mathcal{V}g(\xi)}f(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}}\overline{\mathcal{V}g(\xi)}f(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= (f, \mathcal{V}g)_{\mathrm{L}^2}.
\end{aligned}$$

  Par densité et continuité du produit scalaire, on a la résultat pour $f \in \mathrm{L}^2(X)$ et $g \in \mathcal{H}$.

- Étape 2 : montrons que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $Uf \in D(A)$ et $U\Delta = AU$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la série $U(f^{(k)})(\theta)$ converge uniformément sur X pour tout $\theta \in X$ pour tout entier naturel k. Soit donc $\theta \in X$. On en déduit aussi que $(U(f)(\theta))^{(k)} = U(f^{(k)})(\theta)$. En particulier,

$$(Ug)(\theta)(2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\theta} g(2\pi(n+1)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\theta} e^{-in\theta} g(2\pi n) = e^{i\theta}(Ug)(0)$$

pour $g = f$ ou f'. Ainsi, par précédent, $(Ug)(\theta)$ satisfait les conditions aux bords (12) : $(Uf)(\theta) \in D(\theta)$. Pour avoir $Uf \in D(A)$, il reste donc à montrer que

$$\int_0^{2\pi} \|(AUf)(\theta)\|_{\mathrm{L}^2}^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} < +\infty.$$

Or,

$$\forall \theta \in X, (AUf)(\theta) = -\Delta(Uf(\theta)) = U(-f'')(\theta)$$

donc $AUf = U(-\Delta)(f)$ ce qui donne deux choses :
  - $f'' \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$ donc $\|AUf\|_{\mathcal{H}} < +\infty$.
  - $AU = U(-\Delta)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Comme A et $-\Delta$ sont autoadjoints, l'égalité s'étend sur $D(-\Delta) = H^2(\mathbb{R})$.
- Étape 3 : concluons. Comme U est unitaire, on a l'égalité $U(-\Delta)U^{-1} = \displaystyle\int_X^{\oplus} -\Delta_\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ sur $D\left(\displaystyle\int_X^{\oplus} -\Delta_\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)$.

□

<u>Théorème</u> 3.36. *Soit $X = [0, 2\pi]$ et $\mathcal{H}' = \mathrm{L}^2(X, \mathrm{d}x)$. Soit $\mathcal{H} = \displaystyle\int_X^{\oplus} \mathcal{H}' \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$. Soit V une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$ 2π-périodique. Pour $\theta \in X$, on note $H(\theta) = -\Delta_\theta + V$ qui est un opérateur sur $\mathrm{L}^2(X)$ où $-\Delta_\theta$ désigne l'opérateur $-\Delta$ de domaine $D(\theta)$*

$$D(\theta) = \{\psi \in H^2([0, 2\pi]) : \psi(2\pi) = e^{i\theta}\psi(0), \partial\psi(2\pi) = e^{i\theta}\partial\psi(0)\}.$$

Soit $U : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}$ défini par

$$\forall \theta \in X, \forall ppx \in X, (Uf)(\theta)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\theta} f(x + 2\pi n).$$

Alors $U(-\Delta + V)U^{-1} = \displaystyle\int_X^{\oplus} H(\theta) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$.

Démonstration. Soit $V_\theta : f \in \mathcal{H}' \mapsto (x \in X \mapsto V(x)f(x))$ opérateur (indépendant de θ) sur $\mathcal{H}'$. On veut utiliser le point 4 du corollaire 3.23. Par la proposition précédente, on a déjà montré que

$$U(-\Delta)U^{-1} = \int_X^{\oplus} -\Delta_\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

- Montrons que $UVU^{-1} = \displaystyle\int_X^{\oplus} V_\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} =: \mathcal{V}$ sur $\mathcal{H}$. Pour cela, montrons que $UVf = \mathcal{V}Uf$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\forall \theta \in X, \forall \mathrm{pp}x \in X, (UVf)(\theta)(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\theta} V(x + 2\pi n) f(x + 2\pi n) = V(x) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\theta} f(x + 2\pi n) \\ &= V_\theta(Uf)(\theta)(x) = \mathcal{V}f(\theta)(x).\end{aligned}$$

  Ainsi, $UV = \mathcal{V}U$ sur $\mathcal{H}$ donc U étant toujours unitaire, $UVU^{-1} = \mathcal{V}$ sur $\mathcal{H}$.
- D'ailleurs, comme V est réelle, $\mathcal{V}$ est autoadjointe. L'application V étant bornée, $\mathcal{V}$ l'est aussi donc est dans la classe de Kato. Ainsi, $\displaystyle\int_X^{\oplus} -\Delta_\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ est $\mathcal{V}$-bornée de borne aussi petite que l'on veut : on en déduit que

$$\int_X^{\oplus} -\Delta_\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} + \mathcal{V} = \int_X^{\oplus} -\Delta_\theta + V_\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

  est autoadjointe sur $D\left(\displaystyle\int_X^{\oplus} -\Delta_\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)$.

□

On écrit la proposition suivante (une preuve se trouve en annexe (voir section 4.10)) pour démontrer le théorème qui suit.

Proposition 3.37.

1. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, l'opérateur $\left(\frac{-\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)_\theta$ est à résolvante compacte.
2. Pour $\theta = 0$, $(\exp(t[-\Delta_\theta]_{\theta=0}))_{t>0}$ est un semigroupe strictement positif (voir Annexe section 4.9).
3. Pour tout $a > 0$, $\left[\left(\frac{-\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)_\theta + a\right]^{-1}$ est un opérateur analytique à valeurs dans un espace de fonctions au voisinage de $[0, 2\pi[$.

Théorème 3.38. *On suppose que V est continue par morceaux et $2\pi-$périodique. Alors*

1. *$H(\theta)$ a un spectre purement discret. L'opérateur $H(\theta)$ est de plus analytique en θ.*
2. *$H(\theta)$ et $H(2\pi - \theta)$ sont antiunitairement équivalent par la conjugaison. En particulier, ils ont les mêmes valeurs propres et leurs fonctions propres sont conjuguées.*
3. *Pour tout $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$, $H(\theta)$ n'a que des valeurs propres non dégénérées.*
4. *Soit $n \in \mathbb{N}, \theta \in]0, \pi[$ et $E_n(\theta)$ la n-ème valeur propre de $H(\theta)$. Alors la famille $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de fonctions analytiques sur $]0, \pi[$, continues en 0 et en π.*

Démonstration.

1. Par le point 1 de la proposition 3.37, $-\Delta_\theta$ est à résolvante compacte donc a un spectre purement discret. Puisque V est bornée, par le théorème de Weyl, $-\Delta_\theta + V$ a aussi un spectre purement discret.
   Ensuite, par le point 3 de la proposition 3.37, $\theta \mapsto (-\Delta_\theta + a)^{-1}$ est analytique pour tout $a > 0$. On rappelle cette identité de la résolvante qui demande l'égalité $D(H) = D(H_0)$ (ce qui va être notre cas car V est bornée) :
   $$\begin{aligned}(H-z)^{-1} - (H_0 - z)^{-1} &= (H-z)^{-1}(I - (H-z)(H_0-z)^{-1}) \\ &= (H-z)^{-1}((H_0 - z) - (H-z))(H_0-z)^{-1} \\ &= -(H-z)^{-1}(H - H_0)(H_0 - z)^{-1}\end{aligned}$$
   Comme $H(\theta)$ est aussi autoadjointe, on a
   $$(H(\theta) + a)^{-1} - (-\Delta_\theta + a)^{-1} = -(H(\theta)+a)^{-1}V(-\Delta_\theta + a)^{-1}.$$
   et donc en notant $R(\theta) = (-\Delta_\theta + a)^{-1}$,
   $$(H(\theta) + a)^{-1} = R(\theta)\sum_{n\geq 0}[-VR(\theta)]^n$$
   qui converge si $\|V\|_\infty < \infty$. En effet,
   $$\|VR(\theta)\| \leq \|V\|_\infty \|(-\Delta_\theta + 1)^{-1}\| \leq \|V\|_\infty \frac{1}{d(a, \sigma(-\Delta_\theta)} = \frac{\|V\|_\infty}{a}.$$
   Comme a est arbitraire, pour $a = 2\|V\|_\infty$, on a la convergence de la série souhaitée. Ainsi, $(H(\theta) + a)^{-1}$ est analytique par convergence uniforme de fonctions analytiques.
2. Notons C l'opérateur de conjugaison. Alors $\psi \in D(\theta) \iff C\psi \in D(2\pi - \theta)$ puisque $\overline{e^{i\theta}} = e^{i(2\pi-\theta)}$. Ainsi, on a l'égalité $CH(\theta) = H(2\pi - \theta)C$ sur $D(H(\theta)) = D(\theta)$ ce qui entraîne bien que $H(\theta)$ et $H(2\pi - \theta)$ sont antiunitairement équivalent par la conjugaison.
3. Soit E valeur propre de $H(\theta), \theta \in]0, \pi[$. Alors $-u'' + Vu = Eu$ a une solution satisfaisant les conditions aux bords (12). Comme $\overline{u}$ est aussi solution satisfaisant les mêmes conditions aux bords, et que $(u, \overline{u})$ est un système fondamental de solutions, il n'y a pas d'autres solutions linéairement indépendantes de u satisfaisant les dites conditions aux bords. Ainsi, E est simple.
4. La preuve se fait en plusieurs points.
   - Considérons $E_1(0)$. C'est une valeur propre simple de $H(0)$ par le point 2 de la proposition précédente. Comme $H(\theta)$ est analytique en 0, les valeurs propres sont aussi analytiques en 0 (voir théorème 1.8 page 370 du livre de Kato [3]) et leurs rayons de convergence sont minorées par une constante r_0 strictement positive indépendante de θ.

- Il existe donc $\varepsilon \in]0,\pi[$ et une fonction analytique $\widetilde{f_1}$ sur $]0,\varepsilon[$ telle que $\widetilde{f_1}(0) = E_1(0)$. Supposons pour l'instant que $\widetilde{f_1}$ est bornée sur $]0,\varepsilon[$. Il existe donc $(\theta_n)_n$ telle que $(\widetilde{f_1}(\theta_n))_n$ converge, disons vers E. Soit u_n vecteur propre de $H(\theta_n)$ pour la valeur propre $\widetilde{f_1}(\theta_n)$.

