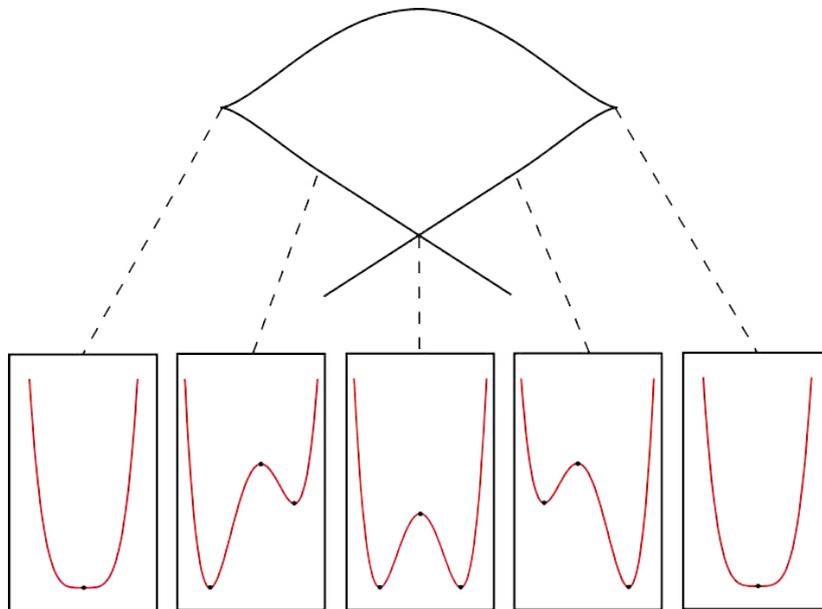

MÉMOIRE DE MAGISTÈRE
Master 2 Recherche de Mathématiques

**LES INVARIANTS HOMOLOGIQUES PAR FAMILLES
GÉNÉRATRICES DES SOUS-VARIÉTÉS LEGENDRIENNES**

Cyril FALCON

RÉSUMÉ. Dans ce mémoire, nous revenons sur le parcours de son auteur au sein du magistère de mathématiques de l'Université Paris-Sud (2014–2018) et nous compilons l'intégralité des travaux qu'il a réalisés sur cette période. Nous proposons également une brève initiation à ses recherches doctorales portant sur l'étude de la rigidité des sous-variétés legendriennes en topologie et géométrie de contact.



Responsable : Frédéric PAULIN

Date : de Septembre 2014 à Novembre 2018.

One might now say “symplectic geometry is all geometry”,
but I prefer to formulate it in a more geometrical form:
contact geometry is all geometry.

Vladimir Arnol'd

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements.....	6
Préambule.....	8
1. Mon parcours au sein du magistère de mathématiques.....	9
2. Une initiation à mes recherches doctorales.....	13
Conclusion sur le rôle du magistère dans mon parcours.....	35
Annexe A. Mes enseignements au sein du magistère.....	36
Annexe B. Mon mémoire de L3.....	37
Annexe C. Mon rapport d'apprentissage hors murs en L3.....	66
Annexe D. Mon mémoire de M1.....	98
Annexe E. Mon mémoire de M2 Enseignement.....	145
Annexe F. Mon cours spécifique de magistère 3 ^e année.....	201
Annexe G. Mon mémoire de M2 Recherche.....	220

REMERCIEMENTS

Je profite de ce mémoire qui vient clôturer ma scolarité pour remercier ceux qui ont contribué à ma réussite et qui m'ont porté là où j'en suis aujourd'hui.

Je tiens avant toute chose à remercier Frédéric Paulin, le responsable du magistère de mathématiques de l'Université Paris-Sud, pour son implication dans notre scolarité et ses nombreux conseils mathématiques pertinents.

J'adresse mes prochains remerciements à Nathalie Carrière, la secrétaire du magistère de mathématiques, car elle m'a toujours chaleureusement accueilli dans son bureau et a surtout constamment su être à mon écoute.

Il m'est également cher de témoigner toute ma gratitude à la Fondation Mathématique Jacques Hadamard pour la confiance qu'ils m'ont accordée en m'attribuant à deux reprises la bourse Sophie Germain.

Ce soutien financier m'a permis d'aborder plus sereinement mes deux années de master recherche et de bénéficier de conditions optimales à ma réussite.

Je sais entièrement gré à Frédéric Bourgeois d'avoir accepté de diriger mes recherches doctorales et de m'avoir proposé un sujet de thèse ambitieux et stimulant qui fait parfaitement échos à ma sensibilité mathématique.

J'ai vraiment le sentiment que c'est un privilège d'être l'un de ses étudiants, alors j'espère pouvoir être à la hauteur des espérances qu'il place en moi !

Je souhaite aussi remercier Frédéric Bourgeois (encore !), François Charles, Rémi Leclercq et Anne Vaugon d'avoir indépendamment encadré mes mémoires.

J'ai incontestablement beaucoup appris à leurs côtés et c'est en interagissant avec eux que j'ai progressivement découvert ma sensibilité mathématique.

Durant ma scolarité, j'ai eu la chance d'être l'élève d'enseignants impliqués qui ont véritablement su me communiquer leur passion pour les mathématiques. Je leur dois l'épanouissement que je connais actuellement dans la recherche, alors je me dois de leur exprimer ma profonde reconnaissance.

Je souhaite maintenant témoigner mon amitié sincère à Gédéon Chevallier, Elio Joseph et Marguerite Matheron pour la complicité que nous avons noué pendant notre scolarité orcéenne et leur constante présence depuis.

Malgré nos affinités et nos spécialisations bien distinctes, nos discussions étaient enrichissantes et m'ont permis d'adopter un œil nouveau sur mes thématiques. C'est l'une des raisons qui me réjouit de partager mon bureau avec Elio.

Je remercie aussi toutes les personnes qui ont fait l'effort de venir assister à ma soutenance et qui ont eu le courage d'écouter des mathématiques que je sais parfois être hermétiques et sûrement intimidantes.

Ces remerciements ne sauraient finalement être complets sans que j'adresse de tendres pensées à mes parents et à ma sœur, car je sais qu'il a parfois été difficile de me voir si absorbé par mes études et que je regrette que mon anxiété ait bien souvent été communicative.

Sachez que même si la teneur de mes travaux vous est naturellement obscure, vous avez toujours su m'apporter le soutien psychologique et le confort matériel qui étaient nécessaires à ma réussite.

Pour cela et tout le reste, je vous suis éternellement redevable...

PRÉAMBULE

Je voudrais ouvrir ce préambule par une anecdote amusante et révélatrice. Alors que j'étais encore un élève naïf et ignorant de terminale scientifique, une de mes lubies principales consistait à tracer, avec ma superbe calculatrice, toutes sortes de courbes préalablement prescrites.

J'obtenais ces figures tant désirées en juxtaposant un nombre fini de graphes, alors, assez naturellement, j'avais fini par me demander quelle pouvait être une description géométrique praticable des courbes pouvant être ainsi obtenues. Cela aurait été dommage de se lancer en vain dans la réalisation d'un dessin...

Ma question est restée plusieurs années sans réponse, alors quelle ne fut pas mon excitation quand on m'a présenté le théorème dit des sous-variétés¹. J'aime d'ailleurs penser que c'est cet intense émerveillement que j'ai ressenti qui m'a conduit vers la géométrie différentielle pour laquelle je vibre encore.

Ce document est une promenade mathématique rythmée par les années que j'ai passées au sein du magistère de l'Université Paris-Sud.

J'aurais préféré vous proposer une balade champêtre dans son campus boisé dont seuls les écureuils roux et les chevreuils viennent troubler la quiétude. Malheureusement, je ne peux que modestement vous inviter à découvrir mes belles années de magistère au travers de ces froides pages.

Ce mémoire débute par un descriptif par année de la formation que j'ai reçue, puis il se poursuit avec une brève initiation à mes thématiques de recherches. Sa première annexe contient les intitulés des enseignements que j'ai suivis, alors que les suivantes ont pour objectif de présenter, par ordre chronologique, tous les documents que j'ai rédigés au cours du magistère².

1. La classe des courbes qui m'intéressaient est décrite par trois propriétés équivalentes.
2. Je n'y ai apporté aucune modification depuis leur rédaction.

1. MON PARCOURS AU SEIN DU MAGISTÈRE DE MATHÉMATIQUES

En septembre 2014, après deux années de classe préparatoire MPSI et MP au sein du lycée Michel Montaigne de Bordeaux (Gironde, 33), j'ai intégré le magistère de mathématiques de l'Université Paris-Sud.

Dans les pages qui suivent, je détaille mon parcours au sein de cette formation et les intitulés des cours qui sont marqués d'une astérisque étaient obligatoires. La liste complète des cours auxquels j'ai assistés se trouve dans l'annexe A.

Tous détails supplémentaires sur le magistère de mathématiques de l'Université Paris-Sud sont disponibles à l'adresse suivante :

<https://www.math.u-psud.fr/-Magistere->

le lecteur y trouvera notamment le contenu détaillé de la formation par année.

1.1. La première année de magistère (2014-2015).

J'ai effectué ma première année de magistère en 2014-2015 au sein du L3 Mathématiques Fondamentales et Appliquées de l'Université Paris-Sud.

1.1.1. *Les cours spécifiques du magistère.*

Durant cette première année, j'ai suivi trois cours spécifiques du magistère :

- *Programmation, algorithmique et complexité** de Laurent Rozas,
- *Combinatoire algébrique* de Olivier Fouquet,
- *Compléments de topologie et théorie de la mesure** de Pascal Auscher.

Je n'ai malheureusement pas su profiter de l'enseignement de Laurent Rosas, car ma sensibilité scientifique est sûrement trop éloignée de l'informatique. Par contre, les deux autres cours m'ont au contraire profondément marqué.

J'ai encore aujourd'hui un souvenir très vif de mon émerveillement lorsque j'ai découvert les techniques de dénombrements à l'aide des séries génératrices³.

Plus pragmatiquement, c'est dans le cours de Pascal Auscher que j'ai appris à utiliser le théorème d'Ascoli qui me sert toujours dans mes recherches⁴.

1.1.2. *Les travaux encadrés de recherche.*

Durant cette première année de magistère, j'ai pour la première fois été initié à la recherche en mathématiques, ce qui a abouti à la rédaction d'un modeste document (voir l'annexe B) et à une soutenance orale.

Je travaillais avec Marguerite Matheron sous la direction de Rémi Leclercq. Notre travail consistait à comprendre et exploiter des arguments élémentaires de géométrie algébrique pour démontrer que la section d'un tore de révolution par l'un de ses plans bitangents est composée de deux cercles.

3. Elles n'ont rien à voir avec les *familles génératrices* de la section suivante.

4. Je veux comprendre le comportement de certaines trajectoires d'un antigradient alors que la métrique riemannienne subit une certaine dégénérescence.

1.1.3. *L'apprentissage hors murs.*

Cette première année de magistère était clôturée par un stage d'ouverture à effectuer dans un établissement qui n'est pas un laboratoire de mathématiques. J'en ai profité pour renouer avec la physique (voir l'annexe C).

J'ai effectué mon apprentissage hors murs au Laboratoire Ondes et Matière d'Aquitaine sous la direction de Thomas Bickel.

J'ai appris des techniques de résolution de certaines équations aux dérivées partielles linéaires avec pour prétexte d'étudier un écoulement de Marangoni, ce qui m'a permis de mieux profiter du module de *Théorie des distributions* donné par Thierry Ramond en M1.

1.2. La deuxième année de magistère (2015-2016).

J'ai effectué ma deuxième année de magistère en 2015-2016 au sein du M1 Jacques Hadamard de l'Université Paris-Sud.

1.2.1. *Les cours spécifiques du magistère.*

Cette deuxième année de magistère débutait par trois jours de conférences à l'Institut des Hautes Études Scientifiques de Bures-sur-Yvette.

J'ai tellement apprécié le cadre offert par l'IHES et le contenu des conférences que les deux années suivantes, j'ai à nouveau assisté à ces rentrées de Master. Elles permettent de mettre en relief les connaissances acquises auparavant, ce qui est vraiment précieux pour leur bonne assimilation.

Une nouvelle fois, j'ai aussi dû suivre des cours spécifiques pour le magistère :

- *Théorie spectrale et analyse harmonique** de Frédéric Paulin,
- *Surfaces de Riemann et théorie des revêtements* de Charles Favre.

J'étais très enthousiaste à l'idée de suivre ces deux enseignements.

Dans le cours de Frédéric Paulin, j'ai vraiment apprécié généraliser le théorème spectral classique de l'algèbre linéaire de dimension finie à tous les opérateurs autoadjoints compacts des espaces de Hilbert.

Le second cours devait être suivi à l'extérieur dans un établissement membre de l'Université Paris-Saclay, comme l'École Polytechnique dans mon cas.

Je souhaitais continuer à explorer mes affinités pour la topologie différentielle⁵, alors le cours de Charles Favre s'imposait comme une évidence et s'est avéré être un complément précieux à l'enseignement de *Géométrie* de Julien Duval.

⁵. Je voulais retrouver les mêmes sensations que celles que j'avais éprouvées durant le cours mémorable de *Topologie et calcul différentiel* de Dominique Hulin en L3.

1.2.2. *Les travaux encadrés de recherche.*

Durant cette deuxième année de magistère, j'ai étudié une partie d'un article contemporain de recherche, ce qui s'est conclu par la rédaction d'un mémoire (voir l'annexe D) et d'une soutenance orale.

Je travaillais sous la direction de François Charles sur une généralisation aux automorphismes polynomiaux des variétés affines du théorème classique de Skolem-Mahler-Lech sur les zéros des suites récurrentes linéaires.

Les thématiques de ce travail sont plutôt éloignées de la géométrie différentielle, mais je souhaitais explorer d'autres géométries avant de me spécialiser.

1.3. **La préparation de l'agrégation externe (2016-2017).**

Durant l'année 2016-2017 et selon les recommandations de mes enseignants, je me suis consacré à la préparation de l'agrégation externe de mathématiques que j'ai finalement obtenue 67^e sur 304 admis.

Cette année de préparation n'était vraiment pas passionnante ni palpitante⁶, mais avec le recul, je dois tout de même avouer qu'elle m'a incontestablement permis d'aborder plus sereinement mon M2 Recherche⁷.

Plus pragmatiquement, il est rassurant d'avoir une véritable sécurité d'emploi, alors que je m'engage dans le monde incertain de la recherche académique⁸.

Néanmoins, je ne pouvais pas me résigner à abandonner complètement toute forme de recherche pendant l'année complète de préparation de l'agrégation. J'ai alors choisi d'effectuer un stage de recherche sur le modèle des précédents travaux (voir l'annexe E) plutôt que d'enseigner à des lycéens.

Je travaillais sous la direction d'Anne Vaugon sur classification des immersions du cercle dans le plan donnée par le fameux théorème de Whitney-Graustein. Il s'agissait aussi de se familiariser avec les techniques classiques du h -principe⁹ qui jouent un rôle important et central dans mon domaine¹⁰.

Je veux d'ailleurs mentionner que Hansjörg Geiges a démontré¹¹ succinctement et très élégamment le théorème de Whitney-Graustein en utilisant uniquement des arguments élémentaires provenant de la géométrie de contact¹².

6. Les interrogations de 6h le samedi matin mettent du piment dans ces mornes semaines !

7. Je pense avoir beaucoup gagné en maturité mathématique durant cette année.

8. Je m'imagine quand même très mal face à une classe de collégiens ou lycéens, br.

9. J'ai d'ailleurs suivi un cours d'*Initiation aux h-principe* par Patrick Massot en M2.

10. J'anticipe en mentionnant qu'il s'agit du côté flexible de la géométrie de contact.

11. H. Geiges. A contact geometric proof of the Whitney-Graustein theorem. *L'Enseignement Mathématique*, 93–102 :55(1), 2009.

12. Ce qui tend à appuyer la citation de Vladimir Arnol'd en ouverture de mon mémoire.

1.4. La troisième année de magistère (2017-2018).

J'ai effectué ma troisième année de magistère en 2017-2018 au sein du M2 Arithmétique, Analyse et Géométrie de l'Université Paris-Sud dans lequel j'ai suivi des cours de géométrie différentielle et dynamique.

1.4.1. *Les cours spécifiques du magistère.*

Le choix du cours spécifique de la dernière année du magistère étant libre, j'ai décidé d'assister au cycle de conférences données en l'honneur de Jean Cerf qui s'est déroulé du 11 au 13 juin au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay.

J'ai rédigé un rapport augmenté sur l'un des exposés de cette conférence¹³, car les thématiques qui y étaient abordées sont véritablement proches de celles qui nourrissent mes recherches doctorales (voir l'annexe F).

D'ailleurs, au cours de cette année, j'ai eu l'occasion d'exposer, au séminaire du magistère, une version édulcorée du contenu de mon mémoire de recherche.

Je suis ravi de m'être essayé à cet exercice, car il s'agissait, sans nul doute, d'une excellente préparation aux auditions pour les attributions des allocations doctorales ministérielles que j'allais passer une poignée de mois plus tard.

Ma dernière année de magistère s'est finalement clôturée le 23 octobre 2018 avec une présentation de mes recherches doctorales qui se voulait accessible¹⁴. Le contenu de mon exposé fait l'objet de la partie suivante.

