Loi ζ et application

Thomas Chen

On étudie la loi ζ qui fait un pont entre les probabilités et les séries de fonctions. On en déduit l'expression eulérienne de la fonction ζ. Par exemple, on pourra regarder le sujet Centrale PC Maths 2 2018.

Exercice 1. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Soit $s > 1$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

1. Est-ce une loi d'une variable aléatoire ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement "n divise X". Montrer que $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille d'événements indépendants. En déduire

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

3. Calculer la probabilité qu'aucun carré outre 1 ne divise X.

Corrigé :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{n^{-s}}{\zeta(s)} > 0$ et

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} = 1$$

par définition.

2. Remarquons que $A_n = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}^*} \{X = nj\}$ est un événement et

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{j\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = nj) = \sum_{j\geq 1} \frac{n^{-s}j^{-s}}{\zeta(s)} = n^{-s}.$$

Soit $(p_i)_{i\in I}$, une liste de nombres premiers distincts. Par le lemme de Gauss, on a

$$\bigcap_{i\in I} A_{p_i} = A_{\prod_{i\in I} p_i}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_{p_i}\right) = \mathbb{P}(A_{\prod_{i\in I} p_i}) = \left(\prod_{i\in I} p_i\right)^{-s} = \prod_{i\in I} p_i^{-s} = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_{p_i}).$$

Les $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont donc indépendants et leurs complémentaires dans Ω le sont aussi. Notons $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des nombres premiers. On note $E_n = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_{p_i}}$ vérifiant $E_{n+1} \subset E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, en notant, $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(E).$$

Or $E = \{1\}$ puisque ne pas être divisible par un nombre premier revient à être inférieur strictement à 2 en valeur absolue. On est dans $\mathbb{N}^*$ donc il ne reste que 1. Ainsi, il suffit de calculer $\mathbb{P}(E_n)$ puisque $\mathbb{P}(E) = \dfrac{1}{\zeta(s)}$. On a

$$\mathbb{P}(E_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{P}(A_{p_i}) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)$$

où la deuxième égalité provient de l'indépendance des $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$. Ainsi, le produit de droite admet une limite quand $n \to +\infty$ et cette limite vaut $\mathbb{P}(E)$.

3. Si on note E, cet événement, on montre facilement que

$$E = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_{p^2}}.$$

A la question précédente, on a montré en réalité que si $(p_i)_i$ sont une famille d'élements deux à deux premiers entre eux, alors $(A_{p_i})_i$ sont indépendants. On en déduit l'indépendance des $(A_{p^2})_{p\in\mathcal{P}}$ donc l'indépendance de leurs événements contraires. On écrit alors, par continuité décroissante,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_{p^2}}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_{p_k^2}}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_{p_k^2}})\\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^{2s}}\right)\\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) = \frac{1}{\zeta(2s)}.
\end{aligned}$$