  Alors $\partial_\theta^2 u_n = (V - \widetilde{f_1}(\theta_n))u_n \in \mathrm{L}^2$ est bornée indépendamment de n. Par Rellich et Banach-Alaoglu, $(u_n)_n$ converge fortement vers une fonction u dans H^1 (on a $H^2 \hookrightarrow H^1$) et converge faiblement vers u pour H^2. Ainsi, u satisfait les conditions aux bords (12) et u est bien un vecteur propre pour E.

  Comme E est vecteur propre simple, il existe une unique fonction g analytique au voisinage de ε. L'application g et $\widetilde{f_1}$ coïncident sur un intervalle non trivial et sont toutes deux analytiques : g prolonge donc $\widetilde{f_1}$ au-delà de ε d'un rayon $r \geq r_0 > 0$.

  Ainsi, on peut répéter ce raisonnement jusqu'à être analytique $]0,\pi[$.
- Il suffit donc de montrer que $\widetilde{f_1}$ n'explose pas quand θ varie. Pour cela, on va montrer que $\widetilde{f_1}(\theta)$ est la plus petite valeur propre de $H(\theta)$ pour $\theta \in [0,\varepsilon[$. En effet, si on a $\widetilde{f_2}(\theta) < \widetilde{f_1}(\theta)$ pour un certain θ, alors soit il existe $\theta_1 < \theta_0$ tel que $\widetilde{f_2}(\theta) = \widetilde{f_1}(\theta)$ (on prend θ_1 le plus grand possible), soit l'inégalité se prolonge jusqu'en $\theta = 0$. Il y a deux cas.
  * Dans le premier cas, soit $u_1(\theta)$ fonction propre pour $\widetilde{f_1}(\theta)$ et $u_2(\theta)$ pour $\widetilde{f_2}(\theta)$. Alors sur $]\theta_1,\theta_0[$, $u_1(\theta)$ et $u_2(\theta)$ sont orthogonaux donc par continuité, cette propriété est conservée en $\theta = \theta_1$. On en déduit que $\widetilde{f_1}(\theta_1) = \widetilde{f_2}(\theta_1)$ est une valeur propre double de $H(\theta_1)$ ce qui est exclu puisque $\theta_1 \in]0,\pi[$.
  * Dans le deuxième cas, on a $\widetilde{f_1}(0) = E_1(0)$ et $\widetilde{f_2}(0) < E_1(0)$. Comme $E_1(0)$ est la plus petite valeur propre, on a une absurdité.

  On en déduit donc bien que $\widetilde{f_1}(\theta)$ est la plus petite valeur propre de $H(\theta)$. En particulier, elle reste finie quand θ varie dans $]0,\pi[$. Ainsi, $\widetilde{f_1}$ est analytique sur $]0,\pi[$ continue en 0 et π et on a $\widetilde{f_1} = E_1$.
- On regarde maintenant $E_2(0)$. Cette valeur peut être de multiplicité 2. Si c'est le cas, alors comme $H(\theta)$ n'a que des valeurs propres simples sur $]0,\pi[$, cette double dégénérescence de $E_2(\theta)$ en 0 disparaît pour $\theta > 0$. Par la théorie des perturbations dégénérées de Kato, la (ou les) valeur propre de $H(\theta)$ au voisinage de $E_2(0)$ est représentée par une fonction analytique. Si $E_2(0)$ est effectivement dégénérée, il y a donc deux fonctions analytiques et on prend la plus petite (existe puisqu'au delà de 0, ces fonctions ne peuvent plus se croiser en raison de la simplicité des valeurs propres de $H(\theta), \theta \in]0,\pi[$). On applique donc le raisonnement précédent pour cette fonction analytique ce qui conclut.

  On répète cet argument pour chaque $E_n(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

On a maintenant accès au théorème suivant (dont des éléments de preuves se trouvent dans [5]).

Théorème 3.39. *Soit V une fonction continue par morceaux 2π-périodique. Soit $H = -\Delta + V$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, $(E_n(0))_n$ les valeurs propres du problème périodique et $(E_n(\pi))_n$ les valeurs propres du problème antipériodique. Notons*

$$\alpha_{2n} = E_{2n}(\pi), \alpha_{2n+1} = E_{2n+1}(0) \ ; \ \beta_{2n} = E_{2n}(0), \beta_{2n+1} = E_{2n+1}(\pi).$$

Alors

1. *$\sigma(H)$ est constitué de bandes : $\sigma(H) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n, \beta_n]$. On appelle gap les intervalles $]\beta_n, \alpha_{n+1}[$ pour $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, la proposition 2.9 assure que tous les gaps pour V le potentiel de Mathieu sont non vides.*
2. *H n'a pas de valeurs propres et n'est constitué que de spectre essentiel.*
3. *S'il n'y a pas de gap, alors le potentiel est constant.*
4. *S'il n'y en a qu'un seul, alors V est une fonction elliptique de Weierstrass.*
5. *S'il y a un nombre fini de gap, alors V est réelle analytique.*

Références

[1] Michael S. P. Eastham. *Theory of ordinary differential equations.* Van Nostrand Reinhold, 1970.

[2] Michael S. P. Eastham. *Spectral theory of periodic differential equations.* Scottish Academic Press, Edinburgh, Scotland, November 1973.

[3] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Classics in mathematics. Springer, Berlin, Germany, 2 edition, February 1995.

[4] Ole A. Nielsen. *Direct integral theory.* CRC Press, London, England, August 2020.

[5] Michael Reed and Barry Simon. *IV : Analysis of Operators : Volume 4.* Methods of Modern Mathematical Physics. Academic Press, San Diego, CA, May 1978.

4 Annexe

4.1 Preuve de la proposition 1.12

Commençons par un résultat préliminaire.

Proposition 4.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors l'équation de Hill (2) admet une solution non triviale $k\alpha$-périodique si, et seulement si, il existe $\ell \in \mathbb{Z}, D = 2\cos(2\ell\pi/k)$.

Démonstration. Pour $k = 1$, on prend $\ell = 0$ et on utilise la proposition 1.11. Pour $k = 2$, on prend $\ell = 1$ et on utilise la proposition 1.11. Pour $k \geq 3$, on procède par double implication.

$\Longrightarrow$ Soit ψ une solution non triviale $k\alpha$-périodique. Si ψ est α- ou 2α-périodique, on a déjà le résultat. Sinon, nécessairement, $|D| \neq 2$. ψ étant périodique, par la proposition 1.10, on a $|D| < 2$ donc par le théorème 1.8, il existe λ_1, λ_2 des complexes tels que

$$\psi = \lambda_1 \exp(i\theta\bullet)p_1 + \lambda_2 \exp(-i\theta\bullet)p_2$$

où $\theta = \arg(\rho_1)/\alpha \in]0, \pi/\alpha[$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \psi(x + k\alpha) = \lambda_1 \exp(i\theta x)p_1 \exp(ik\alpha\theta) + \lambda_2 \exp(-i\theta x)p_2 \exp(-ik\alpha\theta).$$

Ainsi, par liberté, on a

$$\lambda_1 = \lambda_1 \exp(ik\alpha\theta) \ ; \ \lambda_2 = \lambda_2 \exp(-ik\alpha\theta).$$

Si $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$, alors ψ serait 2α-périodique ce qui est exclu. Ainsi, on demande

$$1 = \exp(ik\alpha\theta) = \exp(-ik\alpha\theta)$$

ce qui est équivalent à $\theta\alpha \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{k}\right]$. Or, $D = \rho_1 + \rho_2$ donc comme ρ_1 et ρ_2 sont conjugués (on est dans le cas $|D| < 2$), on a $D = 2\cos(\arg(\rho_1)) \in 2\cos\left(\frac{2\pi\mathbb{Z}}{k}\right)$.

$\Longleftarrow$ Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $D = 2\cos(2\pi\ell/k)$. Alors $|D| \leq 2$. Si $D = 2$ ou $D = -2$, nécessairement, $k = 1$ ou $k = 2$ donc le cas est déjà traité. Si $|D| < 2$, les solutions sont de la forme

$$\psi = \lambda_1 \exp(i\theta\bullet)p_1 + \lambda_2 \exp(-i\theta\bullet)p_2$$

avec $\theta = \arg(\rho_1)/\alpha$. Or $D = 2\cos(\arg(\rho_1)) = 2\cos(\alpha\theta)$ donc

$$\alpha\theta = \frac{2\pi\ell}{k} \text{ ou } \alpha\theta = -\frac{2\pi\ell}{k}.$$

Ainsi, $\theta = \pm\frac{2\pi\ell}{k\alpha}$ donc $\exp(-i\theta\bullet)$ est bien $k\alpha$-périodique. Les applications p_1 et p_2 sont α- donc $k\alpha$-périodique donc par produit et somme, ψ est $k\alpha$-périodique.

$\square$

On peut maintenant conclure cette sous-section.

Démonstration de la proposition 1.12

Soit ψ une solution 2α-périodique. Alors par la proposition 4.1, il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $D = 2\cos(\ell\pi)$. Ainsi, $D = \pm 2$ donc comme ψ est bornée, par le théorème 1.8, ψ s'écrit

- $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ si $D = 2$ donc ψ est α-périodique.
- $\lambda_1 \exp\left(i\frac{\pi}{\alpha}\bullet\right) p_1 + \lambda_2 \exp\left(i\frac{\pi}{\alpha}\bullet\right) p_2$ si $D = -2$ donc ψ est α-antipériodique.

Supposons maintenant quel'équation de Hill (2) possède une solution $k\alpha$-périodique où $k \in \mathbb{N}^*$ mais pas de solution α ou 2α-périodique. Par la proposition 4.1, il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $D = 2\cos(2\ell\pi/k)$ avec $k \geq 3$. Nécessairement, $|D| \neq 2$ donc par la preuve de la proposition 4.1, comme $|D| < 2$, les solutions sont de la forme

$$\lambda_1 \exp(i\theta\bullet)p_1 + \lambda_2 \exp(-i\theta\bullet)p_2$$

avec $\theta \in \frac{2\pi\mathbb{Z}}{k\alpha}$. Les solutions sont donc $k\alpha$-périodique.