Ces trois expériences m'ont permis de satisfaire, au moins temporairement, ma volonté permanente d'échanger sur les mathématiques qui me passionnent¹⁵, ce qui est inestimable et profondément enrichissant à mes yeux.

1.4.2. *Le mémoire.*

Ma dernière année de magistère a aussi été marquée par la rédaction d'un véritable mémoire de recherche (voir l'annexe G).

Je travaillais sous la direction de Frédéric Bourgeois sur la géographie de l'homologie pour les familles génératrices des sous-variétés legendriennes.

Je m'abstiens de donner le moindre détail à ce sujet puisque Frédéric est devenu mon directeur de thèse et que mes recherches doctorales, dont nous allons maintenant parler, s'inscrivent dans la continuité directe de ce mémoire.

13. J'ai ajouté de nombreux détails pour que son contenu soit accessible à tous.

14. J'ai fait mon possible avec les trente minutes qui m'étaient accordées.

15. J'avoue que par moment, il s'agit plutôt d'obsession...

2. UNE INITIATION À MES RECHERCHES DOCTORALES

En octobre 2018, après ces quatre années d'études à l'Université Paris-Sud, j'ai intégré comme doctorant, sous la direction de Frédéric Bourgeois, l'équipe de Topologie et Dynamique du Laboratoire de Mathématiques d'Orsay.

Les pages qui suivent sont consacrées à une présentation sommaire de mes recherches sur la rigidité des sous-variétés legendriennes en topologie de contact. Elles sont financées par allocation du Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation sous le nom *Sur les propriétés des invariants homologiques par familles génératrices des sous-variétés legendriennes*.

J'ai écrit cette initiation à mes thématiques de recherche lors du premier mois de mon doctorat, ce qui m'a permis de m'imprégner plus profondément de mon sujet, mais surtout de prendre un recul précieux sur ces questions.

Le théorème suivant n'est pas explicitement donné dans mon document, mais il apparaît comme une conséquence directe des résultats dont je discute. Il pourra alors s'agir d'un fil directeur à la lecture de mon texte.

Théorème. Le nombre de cordes de Reeb d'une sous-variété legendrienne connexe qui admet une famille génératrice linéaire à l'infini est minoré par :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n b_k,$$

où b_k est le k -ième nombre de Betti de la sous-variété legendrienne donnée. Par ailleurs, cette borne inférieure est atteinte.

Une sous-variété legendrienne connexe qui n'admet pas de famille génératrice peut avoir moins de cordes de Reeb que la borne du théorème ci-dessus¹⁶.

Je regrette de ne pas avoir pu parler en détail de théorie de Morse-Bott-Cerf, mais cela n'aurait n'aurait fait qu'allourdir mon propos...

16. G. Dimitroglou Rizell. Knotted Legendrian surfaces with few Reeb chords. *Algebraic & Geometric Topology*, 11(5) :2903-2936, 2011.

LES INVARIANTS HOMOLOGIQUES PAR FAMILLES GÉNÉRATRICES DES SOUS-VARIÉTÉS LEGENDRIENNES

CYRIL FALCON

RÉSUMÉ. Les multiples aspects non-topologiques des symétries des variétés de contact font de la classification de leurs sous-variétés legendriennes une question véritablement riche et complexe qui est encore vastement ouverte. Dans ce dossier, nous illustrons la rigidité des isotopies legendriennes et nous adoptons la théorie de Morse-Bott-Cerf aux sous-variétés legendriennes des espaces de premiers jets enfin d'en construire des invariants homologiques. Ce document est une initiation aux recherches doctorales de son auteur dont les travaux consistent principalement à déterminer des résultats structuraux de ces invariants legendriens pour ensuite mieux en permettre le calcul et ainsi s'approcher de la classification des sous-variétés legendriennes.

INTRODUCTION

Depuis septembre 2018, je travaille sous la direction de Frédéric Bourgeois au sein de l'équipe Topologie et Dynamique du Département de Mathématiques de l'Université Paris-Sud (UMR 8628, CNRS).

Mes recherches doctorales consistent à dégager des résultats structuraux pour les invariants homologiques des sous-variétés legendriennes qui sont construits par la technique des familles génératrices.

Ces travaux s'inscrivent dans le vaste problème de la classification à isotopie legendrienne près des sous-variétés legendriennes dans les variétés de contact. Cette question extrêmement naturelle se formule de la manière suivante :

Question. Quand deux sous-variétés legendriennes d'une variété de contact peuvent-elles être déformées l'une sur l'autre ?

Ce sujet conserve une saveur empruntée de la théorie des nœuds topologiques, bien que de véritables contraintes fortes sur les déformations autorisées soient nouvellement imposées par la structure de contact ambiante.

Les sous-variétés legendriennes sont de très grandes codimensions dans les variétés de contact, mais elles sont pourtant de nature profondément rigide. Elles ne peuvent pas toujours être séparées par une symétrie de la variété de contact ambiante, même si aucune obstruction topologique ne s'y oppose.

Ce comportement est surprenant, car de manière intuitive cela signifie que les sous-variétés legendriennes sont encombrantes bien qu'elles soient petites. C'est ce phénomène contradictoire qui fait de la classification des sous-variétés legendriennes un problème indéniablement riche et complexe.

Les familles génératrices sont au cœur de mon doctorat, car elles permettent d'envisager une approche plutôt élémentaire par la théorie de Morse-Bott-Cerf à la classification des sous-variétés legendriennes.

Ce texte d'initiation à mes thématiques de recherche se voulant généraliste, il débute sur une présentation sommaire des objets de la géométrie de contact¹. J'évoque ensuite quelques phénomènes de rigidité des isotopies legendriennes afin de mieux motiver le développement des invariants par familles génératrices. Enfin, je m'efforce d'expliquer l'importance cruciale des résultats structuraux de ces invariants en expliquant comment ils permettent de s'affranchir des multiples difficultés techniques que leur calcul direct pose.

1. LA GÉOMÉTRIE ET LA TOPOLOGIE DE CONTACT

Forgeons-nous une intuition de la structure de contact standard ξ_0 de \mathbb{R}^3 en considérant un monocycle qui roule sans glisser sur un revêtement plan et cela en évitant toujours la direction Nord-Sud.

Nous encodons l'état mécanique du monocycle par un point (q, p, z) de \mathbb{R}^3 , avec (q, z) qui repère sa position et p la pente de sa roue² dans le plan (q, z) . Ainsi, comme le monocycle ne peut que pivoter ou se déplacer dans la direction de sa roue, sa trajectoire est tangente au champ de plans de \mathbb{R}^3 donné par :

$$\xi_0 = \ker(dz - pdq),$$

car cette distribution est engendrée par $\partial_p = (0, 1, 0)$ et $\partial_q + p\partial_z = (1, 0, p)$ qui traduisent les deux opérations élémentaires du contrôle du mouvement³. Autrement dit, la trajectoire $t \mapsto (q(t), p(t), z(t))$ du monocycle satisfait :

$$\dot{z} - p\dot{q} = 0,$$

et son mouvement est régi par une équation différentielle linéaire d'ordre un⁴.

Nous remarquons aussi que le crochet de Lie de ces deux vecteurs est :

$$[\partial_p, \partial_q + p\partial_z] = \partial_z \lrcorner \xi_0,$$

alors, d'après un théorème classique de Georg Frobenius (1875, [16]), il n'existe pas de surface de \mathbb{R}^3 qui soit partout tangente à la distribution de plans ξ_0 , c'est la définition de la *non-intégrabilité* d'un champ de plans.

Dans le langage de la géométrie de contact, nous disons que la trajectoire du monocycle est une *courbe legendrienne* de la *variété de contact* (\mathbb{R}^3, ξ_0) dont le champ de plans ξ_0 est la *structure de contact*.

1. La géométrie différentielle élémentaire est néanmoins supposée être maîtrisée, voir [24]

2. La direction Nord-Sud étant proscrite, la pente p est correctement définie.

3. Nous anticipons en faisant remarquer que dans cette situation, nous avons identifié \mathbb{R}^3 et l'espace de premiers jets de \mathbb{R} , ce qui justifie la notation adoptée pour ses coordonnées.

4. Malgré cette contrainte de mouvement, il existe toujours une trajectoire du monocycle joignant une paire de points donnée, il s'agit, par exemple, de l'approximation legendrienne.

La géométrie de contact intervient plus généralement dans tous les problèmes issus de la mécanique classique pour lesquels la vitesse du système est contrainte. Elle permet aussi de formuler le principe d'Huyghens de l'optique géométrique, ainsi que le premier principe de la thermodynamique.

Dans cette section, nous passons brièvement en revue les notions clés de la géométrie de contact qui sont nécessaires à la bonne compréhension du texte. Nous invitons notre lecteur à consulter l'ouvrage [20] de Hansjörg Geiges pour les démonstrations des résultats énoncés et d'autres détails supplémentaires, puis l'article [19] du même auteur pour un historique de la géométrie de contact.

1.1. Les structures de contact.

Soit M une variété différentielle de dimension impaire $2n + 1$.

Définition. Une *forme de contact* de M est une forme différentielle α sur M de degré 1 qui satisfait la condition de non-dégénérescence $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$.

Une forme de contact définit par dualité un unique champ de vecteurs.

Définition. Le *champ de Reeb* de α , noté R_α , est défini par les équations :

$$\alpha(R_\alpha) = 1, \quad d\alpha(R_\alpha, \cdot) \equiv 0.$$

Le champ R_α est transverse au champ de noyaux de α et dirige celui de $d\alpha$.

Une structure de contact de M est un champ d'hyperplans tangents à M qui minimise la dimension des sous-variétés de M qui lui sont partout tangentes, cette distribution est *maximalement non-intégrable*.

Définition. Une *structure de contact* ξ sur M est un champ d'hyperplans tangents à M qui est localement le noyau d'une forme de contact de M .

Une structure de contact étant non-intégrable, elle doit beaucoup tourner.

Exemple. Sur \mathbb{R}^{2n+1} de coordonnées $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, z)$, la 1-forme

$$\alpha_0 = dz - \sum_{k=1}^n p_k dq_k$$

est une forme de contact dont le champ de Reeb est donné par $\partial_z = (0, \dots, 0, 1)$.

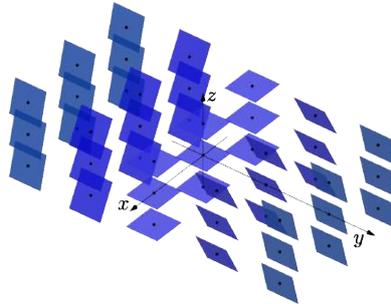


FIGURE. La structure de contact $\xi_0 = \ker(dz - pdq)$ de \mathbb{R}^3 .

Le noyau ξ_0 de α_0 est la *structure de contact standard* de la variété \mathbb{R}^{2n+1} .

1.2. Les sous-variétés legendriennes.

Soit (M, ξ) une variété de contact de dimension $2n + 1$.

Définition. Une sous-variété Λ de M de dimension n est *legendrienne* quand elle est partout tangente aux hyperplans de ξ , c'est-à-dire que $T\Lambda \subset \xi$.

Les sous-variétés legendriennes sont en tension avec les structures de contact, car elles sont de dimension maximale pour la propriété de tangence ci-dessus. Cette tension ne les empêche pourtant pas d'être extrêmement abondantes.

Théorème (M. Gromov, 1986, [23]). Une sous-variété de M de dimension n est approximable en topologie C^0 par des sous-variétés legendriennes de (M, ξ) .

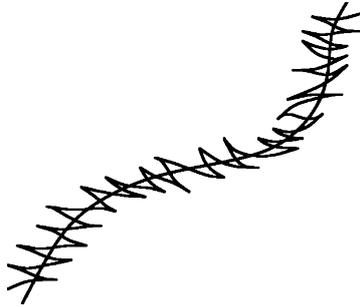


FIGURE. L'approximation legendrienne dans (\mathbb{R}^3, ξ_0) vue dans $y = 0$.

Nous fixons maintenant une forme de contact α pour la structure de contact ξ , ce qui revient d'ailleurs à supposer que le fibré vectoriel TM/ξ est trivialisable⁵. Nous introduisons maintenant ce qui formera les générateurs des invariants homologiques d'isotopie legendrienne annoncés dans l'introduction.

Définition. Une *corde de Reeb* d'une sous-variété legendrienne Λ de (M, α) est une trajectoire non-constante du champ R_α qui débute et aboutit sur Λ .

Cette définition est motivée par l'étude de la dynamique du champ de Reeb, voir les articles [29] d'Alan Weinstein et [28] de Clifford Taubes.

1.3. La tautologie de contact.

Soient X une variété différentielle et $\pi: T^*X \rightarrow X$ son fibré cotangent.

Définition. La *forme de Liouville* de T^*X est la 1-forme de T^*X définie par :

$$\lambda(p)(v) = p(T_p\pi(v)),$$

où p est un élément de T^*X et v est un élément de T_pT^*X .

Exemple. La forme de Liouville de $T^*\mathbb{R}^n$ est $\sum_{k=1}^n p_k dq_k$.

L'*espace de premiers jets* de X est défini de la manière suivante :

$$J^1X = T^*X \times \mathbb{R}_z,$$

il est muni de la forme de contact $dz - \lambda$ dont le champ de Reeb est ∂_z .

⁵ Il s'agit du lemme 1.1.1 dans le livre [20] de Hansjörg Geiges.

Définition. La *projection frontale* $\pi_{xz}: J^1X \rightarrow X \times \mathbb{R}$ de J^1X est définie par :

$$\forall (p, z) \in T^*X \times \mathbb{R}, \pi_{xz}(p, z) = (\pi(p), z).$$

Le *front* d'une sous-variété legendrienne de J^1X est son image par π_{xz} .

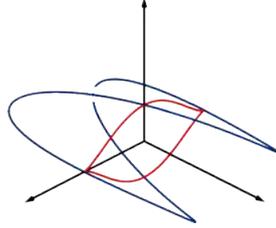


FIGURE. Un nœud legendrien de (\mathbb{R}^3, ξ_0) et sa projection frontale.

Une sous-variété legendrienne est déterminée par son front, car $y_i = \frac{\partial x_i}{\partial z}$.

Ces espaces jouent un rôle important en géométrie de contact, car ils modèlent toutes les variétés de contact au voisinage de leurs sous-variétés legendriennes.

Théorème. Soit Λ une sous-variété legendrienne de (M, ξ) , alors il existe un voisinage U de Λ dans M , un voisinage V de la section nulle de $J^1\Lambda$ dans $J^1\Lambda$, ainsi qu'un difféomorphisme $\psi: U \rightarrow V$ satisfaisant $T\psi(\xi) = \xi_0$.

Les structures de contact et les sous-variétés legendriennes sont définies par des conditions *locales*, mais pourtant l'essentiel de leur comportement est global. C'est pourquoi nous parlons aussi bien de *géométrie* ou de *topologie* de contact. La thèse [2] de Daniel Bennequin a marqué le début de la recherche des liens qu'entretiennent la géométrie de contact et la topologie classique.

2. LA CLASSIFICATION DES SOUS-VARIÉTÉS LEGENDRIENNES

Une grande majorité des recherches actuelles en géométrie de contact consiste à trouver la frontière entre *flexibilité* et *rigidité*⁶ de ses objets d'études ([3], [11]). La classification des sous-variétés legendriennes s'inscrit notablement dans cet axe d'investigation et les techniques étudiées dans mon doctorat tendent tout particulièrement à donner des informations sur leur rigidité.

2.1. Les isotopies legendriennes.

Une *isotopie legendrienne* est une déformation d'une sous-variété legendrienne, il s'agit formellement d'un chemin lisse de sous-variétés legendriennes.

Un raffinement d'un théorème classique de topologie différentielle assure alors que toutes les isotopies legendriennes proviennent des *isotopies de contact*, qui sont les symétries globales à un paramètre de la variété de contact ambiante⁷.

⁶. Les problèmes *flexibles* sont entièrement gouvernés par de la topologie algébrique et nous pouvons ainsi les résoudre en nous abstrayant complètement de la structure de contact, alors que toutes les autres situations sont dites *rigides*.

⁷. L'énoncé précis est celui du théorème 2.6.2 du livre [20] de Hansjörg Geiges.

2.2. La rigidité des isotopies legendriennes.

La topologie classique échoue complètement à décrire les classes d'isotopie legendrienne puisqu'une isotopie lisse, entre deux sous-variétés legendriennes, ne suffit pas à garantir l'existence d'une isotopie legendrienne entre elles.

Théorème. Une classe d'isotopie lisse d'une sous-variétés legendrienne se scinde en une infinité de classes d'isotopie legendrienne distinctes.

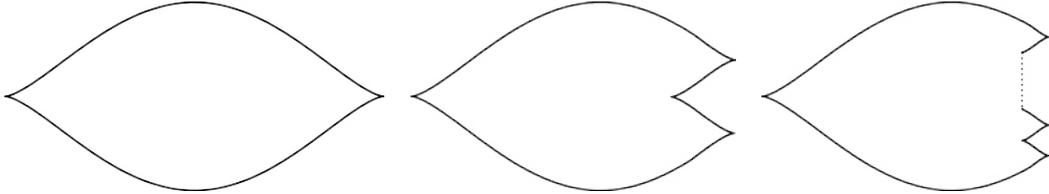


FIGURE. Les fronts d'une infinité de cercles lissements isotopes, mais pas legendriennement isotopes dans (\mathbb{R}^3, ξ_0) .

Le comportement des isotopies legendriennes est hautement non-topologique et il est nécessaire de développer de nouvelles techniques pour les appréhender. Les outils classiques des topologies algébrique et différentielle ne suffisent plus !

2.3. Les invariants classiques.

Une des approches systématique pour les problèmes de classification consiste à construire des invariants algébriques calculables qui permettent de distinguer, au moins partiellement, les différentes classes d'équivalence.

Les *nombre de rotation* et de *Thurston-Bennequin* des *nœuds legendriens*⁸ sont des exemples de tels invariants pour les classes d'isotopie legendrienne. Nous renvoyons à l'article [2] de Daniel Bennequin pour leur étude poussée.

Nous orientons les nœuds legendriens de (\mathbb{R}^3, ξ_0) en fixant une orientation de S^1 et nous donnons maintenant une définition combinatoire de ces invariants.

Définition. Le *nombre de rotation* d'un nœud legendrien L est

$$r(L) = \frac{1}{2}(D - M),$$

où D , respectivement M , désigne le nombre de rebroussement descendants, respectivement montants, de son front legendrien.

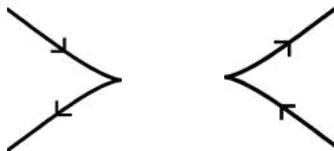


FIGURE. Un rebroussement descendant et un autre montant.

⁸. Un *nœud legendrien* est un plongement legendrien de S^1 dans (\mathbb{R}^3, ξ_0) .

Définition. Le nombre de Thurston-Bennequin d'un nœud legendrien L est

$$\text{tb}(L) = C_+ - C_- - \frac{1}{2}(D + M),$$

avec C_{\pm} le nombre de croisements positifs/négatifs de son front legendrien.

Nous pouvons toujours appliquer une isotopie legendrienne au nœud L pour s'assurer que les points de son front soient au plus doubles.

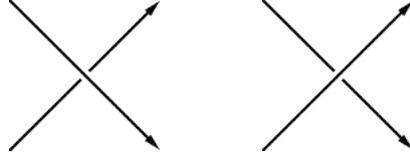


FIGURE 1. FIGURE. Un croisement positif et un autre négatif.

Soit L un nœud legendrien, nous notons L_{\pm} le nœud legendrien dont le front est obtenu en remplaçant un segment lisse et sans croisement du front de L par un zigzag de rebroussements montants ou descendants⁹.

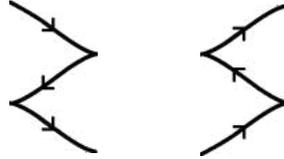


FIGURE. Les zigzags de rebroussements montants et descendants.

Les nœuds legendriens L_+ et L_- sont encore dans la classe d'isotopie lisse de L , mais les classes d'isotopie legendrienne de L , L_+ et L_- sont distinctes¹⁰, car :

$$\begin{aligned} r(L_{\pm}) &= r(L) \pm 1, \\ \text{tb}(L_{\pm}) &= \text{tb}(L) - 1, \end{aligned}$$

ce qui établit le théorème de rigidité pour les nœuds legendriens.

Exemple. Il existe un nœud legendrien trivial avec $r = 0$ et $\text{tb} = -1$.

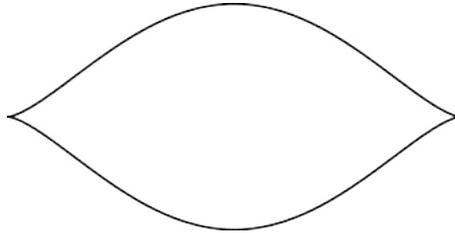


FIGURE. Le front d'un nœud legendrien trivial de (\mathbb{R}^3, ξ_0) .

Ce nombre de Thurston-Bennequin est maximal pour les nœuds triviaux ([2]).

9. Ces opérations sont appelées *stabilisation positive* et *stabilisation négative*.

10. Seules les stabilisations modifient la classe d'isotopie lisse d'un nœud legendrien tout en préservant sa classe d'isotopie lisse, voir l'article [18] de Dmitry Fuchs et Serge Tabachnikov.

Exemple. Il existe un nœud de trèfle legendrien avec $r = 0$ et $tb = 1$.

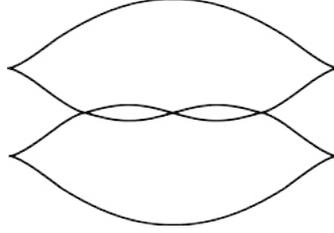


FIGURE. Le front d'un nœud de trèfle trivial de (\mathbb{R}^3, ξ_0) .

Ce nombre de Thurston-Bennequin est maximal pour les nœuds de trèfles ([2]). Ces deux invariants permettent de classer les nœuds legendriens triviaux.

Théorème (Y. Eliashberg, M. Fraser, 2009, [14]). Le nombre de rotation et le nombre de Thurston-Bennequin déterminent entièrement les classes d'isotopie legendrienne des nœuds legendriens topologiquement triviaux de (\mathbb{R}^3, ξ_0) .

Un résultat analogue pour les nœuds toriques¹¹ et pour les nœuds en huit est démontré dans l'article [15] de John Etnyre et Ko Honda.

Cependant, le couple de ces deux invariants ne caractérise pas toutes les classes d'isotopie legendrienne des nœuds legendriens quelconques de (\mathbb{R}^3, ξ_0) .

Théorème (Y. Chekanov, 2002, [10]). Il existe des nœuds legendriens de (\mathbb{R}^3, ξ_0) qui sont lissement isotopes et ont les mêmes nombres de rotation et de Thurston-Bennequin sans pour autant être legendriennement isotopes.

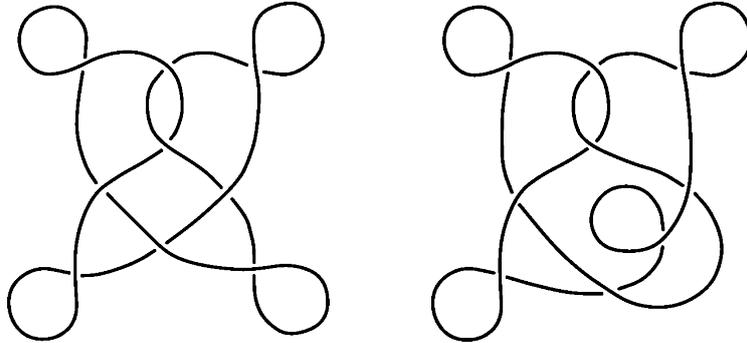


FIGURE. Des nœuds legendriens de (\mathbb{R}^3, ξ_0) satisfaisant le théorème.

Les nombres de rotation et de Thurston-Bennequin se généralisent à \mathbb{R}^{2n+1} , voir l'article [12] des auteurs Tobias Ekholm, John Etnyre et Michael Sullivan, mais ces invariants restent quand même très limités.

Théorème (T. Ekholm, J. Etnyre, M. Sullivan, 2005, [12]). Quel que soit $n > 1$, il existe une infinité de sphères legendriennes de \mathbb{R}^{2n+1} ayant les mêmes nombres de rotation et de Thurston-Bennequin sans être legendriennement isotopes.

¹¹ Il faut en plus supposer qu'ils ont le même type.

Ces théorèmes indiquent que la classification des sous-variétés legendriennes est un problème extrêmement riche que nous sommes encore loin d'avoir résolu. En fait, nous n'avons même, actuellement, aucune conjecture de classification, et c'est pourquoi il est crucial de développer de nouvelles techniques pour mieux explorer la rigidité des sous-variétés legendriennes.

3. LES INVARIANTS HOMOLOGIQUES PAR FAMILLES GÉNÉRATRICES

La classification des sous-variétés legendriennes étant un problème complexe, il est déraisonnable de s'y attaquer dans des variétés de contact générales. C'est pourquoi nous restreignons notre étude aux sous-variétés legendriennes des espaces de premiers jets et notre problème est alors celui de la classification locale des sous-variétés legendriennes des variétés de contact générales.

Nous développons des techniques inspirées de la théorie de Morse-Bott-Cerf dont les ouvrages de référence sont [25] de John Milnor, [1] de Michèle Audin et Mihai Damian, [4] de Raoul Bott et [7] de Jean Cerf.

Soit X une variété différentielle de dimension n .

3.1. Les familles génératrices des sous-variétés legendriennes.

Nous pouvons décrire certaines sous-variétés legendriennes de J^1X à partir des points et valeurs critiques d'une famille lisse de fonctions $(f_x: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R})_{x \in X}$, cela correspond à la notion de *famille génératrice*, voir [8] de Marc Chaperon.

Nous notons x les coordonnées de X et v celles de l'espace vectoriel \mathbb{R}^N .

Définition. Une fonction lisse $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une *famille génératrice* lorsque $\mathbf{0} \in (\mathbb{R}^N)^*$ est une valeur régulière de $\partial_v f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$.

Si f est une famille génératrice, alors l'ensemble suivant :

$$\Lambda_f = \{(x, \partial_x f(x, v), f(x, v)) \mid (x, v) \in X \times \mathbb{R}^N; \partial_v f(x, v) = 0\}$$

est automatiquement une sous-variété legendrienne immergée¹² de J^1X .

Une sous-variété legendrienne Λ admet une famille génératrice f quand $\Lambda = \Lambda_f$.

Remarque. Une sous-variété legendrienne Λ admet une famille génératrice f si, et seulement, si son front est le *diagramme de Cerf* de $(f_x: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R})_{x \in X}$ qui est l'ensemble des $(x, f_x(v))$, où $x \in X$ et v est un point critique de f_x .

Remarque. Soit f une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne Λ , alors les points de rebroussement du front de Λ correspondent aux naissances et morts d'un point critique dans la famille $x \mapsto f_x$.

Remarque. Soit f une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne Λ , alors les croisements du front de Λ correspondent aux points critiques de f_x dont l'ordre des valeurs critiques s'inverse.

¹² Quel que soit α une forme différentielle de degré 1 de X , nous avons $\alpha^* \lambda = \alpha$.

Exemple. L'application $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie de la manière suivante :

$$f(x, v) = v^3 - 3x(1-x)v$$

est une famille génératrice d'un nœud legendrien trivial de (\mathbb{R}^3, ξ_0) .

Nous représentons dans la figure suivante la famille génératrice $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ainsi que le front du nœud legendrien qu'elle engendre.

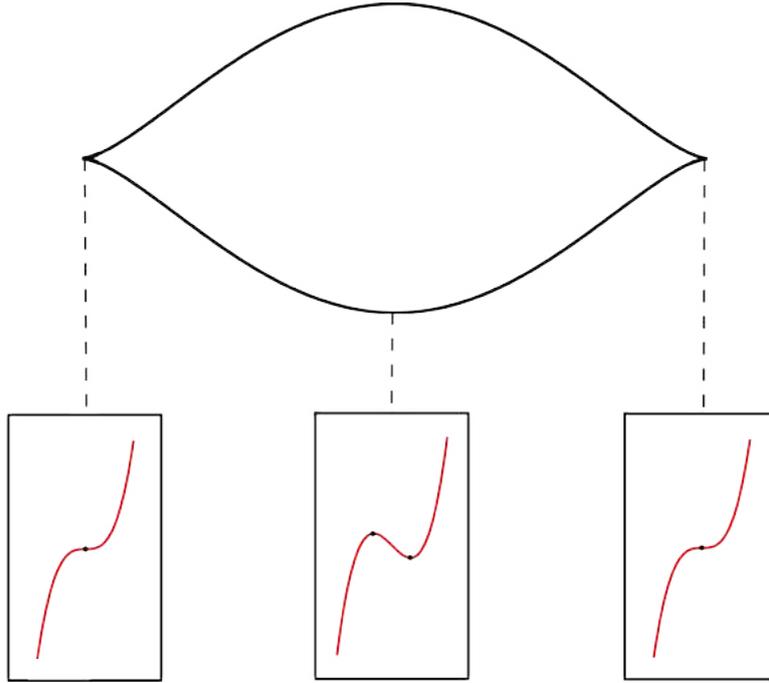


FIGURE. La famille génératrice f et son diagramme de Cerf.

Exemple. L'application $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie de la manière suivante :

$$g(x, v) = v^4 - v^2 + xv$$

est une famille génératrice de la queue d'aronde.

Nous commençons par représenter le front de la queue d'aronde.

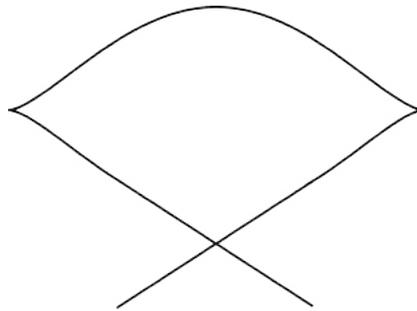


FIGURE. Le front de la queue d'aronde.

Le *mouvement de Reidemeister I* est l'opération qui consiste à remplacer un segment du front d'une courbe legendrienne par celui de la queue d'aronde. Mentionnons que cette opération est obtenue par isotopie legendrienne et qu'une démonstration complète est dans l'article [27] de Jacek Swiatkowski. Nous y trouverons aussi les définitions des mouvements de Reidemeister II et III, ainsi que des informations complémentaires sur ces trois opérations.

Nous représentons dans la figure suivante la famille génératrice $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ainsi que le front de la courbe legendrienne qu'elle engendre.

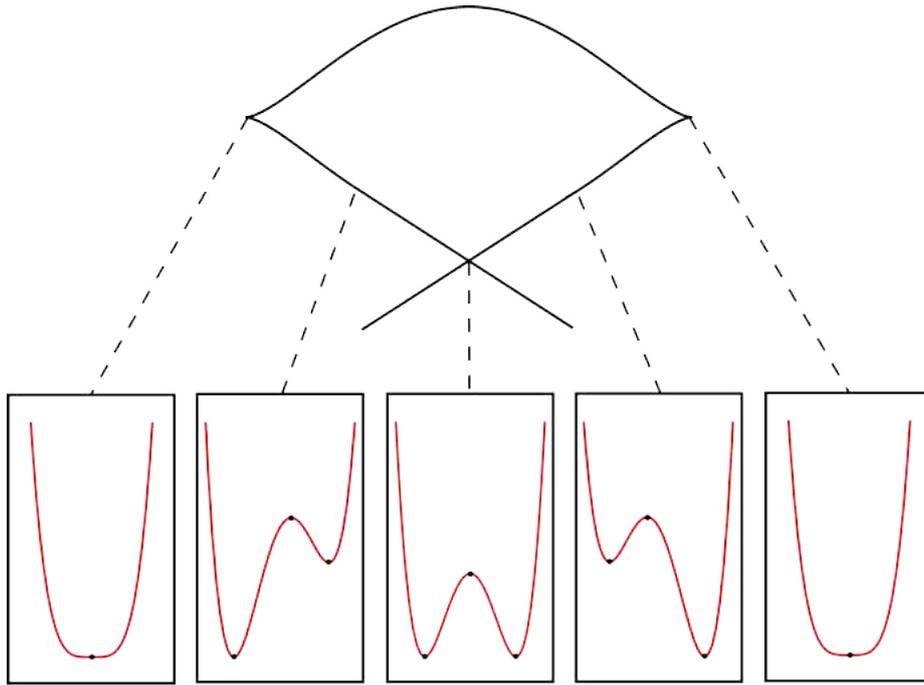
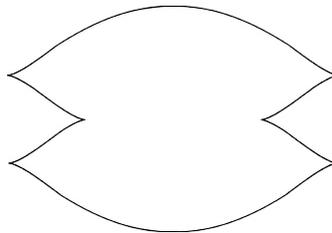


FIGURE. La famille génératrice g et son diagramme de Cerf.

Certaines sous-variétés legendriennes n'admettent pas de famille génératrice, comme celles dont le nombre de rotation est non nul ou dont le front zigzague¹³. D'autres obstructions sont dégagées par Emmanuel Giroux dans l'article [21].

Exemple. Le nœud legendrien de (\mathbb{R}^3, ξ_0) dont le front est le suivant :



n'admet pas de famille génératrice, mais son nombre de rotation est nul.

¹³. Ce sont des conséquences faciles d'un résultat de théorie de Cerf qui affirme qu'au voisinage d'une naissance/mort, il existe deux points critiques d'indices consécutifs.

Une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne en induit une infinité d'autres par compositions par des *difféomorphismes fibrés* ou par *stabilisations*. Les familles génératrices ainsi obtenues sont déclarées *équivalentes*.

Définition. Un *difféomorphisme fibré* est un difféomorphisme de $X \times \mathbb{R}^N$ qui préserve globalement tous les niveaux verticaux $\{x\} \times \mathbb{R}^N$, $x \in X$.

La précomposition d'une famille génératrice par un difféomorphisme fibré est une famille génératrice dont les points critiques ont été permutés fibre à fibre.

Définition. Une *stabilisation* d'une famille génératrice $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une application $f \oplus Q: X \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f \oplus Q(x, v, v') = f(x, v) + Q(v'),$$

où $Q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique non-dégénérée.

La stabilisation d'une famille génératrice consiste à rajouter des dimensions dans les fibres de son domaine, le long desquelles elle varie quadratiquement.