$\square$

4.2 Preuve de la proposition 1.13

Démonstration. Montrons déjà que si φ_1 est paire et φ_2 est impaire. *En effet, si y est solution, alors $y \circ (-\mathrm{Id})$ l'est aussi. Ainsi, φ_1 et $\varphi_1 \circ (-\mathrm{Id})$ vérifient l'équation (2) avec les conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Par le théorème de Cauchy-Lispchitz, $\varphi_1 = \varphi_1 \circ (-\mathrm{Id})$. On fait le même travail avec φ_2 et $-\varphi_2 \circ (-\mathrm{Id})$.*

Soit maintenant y une solution non triviale de l'équation (2). Alors y s'écrit $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$. On ne montre que le premier point, les autres sont tout à fait analogues.

- Si y est α-périodique paire, alors par parité, $y = \lambda\varphi_1$ où $\lambda \neq 0$. Ainsi, par α-périodicité,

$$\varphi_1(\alpha/2) = \varphi_1(-\alpha/2)\ ;\ \varphi_1'(\alpha/2) = \varphi_1'(-\alpha/2).$$

  φ_1 étant paire, φ_1' est impaire donc $\varphi_1'(\alpha/2) = -\varphi_1'(-\alpha/2)$: ainsi, $\varphi_1'(\alpha/2) = 0$.
- Si $\varphi_1'(\alpha/2) = 0$, notons $f = \varphi_1 \circ \left(\frac{\alpha}{2} + \mathrm{Id}\right)$ et $g = \varphi_1 \circ \left(\frac{\alpha}{2} - \mathrm{Id}\right)$. On va montrer que $f = g$.

  On voit que f et g vérifient (2) par parité et périodicité. Elles s'égalent en 0 et leurs dérivées aussi. Ainsi, par Cauchy-Lipschitz, $f = g$ et φ_1 est bien α-périodique.

□

4.3 Théorie de Floquet : cas d'un système

$$y' = C(x)y \tag{13}$$

où $C : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est continue par morceaux α-périodique.

Proposition 4.2. Il existe $\rho \neq 0$ et ψ une solution non triviale de (13) telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x + \alpha) = \rho\psi(x).$$

Démonstration. Soit Φ une matrice fondamentale de solutions avec $\Phi(0) = I$. Comme $\Phi(\bullet + \alpha)$ est aussi une matrice fondamentale de solutions, par le théorème de changement de base, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\Phi(\bullet + \alpha) = \Phi P. \tag{14}$$

De plus, toute solution y de (13) s'écrit $\Psi = \Phi c$ où c est une matrice colonne constante. Ainsi,

$$\Psi(\bullet + \alpha) = \rho\Psi \iff \Phi(\bullet + \alpha)c = \rho\Phi c \iff \Phi(P - \rho I_n)c = 0.$$

Ainsi, la proposition est satisfaite si, et seulement si, $\det(P - \rho I_n) = 0$. Comme P est à valeurs complexes, χ_P admet une racine complexe notée ρ. Par ailleurs, $\rho \neq 0$ car P est inversible. Soit donc c un vecteur propre de A pour la valeur propre c. Alors $\Psi = \Phi c$ convient. □

On écrit P sous sa forme de Jordan. Notons $\rho_1, \cdots, \rho_N$ les racines simples de χ_A et $\sigma_1, \cdots, \sigma_M$ les racines multiples de χ_P de multiplicités respectives $r_1, \cdots, r_M$. Alors P est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_N \end{pmatrix} & & & & \\ & \boxed{J_{r_1}(\sigma_1)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{J_{r_M}(\sigma_M)} \end{pmatrix} =: B.$$

Notons $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P = QBQ^{-1}$.

Comme B est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = \exp(\alpha\mathrm{M})$. Soit $\Psi = \Phi Q$ et $P = \Psi\exp(-\bullet\mathrm{M})$. Alors

$$P(\bullet + \alpha) = \Psi(\bullet + \alpha)\exp(-a\mathrm{M})\exp(-\bullet\mathrm{M}) = \Psi BB^{-1}\exp(-\bullet\mathrm{M}) = P$$

puisque $\Psi(\bullet + \alpha) = \Phi(\bullet + \alpha)Q = \Phi PQ = \Phi QB = \Psi B$. Ainsi, P est périodique et $\Psi = P\exp(\bullet\mathrm{M})$. On connait la forme de M ce qui donne le résultat suivant.

Proposition 4.3. Il existe un système fondamental de solutions de (13) constitué de $\psi_1, \cdots, \psi_N$ et $\psi_{k,1}, \cdots, \psi_{k,r_k}$ pour tout $k \in [\![1, M]\!]$, des fonctions α-périodiques $p_1, \cdots, p_N, p_{k,1}, \cdots, p_{k,r_k}$ pour tout $k \in [\![1, M]\!]$, des complexes $m_1, \cdots, m_N$ et $\widetilde{m}_1, \cdots, \widetilde{m}_M$ tels que

$$\forall 1 \leq j \leq N, \psi_j = \exp(m_j \bullet) p_j$$

et

$$\forall k \in [\![1, M]\!], \forall \ell \in [\![1, r_k]\!], \psi_{k,\ell} = \exp(\widetilde{m}_k \bullet) \left(p_{k,\ell} + \sum_{s=1}^{\ell-1} \frac{\prod_{j=0}^{s-1} (\bullet - j\alpha)}{s!(\alpha\sigma_k)^s} p_{k,s} \right).$$

Corollaire 4.4. Les solutions de (13) sont bornées si, et seulement si, $\forall 1 \leq k \leq N, |\rho_k| \leq 1$ et $\forall 1 \leq j \leq M, |\sigma_j| < 1$. De plus, (13) admet une solution périodique si, et seulement si, $\rho = 1$ est racine de χ_A.

On termine en donnant une condition nécessaire pour que toutes les solutions soient α-périodiques. Cette condition est exclusif aux systèmes : il ne s'applique pas pour (1).

Proposition 4.5. Supposons que dans (13), C est α-périodique. Soit G une primitive de C. Soit t_1, t_2 deux réels. On suppose qu'il existe des fonctions différentiables f_1, f_2 telles que

1. $(G \circ f_1)' = (G \circ f_2)'$.
2. $f_1 = f_2$ en t_1 et $f_1 = f_2 + a$ en t_2.

Alors toutes les solutions de (13) sont α-périodiques.

Démonstration. Soit Φ matrice fondamentale de solutions vérifiant $\Phi(0)$ comme dans la preuve de la proposition 4.2. Soit $Y_i = \Phi \circ f_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Alors

$$Y_i' = f_i' \Phi' \circ f_i = f_i'(C\Phi) \circ f_i = (G \circ f_i)' \Phi \circ f_i = (G \circ f_i)' Y_i.$$

Ainsi, Y_1 et Y_2 sont solutions de $Y' = (G \circ f_1) Y$ par l'hypothèse (1). Par l'hypothèse (2) et Cauchy-Lipschitz, $Y_1 = Y_2$. Encore par (2), on a

$$Y_1(t_2) = \Phi(f_2(t_2) + a) = \Phi(f_2(t_2))P = Y_2(t_2)P$$

donc $P = I_n$ et $\Phi(\bullet + \alpha) = \Phi$. Ainsi, on obtient un système fondamental de solutions α-périodique donc toutes les solutions le sont. □

4.4 Preuve de la proposition 2.2

Démonstration. Traitons d'abord le cas $Q \geq 0$. Alors

$$\forall g \in \mathcal{F}, J(g, g) = \int_0^\alpha p(x) g'(x) \overline{g'(x)} + q(x) g(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x \geq 0.$$

Prenons $g = f - \sum_{n=0}^{N} \langle f, \psi_n \rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}} \psi_n \in \mathcal{F}$. Alors

$$0 \leq J(g,g) = J(f,f) - \sum_{n=0}^{N} \overline{\langle f, \psi_n \rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}}} J(f, \psi_n) - \sum_{n=0}^{N} \langle f, \psi_n \rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}} J(\psi_n, f) + \sum_{n=0}^{N} |\langle f, \psi_n \rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}}|^2 \lambda_n.$$

Or, $J(f, \psi_n) = \lambda_n \langle f, \psi_n \rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}}$ et $J(\psi_n, f) = \lambda_n \overline{\langle f, \psi_n \rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que le membre de droite vaut

$$J(f,f) - \sum_{n=0}^{N} |\langle f, \psi_n \rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}}|^2 \lambda_n.$$

On conclut en passant à la limite.

Traitons le cas général. Soit q_0 tel que pour presque tout $x \in [0, \alpha]$, on a $\widetilde{Q}(x) := Q(x) + q_0 s(x) \geq 0$. Soit

$$(Py')'(x) + (\Lambda s - \widetilde{Q})(x) y(x) = 0 \tag{$\widetilde{4}$}$$

avec $\Lambda = \lambda + q_0$. L'opérateur associé est noté $\widetilde{\mathcal{L}}$. Les valeurs propres sont les $\{\lambda_n + q_0\}_{n\in\mathbb{N}}$: en effet, elles sont associées au mêmes fonctions propres que pour (4) donc comme $\sigma(\widetilde{\mathcal{L}})$ est discret, elles coïncident et ce, avec les mêmes multiplicités. L'assertion $\widetilde{Q} \geq 0$ entraine donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_n + q_0)|\langle f, \psi_n\rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}}|^2 \leq \int_0^\alpha P(x)|f'(x)|^2 + (Q(x) + q_0 s(x))|f(x)|^2\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\alpha P(x)|f'(x)|^2 + Q(x)|f(x)|^2\mathrm{d}x + q_0\int_0^\alpha s(x)|f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

Par la formule de Plancherel,

$$\int_0^\alpha s(x)|f(x)|^2\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}|\langle f, \psi_n\rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{per}}}|^2$$

ce qui conclut. □

4.5 Calculs pour les cas particuliers de la sous-section 2.1

4.5.1 Cas particulier : $P = s = 1$ et $Q = 0$

On considère donc l'équation $y'' + \lambda y = 0$. Alors $\lambda_0 = 0$ puisque c'est une valeur propre et pour tout $\lambda < 0$, l'équation différentielle n'a que des solutions non bornées : 0 est donc bien la plus petite valeur propre. Remarquons que chaque valeur propre est de multiplicité 2.

Pour $\lambda > 0$, les solutions sont de la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$ où A, B sont des réels. Soit φ_1 la solution de l'équation différentielle telle que $\varphi_1(0) = 1, \varphi_1'(0) = 0$. Alors $\varphi_1 = \cos(\sqrt{\lambda}\bullet)$. Soit φ_2 la solution telle que $\varphi_2(0) = 0, \varphi_2'(0) = 1$. Alors $\varphi_2 = \sin(\sqrt{\lambda}\bullet)$.