Nous énonçons un théorème qui justifie à lui seul la pertinence des familles génératrices dans le problème de classification des sous-variétés legendriennes.

Théorème (Y. Chekanov, 1996, [9]). L'existence d'une famille génératrice persiste aux isotopies legendriennes et sa classe d'équivalence est préservée.

Il s'agit d'un résultat extrêmement complexe à établir.

3.2. L'homologie pour les familles génératrices.

La construction de l'homologie pour les familles génératrices est grandement détaillée dans l'article [26] de Joshua Sabloff et Lisa Traynor.

Soit $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une famille génératrice de Λ connexe.

Définition. La *fonction différence* $\delta: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de f est définie par :

$$\delta(x, v_1, v_2) = f(x, v_1) - f(x, v_2).$$

Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, nous notons δ^a le sous-niveau $\delta^{-1}(]-\infty, a])$.

Nous faisons maintenant une observation qui motive la construction d'une homologie à la Morse-Bott-Cerf pour les familles génératrices.

Proposition. Les points critiques de δ dont la valeur critique est strictement positive sont en correspondance bijective avec les cordes de Reeb de Λ .

Une majeure partie des résultats en homologie de Morse repose inévitablement sur la compacité des sous-niveaux des fonctions de Morse que l'on considère. Or, le domaine des fonctions différences n'est jamais compact, c'est ce qui nous contraint d'imposer le comportement à l'infini des familles génératrices.

Définition. Une famille génératrice $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est *linéaire à l'infini* lorsqu'il existe une forme linéaire non nulle $A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x, v) = A(v),$$

pour tous les points (x, v) en dehors d'un compact de $X \times \mathbb{R}^N$.

Nous supposons désormais que la famille génératrice f est linéaire à l'infini et nous choisissons aussi des réels $\omega > \varepsilon > 0$ tels que les valeurs critiques strictement positives de δ soient strictement comprises entre ε et ω .

Définition. L'homologie pour les familles génératrices de f est définie par :

$$HG_k(f) = H_{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

La cohomologie pour les familles génératrices est définie de manière similaire. Ces modules gradués ne dépendent que de la classe d'équivalence de f .

Remarque. L'invariance par stabilisation de l'homologie pour les familles génératrices est assurée par le choix de sa graduation.

Il est souvent fructueux d'utiliser que l'homologie pour les familles génératrices provient du complexe de chaînes engendré par les points critiques de valeurs critiques strictement positives de la fonction différence¹⁴ avec la graduation :

$$|p| = \text{ind}_p(\delta) - N - 1,$$

et dont l'application de bord est la différentielle de Morse usuelle¹⁵.

Remarque. La graduation de $p = (x, v_1, v_2)$ se calcule aussi comme suit :

$$|p| = (\text{ind}_{v_1}(f_x) - \text{ind}_{v_2}(f_x)) + \text{ind}_x \delta_{(v_1, v_2)} - 1,$$

ce qui permet de calculer directement la graduation sur les fronts legendriens.

Définition. Le polynôme de Poincaré de la famille génératrice f est :

$$\Gamma_f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim(HG_k(f)) t^k,$$

c'est un polynôme de Laurent à coefficients dans les entiers naturels.

Exemple. Nous calculons l'homologie de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, v) = v^3 - 3x(1-x)v.$$

Le nœud legendrien qui est engendré par f possède une unique corde de Reeb, donc la fonction différence de f possède un unique point critique qui se trouve être de graduation égale à 1, car c'est un maximum.

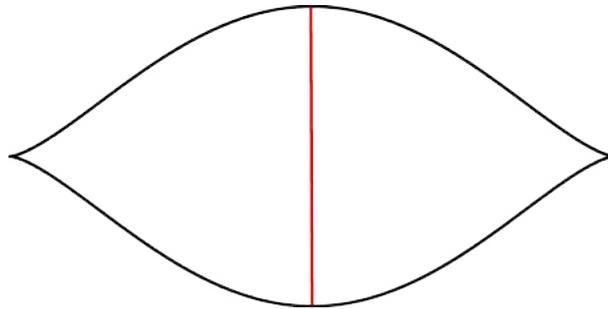


FIGURE. La corde de Reeb du nœud legendrien engendré par f .

Le polynôme de Poincaré de f est $\Gamma_f(t) = t$.

14. Une petite perturbation de f suffit à garantir qu'ils sont tous non-dégénérés.

15. Elle compte les lignes d'un gradient de $-\delta$ entre ses points critiques d'indices successifs.

Exemple. Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, il existe¹⁶ une famille génératrice f_a pour un entrelacs de Hopf dont les points critiques fibrés sont d'indice 0, 1, a et $a + 1$.

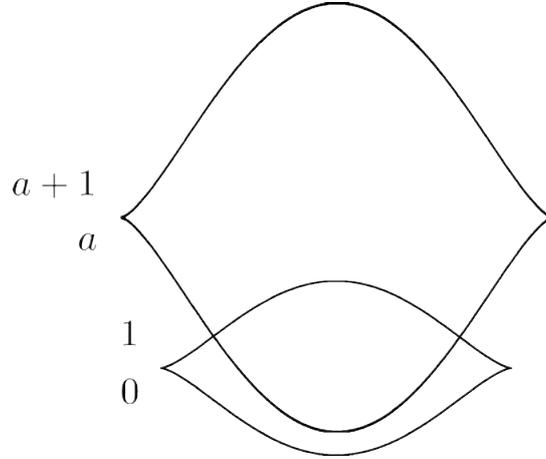


FIGURE. Le front d'un entrelacs de Hopf legendrien.

La fonction différence δ_a de f_a possède six points critiques, car l'entrelacs qu'elle engendre a six cordes de Reeb $c_1, c_2, c_{12}, c_{21}, c_m$ et c_M .

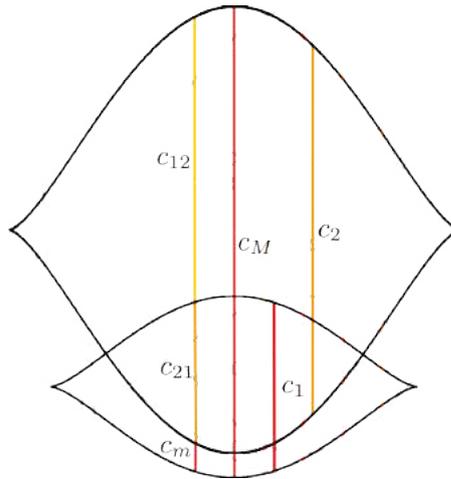


FIGURE. Les cordes de Reeb (desaxées) d'un entrelacs de Hopf.

Nous calculons la graduation de ces points critiques en exploitant la formule qui fait intervenir les indices des points critiques fibrés d'une famille génératrice. Les graduations sont listées ci-dessous par valeur critique décroissante :

p	c_M	c_2	c_{12}	c_1	c_{21}	c_m
$ p $	$a + 1$	1	a	1	$1 - a$	$a - 1$

Les graduations des cordes c_1, c_2 et c_{21} ne sont consécutives à aucune autre¹⁷ et leurs classes sont des générateurs de l'homologie de la famille génératrice f_a .

16. La construction est vraiment élémentaire, voir le lemme 6.8 de [6].

17. Pour $c \in \{c_1, c_2, c_{21}\}$, il n'existe pas $c' \in \{c_M, c_2, c_{12}, c_1, c_{21}, c_m\}$ tel que $|c'| = |c| \pm 1$.

Par contre, nous ne pouvons rien déduire de la contribution de c_M , c_{12} et c_m , car il peut exister des lignes d'antigradient de δ_a joignant c_M à c_{12} ou c_{12} à c_m . Ces lignes de gradient n'étant pas visibles sur le front de l'entrelacs de Hopf, cela rend, pour le moment, le calcul de Γ_{f_a} impossible...

Les familles génératrices permettent d'aborder le problème de classification des sous-variétés legendriennes, car le théorème de persistance des familles génératrices assure que pour tout $0 \leq k \leq n$, l'ensemble

$$\mathcal{HG}_k(\Lambda) = \{HG_k(f); f \text{ famille génératrice linéaire à l'infini de } \Lambda\}$$

est invariant par isotopie legendrienne.

3.3. La structure de l'homologie pour les familles génératrices.

La description des familles génératrices d'une sous-variété legendrienne donnée est souvent qualitative, ce qui compromet le calcul directeur de leur homologie¹⁸. Cependant, connaître la structure de l'homologie pour les familles génératrices permet de pallier cette limitation en offrant des méthodes de calcul détournées.

Nous écrivons une longue suite exacte de dualité reliant l'homologie génératrice, la cohomologie correspondante et l'homologie de la sous-variété legendrienne. Elle généralise la dualité de Poincaré de l'homologie des variétés fermées.

Théorème (F. Bourgeois, J. Sabloff, L. Traynor, 2015, [6]). Si $\Lambda \subset J^1X$ est une sous-variété legendrienne connexe qui admet une famille génératrice f linéaire à l'infini, alors il existe une longue suite exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\tau_k} H_k(\Lambda) \xrightarrow{\sigma_k} HG^{n-k}(f) \xrightarrow{\rho_k} HG_{k-1}(f) \rightarrow \cdots$$

De plus, les applications τ_k satisfont deux propriétés supplémentaires :

1. Si $\alpha: H^{n-k}(\Lambda) \rightarrow H_k(\Lambda)$ est l'isomorphisme de Poincaré, alors les applications $\sigma_k \circ \alpha$ et τ_{n-k} sont duales.
2. L'application $\tau_n: HG_n(f) \rightarrow H_n(\Lambda)$ est surjective.

Remarque. Ce théorème assure que pour $k \geq n+1$, ρ_k est un isomorphisme, donc les générateurs de $HG_k(f)$ et $HG^{n-k-1}(f)$ s'assemblent en *paires duales*.

Théorème (F. Bourgeois, J. Sabloff, L. Traynor, 2015, [6]). Si $\Lambda \subset J^1X$ est une sous-variété legendrienne connexe qui admet une famille génératrice f linéaire à l'infini, alors le polynôme de Poincaré de f est de la forme :

$$(\star) \quad \Gamma_f(t) = (q_0 + q_1t + \cdots + q_nt^n) + p(t) + t^{n-1}p(t^{-1}),$$

où $q_k + q_{n-k}$ est le k -ième nombre de Betti de Λ , $q_0 = 0$, $q_n = 1$ et p satisfait :

$$p(t) = \sum_{k \geq \lfloor (n-1)/2 \rfloor} p_k t^k,$$

avec tous les coefficients p_k qui sont des entiers naturels.

Remarque. En retirant $q_0 = 0$ et $q_n = 1$, le résultat du théorème reste vrai pour des sous-variétés legendriennes qui ne sont pas nécessairement connexes.

18. Il est difficile de comprendre la topologie des sous-niveaux d'une fonction différence.

Nous illustrons dans l'exemple suivant comment ce résultat de dualité permet de calculer l'homologie pour les familles génératrices.

Exemple. Nous reprenons le calcul du polynôme de Poincaré de f_a , $a \neq 1$, une famille génératrice pour un entrelacs de Hopf dont les indices des points critiques fibrés sont 0, 1, a et $a + 1$.

Par les calculs déjà effectués, nous savons qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\Gamma_{f_a}(t) = 2t + t^{1-a} + \alpha t^{a-1} + \beta t^a + \gamma t^{a+1}.$$

Or, comme Γ_{f_a} est compatible avec (\star) , nous devons avoir $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$. Dès lors, nous savons que $\partial c_M = c_{12}$, ce que nous ignorions par analyse du front. Finalement, pour $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, nous avons construit une famille génératrice d'un entrelacs de Hopf dont le polynôme de Poincaré est :

$$\Gamma_{f_a}(t) = 2t + t^{a-1} + t^{1-a}.$$

Par rotation du front, nous obtenons un entrelacs de Hopf de dimension n avec une famille génératrice dont le polynôme de Poincaré est $2t^n + t^{a-1} + t^{n-1}t^{1-a}$.

Théorème (F. Bourgeois, J. Sabloff, L. Traynor, 2015, [6]). Si $P \in \mathbb{N}[t, t^{-1}]$ est compatible avec (\star) , alors il existe une sous-variété legendrienne connexe admettant une famille génératrice f linéaire à l'infini telle que $P(t) = \Gamma_f(t)$.

Nous présentons finalement un exemple clef pour la réalisation des différentes valeurs admissibles de l'homologie pour les familles génératrices.

Exemple. Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, il existe une famille génératrice g_a pour un cercle legendrien dont les points critiques fibrés sont d'indices 0, 1, a et $a + 1$.

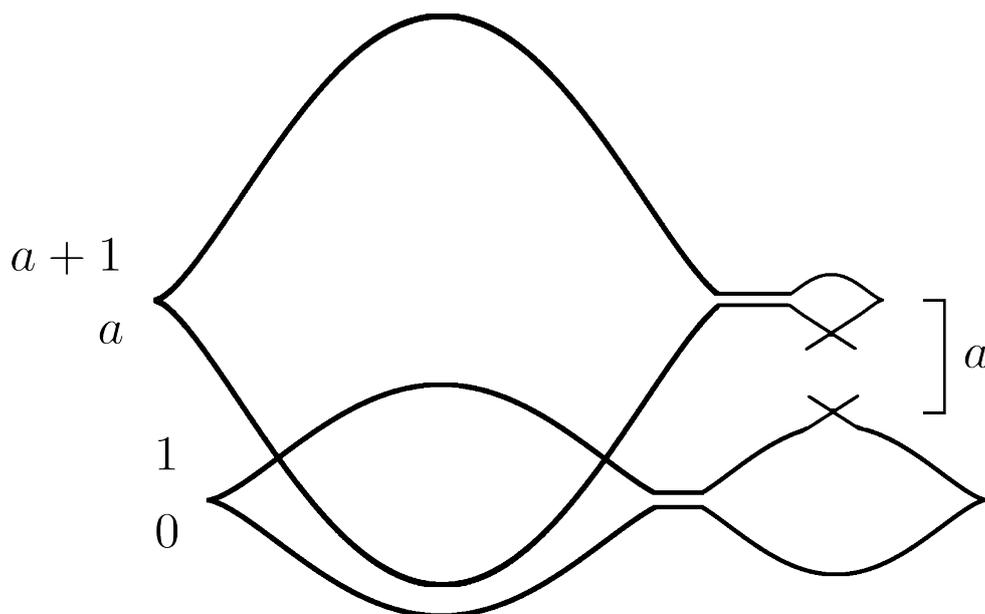


FIGURE. Un cercle obtenu par chirurgie sur un entrelacs de Hopf.

Cette famille génératrice est obtenu par somme connexe sur l'entrelacs de Hopf précédent auquel nous avons d'abord fait subir une isotopie legendrienne¹⁹. Finalement²⁰, pour $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, nous avons construit une famille génératrice pour un cercle legendrien dont le polynôme de Poincaré est :

$$\Gamma_{g_a}(t) = t + t^{a-1} + t^{1-a}.$$

Par rotation du front, nous obtenons une sphère de dimension n avec une famille génératrice dont le polynôme de Poincaré est $t^n + t^{a-1} + t^{n-1}t^{1-a}$.

Remarque. L'entrelacs de Hopf permet de réaliser par somme connexe toutes les *paires de dualité* de l'homologie pour les familles génératrices²¹.

Le théorème serait maintenant établi en réalisant toutes les *classes de variété* de l'homologie pour les familles génératrices²², voir le corollaire 6.7 de [6].

PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Les familles génératrices n'ont pas le monopole des techniques permettant d'élaborer des invariants sophistiqués des sous-variétés legendriennes, certaines autres constructions reposent sur l'utilisation des *courbes pseudo-holomorphes*²³, comme celle de l'homologie de contact legendrienne évoquée ci-après.

Soit Λ une sous-variété legendrienne, son *algèbre de Chekanov*, notée $(A(\Lambda), \partial)$, est une *algèbre différentielle graduée* qui est librement engendrée par les cordes de Reeb de Λ et dont la différentielle compte des courbes pseudo-holomorphes. Son homologie $HCL_\bullet(\Lambda)$ est l'*homologie de contact legendrienne* de Λ .

L'homologie de contact legendrienne a été définie pour les nœuds legendriens dans l'article [10] de Yuri Chekanov et de manière générale dans l'article [13] de Tobias Ekholm, John Etnyre et Michael Sullivan.

La non-commutativité de l'algèbre de Chekanov fait de $HCL_\bullet(\cdot)$ un invariant des sous-variétés legendriennes extrêmement fin, mais vraiment peu commode à calculer et à manipuler, car il est généralement de dimension infinie.

Cependant, ces difficultés et ces limitations sont toutes contournées par la construction de l'homologie de contact legendrienne *linéarisée*, notée $HCL_\bullet^\varepsilon(\cdot)$, où ε est une augmentation de l'algèbre de Chekanov²⁴.

Cet invariant legendrien dépend de l'augmentation choisie pour linéariser.

19. Nous appliquons a mouvements de Reidemeister I au cercle inférieur de l'entrelacs.

20. Une isotopie legendrienne ne modifie pas l'homologie pour les familles génératrices, alors que la somme connexe en élimine une *classe fondamentale*, voir le lemme 6.3 de [6].

21. Les polynômes de Laurent $t^n + p(t) + t^{n-1}p(t^{-1})$ de (\star) sont tous réalisables.

22. Les polynômes $t^n + q_{n-1}t^{n-1} + \dots + q_1t$ de (\star) sont tous réalisables.

23. Cette notion est due à Mikhaïl Gromov dans son article [22].

24. C'est un morphisme $\varepsilon: (A(\Lambda), \partial) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0)$.

Bien que les techniques de construction soient fondamentalement différentes, les invariants des sous-variétés legendriennes obtenus par familles génératrices et par courbes pseudo-holomorphes entretiennent tout de même des liens étroits.

Théorème (D. Fuchs, D. Rutherford, 2011, [17]). Si L est un nœud legendrien de la variété (\mathbb{R}^3, ξ_0) et que f est une famille génératrice linéaire à l'infini de L , alors il existe une augmentation de $(A(L), \partial)$ telle que $HG_\bullet(f) \cong HCL_\bullet^\varepsilon(L)$.

Il est conjecture que cette équivalence persiste dans $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_0)$ avec $n \geq 1$, mais les techniques jusqu'ici développées ne permettent pas de s'en approcher.

La linéarisation de l'application de bord de l'algèbre de Chekanov produit un invariant legendrien calculable, mais casse toute sa structure multiplicative. C'est ce qui empêche l'homologie de contact legendrienne linéarisée de pouvoir distinguer efficacement les différentes *classes d'équivalence d'augmentations*²⁵ de l'algèbre de Chekanov.

Une solution est de définir une homologie de contact legendrienne *bilinéarisée* en considérant cette fois ci une paire d'augmentations de l'algèbre de Chekanov. Cette construction permet de conserver la structure non-commutative sans pour autant rendre les calculs délicats, voir l'article [5] de Frédéric Bourgeois et Baptiste Chantraine.

L'homologie de contact legendrienne bilinéarisée distingue complètement les classes d'équivalence d'augmentations de l'algèbre de Chekanov.

Théorème (F. Bourgeois, en cours). Si Λ est une sous-variété legendrienne connexe et que ε_1 et ε_2 sont deux augmentations de $(A(\Lambda), \partial)$, alors ε_1 et ε_2 sont équivalentes si, et seulement, si $HCL_n^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\Lambda) \neq 0$.

La structure de l'homologie de contact legendrienne bilinéarisée est aussi connue.

Théorème (F. Bourgeois, en cours). Si Λ est une sous-variété legendrienne connexe et que ε_1 et ε_2 sont deux augmentations non-équivalentes de $(A(\Lambda), \partial)$, alors le polynôme de Poincaré de $HCL_\bullet^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\Lambda)$ est de la forme :

$$(*) \quad \Gamma_\Lambda^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(t) = (1 + q_1 t + \dots + q_{n-1} t^{n-1}) + r(t),$$

avec r un polynôme de Laurent à coefficients entiers qui satisfait

$$r(-1) = \begin{cases} 0, & \text{si } \dim(\Lambda) \text{ est pair,} \\ \text{pair,} & \text{si } \dim(\Lambda) \text{ est impair.} \end{cases}$$

Cette contrainte sur $r(-1)$ provient du nombre de Thurston-Bennequin de Λ .

De plus, une réciproque partielle de ce résultat est satisfaite.

Théorème (F. Bourgeois, en cours). Si $P \in \mathbb{N}[t, t^{-1}]$ satisfait $(*)$, alors il existe un $N \geq 0$ tel que pour $c \geq N$, il existe Λ une sous-variété legendrienne connexe et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux augmentations non-équivalentes de $(A(\Lambda), \partial)$ telles que :

$$P(t) + c(1 + t^{n-1}) = \Gamma_\Lambda^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(t).$$

²⁵. Cette notion d'équivalence des augmentations est la définition 2.12 de [5].

Il est même conjecturé que $N = 0$, de sorte que la seule contrainte structure de l'homologie de contact legendrienne bilinéarisée soit contenue dans (*).

Du côté de la théorie de Morse-Bott-Cerf, l'homologie pour les familles génératrices ne permet pas de distinguer complètement les classes d'équivalence de familles génératrices linéaires à l'infini²⁶.

Une nouvelle fois, il va s'agir de raffiner l'invariant de départ en le bilinéarisant, il s'agit ici de considérer une paire de familles génératrices linéaires à l'infini. Si (f_1, f_2) est une paire de familles génératrices linéaires à l'infini d'une même sous-variété legendrienne, nous introduisons sa fonction différence définie par :

$$\delta_{f_1, f_2}(x, v_1, v_2) = f(x, v_1) - f(x, v_2).$$

Une construction analogue au cas d'une famille génératrice fournit $HG_\bullet(f_1, f_2)$, appelée *homologie pour les paires de familles génératrices* de (f_1, f_2) .

Il existe encore une longue suite exacte de dualité reliant l'homologie pour les paires de familles génératrices, la cohomologie correspondante et l'homologie singulière de la sous-variété legendrienne.

Théorème. Si Λ est une sous-variété legendrienne connexe ayant des familles génératrices f_1 et f_2 linéaires à l'infini, alors nous avons la longue suite exacte :

$$\dots \xrightarrow{\tau_k} H_k(\Lambda) \xrightarrow{\sigma_k} HG^{n-k}(f_2, f_1) \xrightarrow{\rho_k} HG_{k-1}(f_1, f_2) \rightarrow \dots$$

Si $\alpha: H^{n-k}(\Lambda) \rightarrow H_k(\Lambda)$ est la dualité de Poincaré, $\sigma_k \circ \alpha$ et τ_{n-k} sont duales.

Cependant, cette dualité ne permet pas de dégager des contraintes structurales sur l'homologie pour les paires de génératrices, car c'est la cohomologie de la paire (f_2, f_1) qui intervient et non celle de (f_1, f_2) .

Par ailleurs, la surjectivité de $\tau_n: HG_n(f_1, f_2) \rightarrow HG_n(\Lambda)$ n'est plus garantie, mais c'est néanmoins le cas quand f_1 et f_2 sont équivalentes, car nous avons :

$$HG_\bullet(f_1, f_2) \cong HG_\bullet(f_1) \cong HG_\bullet(f_2).$$

En faisant un parallèle avec l'homologie de contact legendrienne bilinéarisée, nous conjecturons que c'est aussi une condition nécessaire.

Conjecture. Soient f_1 et f_2 deux familles génératrices linéaires à l'infini de Λ , alors elles sont équivalentes si, et seulement, si $HG_n(f_1, f_2) \neq 0$.

L'homologie pour les paires de familles génératrices permettrait de déterminer systématiquement si deux familles génératrices sont équivalentes ou non.

Si nous exhibons des contre-exemples à cette conjecture, cela pourrait nous amener à généraliser la notions d'équivalence des familles génératrices qui est sûrement encore trop restrictive en l'état²⁷.

26. La situation est analogue à la classification des augmentations de l'algèbre de Chekanov par l'homologie de contact legendrienne linéarisée

27. Les stabilisations ne dépendent pas des fibres comme les difféomorphismes fibrés.

Mes recherches s’inscrivent dans la volonté de rapprocher les invariants des sous-variétés legendriennes qui sont obtenus par familles génératrices de ceux qui sont déduits des courbes pseudo-holomorphes.

J’envisage de transposer à l’homologie pour les paires de familles génératrice, certains résultats structuraux que Frédéric Bourgeois prépare actuellement pour l’homologie de contact legendrienne bilinéarisée.

Il s’agit alors de généraliser les techniques de l’article [6] de Frédéric Bourgeois, Joshua Sabloff et Lisa Traynor aux paires de familles génératrices.

Concrètement, j’espère que sur le long terme, ces travaux permettront de mieux comprendre les interactions entre les familles génératrices et les augmentations des algèbres de Chekanov des sous-variétés legendriennes.

La résolution de ce vaste problème doit d’abord passer par l’étude d’exemples et des calculs complets d’homologie pour les paires de familles génératrices.

Dans un premier temps, je souhaite forger mon intuition en montrant que le ²⁸ nœud de trèfle legendrien qui satisfaisait $(r, tb) = (0, 1)$ admet cinq ²⁹ familles génératrices linéaires à l’infini qui ne sont pas équivalentes ³⁰.

RÉFÉRENCES

- [1] M. Audin and M. Damian. *Théorie de Morse et Homologie de Floer*. EDP Sciences, 2010.
- [2] D. Bennequin. Entrelacements et équations de Pfaff. *Astérisque*, 107–108 :87–161, 1983.
- [3] M. Borman, Y. Eliashberg, and Emmy Murphy. Existence and classification of overtwisted contact structures in all dimensions. *Acta Mathematica*, 215(2) :281–361, 2015.
- [4] R. Bott. Lectures on Morse theory, old and new. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 7(2) :331–358, 1982.
- [5] F. Bourgeois and B. Chantraine. Bilinearised Legendrian contact homology and the augmentation category. *Journal of Symplectic Geometry*, 12(3) :553–583, 2014.
- [6] F. Bourgeois, J. Sabloff, and L. Traynor. Lagrangian cobordisms via generating families : Construction and geography. *Algebraic & Geometric Topology*, 15(4) :2439–2477, 2015.
- [7] J. Cerf. La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théoreme de la pseudo-isotopie. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, 39(1) :7–170, 1970.
- [8] M. Chaperon. On generating families. In H. Hofer, C. Taubes, A. Weinstein, and E. Zehnder, editors, *The Floer Memorial Volume*, volume 133 of *Progress in Mathematics*, pages 283–296. Birkhäuser Basel, 1995.
- [9] Y. Chekanov. Critical points of quasifunctions and generating families of Legendrian manifolds. *Functional Analysis and Its Applications*, 30(2) :118–128, 1996.

²⁸. Le nœud de trèfle étant torique, de type $(2, 3)$, sa classe d’isotopie legendrienne est entièrement déterminée par ses nombres de rotation et de Thurston-Bennequin ([15]).

²⁹. Son algèbre de Chekanov possède cinq augmentations non-équivalentes ([5]).

³⁰. Cela nécessitera de calculer leur homologie et l’homologie des paires qu’elles forment.

- [10] Y. Chekanov. Differential algebra of Legendrian links. *Inventiones mathematicae*, 150 :441–483, 2002.
- [11] S.-F. Chiu. Nonsqueezing property of contact balls. *Duke Mathematical Journal*, 166(4) :605–655, 2017.
- [12] T. Ekholm, J. Etnyre, and M. Sullivan. Non-isotopic Legendrian submanifolds in \mathbb{R}^{2n+1} . *Journal of Differential Geometry*, 71(1) :85–128, 2005.
- [13] T. Ekholm, J. Etnyre, and M. Sullivan. The contact homology of Legendrian submanifolds in \mathbb{R}^{2n+1} . *Journal of Differential Geometry*, 71(2) :177–305, 2005.
- [14] Y. Eliashberg and M. Fraser. Topologically trivial Legendrian knots. *Journal of Symplectic Geometry*, 7(2) :77–127, 2009.
- [15] J. Etnyre and K. Honda. Knots and Contact Geometry I : Torus Knots and the Figure Eight Knot. *Journal of Symplectic Geometry*, 1(1) :63–120, 2001.
- [16] G. Frobenius. Ueber das Pfaffsche Problem. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 87 :230–315, 1877.
- [17] D. Fuchs and D. Rutherford. Generating families and legendrian contact homology in the standard contact space. *Journal of Topology*, 4 :190–226, 2011.
- [18] D. Fuchs and S. Tabachnikov. Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space. *Topology*, 36(5) :1025–1053, 1997.
- [19] H. Geiges. A brief history of contact geometry and topology. *Expositiones Mathematicae*, 19(1) :25–53, 2001.
- [20] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge University Press, 2008.
- [21] E. Giroux. Formes génératrices d’immersions lagrangiennes. *Compte Rendu de l’Académie des Sciences de Paris, Série I*, 306(18) :761–764, 1988.
- [22] M. Gromov. Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 82 :307–347, 1985.
- [23] M. Gromov. *Partial Differential Relations*. Springer, 1986.
- [24] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences, 2010.
- [25] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.
- [26] J. Sabloff and L. Traynor. Obstructions to Lagrangian cobordisms between Legendrians via generating family. *Algebraic & Geometric Topology*, 13(5) :2733–2797, 2013.
- [27] J. Swiatkowski. On the isotopy of Legendrian knots. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 10(3) :195–207, 1992.
- [28] C. Taubes. The Seiberg–Witten equations and the Weinstein conjecture. *Geometry & Topology*, 11(4) :2117–2202, 2007.
- [29] A. Weinstein. On the hypotheses of Rabinowitz’s orbit theorems. *Journal of Differential Equations*, 33(3) :353–358, 1979.

CONCLUSION SUR LE RÔLE DU MAGISTÈRE DANS MON PARCOURS

Je suis aujourd'hui doctorant en topologie de contact sous la direction de Frédéric Bourgeois au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay et enseignant dans le département Informatique de l'IUT d'Orsay.

D'ailleurs, à l'heure où j'écris ces quelques lignes, il me semble encore trop tôt pour que je puisse vraiment mesurer l'impact du magistère dans ma carrière. Cependant, je peux d'ores et déjà affirmer qu'au cours de ces quatre années, j'ai réellement acquis une maturité mathématique inestimable.

Le magistère offre une initiation à un large éventail de domaines mathématiques, grâce à laquelle j'ai pu convenablement explorer ma sensibilité et par là même découvrir ma voie, ce qui est précieux.

Cette polyvalence des enseignements dispensés m'a également permis de me forger une culture mathématique suffisamment vaste pour que je puisse plus sereinement m'engager dans la recherche.

C'est aussi pour cette raison que j'estime que cette formation m'a adéquatement préparé au métier d'enseignant-chercheur et que je la recommande aujourd'hui à tous les jeunes étudiants passionnés par les mathématiques.

Certes, cette formation est parfois éprouvante, mais les enjeux en valent l'effort !

Je voudrais maintenant conclure sur une note plus sentimentale en disant qu'au cours de ces quatre dernières années d'études, j'ai fait de magnifiques rencontres qui m'ont inconstablement marqué, voire influencé.

J'ai notamment croisé la route de camarades, maintenant devenus des amis, avec qui j'ai eu des discussions mathématiques passionnées et enrichissantes. Je n'insisterai jamais assez sur l'importance que j'accorde à ce type d'échanges, car ils me permettent souvent de mieux comprendre mes propres problèmes et m'aident régulièrement à forger un peu plus mon intuition.

J'ai aussi eu la chance d'être l'étudiant de plusieurs enseignants bienveillants et impliqués qui ont su me guider et m'épauler tout au long de ma scolarité. Ils ont assurément inspiré l'enseignant que j'essaie d'être et certains d'entre eux ont façonné et façonnent encore le jeune chercheur que je suis.

ANNEXE A. MES ENSEIGNEMENTS AU SEIN DU MAGISTÈRE

Ci-dessous se trouve la liste complète, par année et par ordre alphabétique, des cours que j'ai suivi pendant mes trois années de magistère.

A.1. L'année de L3 MFA (2014-2015).

- *Algèbre 1** par Nicolas Ratazzi
- *Algèbre 2** par François Charles
- *Algèbre effective et calcul formel* par Anne Vaugon
- *Apprentissage hors murs** encadré par Thomas Bickel
- *Anglais**
- *Combinatoire algébrique* par Olivier Fouquet
- *Compléments de topologie et théorie de la mesure** par Pascal Auscher
- *Équations différentielles ordinaires** par Nicolas Burq
- *Fonctions homomorphes** par Patrick Gérard
- *Intégration et analyse de Fourier** par Joël Merker
- *Modélisation** par Sophie Lemaire
- *Programmation, algorithmique et complexité** par Laurent Rosaz
- *Projet* encadré par Rémi Leclercq
- *Théorie de la mesure et probabilités** par Pascal Massart
- *Topologie et calcul différentiel** par Dominique Hulin

A.2. L'année de M1 Jacques Hadamard (2015-2016).

- *Algèbre* par Jean-Benoît Bost
- *Anglais**
- *Arithmétique* par Étienne Fouvry
- *Calcul formel* par Stéphane Fischler
- *Géométrie* par Julien Duval
- *Stage de rentrée**
- *Surfaces de Riemann et théorie des revêtements* par Charles Favre
- *Théorie des distributions* par Thierry Ramond
- *Théorie spectrale et analyse harmonique** par Frédéric Paulin
- *Projet** encadré par François Charles

A.3. L'année de M2 AAG (2017-2018).

- *Cours accéléré d'algèbre et géométrie* par Ekaterina Amerik
- *Cours accéléré d'analyse réelle et complexe* par Hugues Auvray
- *Cours accéléré de géométrie différentielle* par Frédéric Paulin
- *Groupes et géométries* par Frédéric Bourgeois
- *Introduction au h-principe de Gromov* par Patrick Massot
- *Théorie ergodique* par Hans Rugh
- *Systèmes dynamiques topologiques et différentiables* par Hans Rugh
- *Mémoire** encadré par Frédéric Bourgeois

ANNEXE B. MON MÉMOIRE DE L3

Les pages qui suivent constituent mon mémoire de L3.

Le résultat principal de ce document est le suivant :

Théorème. Il passe quatre cercles par un point donné d'un tore de révolution.