On impose que les solutions sont α-périodiques. Soit A, B deux réels et $y : x \in \mathbb{R} \mapsto A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$ une solution de l'équation différentielle. Alors

$$y(0) = A\ ;\ y(\alpha) = A\cos(\sqrt{\lambda}\alpha) + B\sin(\sqrt{\lambda}\alpha)\ ;\ y'(0) = B\sqrt{\lambda}\ ;\ y'(\alpha) = B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\alpha) - A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\alpha).$$

Pour respecter la périodicité, on obtient donc

$$\begin{cases} A = A\cos(\sqrt{\lambda}\alpha) + B\sin(\sqrt{\lambda}\alpha) \\ B = B\cos(\sqrt{\lambda})\alpha - A\sin(\sqrt{\lambda}\alpha) \end{cases}$$

Matriciellement, on a

$$\begin{pmatrix} \cos(u) - 1 & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $u = \sqrt{\lambda}\alpha$. Alors le déterminant de la matrice du système est $(\cos(u) - 1)^2 + \sin^2(u) = 2(1 - \cos(u))$. Pour avoir une solution non nulle, il faut et suffit que $\cos(u) = 1$. Or

$$\cos(u) = 1 \iff \sqrt{\lambda}\alpha \equiv 0[2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \lambda = \frac{4k^2\pi^2}{\alpha^2}.$$

On fait le même travail pour les solutions α-antipériodique. Pour $\lambda > 0$, les conditions aux limites donne

$$\begin{pmatrix} \cos(u) + 1 & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant ici est $2(1 + \cos(u))$ pour avoir une solution non nulle, il faut et suffit que $\cos(u) = -1$. Or $\cos(u) = -1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \lambda = \dfrac{(2k+1)^2\pi^2}{\alpha^2}$.

Ainsi, on a bien $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \dfrac{4\lfloor n/2\rfloor^2\pi^2}{\alpha^2}$ et de même pour les $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mu_n = \dfrac{(2\lfloor n/2\rfloor + 1)^2\pi^2}{\alpha^2}$.

4.5.2 Cas particulier : $P = 1, Q = 0$ et s est constante par morceaux

On prend la fonction

$$s_0 : x \in \left]-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right[\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 9 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

et on périodise s_0 sur tout $\mathbb{R}$. On appelle s la fonction périodique. On cherche à résoudre $y'' + \lambda s y = 0$. Tout comme l'exemple précédent, montrons déjà que $\lambda < 0$ ne peut avoir lieu.

Pour cela, on fait appel à un résultat plus général. Si on a $y'' + qy = 0$ où $q < 0$, alors y n'est pas bornée. En effet, $(y^2)'' = 2(y')^2 + 2yy'' = 2((y')^2 - qy^2) \geq 0$. Ainsi, y^2 est convexe. Supposons que y soit bornée. Alors y^2 l'est aussi mais étant convexe, y^2 est constante.

- Si y^2 s'annule, alors y^2 est constant égal à 0 donc y est identiquement nulle.
- Si y^2 ne s'annule pas, y ne s'annule pas également donc y est de signe constant, disons positif. Alors $y = \sqrt{y^2}$ et y^2 étant constant, y l'est aussi. Ainsi, $y'' + qy = 0$ entraîne $qy = 0$ donc $y = 0$

Ainsi, si y est une solution bornée, c'est la solution nulle. En contraposant, toute solution non triviale est non bornée.

Dans notre cas, comme λs est du signe de λ, on n'a pas de valeurs propres strictement négatives. Comme 0 est valeur propre du problème périodique, on a encore $\lambda_0 = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$A\cos(\sqrt{\lambda}\bullet) + B\sin(\sqrt{\lambda}\bullet) \text{ sur } \left]-\frac{1}{2}\alpha, 0\right[\text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

et

$$C\cos(3\sqrt{\lambda}\bullet) + D\sin(3\sqrt{\lambda}\bullet) \text{ sur } \left]0, \frac{1}{2}\alpha\right[\text{ avec } C, D \in \mathbb{R}.$$

Ces mêmes solutions sont continues et dérivables en 0 ce qui impose la condition $A = C$ et $B = 3D$ entre les constantes. Soit donc y solution de l'équation différentielle et C, D deux réels tels que

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}\alpha, 0\right[, y(x) = C\cos(\sqrt{\lambda}x) + 3D\sin(\sqrt{\lambda}x) \ ; \ \forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\alpha\right[, y(x) = C\cos(3\sqrt{\lambda}x) + D\sin(3\sqrt{\lambda}x).$$

Posons $u = \dfrac{\sqrt{\lambda}\alpha}{2}$.

y est périodique donc en utilisant les conditions aux bords,

$$\begin{pmatrix} \cos(3u) - \cos(u) & \sin(3u) + 3\sin(u) \\ 3\sin(3u) + \sin(u) & -3\cos(3u) + 3\cos(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est

$$\begin{aligned} -3(\cos(3u) - \cos(u))^2 - (3\sin(3u) + \sin(u))(\sin(3u) + 3\sin(u)) &= 6\cos(3u)\cos(u) - 10\sin(u)\sin(3u) - 6 \\ &= 3\cos(2u) + 3\cos(4u) - 5\cos(2u) + 6\cos(4u) - 6 \\ &= 5 - 2\cos(2u) + 8\cos(4u) \\ &= 2(-7 - \cos(2u) + 8\cos^2(2u)). \end{aligned}$$

Ainsi, le déterminant est nul si, et seulement si $\cos(2u) = 1$ ou $\cos(2u) = -\dfrac{7}{8}$. Notons $\theta = \arccos(-7/8)$. Alors

$$\begin{aligned} \cos(2u) = -\frac{7}{8} &\iff 2u \equiv \theta[2\pi] \text{ ou } 2u \equiv -\theta[2\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \exists \varepsilon \in \{-1, 1\}, \sqrt{\lambda}\alpha = \varepsilon\theta + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \exists \varepsilon \in \{-1, 1\}, \lambda = \left(\frac{\varepsilon\theta + 2k\pi}{\alpha}\right)^2 \end{aligned}$$

Enfin, si $\cos(2u) = 1$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\sqrt{\lambda}\alpha = 2k\pi$ *i.e.* $\lambda = \dfrac{4k^2\pi^2}{\alpha^2}$. Par ailleurs, si $\cos(2u) = 1$, u est de la forme $k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $\sin(3u) = \sin(u) = 0$ et $\cos(3u) = -\cos(u)$ donc

$$\begin{pmatrix} \cos(3u) - \cos(u) & \sin(3u) + 3\sin(u) \\ 3\sin(3u) + \sin(u) & -3\cos(3u) + 3\cos(u) \end{pmatrix} = 0_2$$

ce qui entraîne que $\lambda = \dfrac{4k^2\pi^2}{\alpha^2}$ est une valeur propre double pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Finalement, on a $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$ où

- si n s'écrit $4k+1$, alors $\lambda_n = \dfrac{(\theta+2k\pi)^2}{\alpha^2}$.
- si n s'écrit $4k+2$, alors $\lambda_n = \dfrac{(-\theta+2(k+1)\pi)^2}{\alpha^2}$.
- si n s'écrit $4k+3$ ou $4k+4$, alors $\lambda_n = \dfrac{4(k+1)^2\pi^2}{\alpha^2}$.

Pour le problème antipériodique, on procède de même et on aboutit à la matrice

$$\begin{pmatrix} -\cos(3u)-\cos(u) & -\sin(3u)+3\sin(u) \\ -3\sin(3u)+\sin(u) & 3\cos(3u)+3\cos(u) \end{pmatrix}$$

avec $u = \dfrac{\sqrt{\lambda}\alpha}{2}$. Son déterminant est

$$\begin{aligned} -3(\cos(3u)+\cos(u))^2 - (3\sin(u)-\sin(3u))(\sin(u)-3\sin(3u)) &= -6-6\cos(3u)\cos(u)+10\sin(3u)\sin(u) \\ &= -6-3\cos(2u)-3\cos(4u)+5\cos(2u)-5\cos(4u) \\ &= -6+2\cos(2u)-8\cos(4u) \\ &= -2(8\cos^2(2u)-\cos(2u)-1). \end{aligned}$$

Soit $\tau = \arccos\left(\dfrac{1-\sqrt{33}}{16}\right)$, $\nu = \arccos\left(\dfrac{1+\sqrt{33}}{16}\right)$. Alors $0<\nu<\tau<\pi$. Le déterminant est nul si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel qu'on soit dans l'un des 4 cas suivant :

- $\sqrt{\lambda}\alpha = \nu + 2k\pi$
- $\sqrt{\lambda}\alpha = -\nu + 2k\pi$
- $\sqrt{\lambda}\alpha = \tau + 2k\pi$
- $\sqrt{\lambda}\alpha = -\tau + 2k\pi$

On a $2k\pi+\nu < 2k\pi+\tau < (2k+2)\pi-\tau < (2k+2)\pi-\nu$ ce qui entraîne qu'on a $\mu_0 \le \mu_1 \le \cdots \le \mu_n \le \cdots$ où

- si n s'écrit $4k+1$, alors $\mu_n = \dfrac{(\nu+2k\pi)^2}{\alpha^2}$.
- si n s'écrit $4k+2$, alors $\mu_n = \dfrac{(\tau+2k\pi)^2}{\alpha^2}$.
- si n s'écrit $4k+3$, alors $\mu_n = \dfrac{(2(k+1)\pi-\tau)^2}{\alpha^2}$.
- si n s'écrit $4k+4$, alors $\mu_n = \dfrac{(2(k+1)\pi-\nu)^2}{\alpha^2}$.