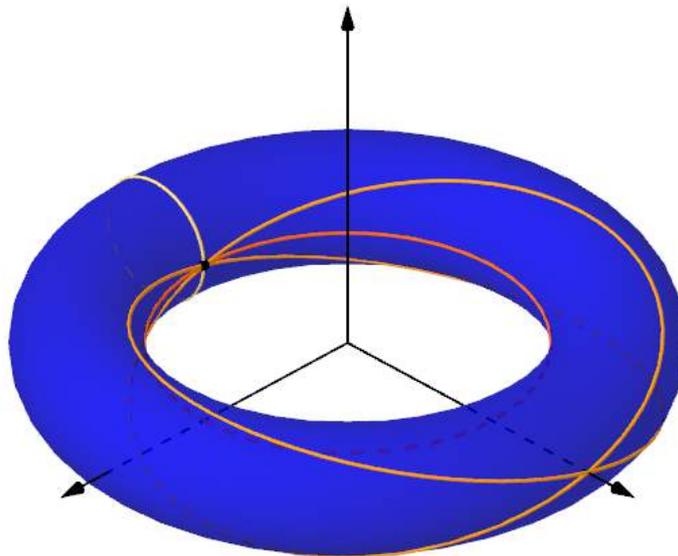
Ce théorème m'émerveille et m'étonne encore aujourd'hui, car il reste mystérieux !

TRAVAIL ENCADRÉ DE RECHERCHE
3^{ème} année de Mathématiques

**FAMILLE REMARQUABLE DE CERCLES SUR LE
TORE DE RÉVOLUTION**

Cyril FALCON & Marguerite FLAMMARION

RÉSUMÉ. Dans ce dossier, après avoir introduit les notions de géométrie projective et algébrique nécessaires, on montrera que la section d'un tore de révolution de \mathbb{R}^3 avec un de ses plans dit bitangent, se décompose en deux cercles : les cercles de Villarceau.



Sous la direction de : Rémi LECLERCQ

Date: Janvier-Mai 2015.

REMERCIEMENTS

Nous exprimons notre profonde gratitude aux directions des études de l'Université Paris-Sud et du Magistère de mathématiques qui nous ont permis de compléter notre formation par un travail encadré de recherche.

Toute notre reconnaissance va à Rémi LECLERCQ qui a bien voulu superviser notre projet et nous encadrer avec pertinence et dynamisme.

Nous remercions vivement notre enseignant François CHARLES pour son aide généreuse et ses éclaircissements au sujet des courbes unicursales et du théorème de Bézout.

Nous adressons enfin nos sincères remerciements à Damien THOMINE et Anne VAUGON pour leur présence à notre soutenance.

INTRODUCTION ET MOTIVATIONS

Soit un tore de révolution de \mathbb{R}^3 et M un de ses points, la section de ce tore avec un plan quelconque contenant M sera, hors cas dégénérés, une simple quartique. Cependant, si le plan est choisi de telle manière à ce qu'il contienne l'axe du tore ou qu'il y soit perpendiculaire, la section se décomposera dans le premier cas, en deux cercles nommés méridiens dont un seul contiendra M (voir figure 1) et dans le second, en un ou deux cercle(s) nommé(s) parallèle(s) dont un seul contiendra le point M (voir figure 2).

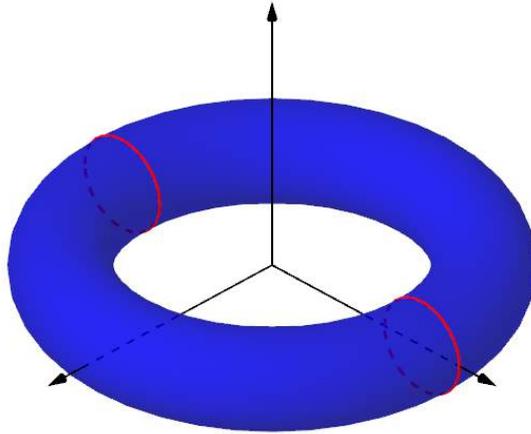


FIGURE 1. Représentation d'une paire de cercles méridiens d'un tore de révolution de \mathbb{R}^3 .

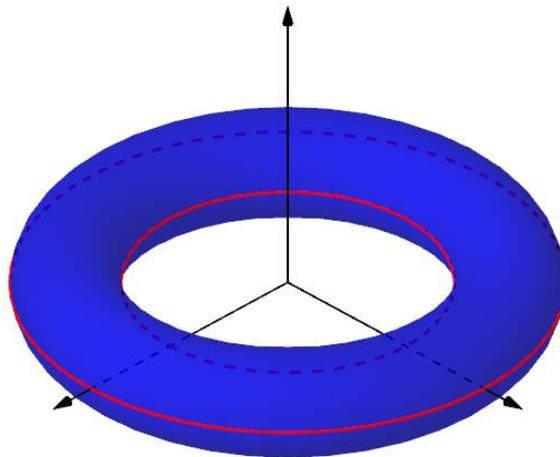


FIGURE 2. Représentation d'une paire de cercles parallèles d'un tore de révolution de \mathbb{R}^3 .

De manière plus surprenante, on peut encore construire par section plane du tore deux cercles passant par le point M (voir figures 3 et 4), on les nomme cercles de Villarceau. Ils s'obtiennent en choisissant un plan dit bitangent au tore, il s'agit d'un plan passant par le centre du tore et formant un angle précis avec son axe de telle manière qu'il soit tangent au tore en exactement deux points.

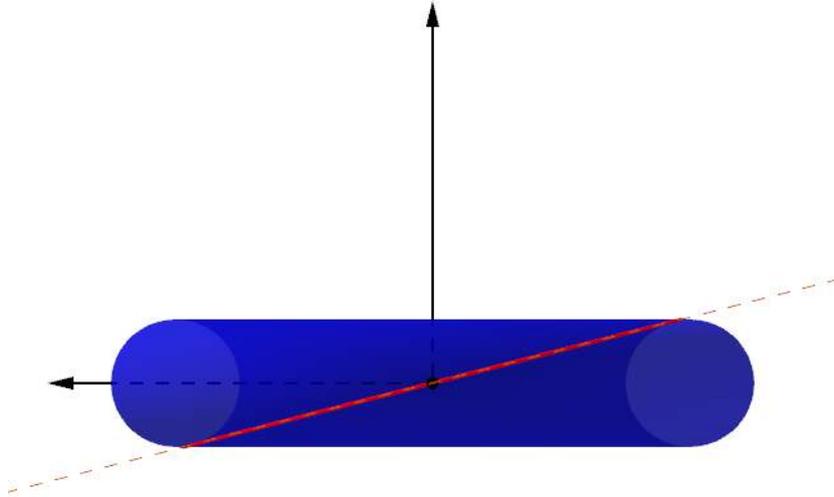


FIGURE 3. Représentation d'un plan bitangent à un tore de révolution de \mathbb{R}^3 et de l'un des cercles de Villarceau associé, vue longitudinale.

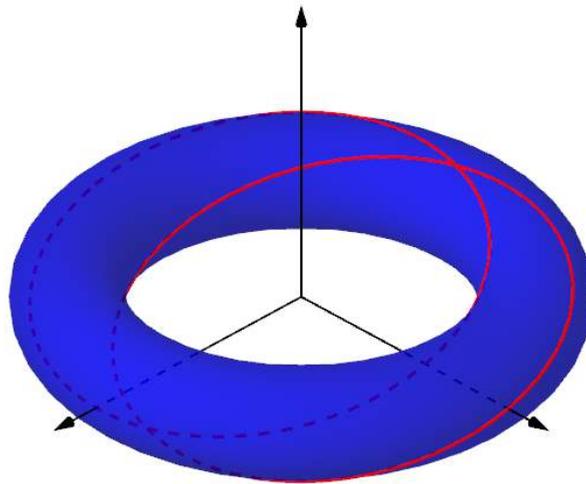


FIGURE 4. Représentation d'une paire de cercles de Villarceau d'un tore de révolution de \mathbb{R}^3 .

Cette troisième famille de cercles du tore a historiquement été caractérisée par l'ingénieur, astronome et mathématicien français Antoine Yvon Villarceau (1813-1883) dans une note de 1838 adressée au

mathématicien, physicien et astronome français Jacques Babinet (1794-1872), clôturant ainsi le problème des familles de cercles sur le tore : par un point d'un tore de révolution de \mathbb{R}^3 passent exactement quatre cercles (voir figure 5).

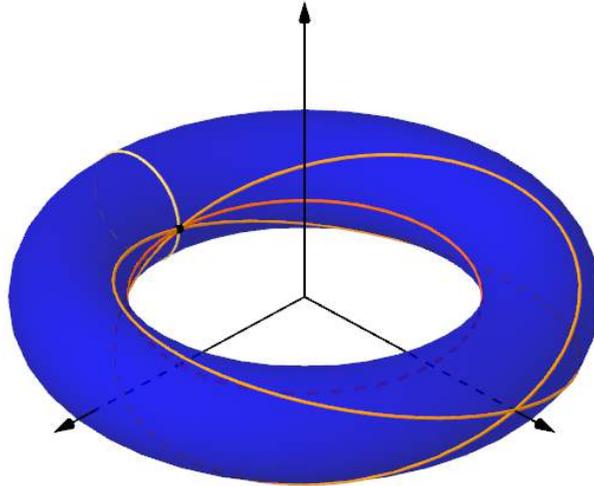


FIGURE 5. Représentation des quatre cercles passant par un point donné d'un tore de révolution de \mathbb{R}^3 .

Cependant, ces cercles étaient connus des architectes bien avant Villarceau, puisqu'on les retrouve notamment dans les escaliers du musée de la cathédrale de Strasbourg, œuvre de Thomas Uhlberger datant des années 1580.

Notre dossier s'éloignera de l'approche analytique de Villarceau en proposant une caractérisation de ces cercles via la géométrie moderne : la géométrie projective et algébrique. La force de cette démonstration réside dans sa simplicité et sa concision, mais elle permet surtout d'appréhender plus aisément la généralisation suivante au théorème de Villarceau :

Théorème. Soit Σ une surface de révolution dont les méridiens sont des coniques *i.e.* dont l'intersection avec un plan contenant son axe est une conique, alors la section de Σ avec un de ses plans bitangents est décomposée en deux coniques congruentes *i.e.* superposables par composition de translations et rotations.

La preuve ici donnée au théorème de Villarceau s'appuie sur [Fel], document que nous avons tâché de rendre plus accessible puisqu'il est d'une très grande concision. En effet, nous tenions vivement à produire un dossier qui ne ferait appel qu'à des notions élémentaires et qui par là même donnerait un bref aperçu de ce qu'est la géométrie moderne.

1. RUDIMENTS DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE ET ALGÈBRE

Dans cette partie, k est un corps commutatif quelconque.

1.1. **Les espaces projectifs et les coordonnées homogènes.** Dans cette sous-section, E est un espace vectoriel sur k non réduit à $\{0_E\}$.

On suppose pour l'instant que E est de dimension quelconque.

Définition-Proposition 1.1. On considère \sim la relation d'équivalence sur $E \setminus \{0_E\}$ définie par :

$$\forall u, v \in E \setminus \{0_E\}, u \sim v \stackrel{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} (u, v) \text{ est } k\text{-liée} \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^* : u = \lambda v.$$

On appelle espace projectif associé à E et on note $P(E)$, le quotient de l'ensemble $E \setminus \{0_E\}$ par \sim .

Démonstration. Vérifions que la relation binaire \sim est bien une relation d'équivalence sur $E \setminus \{0_E\}$.

- **Réflexivité.** Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$, on a :

$$u = 1 \cdot u, \text{ avec } 1 \in k^*.$$

Finalement, on a $u \sim u$.

- **Symétrie.** Soient $u, v \in E \setminus \{0_E\}$, $u \sim v$, il existe $\lambda \in k^*$ tel que :

$$u = \lambda v.$$

k étant un corps, $\lambda \in k^\times$, le groupe des unités de k , si bien que :

$$v = \lambda^{-1}u, \text{ avec } \lambda^{-1} \in k^*.$$

Finalement, on a $v \sim u$.

- **Transitivité.** Soient $u, v, w \in E \setminus \{0_E\}$, $u \sim v$ et $v \sim w$, il existe $\lambda, \mu \in k^*$ tels que :

$$u = \lambda v \text{ et } v = \mu w.$$

En particulier, on a :

$$u = (\lambda\mu)w, \text{ avec } \lambda\mu \in k^*.$$

Finalement, on a $u \sim w$.

□

Remarque 1.2. $P(E)$ est l'ensemble des droites vectorielles de E .

Définition 1.3. On appelle plan projectif de $P(E)$, tout espace projectif $P(F)$, où F est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de E .

Définition 1.4. On appelle espace projectif de dimension n sur k et on note indifféremment $P_n(k)$ ou $k\mathbb{P}^n$ l'espace projectif $P(k^{n+1})$.

Remarque 1.5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace projectif de dimension n sur k admet la décomposition géométrique suivante :

$$P_n(k) \cong k^n \sqcup P_{n-1}(k),$$

$$\text{où } k^n \cong \{[x_1 : \dots : x_n : 1]; (x_1, \dots, x_n) \in k^n\},$$

$$\text{et } P_{n-1}(k) \cong \{[x_1 : \dots : x_n : 0]; (x_1, \dots, x_n) \in k^n \setminus \{0_{k^n}\}\}.$$

On suppose désormais que E est de dimension finie égale à $n + 1$ et on en fixe une base dans laquelle tous ses vecteurs seront décomposés.

Définition 1.6. Soit π la surjection canonique de $E \setminus \{0_E\}$ dans $P(E)$:

$$\pi : \begin{cases} E \setminus \{0_E\} & \rightarrow & P(E) \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & \mapsto & [X_1 : \dots : X_{n+1}] \end{cases}.$$

Soit $X \in P(E)$, tout élément de la préimage de $\{X\}$ par π est appelé coordonnées homogènes de X et $\pi^{-1}(\{X\})$ est le système de coordonnées homogènes de X .

Remarque 1.7. Soit $X \in P(E)$, si $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E \setminus \{0_E\}$ sont des coordonnées homogènes de X , alors on a :

$$\pi^{-1}(\{X\}) = \{\lambda(x_1, \dots, x_{n+1}); \lambda \in k^*\}.$$

Définition 1.8. Soient $X \in P(E)$ et $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E \setminus \{0_E\}$ des coordonnées homogènes de X , les deux cas suivants se présentent :

- Si $x_{n+1} = 0$, d'après la définition 1.6 le système de coordonnées homogènes de X est de la forme :

$$\{\lambda(x_1, \dots, x_n, 0); \lambda \in k^*\}.$$

On dit que X est un point à l'infini de $P(E)$.

- Si $x_{n+1} \neq 0$, on dit que X est un point affine de $P(E)$ et d'après la définition 1.6, le $(n + 1)$ -uplet suivant :

$$(x_{n+1}^{-1}x_1, \dots, x_{n+1}^{-1}x_n, 1)$$

est un élément du système de coordonnées homogènes de X , il s'agit des coordonnées homogènes normalisées de X .

1.2. Les ensembles algébriques sur un corps et l'homogénéisation.

Définition 1.9. Soit $S \subset k[T_1, \dots, T_n]$ un ensemble de polynômes à n indéterminées à coefficients dans k , on dit que :

$$Z(S) := \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n; \forall f \in S, f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

est l'ensemble algébrique de k^n défini par S .

Remarque 1.10. Pour toute partie $S \subset k[T_1, \dots, T_n]$, on a :

$$Z(S) = Z(\langle S \rangle),$$

où $\langle S \rangle$ est l'idéal engendré par S .

Pour plus de clarté, on se restreint désormais aux ensembles algébriques de k^n pour lesquels la partie S est réduite à un singleton.

Définition-Proposition 1.11. Soit \mathcal{M} un ensemble algébrique de k^n défini par un polynôme $f \in k[T_1, \dots, T_n]$. On construit alors f^* de la manière suivante :

$$f^* := (T_{n+1})^{\deg(f)} \times f \left(\frac{T_1}{T_{n+1}}, \dots, \frac{T_n}{T_{n+1}} \right).$$

(i) f^* est un polynôme homogène de même degré que f .

(ii) Pour tout $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E \setminus \{0_E\}$, on a :

$$\forall \lambda \in k^*, f^*(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow f^*(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0.$$

$f^*(X) = 0$ est donc une équation bien définie dans $P_n(k)$.

(iii) L'homogénéisation de \mathcal{M} consiste en la définition de l'ensemble algébrique de $P_n(k)$ défini par f^* , on le note \mathcal{M}^* et on l'appelle l'homogénéisé de \mathcal{M} . On dira aussi que $f^*(X_1, \dots, X_{n+1}) = 0$ est l'équation projective de \mathcal{M} .

(iv) Pour tout $[X_1 : \dots : X_n : 1] \in P_n(k)$, on a :

$$[X_1 : \dots : X_n : 1] \in \mathcal{M}^* \Leftrightarrow (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{M}.$$

En d'autres termes, \mathcal{M}^* prolonge \mathcal{M} à $P_n(k)$.