4.6 Preuve des lemmes 2.6, 2.7 et 2.8

4.6.1 *Démonstration du lemme 2.6*

Soit $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \mu - \text{pp } x \in \mathbb{R}, Q(x) - \Lambda s(x) > 0$. Soit $\lambda \le \Lambda$. Soit y_λ une solution non nulle de (4) avec $y_\lambda(0) \ge 0, y_\lambda'(0) \ge 0$ (dont l'existence est assurée de Cauchy-Lipschitz). Alors $y_\lambda \not\equiv 0$ donc

- soit $y_\lambda(0) > 0$ et dans ce cas, par continuité de y_λ, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in]0,\delta[, y_\lambda(x) > 0$.
- soit $y_\lambda(0) = 0$ et dans ce cas, $y_\lambda'(0) \neq 0$ (sinon, $y_\lambda \equiv 0$ par Cauchy-Lipschitz) donc $y_\lambda' > 0$. Par continuité de y_λ', il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in]0,\delta[, y_\lambda'(x) > 0$. Ainsi, y_λ est strictement croissante sur $]0,\delta[$. De $y_\lambda(0) = 0$, on tire $y_\lambda > 0$ sur $]0,\delta[$.

Soit donc $\delta > 0$ tel que $y_\lambda > 0$ sur $]0,\delta[$. Alors pour tout $x \in]0,\delta[$,

$$(py_\lambda')'(x) = (Q(x) - \lambda s(x))y_\lambda(x) > 0$$

par hypothèse. Ainsi, py_λ' croît strictement sur $]0,\delta[$ donc comme $p > 0$, de $y_\lambda'(0) \ge 0$, on tire $y_\lambda' > 0$ sur $]0,\delta[$. Ainsi, y_λ croît strictement sur $]0,\delta[$ donc est en particulier strictement positive.

Soit maintenant $M = \sup\limits_{m \in \mathbb{R}^{+*}} \{y_\lambda > 0 \text{ sur }]0,m[\}$. Alors si M est fini, on prolonge par continuité y_λ en M et on applique le raisonnement précédent avec les conditions $y_\lambda(M) > 0, y_\lambda'(M) > 0$ et on obtient qu'il existe $\delta > 0$ tel que $y_\lambda > 0$ sur $]0, M+\delta[$. Ainsi, $M = +\infty$ et $y_\lambda > 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi, $(py')' > 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Finalement, y' et y sont strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Appliquons maintenant ce résultat. Alors $\varphi_1(\bullet,\lambda), \varphi_2(\bullet,\lambda)$ vérifient les hypothèses imposées sur y_λ. On en déduit que

$$\varphi_1(\alpha,\lambda) > \varphi_1(0,\lambda) = 1 \ ; \ \varphi_2'(\alpha,\lambda) > \varphi_2'(0,\alpha) = 1$$

donc $D(\lambda) > 2$. Cela est vrai pour tout $\lambda \le \Lambda$ ce qui conclut.

□

4.6.2 *Démonstration du lemme 2.7*

Par le théorème de Schwarz, comme $\varphi_1(\bullet,\lambda)$ vérifie (4), on a

$$\forall x \in [0,\alpha], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \frac{\partial}{\partial x}\left(P(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi_1(x,\lambda)\right) + (\lambda s(x) - Q(x))\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi(x,\lambda) = -s(x)\varphi_1(x,\lambda).$$

Grâce aux conditions initiales, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi_1(0,\lambda) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi_1(0,\lambda) = 0.$$

$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi_1(x,\lambda)$ est donc une solution de $(Py')'(x) + (Q(x) - \lambda s(x))y(x) = -s(x)\varphi_1(x,\lambda)$: par le théorème de la variation de la constante, on a $\forall x \in [0,\alpha], \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi_1(x,\lambda) = -\int_0^x \frac{\varphi_1(x,\lambda)\varphi_2(t,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\varphi_1(t,\lambda)}{W(\varphi_1(\bullet,\lambda),\varphi_2(\bullet,\lambda))(x)}\frac{-s(t)\varphi_1(t,\lambda)}{P(x)}\mathrm{d}t$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi_1(x,\lambda) = \frac{1}{P(0)}\int_0^x [\varphi_1(x,\lambda)\varphi_2(t,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\varphi_1(t,\lambda)]s(t)\varphi_1(t,\lambda)\mathrm{d}t \tag{15}$$

puisque $x \mapsto P(x)W(\varphi_1(\bullet,\lambda),\varphi_2(\bullet,\lambda))(x)$ est constant (il suffit de dériver). De même, on a

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi_2(x,\lambda) = \frac{1}{P(0)}\int_0^x [\varphi_1(x,\lambda)\varphi_2(t,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\varphi_1(t,\lambda)]s(t)\varphi_2(t,\lambda)\mathrm{d}t. \tag{16}$$

On veut dériver $\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi_2$ par rapport à x. On rappelle cette formule : formellement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en notant $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} u(t,x)\mathrm{d}t = \Phi(a(x),b(x),x)$ où $\Phi(\alpha,\beta,\gamma) = \int_\alpha^\beta u(t,\gamma)\mathrm{d}t$, on a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) &= a'(x)\partial_1\Phi(a(x),b(x),x) + b'(x)\partial_2\Phi(a(x),b(x),x) + \partial_3\Phi(a(x),b(x),x)\\ &= -a'(x)u(a(x),x) + b'(x)u(b(x),x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \partial_x u(t,x)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

où le calcul de $\partial_3\Phi$ provient d'une dérivation sous le signe intégral.

Pour appliquer ce résultat, il suffit donc de montrer que

$$x \mapsto \int_0^\alpha [\varphi_1(x,\lambda)\varphi_2(t,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\varphi_1(t,\lambda)]s(t)\varphi_2(t,\lambda)\mathrm{d}t$$

est dérivable sous le signe intégrale, ce qui est le cas puisque $\varphi_1(\bullet,\lambda), \varphi_2(\bullet,\lambda)$ sont toutes deux analytiques sur $[0,\alpha]$. On obtient donc

$$\forall x \in [0,\alpha], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi_2(x,\lambda) = 0 + 0 + \frac{1}{P(0)}\int_0^x \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,\lambda)\varphi_2(t,\lambda) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,\lambda)\varphi_1(t,\lambda)\right]s(t)\varphi_2(t,\lambda)\mathrm{d}t \tag{17}$$

et de même,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi_1(x,\lambda) = \frac{1}{P(0)}\int_0^x \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,\lambda)\varphi_2(t,\lambda) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,\lambda)\varphi_1(t,\lambda)\right]s(t)\varphi_1(t,\lambda)\mathrm{d}t \tag{18}$$

Notons $\psi_1 = \varphi_1(\alpha,\lambda), \psi_1' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\alpha,\lambda), \psi_2 = \varphi_2(\alpha,\lambda)$ et $\psi_2' = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,\lambda)$. Alors

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}, D'(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi_1(\alpha,\lambda) + \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_2(\alpha,\lambda)\\ &= \frac{1}{P(0)}\int_0^\alpha [\psi_1\varphi_2(t,\lambda) - \psi_2\varphi_1(t,\lambda)]\varphi_1(t,\lambda) + (\psi_1'\varphi_2(t,\lambda) - \psi_2'\varphi_1(t,\lambda))\varphi_2(t,\lambda)]s(t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{P(0)}\int_0^\alpha [\psi_1'(\varphi_2(t,\lambda))^2 + (\psi_1 - \psi_2')\varphi_1(t,\lambda)\varphi_2(t,\lambda) - \psi_2(\varphi_1(t,\lambda))^2]s(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On a donc

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, D'(\lambda) = \frac{1}{P(0)}\int_0^\alpha [\psi_1'(\varphi_2(t,\lambda))^2 + (\psi_1 - \psi_2')\varphi_1(t,\lambda)\varphi_2(t,\lambda) - \psi_2(\varphi_1(t,\lambda))^2]s(t)\mathrm{d}t. \tag{19}$$

Ainsi, comme $D^2(\lambda) - 4 - (\psi_1 - \psi_2')^2 = 4\psi_2\psi_1'$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
4\psi_2 p(0)D'(\lambda) &= \int_0^\alpha [4\psi_2\psi_1'(\varphi_2(t,\lambda))^2 + (4\psi_2\psi_1 - 4\psi_2\psi_2')\varphi_1(t,\lambda)\varphi_2(t,\lambda) - 4\psi_2^2(\varphi_1(t,\lambda))^2]s(t)\mathrm{d}t \\
&= -(4 - D^2(\lambda)\int_0^\alpha \varphi_2(t,\lambda)^2 s(t)\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^\alpha [-4\psi_2^2(\varphi_1(t,\lambda))^2 - (\psi_1 - \psi_2')^2(\varphi_2(t,\lambda))^2 + 4(\psi_1 - \psi_2')\varphi_1(t,\lambda)\varphi_2(t,\lambda)\psi_2]s(t)\mathrm{d}t \\
&= -(4 - D^2(\lambda))\int_0^\alpha \varphi_2(t,\lambda)^2 s(t)\mathrm{d}t - \int_0^\alpha [2\psi_2\varphi_1(t,\lambda) - (\psi_1 - \psi_2')\varphi_2(t,\lambda)]^2 s(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a donc

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, 4\psi_2 p(0)D'(\lambda) = -(4 - D^2(\lambda))\int_0^\alpha \varphi_2(t,\lambda)^2 s(t)\mathrm{d}t - \int_0^\alpha [2\psi_2\varphi_1(t,\lambda) - (\psi_1 - \psi_2')\varphi_2(t,\lambda)]^2 s(t)\mathrm{d}t < 0 \text{ si } |D(\lambda)| < 2 \tag{20}$$

Ainsi, en particulier, $D'(\lambda) \neq 0$ quand $|D(\lambda)| < 2$.

□

4.6.3 *Démonstration du lemme 2.8*

$\Longleftarrow$ Dans ce cas, la matrice de monodromie est l'identité *i.e.* $\psi_1 = \psi_2' = 1$. En injectant dans (19), on obtient $D'(\lambda_n) = 0$.

$\Longrightarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $D(\lambda_n) = 2$ et $D'(\lambda_n) = 0$. Alors en injectant dans (20), on obtient

$$\int_0^\alpha [2\psi_2\varphi_1(t,\lambda_n) + (\psi_1 - \psi_2')\varphi_2(t,\lambda_n)]^2 s(t)\mathrm{d}t = 0$$

donc pour presque tout $t \in [0,\alpha]$,

$$2\psi_2\varphi_1(t,\lambda_n) + (\psi_1 - \psi_2')\varphi_2(t,\lambda_n) = 0.$$

Par liberté de $(\varphi_1(\bullet,\lambda_n), \varphi_2(\bullet,\lambda_n))$, on a $\psi_2 = 0$ et $\psi_1 = \psi_2'$. On en déduit en injectant dans (19) que $\psi_1' = 0$.

On a bien l'équivalence souhaitée. Concernant $D''(\lambda_n)$, il faut faire des calculs assez lourds mais il y a beaucoup de simplification car $\psi_2 = \psi_1' = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
D''(\lambda_n)P(0) = \int_0^\alpha \Bigg\{ &\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_1(\alpha,\lambda_n)\varphi_2^2(t,\lambda_n) + 2\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_2(t,\lambda_n)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_1(\alpha,\lambda_n)\right)\varphi_2(t,\lambda_n) \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1(\alpha,\lambda_n) - \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_2(\alpha,\lambda_n)\right)\varphi_1(t,\lambda_n)\varphi_2(t,\lambda_n) \\
&+ \left(\varphi_1(\alpha,\lambda_n) - \frac{\partial}{\partial x}\varphi_2(\alpha,\lambda_n)\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\varphi_1(t,\lambda_n)\varphi_2(t,\lambda_n)\right) \\
&- \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_2(\alpha,\lambda_n)\varphi_1^2(\alpha,\lambda_n) - 2\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1(t,\lambda_n)\varphi_2(,\lambda_n)\varphi_1(t,\lambda_n)\Bigg\} s(t)\mathrm{d}t \\
= \int_0^\alpha \Bigg\{ &\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_1(\alpha,\lambda_n)\varphi_2^2(t,\lambda_n) + 0 + \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1(\alpha,\lambda_n) - \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_2(\alpha,\lambda_n)\right)\varphi_1(t,\lambda_n)\varphi_2(t,\lambda_n) + 0 \\
&- \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_2(\alpha,\lambda_n)\varphi_1^2(\alpha,\lambda_n) - 0\Bigg\} s(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On utilise maintenant les expressions (15), (16), (17) et (18) en utilisant $\psi_2 = \psi_1' = 0$ et $\psi_1 = \psi_2' = 1$. On a

$$\begin{aligned}
D''(\lambda_n)P(0) &= \frac{1}{P(0)}\int_0^\alpha -\varphi_1(\xi,\lambda_n)s(\xi)\varphi_2(\xi,\lambda_n)\mathrm{d}\xi \int_0^\alpha \varphi_2^2(t,\lambda_n)s(t)\mathrm{d}t \\
&\quad + \left(\frac{1}{P(0)}\int_0^\alpha \varphi_2(\xi,\lambda_n)s(\xi)\varphi_1(\xi,\lambda_n) + \varphi_1(\xi,\lambda_n)s(\xi)\varphi_2(\xi,\lambda_n)\mathrm{d}\xi\right) \times \int_0^\alpha \varphi_1(t,\lambda_n)\varphi_2(t,\lambda_n)s(t)\mathrm{d}t \\
&\quad - \frac{1}{P(0)}\int_0^\alpha \varphi_2(\xi,\lambda_n)s(\xi)\varphi_2(\xi,\lambda_n)\mathrm{d}\xi \int_0^\alpha \varphi_1^2(t,\lambda_n)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{P(0)}\left[\left(\int_0^\alpha \varphi_1(t,\lambda_n)\varphi_2(t,\lambda_n)s(t)\mathrm{d}t\right)^2 - \int_0^\alpha \varphi_1^2(t,\lambda_n)s(t)\mathrm{d}t \int_0^\alpha \varphi_2^2(t,\lambda_n)s(t)\mathrm{d}t\right] \\
&< 0 \text{ par Cauchy-Schwarz.}
\end{aligned}$$

On réalise des calculs analogues pour le problème antipériodique.

□

4.7 Équation de Mathieu : preuve de la proposition 2.9

Démonstration. Supposons qu'il existe $(\lambda, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tels que toutes les solutions de (9) sont π-périodiques (la preuve pour le cas antipériodique est similaire). Soit φ_1, φ_2 système fondamental de solutions tels que $W(\varphi_1, \varphi_2)(0) = I_2$. Comme $\cos(2\bullet)$ est paire, on a vu dans la preuve de la proposition 1.13 (voir section 4.2) que φ_1 est paire et φ_2 est impaire.

Ainsi, par la décomposition (réelle) en série de Fourier,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_1(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2kx) \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}, \varphi_2(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(2kx).$$

Comme $\cos(2\bullet)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, φ_1 et φ_2 le sont aussi et on peut donc dériver les séries de Fourier terme à terme. Puisque φ_1 vérifie (9), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^{+\infty} 4k^2 a_k \cos(2kx) + \frac{\lambda a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda a_k \cos(2kx) &= qa_0\cos(2x) + q\sum_{k=1}^{+\infty} 2\cos(2x)\cos(2kx)a_k \\
&= qa_0\cos(2x) + q\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\left(\cos(2(k+1)x) + \cos(2(k-1)x)\right) \\
&= qa_0\cos(2x) + q\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1}\cos(2kx) + q\sum_{k=2}^{+\infty} a_{k-1}\cos(2kx) \\
&= qa_0\cos(2x) + qa_1 + qa_2\cos(2x) + q\sum_{k=2}^{+\infty}(a_{k+1} + a_{k-1})\cos(2kx).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda a_0 = 2qa_1$ et

$$\forall k \geq 1, (\lambda - 4k^2)a_k = q(a_{k-1} + a_{k+1}). \tag{21}$$

On fait de même pour φ_2 : on a $b_0 = 0$ et

$$\forall k \geq 1, (\lambda - 4k^2)b_k = q(b_{k-1} + b_{k+1}). \tag{22}$$

Soit $k \geq 1$. On réalise $b_k \times (21) - a_k \times (22)$ et comme $q \neq 0$, on a

$$b_k(a_{k-1} + a_{k+1}) = a_k(b_{k+1} + b_{k-1})$$

d'où

$$b_k a_{k+1} - a_k b_{k+1} = b_{k-1}a_k - b_k a_{k-1}.$$

Ainsi, la suite $(b_k a_{k+1} - a_k b_{k+1})_{k\geq 1}$ est constante égale à son premier terme en 0 qui est $-a_0 b_1$. Si on suppose par l'absurde que $a_0 = 0$, alors l'égalité $\lambda a_0 = 2qa_1$ donne $a_1 = 0$ donc toute la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle (par (21)), ce qui est exclu. De même, si b_1 était nul, alors $b_0 = 0$ et $b_1 = 0$ entraîne que toute la suite est nulle (par (22)) ce qui est exclu.

Maintenant, comme les séries de Fourier convergent, on a la convergence ℓ^2 des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0. Ainsi, $(b_k a_{k+1} - a_k b_{k+1})_{k\geq 1}$ converge aussi et par passage à la limite, elle converge vers 0. Puisque cette suite est constante, on a $0 = a_0 b_1$ ce qui est absurde.

Finalement, il n'existe pas de couples satisfaisant la condition souhaitée.

□

4.8 Produit tensoriel d'espaces de Hilbert

Dans la suite, $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ désignent deux Hilbert. On note, pour $(x_1, x_2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$,

$$x_1 \otimes x_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 & \to & \mathbb{C} \\ (y_1, y_2) & \mapsto & (x_1, y_1)_{\mathcal{H}_1}(x_2, y_2)_{\mathcal{H}_2} \end{array}.$$

Notons $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(x_1 \otimes x_2 : (x_1, x_2) \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ munie de la forme bilinéaire $(\bullet, \bullet)_\otimes$ définie par

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2, (x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2)_\otimes = (x_1 \otimes x_2)(y_1, y_2) = (x_1, y_1)_{\mathcal{H}_1}(x_2, y_2)_{\mathcal{H}_2}.$$

Proposition 4.6. $(\bullet, \bullet)_\otimes$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- $(\bullet, \bullet)_\otimes$ est bien définie. En effet, décomposons $0_\mathcal{E} \in \mathcal{E}$ de deux manières :

$$0_\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i^1 \otimes x_i^2) = \sum_{j=1}^{m} \beta_i (y_i^1 \otimes y_i^2)$$

avec $(\alpha_i)_{1 \le i \le n}, (\beta_j)_{1 \le j \le m}$ deux familles de complexes et $(x_i^1, x_i^2), (y_i^1, y_i^2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ pour tout $i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, m]\!]$. Soit $h \in \mathcal{E}$. On l'écrit

$$h = \sum_{k=1}^{p} h_k (z_k^1 \otimes z_k^2)$$

où $(h_1, \cdots, h_p)$ sont des complexes, $(z_k^1, z_k^2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ pour tout $1 \le k \le p$. Alors

$$\begin{aligned}(0_\mathcal{E}, h)_\otimes &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \alpha_i \overline{h_k} (x_i^1, z_k^1)_{\mathcal{H}_1} (x_i^2, z_k^2)_{\mathcal{H}_2} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \overline{h_k} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^1 \otimes x_i^2 (x_k^1, z_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \overline{h_k} 0_\mathcal{E}(z_k^1, z_k^2) = 0.\end{aligned}$$

En fait,

$$(0_\mathcal{E}, h)_\otimes = \sum_{k=1}^{p} \overline{h_k} \underbrace{(0_\varepsilon, z_k^1 \otimes z_k^2)_\otimes}_{=0_\varepsilon(z_k^1, z_k^2)} = 0.$$

- Il est clair que $(\bullet, \bullet)_\otimes$ est bilinéaire et hermitien.
- Montrons que $(\bullet, \bullet)_\otimes$ est définie positive. Soit $h \in \mathcal{E}$. Alors h s'écrit

$$h = \sum_{k=1}^{p} h_k (z_k^1 \otimes z_k^2)$$

comme avant. Alors on note $M_1 := \mathrm{Vect}(z_k^1 : 1 \le k \le p), M_2 := \mathrm{Vect}(z_k^2 : 1 \le k \le p\}$. Soit $(x_i^1)_{1 \le i \le n}$ une base orthonormée de M_1 et $(x_j^2)_{1 \le j \le m}$ une base orthonormée de M_2. Alors z_k^1 s'écrit $\sum_{i=1}^{n} c_{k,i}^1 x_i^1$ et z_k^2 s'écrit $\sum_{j=1}^{m} c_{k,j}^2 x_j^2$. Alors

$$h = \sum_{k=1}^{p} h_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{k,i}^1 c_{k,j}^2 (x_i^1 \otimes x_j^2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} (x_i^1 \otimes x_j^2).$$

Ainsi,

$$(h, h)_\otimes = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} \overline{\alpha_{\nu,\ell}} \underbrace{(x_i^1 \otimes x_j^2, x_\nu^1 \otimes x_\ell^2)_\otimes}_{=\delta_{i,\nu}\delta_{j,\ell}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |\alpha_{i,j}|^2 \ge 0.$$

Ainsi, $(h, h)_\otimes = 0$ équivaut à $\forall 1 \le i \le n, \forall 1 \le j \le m, \alpha_{i,j} = 0$ et donc $h = 0$.