Démonstration. Il s'agit d'abord de vérifier que f^* définit bien un polynôme de $k[T_1, \dots, T_{n+1}]$. On commence par écrire :

$$(1) \quad f = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \prod_{j=1}^n (T_j)^{m_{i,j}},$$

avec $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in k^{(\mathbb{N})}$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(m_{i,j})_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

On rappelle alors qu'avec les notations introduites, on a :

$$\deg(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \max_{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0} \left(\sum_{j=1}^n m_{i,j} \right),$$

qui est un entier naturel puisque $\{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\}$ est un ensemble fini. Par définition de f^* et avec (1), on a :

$$(2) \quad f^* = (T_{n+1})^{\deg(f)} \times \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \prod_{j=1}^n \left(\frac{T_j}{T_{n+1}} \right)^{m_{i,j}}.$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on définit l'entier naturel suivant :

$$m_{i,n+1} := \begin{cases} \deg(f) - \sum_{j=1}^n m_{i,j}, & \text{si } a_i \neq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

On constate alors que l'on peut réécrire (2) de la manière suivante :

$$f^* = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i (T_{n+1})^{m_{i,n+1}} \prod_{j=1}^n (T_j)^{m_{i,j}} = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \prod_{j=1}^{n+1} (T_j)^{m_{i,j}}.$$

Avec cette écriture, il est apparent que f^* est un polynôme de $k[T_1, \dots, T_{n+1}]$. On calcule désormais le degré de f^* et on constate pour cela que quelque soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $a_i \neq 0$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n+1} m_{i,j} = \sum_{j=1}^n m_{i,j} + \deg(f) - \sum_{j=1}^n m_{i,j} = \deg(f).$$

En d'autres termes, tous les monômes de f^* sont de degré égal à $\deg(f)$ et à ce titre f^* est un polynôme homogène de même degré que f .

Assurons-nous maintenant que $f^*(X) = 0$ est une équation bien définie dans $P_n(k)$. Soit alors $X \in P_n(k)$ et $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \pi^{-1}(\{X\})$, f^* étant un polynôme homogène, on a :

$$\forall \lambda \in k^*, f^*(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) = \lambda^{\deg(f^*)} \times f(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

En particulier, on en déduit que l'on a :

$$\forall \lambda \in k^*, f^*(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0.$$

En d'autres termes, \mathcal{M}^* définit bien un ensemble algébrique de $P_n(k)$.

Enfin, on montre qu'un point $[X_1 : \dots : X_n : 1] \in P_n(k)$ est dans \mathcal{M}^* si et seulement si (X_1, \dots, X_n) appartient à \mathcal{M} .

Par définition de f^* , on constate que l'on a :

$$f^*(X_1, \dots, X_n, 1) = f(X_1, \dots, X_n).$$

En particulier, on en déduit que l'on a :

$$f^*(X_1, \dots, X_n, 1) = 0 \Leftrightarrow f(X_1, \dots, X_n) = 0.$$

En d'autres termes, par définition de \mathcal{M}^* , on a établi que :

$$[X_1 : \dots : X_n : 1] \in \mathcal{M}^* \Leftrightarrow (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{M}.$$

□

Remarque 1.12. Géométriquement, homogénéiser un ensemble algébrique de k^n revient à le prolonger sur l'hyperplan à l'infini de $P_n(k)$. Ainsi, pour retrouver l'ensemble algébrique initial, il suffit d'intersecter l'homogénéisé avec un quelconque hyperplan de $P_n(k)$.

Remarque 1.13. Dans la suite, on travaillera avec $k = \mathbb{C}$. Soit \mathcal{M} un ensemble algébrique de \mathbb{R}^n défini par $f \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_n]$, on construit alors ce que l'on appelle l'homogénéisé complexe de \mathcal{M} en suivant le procédé suivant :

- **Étape 1.** On complexifie \mathcal{M} , c'est-à-dire que l'on considère l'ensemble algébrique de \mathbb{C}^n suivant :

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n; f(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

- **Étape 2.** On applique à $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ la construction décrite dans la définition-proposition 1.11 pour obtenir un ensemble algébrique noté $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}^*$ de $P_n(\mathbb{C})$.

1.3. Les espaces projectifs complexes et les points cycliques.

Définition 1.14. Un cercle d'un plan projectif complexe est l'homogénéisé complexe d'un cercle de \mathbb{R}^2 . Les cercles d'un plan projectif sont d'équation :

$$X^2 + Y^2 - 2aXZ - 2bYZ + (a^2 + b^2 - r^2)Z^2 = 0,$$

$$\text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } r \in \mathbb{R}_+^*.$$

Définition 1.15. Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit les points cycliques d'un plan de $P_n(\mathbb{C})$ comme étant les points à l'infini des cercles de ce plan.

Proposition 1.16. Les points cycliques du plan projectif $P_2(\mathbb{C})$ sont :

$$I := [1 : i : 0] \text{ et } J := [1 : -i : 0].$$

Démonstration. Soit \mathcal{C} un cercle de $P_2(\mathbb{C})$, d'après la définition 1.14, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\mathcal{C} : X^2 + Y^2 - 2aXZ - 2bYZ + (a^2 + b^2 - r^2)Z^2 = 0.$$

Pour tout $[X : Y : Z] \in P_2(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{aligned} [X : Y : Z] \in \mathcal{C} \cap \{Z = 0\} &\Leftrightarrow X^2 + Y^2 = 0 \text{ et } Z = 0 \\ &\Leftrightarrow (X - iY)(X + iY) = 0 \text{ et } Z = 0 \\ &\Leftrightarrow (X = iY \text{ ou } X = -iY) \text{ et } Z = 0 \\ &\Leftrightarrow [X : Y : Z] \in \{[1 : i : 0], [1 : -i : 0]\} \\ &\Leftrightarrow [X : Y : Z] \in \{I, J\}. \end{aligned}$$

Dès lors, d'après la définition 1.8, les points à l'infini de \mathcal{C} sont I et J . Finalement, les points cycliques d'un plan projectif sont bien I et J . \square

Proposition 1.17. Une conique de \mathbb{R}^2 dont l'homogénéisée complexe passe par les points cycliques de $P_2(\mathbb{C})$ est un cercle.

Démonstration. Soit \mathcal{C} une conique de \mathbb{R}^2 , il existe $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tels que :

$$\mathcal{C} : ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

L'équation homogène complexe de \mathcal{Q} est alors :

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^* : aX^2 + bXY + cY^2 + dXZ + eYZ + fZ^2 = 0.$$

Par hypothèse $I, J \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^*$ et avec la définition-proposition 1.17, il vient :

$$a - c \pm ib = 0.$$

En particulier, on a $a = c$ et $b = 0$ et puisque $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, on a nécessairement $a \neq 0$. L'équation de \mathcal{C} est alors :

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}y + \frac{f}{a} = 0.$$

Finalement, \mathcal{C} est un cercle, éventuellement vide ou réduit à un point. \square

Définition 1.18. L'ombilicale est l'ensemble des points cycliques de tous les plans projectifs de $P_3(\mathbb{C})$.

Définition 1.19. Une sphère de $P_3(\mathbb{C})$ est l'homogénéisée complexe d'une sphère de \mathbb{R}^3 . Les sphères de $P_3(\mathbb{C})$ sont d'équation :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2aXT - 2bYT - 2cZT + (a^2 + b^2 + c^2 - r^2)T^2 = 0,$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 1.20. L'ombilicale est la courbe de $P_3(\mathbb{C})$ d'équation :

$$\mathcal{O} : X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \text{ et } T = 0.$$

Démonstration. On remarque que tout cercle de \mathbb{R}^3 est inclus dans une sphère et que réciproquement une sphère de \mathbb{R}^3 est par exemple réunion de ses cercles méridiens. Dès lors, d'après les définitions 1.3, 1.14 et 1.19, un point de $P_3(\mathbb{C})$ appartient à un cercle de $P_3(\mathbb{C})$ si et seulement si il appartient à une sphère de $P_3(\mathbb{C})$, si bien que les points cycliques de tous les plans de $P_3(\mathbb{C})$ sont les points à l'infini de ses sphères.

Soit alors \mathcal{S} une sphère de $P_3(\mathbb{C})$, d'après la définition 1.19, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\mathcal{S} : X^2 + Y^2 + Z^2 - 2aXT - 2bYT - 2cZT + (a^2 + b^2 + c^2 - r^2)T^2 = 0.$$

Ainsi, d'après la définition 1.8, les points à l'infini de \mathcal{S} satisfont :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \text{ et } T = 0.$$

Finalement, \mathcal{S} étant une sphère quelconque de $P_3(\mathbb{C})$, d'après la définition 1.18 et d'après notre remarque préliminaire, l'ombilicale est d'équation :

$$\mathcal{O} : X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \text{ et } T = 0.$$

\square

1.4. Intersection des courbes algébriques planes et des surfaces algébriques. Dans cette sous-section, on suppose que le corps commutatif k est algébriquement clos *i.e.* que tout polynôme non constant à coefficients dans k admet au moins une racine dans k .

Définition 1.21. Soit $f \in k[T_1, \dots, T_n]$, on définit le degré de $Z(\{f\})$ comme étant le degré du polynôme f .

- Si $n = 2$, on dit que $Z(\{f\})$ est une courbe algébrique plane.
- Si $n = 3$, on dit que $Z(\{f\})$ est une surface algébrique.

Définition 1.22. Soit \mathcal{M} un ensemble algébrique de k^n défini par le polynôme $f \in k[T_1, \dots, T_n]$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}$, on dit que (x_1, \dots, x_n) est un point de multiplicité $\mu \in \mathbb{N}^*$ dans \mathcal{M} si et seulement si (x_1, \dots, x_n) vérifie les deux propriétés suivantes :

- $\forall i \in \llbracket 1, \mu - 1 \rrbracket, d_{(x_1, \dots, x_n)}^i f \equiv 0,$
- $d_{(x_1, \dots, x_n)}^\mu f \not\equiv 0.$
- Si $\mu = 1$, on dit que (x_1, \dots, x_n) est un point régulier de \mathcal{M} .
- Sinon, on dit que (x_1, \dots, x_n) est un point singulier de \mathcal{M} .

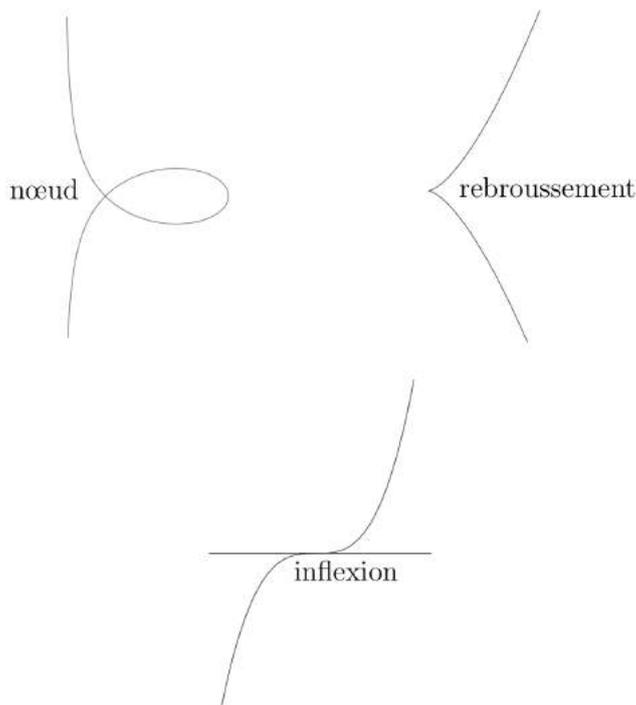


FIGURE 6. Les différents types de points doubles d'une courbe algébrique plane.

Remarque 1.23. Soit \mathcal{M} un ensemble algébrique de k^n défini par un unique polynôme et soit $M \in \mathcal{M}$, d'après les définitions 1.21 et 1.22, la multiplicité de M dans \mathcal{M} est inférieure ou égale au degré de \mathcal{M} .

Proposition 1.24. Soit Σ une surface algébrique et soit M_0 un point régulier de Σ . Si \mathcal{P}_0 est le plan tangent à Σ en M_0 , alors $\Sigma \cap \mathcal{P}_0$ est une courbe algébrique plane de degré inférieur ou égal à celui de Σ dont le point M_0 est au moins double.

Démonstration. Soit Σ une surface algébrique définie par $f \in k[T_1, T_2, T_3]$ et soit $(x_0, y_0, z_0) \in k^3$ un de ses points réguliers. L'équation du plan tangent à Σ au point (x_0, y_0, z_0) s'écrit alors :

$$\frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0,$$

$$\text{où } \left(\frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0) \right) \neq (0, 0, 0).$$

Sans perte de généralités, on suppose que $\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, si bien que l'équation du plan tangent à Σ au point (x_0, y_0, z_0) se réécrit :

$$(3) \quad \mathcal{P}_0 : z = z_0 - \frac{\frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) - \frac{\frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0).$$

On introduit alors le polynôme suivant :

$$g := z_0 - \frac{\frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)}(T_1 - x_0) - \frac{\frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)}(T_2 - y_0) \in k[T_1, T_2].$$

Par construction de Σ et d'après (3), on a :

$$(4) \quad \Sigma \cap \mathcal{P}_0 : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ z = g(x, y) \end{cases}.$$

On introduit désormais le polynôme suivant :

$$\tilde{f} := f(T_1, T_2, g(T_1, T_2)) \in k[T_1, T_2].$$

g étant de degré 1, \tilde{f} est de degré inférieur ou égal à celui de f et d'après (4), on a :

$$(5) \quad \Sigma \cap \mathcal{P}_0 : \tilde{f}(x, y) = 0.$$

Finalement, d'après la définition 1.22, $\Sigma \cap \mathcal{P}_0$ est une courbe algébrique plane de degré inférieur ou égal à celui de Σ .

On s'intéresse maintenant à la multiplicité du point (x_0, y_0) dans $\Sigma \cap \mathcal{P}_0$ et on étudie pour ce faire les dérivées partielles de \tilde{f} en (x_0, y_0) .

Par construction de \tilde{f} , on a :

$$(6) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial T_1}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial T_1}(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) + \frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, g(x_0, y_0)),$$

$$(7) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial T_2}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial T_2}(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) + \frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, g(x_0, y_0)).$$

Or, par construction de g , on a :

$$(8) \quad \frac{\partial g}{\partial T_1}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)},$$

$$(9) \quad \frac{\partial g}{\partial T_2}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Mais comme $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}_0$, d'après (3), on a $z_0 = g(x_0, y_0)$, si bien qu'avec (8) et (9), il vient :

$$(10) \quad \frac{\partial g}{\partial T_1}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))},$$

$$(11) \quad \frac{\partial g}{\partial T_2}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}.$$

En réinjectant respectivement (10) dans (6) et (11) dans (7), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial T_1}(x_0, y_0) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial T_2}(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, d'après la définition 1.19, $\Sigma \cap \mathcal{P}_0$ est une courbe algébrique plane de degré inférieur ou égal à celui de Σ dont le point (x_0, y_0, z_0) est au moins double. □

Définition 1.25. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux courbes algébriques planes respectivement définies par les polynômes f et g , s'il existe $h \in k[T_1, T_2]$ divisant f et g , on dit que $Z(\{h\})$ est une composante commune des courbes \mathcal{C} et \mathcal{D} . Sinon, si f et g sont sans facteurs communs non constants, les courbes \mathcal{C} et \mathcal{D} sont dites sans composantes communes.

Théorème 1.26. (Bézout) Soient \mathcal{C} une courbe algébrique plane de degré m et \mathcal{D} une courbe algébrique plane de degré n . Si \mathcal{C} et \mathcal{D} n'ont

pas de composantes communes, alors l'intersection des homogénéisées \mathcal{C}^* et \mathcal{D}^* se fait en mn points comptés avec multiplicités.

Exemple 1.27. Illustrons le théorème de Bézout, on se place dans le corps \mathbb{C} qui est algébriquement clos. On considère alors l'homogénéisée complexe du quadrifolium, il s'agit de la sextique de $P_2(\mathbb{C})$ d'équation :

$$(X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2Z^2 = 0,$$

et l'homogénéisée complexe du trifolium projectif, il s'agit de la quartique de $P_2(\mathbb{C})$ d'équation :

$$(X^2 + Y^2)^2 + (3X^2Y - Y^3)Z = 0.$$

Ces deux courbes étant sans composantes communes, le théorème 1.26 assure que leur intersection se fait en 24 points comptés avec multiplicité. Si l'on examine la figure 7, on compte 5 points d'intersection distincts, les points I_1, I_2, I_3, I_4 sont simples et le point I_5 est de multiplicité 14, ce qui nous fait au total 18 points d'intersection comptés avec multiplicité. Il reste deux points d'intersections triples que l'on a pas pu représenter sur la figure 7, il s'agit des points cycliques de $P_2(\mathbb{C})$.