$\square$

Définition 4.7. $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ désigne le complété de $(\mathcal{E}, (\bullet,\bullet)_\otimes)$ ce qui fait de $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, (\bullet,\bullet)_\otimes)$ un espace de Hilbert.

Proposition 4.8. Si $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$) est une base hilbertienne de $\mathcal{H}_1$ (resp. $\mathcal{H}_2$), alors $(x_i^1 \otimes x_j^2)_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$.

Démonstration. OK. □

Proposition 4.9. Il existe un unique isomorphisme isométrique ψ de $\mathrm{L}^2(X,\mu) \otimes \mathcal{H}'$ dans $\mathrm{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}')$ tel que

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(X,\mu), \forall u \in \mathcal{H}, \psi(f \otimes u) = f(\bullet)u.$$

On note φ la réciproque de ψ.

Démonstration. Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}'$. Alors

$$\forall f \in \mathcal{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}'), \forall x \in X, f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (f(x), e_k)_{\mathcal{H}} e_k.$$

Posons donc

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}') & \to & \mathrm{L}^2(X,\mu) \otimes \mathcal{H}' \\ & f & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (f(\bullet), e_k)_{\mathcal{H}'} \otimes e_k. \end{array}$$

- φ est clairement linéaire.
- φ est une isométrie. En effet,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(f)\|_\otimes^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} ((f(\bullet), e_k)_{\mathcal{H}'} \otimes e_k, (f(\bullet), e_j)_{\mathcal{H}'} \otimes e_j)_\otimes \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} \|(f(\bullet), e_k)_{\mathcal{H}}'\|_2^2 \,\delta_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_X |(f(z), e_k)_{\mathcal{H}}'|^2 \mathrm{d}z \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} \int_X \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} |(f(z), e_k)_{\mathcal{H}'}|^2}_{=\|f(z)\|_{\mathcal{H}'}^2} \mathrm{d}z = \|f\|^2.
\end{aligned}$$

- En particulier, φ est continue.
- u est surjective. En effet, il suffit de montrer que $\varphi(\mathcal{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}'))$ génère $\{f \otimes u : f \in \mathrm{L}^2(X,\mu), u \in \mathcal{H}'\}$. Soit $f_u : x \in X \mapsto f(x)u \in \mathcal{H}'$ pour tout $f \in \mathcal{L}^2(X,\mu), u \in \mathcal{H}'$. Soit $F \in \mathrm{L}^2(X,\mu)$, f un représentant de F dans $\mathcal{L}^2(X,\mu)$ et $u \in \mathcal{H}'$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(f_u) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (f_u(\bullet), e_k)_{\mathcal{H}'} \otimes e_k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (f(\bullet)u, e_k)_{\mathcal{H}'} \otimes e_k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} ((u, e_k)_{\mathcal{H}'} f(\bullet)) \otimes e_k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (u, e_k)_{\mathcal{H}'} (f \otimes e_k) \\
&= f \otimes \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} (u, e_k) e_k}_{=u}
\end{aligned}$$

par continuité du produit matriciel.

On a en particulier $\varphi(f_u) = f \otimes u$.

- Les éléments de $\ker(u)$ sont les fonctions nulles presque partout. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}') \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{L}^2(X,\mu) \otimes \mathcal{H}' \\
\mathrm{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}') \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

On en déduit par le premier théorème d'isomorphisme que $\widetilde{\varphi}$ est bijection linéaire, qui, de surcroît, est automatiquement isométrique. On le note φ dans la suite. Par le théorème d'isomorphisme de Banach, la continuité de φ entraine que φ est un homéomorphisme. Notons ψ sa réciproque. Alors

$$\forall (f_k, u_k)_{1 \leq k \leq n} \in \left(\mathcal{L}^2(X,\mu) \otimes \mathcal{H}'\right)^n, \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}, \psi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \otimes u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(\bullet) u_k.$$

On étend par densité et continuité pour avoir ψ. □

<u>Définition</u> 4.10. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$. Alors on définit $A \otimes B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ par

$$\forall f \otimes g \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \forall (x,y) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2, (A \otimes B)(f \otimes g)(x,y) = (Af \otimes Bg)(x,y).$$

Exemple 4.11. Soit $A : u \in \mathcal{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}') \mapsto (x \mapsto A_0 u(x)) \in \mathcal{L}^2(X,\mu;\mathcal{H}')$. Alors $uAu^{-1} = I \otimes A_0$. En effet, soit $(f,x) \in \mathcal{L}^2(X,\mu) \otimes \mathcal{H}'$. Alors

$$\begin{aligned}
(uAv)(f \otimes x) &= uA\underbrace{v(f \otimes x)}_{=f(\bullet)x} = u(A_0 f(\bullet)x) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (A_0 f(\bullet)x, e_k)_{\mathcal{H}'} \otimes e_k = \sum_{k=1}^{+\infty} (A_0 x, e_k)_{\mathcal{H}'} (f \otimes e_k) \\
&= \left(f \otimes \sum_{k=1}^{+\infty} (A_0 x, e_k) e_k\right) = (f \otimes A_0 x) = (I \otimes A_0)(f \otimes x).
\end{aligned}$$

Exemple 4.12. Soit $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(X,\mu)$ et $M_\varphi : f \in \mathrm{L}^2(X,\mu) \mapsto \varphi f \in \mathrm{L}^2(X,\mu)$. Alors avec les mêmes notations,

$$\begin{aligned}
u(\varphi(\bullet)I)v(f \otimes x)(g,y) &= u(\varphi(\bullet)f(\bullet)x)(g,y) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi(\bullet)f(\bullet)x, e_k)_{\mathcal{H}} \otimes e_k(g,y) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi f, g)_{\mathrm{L}^2} (x, e_k)_{\mathcal{H}} (e_k, y)_{\mathcal{H}} \\
&= (\varphi f \otimes x)(g,y) \\
&= (M_\varphi \otimes I)(f \otimes x)(g,y)
\end{aligned}$$

4.9 Rapide point sur des semigroupes

On fait un rapide point sur les semigroupes, section XIII.12 de [5].

<u>Définition</u> 4.13. Soit (X,μ) un espace mesuré σ-fini, $f \in \mathrm{L}^2(X,\mu)$ et A un opérateur borné sur $\mathrm{L}^2(X,\mu)$. Alors

- on dit que f est positif lorsque $\forall \mu - \text{pp } x \in X, f(x) \geq 0$ et $f \not\equiv 0$.
- on dit que f est strictement positif lorsque $\forall \mu - \text{pp } x \in X, f(x) > 0$.

- On dit que A est positif lorsque Af est positive quand f l'est.
- On dit que A est strictement positif lorsque Af est strictement positive quand f est positive non identiquement nulle.
- On dit que A est ergodique lorsque A préserver la positivité et pour tout $u, v \in \mathrm{L}^2(X, \mu)$ toutes deux positives, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(u, A^n v) \neq 0$.

Théorème 4.14 (Théorème XIII.44 de [5])**.** *Soit H un opérateur autoadjoint semi-borné inférieurement sur $\mathrm{L}^2(X, \mu)$. On suppose que e^{-tH} est positif pour tout $t > 0$ et que $E = \inf(\sigma(H))$ est une valeur propre. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *E est valeur propre simple avec une fonction propre strictement positive.*
2. *Il existe $\lambda < E$ tel que $(H - \lambda)^{-1}$ est ergodique.*
3. *Il existe $t > 0$ tel que e^{-tH} est ergodique.*
4. *Pour tout $\lambda < E$, $(H - \lambda)^{-1}$ est strictement positif.*
5. *Pour tout $\lambda < E$, e^{-tH} est strictement positif.*

4.10 Preuve de la proposition 3.37

Démonstration. Soit $a > 0$. Notons $K_a = \left(\frac{-\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a\right)^{-1}$ qui est un opérateur borné sur $\mathrm{L}^2(X, \mu)$. Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $g = K_a f$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-\partial_x^2 + a)g = f$$

donc

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, (\xi^2 + a)\mathcal{F}(g)(\xi) = \widehat{F}(f)(\xi)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(g)(\xi) e^{i\xi x} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) \frac{e^{i\xi x}}{\xi^2 + a} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \mathcal{F}(G_x)(y) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \mathcal{F}(G_0)(y - x) \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

où $G_x : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^{itx}}{t^2 + a}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $\tau \in \mathbb{R}$. Alors

$$\widehat{G_0}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-it\tau}}{t^2 + a} \mathrm{d}t = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-it\tau}}{t^2 + a} \mathrm{d}t.$$

Les pôles de l'intégrande sont $\pm i\sqrt{a}$. Pour établir le bon contour, distinguons deux cas.

- Si $\tau < 0$, alors considérons γ le demi-cercle supérieur de rayon $R > 2\sqrt{a}$ centré en 0 et notons Γ son contour. Alors

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a} \mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-it\tau}}{t^2 + a} \mathrm{d}t + \int_0^\pi \frac{e^{-i\tau(Re^{i\theta})}}{(Re^{i\theta})^2 + a} \mathrm{d}\theta.$$

  Notons $\psi(R, \theta) = \dfrac{e^{-i\tau(Re^{i\theta})}}{(Re^{i\theta})^2 + a}$ pour $R > 2\sqrt{a}$ et $\theta \in]0, \pi[$. Alors

$$\forall R > 2\sqrt{a}, \forall \theta \in]0, \pi[, |\psi(R, \theta)| \leq \frac{e^{\tau R \sin(\theta)}}{R^2 - a} \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

  puisque $\tau < 0$ et $\sin(\theta) > 0$ (car $\theta \in]0, \pi[$). De plus,

$$\forall R > 2\sqrt{a}, \forall \theta \in]0, \pi[, |\psi(R, \theta)| \leq \frac{1}{3a}$$

donc par le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^\pi \frac{e^{-i\tau(Re^{i\theta})}}{(Re^{i\theta})^2+a}\mathrm{d}\theta \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ensuite, par le théorème des résidus,

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz\tau}}{z^2+a}\mathrm{d}z = 2i\pi\mathrm{Res}(\psi)(i\sqrt{a}) = 2i\pi \lim_{z\to i} \frac{e^{-i\tau z}}{z^2+a}(z-i\sqrt{a}) = 2i\pi\frac{e^{-i\tau i\sqrt{a}}}{i\sqrt{a}+i\sqrt{a}} = \pi\frac{e^{\tau\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}.$$

Ainsi,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{-it\tau}}{t^2+a}\mathrm{d}t = \pi\frac{e^{\tau\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}$$

- Si $\tau > 0$, on fait de même avec cette fois-ci le demi-cercle inférieur de rayon $R > 2\sqrt{a}$ centré en 0 et on trouve

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{-it\tau}}{t^2+a}\mathrm{d}t = \pi\frac{e^{-\tau\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}.$$

Ainsi,

$$\forall \tau\in\mathbb{R}, \widehat{G_0}(\tau) = \pi\frac{e^{-|\tau|\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}.$$

On obtient donc

$$\forall x\in\mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-|x-y|\sqrt{a}}\mathrm{d}y.$$

Ensuite, notons $(K_a)_\theta$ l'opérateur $\left[\left(\frac{-\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)_\theta + a\right]^{-1}$. Alors K_af et $(K_a)_\theta f$ vérifient $-y''+ay = f(x)$ sur $]0,2\pi[$ donc $K_af - (K_a)_\theta f \in \mathrm{Vect}(e^{\bullet\sqrt{a}}, e^{-\bullet\sqrt{a}})$. Soit donc $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x\in]0,2\pi[, (K_a)_\theta(f) = g(x) + \lambda e^{\sqrt{a}x} + \mu e^{-\sqrt{a}x}.$$

Comme $(K_a)_\theta(f)$ doit satisfaire les conditions aux bords (12), on impose

$$e^{i\theta}(K_a)_\theta(f)(0) = (K_a)_\theta(f)(2\pi)\ ;\ e^{i\theta}[(K_a)_\theta(f)]'(0) = [(K_a)_\theta(f)]'(2\pi)$$

i.e.

$$\begin{cases} e^{i\theta}(g(0)+\lambda+\mu) = g(2\pi) + \lambda e^{2\pi\sqrt{a}} + \mu e^{-2\pi\sqrt{a}} \\ e^{i\theta}(g'(0)+\lambda+\mu) = g'(2\pi) + \lambda\sqrt{a}e^{2\pi\sqrt{a}} - \mu\sqrt{a}e^{-2\pi\sqrt{a}} \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta}-e^{2\pi} & e^{i\theta}-e^{-2\pi} \\ e^{i\theta}-\sqrt{a}e^{2\pi\sqrt{a}} & -e^{i\theta}+\sqrt{a}e^{-2\pi\sqrt{a}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(2\pi)-e^{i\theta}g(0) \\ g'(2\pi)-e^{i\theta}g'(0)\end{pmatrix}.$$

Traitons le membre de droite. Notons $A_- = \int_0^{2\pi} e^{-y}f(y)\mathrm{d}y$ et $A_+ = \int_0^{2\pi} e^{y}f(y)\mathrm{d}y$. On a

$$2\sqrt{a}g(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(y)e^{-|2\pi-y|\sqrt{a}}\mathrm{d}y = e^{-2\pi\sqrt{a}}A_+$$

et

$$2\sqrt{a}g(0) = \int_0^{2\pi} f(y)e^{-|y|\sqrt{a}}\mathrm{d}y = A_-.$$

Pour les dérivées, on a

$$\forall x\in\mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_{\mathbb{R}} f'(y)e^{-|x-y|\sqrt{a}}\mathrm{d}y$$

donc

$$2\sqrt{a}g'(2\pi) = \int_0^{2\pi} f'(y)e^{-|2\pi-y|\sqrt{a}}\mathrm{d}y = e^{-2\pi\sqrt{a}}\int_0^{2\pi} f'(y)e^{y}\mathrm{d}y = -e^{-2\pi\sqrt{a}}A_+$$

par intégration par parties et

$$2\sqrt{a}g'(0) = \int_0^{2\pi} f'(y)e^{-|y|\sqrt{a}}\mathrm{d}y = A_-$$

encore par intégration par parties. On peut commencer à prouver les différents points.

1. Ici, on pose $a = 1$. Alors on a

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} - e^{2\pi} & e^{i\theta} - e^{-2\pi} \\ e^{i\theta} - e^{2\pi} & -e^{i\theta} + e^{-2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(2\pi) - e^{i\theta} g(0) \\ g'(2\pi) - e^{i\theta} g'(0) \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} &= \frac{1}{2(e^{i\theta} - e^{2\pi})(e^{i\theta} - e^{-2\pi})} \begin{pmatrix} e^{i\theta} - e^{-2\pi} & e^{i\theta} - e^{-2\pi} \\ e^{i\theta} - e^{2\pi} & e^{2\pi} - e^{i\theta} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2\pi} A_+ - e^{i\theta} A_- \\ -e^{-2\pi} A_+ - e^{i\theta} A_- \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dfrac{-e^{i\theta}}{e^{i\theta} - e^{2\pi}} A_- \\ \dfrac{e^{-2\pi}}{e^{i\theta} - e^{-2\pi}} A_+ \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (e^{2\pi - i\theta} - 1)^{-1} A_- \\ (e^{2\pi + i\theta} - 1)^{-1} A_+ \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in]0, 2\pi[, (K_1)_\theta(f) = g(x) + (e^{2\pi - i\theta} - 1)^{-1} \frac{A_-}{2} e^x + (e^{2\pi + i\theta} - 1)^{-1} \frac{A_+}{2} e^{-x} = \int_0^{2\pi} G_{1,\theta}(x, y) f(y) \mathrm{d}y$$

où

$$G_{1,\theta}(x, y) = \frac{1}{2} e^{-|x-y|} + \frac{1}{2}(e^{2\pi - i\theta} - 1)^{-1} e^{x-y} + \frac{1}{2}(e^{2\pi + i\theta} - 1)^{-1} e^{y-x}.$$

pour tout $x, y \in]0, 2\pi[$. En particulier,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |G_{1,\theta}(x, y)|^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y < +\infty$$

donc $(K_1)_\theta$ est un opérateur à noyau de Hilbert-Schmidt et donc en particulier compact.

2. On reprend a quelconque. Alors $\forall x \in]0, 2\pi[, (K_a)_\theta(f)(x) = g(x) + \lambda(a, \theta) e^{\sqrt{a}x} + \mu(a, \theta) e^{-\sqrt{a}x}$ où $\lambda(a, \theta), \mu(a, \theta)$ sont des complexes de sorte que $(K_a)_\theta f$ vérifient les conditions aux bords (12).
Écrivons $\xi = \sqrt{a}x$. Alors

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a = a \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + 1 \right).$$

Notons $u = (K_a)_\theta f$: u vérifie les conditions aux bords

$$u(2\pi) = e^{i\theta} u(0) \ ; \ u'(2\pi) = e^{i\theta} u'(0).$$

Notons $v : \xi \in \mathbb{R} \mapsto u(\xi/\sqrt{a})$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a \right) u(x) = f(x) \iff \forall \xi \in \mathbb{R}, a \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + 1 \right) v(\xi) = f(\xi/\sqrt{a})$$

et

$$v(2\pi\sqrt{\alpha}) = u(2\pi) = e^{i\theta} u(0) \ ; \ v'(2\pi\sqrt{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{a}} u'(2\pi) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i\theta} u'(0) = e^{i\theta} v'(0).$$

Les conditions aux bords (12) usuelles sont dilatées d'un facteur $\sqrt{a}$. Ainsi, on s'intéresse à l'opérateur $-\Delta_\theta$ mais sur l'intervalle $[0, 2\pi\sqrt{a}]$ au lieu de $[0, 2\pi]$. Le noyau de cet opérateur est le même que celui sur $[0, 2\pi]$ en remplaçant les occurrences de 2π par $2\pi\sqrt{a}$ ce qui donne le noyau $G_{1,\theta}^{(\sqrt{a})}$ défini par

$$G_{1,\theta}^{(\sqrt{a})}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} e^{-|\xi - \eta|} + \frac{1}{2}(e^{2\pi\sqrt{a} - i\theta} - 1)^{-1} e^{\xi - \eta} + \frac{1}{2}(e^{2\pi\sqrt{a} + i\theta} - 1)^{-1} e^{\eta - \xi}$$

où $\xi = \sqrt{a}x, \eta = \sqrt{a}y$. Alors comme

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a \right)^{-1} = \frac{1}{a} \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + 1 \right)^{-1}$$

on a, en rappelant $\xi = \sqrt{a}x$,

$$u(x) = \frac{1}{a} \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + 1 \right)^{-1} f(\xi/\sqrt{a}) = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi\sqrt{a}} G_{1,\theta}^{(\sqrt{a})}(\xi, \eta) f(\eta/\sqrt{a}) \mathrm{d}\eta = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} G_{1,\theta}^{(\sqrt{a})}(\sqrt{a}x, \sqrt{a}y) f(y) \mathrm{d}y.$$

Ainsi, le noyau de $(K_a)_\theta$, noté $G_{a,\theta}$ est $\dfrac{1}{\sqrt{a}} G_\theta^{(\sqrt{a})}(\sqrt{a}x, \sqrt{a}y)$. On remplace et on simplifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, G_{a,\theta}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{2} e^{-\sqrt{a}|x-y|} + \frac{1}{2} \left(e^{2\pi\sqrt{a} - i\theta} - 1 \right)^{-1} e^{\sqrt{a}(x-y)} + \frac{1}{2} \left(e^{2\pi\sqrt{a} + i\theta} - 1 \right)^{-1} e^{y-x} \right).$$

Pour $\theta = 0$, on trouve bien que le noyau est strictement positif. Ainsi, par le théorème XIII.44 de [5] et le fait que 0 soit valeur propre simple de $-\Delta_\theta$, on en déduit que $(\exp(t[-\Delta_\theta]_{\theta=0}))_{t>0}$ est un semigroupe strictement positif.

3. L'écriture de $(K_a)_\theta(f)$ obtenu à l'étape 2 est analytique en θ si bien que $\theta \mapsto K_\theta$ l'est.

□