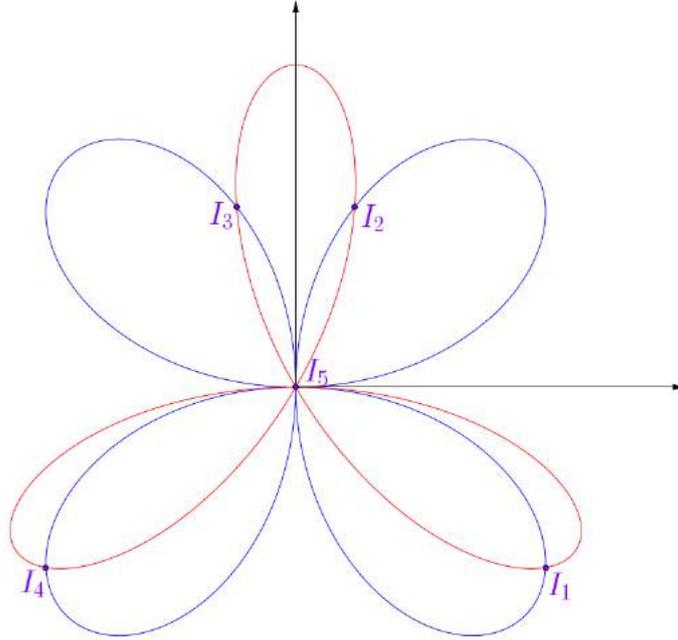


FIGURE 7. Représentation des points d'intersection du quadrifolium et du trifolium dans \mathbb{R}^2 .

Ce théorème doit être pensé comme un transfert à $P_2(k)$ du caractère algébriquement clos du corps k ; bien que standard, il reste cependant assez technique à établir, si bien que l'on se contentera de montrer le résultat plus faible suivant qui suffira à l'ensemble de nos applications :

Proposition 1.28. Soient \mathcal{C} une conique non dégénérée et \mathcal{D} une courbe algébrique plane de degré n . Si \mathcal{C} et \mathcal{D} n'ont pas de composantes communes, alors l'intersection des homogénéisées \mathcal{C}^* et \mathcal{D}^* se fait en au plus $2n$ points comptés avec multiplicités.

Avant de donner la preuve de la proposition 1.28, rappelons le résultat suivant sur la paramétrisation des coniques non dégénérées :

Lemme 1.29. Les coniques non dégénérées sont unicursales *i.e.* en dehors d'un nombre fini de points elles admettent une paramétrisation cartésienne dont les coordonnées sont des fractions rationnelles en le paramètre.

- L'ellipse de demi-grand axe $a \in \mathbb{R}_+^*$ et de demi-petit axe $b \in \mathbb{R}_+^*$ admet la paramétrisation rationnelle suivante :

$$\mathcal{E}(a, b) : \begin{cases} x(t) = a \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = b \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} .$$

- La parabole de paramètre $p \in \mathbb{R}_+^*$ admet la paramétrisation rationnelle suivante :

$$\mathcal{P}(p) : \begin{cases} x(t) = \frac{pt^2}{2} \\ y(t) = pt \end{cases} .$$

- L'hyperbole de demi-axe focal $a \in \mathbb{R}_+^*$ et de demi-axe non focal $b \in \mathbb{R}_+^*$ admet la paramétrisation rationnelle suivante :

$$\mathcal{H}(a, b) : \begin{cases} x(t) = a \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y(t) = b \frac{2t}{1-t^2} \end{cases} .$$

Les paramétrisations rationnelles des ellipses et des hyperboles se déduisent sans difficulté de leur paramétrisation trigonométrique usuelle en utilisant le changement de variable bijectif suivant :

$$\varphi : \begin{cases}]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \tan\left(\frac{u}{2}\right) \end{cases} .$$

La paramétrisation rationnelle de la parabole résulte quand à elle directement de la définition.

Démonstration. (proposition 1.28) Soient \mathcal{C} une conique non dégénérée et \mathcal{D} une courbe algébrique plane définie par $f \in k[T_1, T_2]$ de degré n . D'après le lemme 1.29, il existe $p_1, p_2, p_3 \in k_2[T_1]$, des polynômes de

degré au plus 2, vérifiant :

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = \frac{p_1(t)}{p_3(t)} \\ y(t) = \frac{p_2(t)}{p_3(t)} \end{cases} .$$

On en déduit que l'on a :

$$(12) \quad \mathcal{C}^* : \begin{cases} X(t) = p_1(t) \\ Y(t) = p_2(t) \\ Z(t) = p_3(t) \end{cases} .$$

On introduit alors l'application suivante :

$$\tilde{f}^* : t \in k \mapsto f^*(p_1(t), p_2(t), p_3(t)).$$

En particulier, il vient :

$$(13) \quad \mathcal{C}^* \cap \mathcal{D}^* : \left\{ [p_1(t) : p_2(t) : p_3(t)]; t \in k : \tilde{f}^*(t) = 0 \right\} .$$

D'après la définition-proposition 1.11, f^* est un polynôme homogène de degré n , si bien que \tilde{f}^* est un polynôme en t de degré au plus $2n$. Par ailleurs, $\tilde{f}^* \not\equiv 0$, sinon d'après (12) et (13), on aurait $\mathcal{C}^* \subset \mathcal{D}^*$ et en particulier, \mathcal{C} et \mathcal{D} auraient une composante commune, ce qui est exclu. Dès lors, puisque le corps k est algébriquement clos, f^* admet au plus $2n$ racines comptées avec multiplicité. Finalement, d'après (13), les courbes \mathcal{C}^* et \mathcal{D}^* s'intersectent en au plus $2n$ points avec multiplicité. \square

Remarque 1.30. Soit \mathcal{C} une conique et \mathcal{D} une courbe algébrique plane de degré n , d'après la définition-proposition 1.1 et la proposition 1.28, \mathcal{C} et \mathcal{D} s'intersectent en au plus $2n$ points comptés avec multiplicité.

Corollaire 1.31. Une courbe algébrique plane non vide dont le degré inférieur ou égal à 4 et ayant au moins quatre points doubles est la réunion de deux coniques.

Démonstration. Soit \mathcal{D} une courbe algébrique plane non vide dont le degré inférieur ou égal à 4 et ayant au moins quatre points doubles, disons S_1, S_2, S_3, S_4 . Soit $M_1 \in \mathcal{D} \setminus \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ un point choisi de telle manière qu'aucun triplet de points de $\{M_1, S_1, S_2, S_3, S_4\}$ ne soit alignés, on considère alors \mathcal{C}_1 la conique non dégénérée passant par les points S_1, S_2, S_3, S_4, M_1 . Par construction, \mathcal{C}_1 intersecte \mathcal{D} en au moins 9 points comptés avec multiplicité et si par l'absurde, \mathcal{D} et \mathcal{C}_1 étaient sans composantes communes, d'après la proposition 1.28, \mathcal{C}_1 intersecterait \mathcal{D} en au plus 8 points comptés avec multiplicité, ce qui n'est pas. En considérant les degrés possibles d'une composante commune à \mathcal{C}_1 et \mathcal{D} , on en déduit que soit il existe une droite projective \mathcal{D} telle que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_1$ ou bien $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{D}$. Dans le premier cas, la conique \mathcal{C}_1 est réunion de deux droites *i.e.* elle est dégénérée, ce qui n'est pas et

c'est donc que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{Q}$. Soit désormais, $M_2 \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{C}_1$ un point choisi de telle manière qu'aucun triplet de points de $\{M_2, S_1, S_2, S_3, S_4\}$ ne soit alignés, on considère alors \mathcal{C}_2 la conique non dégénérée passant par les points S_1, S_2, S_3, S_4, M_2 , avec le même raisonnement $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{Q}$.

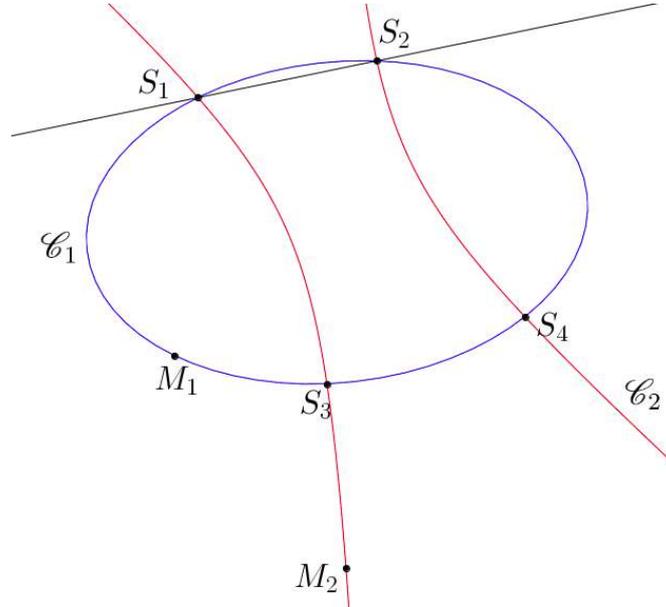


FIGURE 8. Illustration de la construction menée dans la preuve.

Par construction, les coniques \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont distinctes, si bien que :

$$(14) \quad \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{Q}.$$

Finalement, \mathcal{Q} étant de degré inférieur ou égal à 4, (14) lui impose d'être exactement de degré 4, si bien que l'on a $\mathcal{Q} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

□

2. ÉTUDE ALGÈBRE DU TORE

2.1. Une équation cartésienne implicite du tore. On se place dans \mathbb{R}^3 que l'on munit de sa structure euclidienne canonique *i.e.* celle qui rend orthonormale sa base naturelle. On introduit alors les axes associés aux vecteurs de la base naturelle :

$$\widehat{x} := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{y} := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{z} := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 2.1. On appelle tore de révolution standard de \mathbb{R}^3 de paramètres $(r, R) \in \mathbb{R}^2$, avec $r < R$ et on note $\mathbb{T}^2(r, R)$, la surface obtenue par révolution autour de l'axe \widehat{z} du cercle de rayon r et de centre $\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On souhaite déterminer une équation cartésienne implicite de $\mathbb{T}^2(r, R)$, en d'autres termes, on cherche une application f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} satisfaisant la propriété suivante :

$$\forall M := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, M \in \mathbb{T}^2(r, R) \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0.$$

Proposition 2.2. Une équation cartésienne implicite du tore de révolution standard de \mathbb{R}^3 de paramètres $(r, R) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ est la suivante :

$$\mathbb{T}^2(r, R) : (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Démonstration. On considère $M := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{P}_{\widehat{z}}(M)$ le plan qui contient le point M et l'axe \widehat{z} . Par construction, $M \in \mathcal{P}_{\widehat{z}}(M)$ et on en déduit alors que l'on a :

$$(15) \quad M \in \mathbb{T}^2(r, R) \Leftrightarrow M \in \mathcal{P}_{\widehat{z}}(M) \cap \mathbb{T}^2(r, R).$$

D'après la définition 2.1, on observe que $\mathcal{P}_{\widehat{z}}(M) \cap \mathbb{T}^2(r, R)$ est la réunion de deux cercles de rayon r , symétriques par rapport à l'axe \widehat{z} , si bien qu'un seul de ces cercles est susceptible de contenir M *i.e.* celui dont la première coordonnée du centre est de même signe que la première coordonnée du point M . Pour des besoins techniques, on introduit C son centre, ce qui nous permet alors de définir M_{\perp} le projeté orthogonal de M sur la droite (OC) , où $O := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On synthétise la situation dans les figures 9 et 10 que l'on trouvera plus loin ci-dessous.

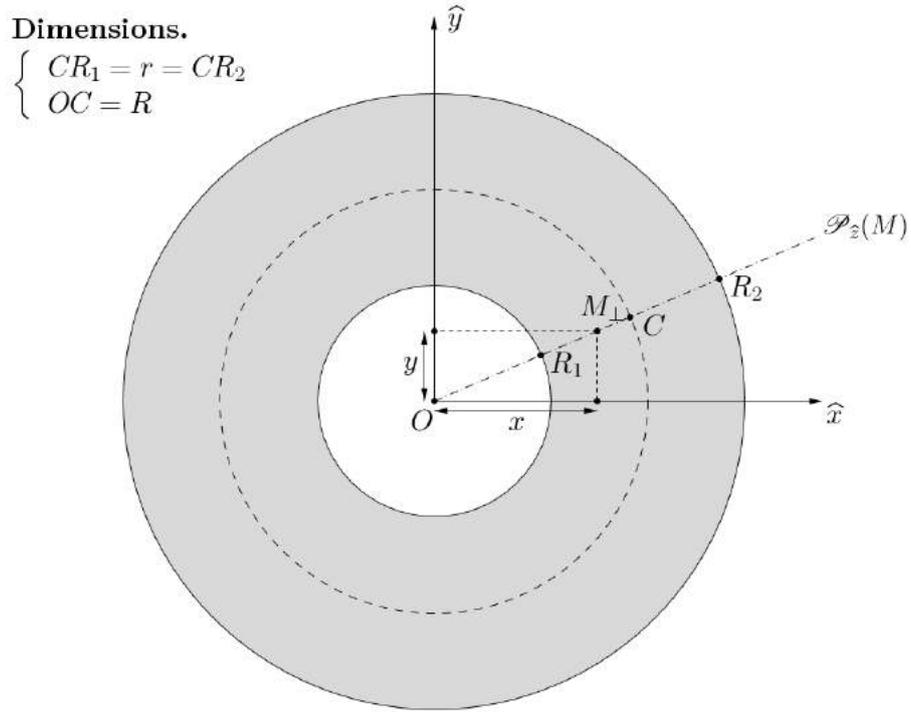


FIGURE 9. Vue en coupe de $\mathbb{T}^2(r, R)$ dans le plan $(\hat{x}O\hat{y})$.

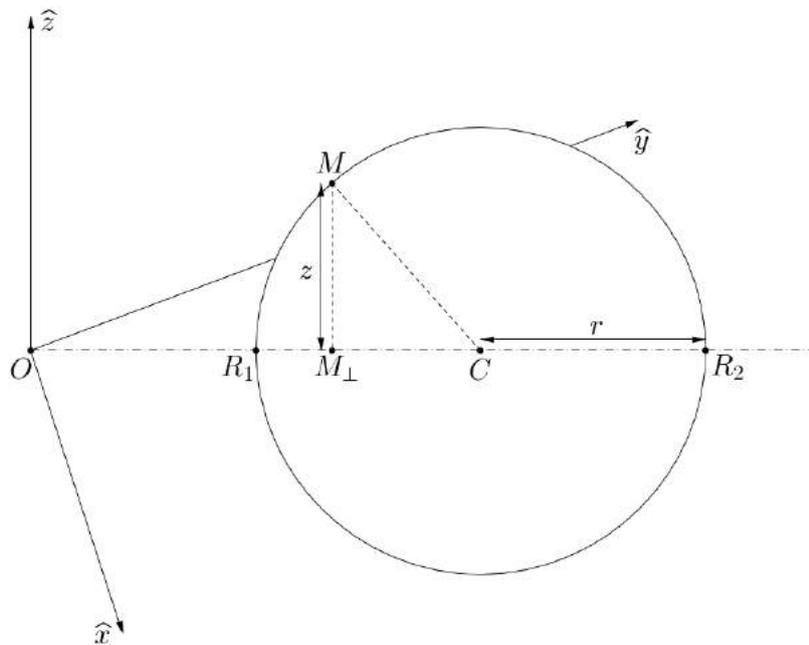


FIGURE 10. Vue en coupe de $\mathbb{T}^2(r, R)$ dans le plan $\mathcal{P}_{\hat{z}}(M)$.

En se plaçant dans le plan $(\widehat{xO\widehat{y}})$, on constate que l'on a :

$$(16) \quad CM_{\perp} = R - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

En se plaçant désormais dans le plan $\mathcal{P}_{\widehat{z}}(M)$ et en se référant à la figure 10, le théorème de Pythagore et l'équation (16) conduisent à :

$$(17) \quad CM^2 = \left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2.$$

Or, M appartient au cercle de centre C et de rayon r si et seulement si $CM = r$. Dès lors, avec l'équation (17), on a :

$$(18) \quad M \in \mathcal{P}_{\widehat{z}}(M) \cap \mathbb{T}^3(r, R) \Leftrightarrow r^2 = \left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2.$$

Il s'agit maintenant d'extraire algébriquement la racine du membre de droite de (18) :

$$\begin{aligned} r^2 = \left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 &\Leftrightarrow R^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \underbrace{R^2 - r^2}_{\geq 0, \text{ car } r < R} = 2R\sqrt{x^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Finalement, d'après les équivalences (15) et (18), on a :

$$M \in \mathbb{T}^2(r, R) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

□

2.2. La régularité des points du tore.

Proposition 2.3. Tous les points de $\mathbb{T}^2(r, R)$ sont réguliers.

Démonstration. On introduit le polynôme suivant :

$$f(T_1, T_2, T_3) := (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(T_1^2 + T_2^2).$$

D'après la proposition 2.2, on a :

$$\mathbb{T}^2(r, R) : f(x, y, z) = 0.$$

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{T}^2(r, R)$, pour déterminer la multiplicité de (x_0, y_0, z_0) dans $\mathbb{T}^2(r, R)$, on étudie les dérivées partielles de f en (x_0, y_0, z_0) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, z_0) &= 4x_0 (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 - r^2), \\ \frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, z_0) &= 4y_0 (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 - r^2), \\ \frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0) &= 4z_0 (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + R^2 - r^2). \end{aligned}$$

Puisque $r < R$, l'égalité suivante n'est pas satisfaite :

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2 - R^2.$$

On en déduit que toutes les dérivées partielles de f en (x_0, y_0, z_0) sont nulles si et seulement si l'une des propositions suivantes est satisfaite :

- (i) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$,
- (ii) $\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = R^2 + r^2 \\ z_0 = 0 \end{cases}$.

Or, si l'une des propositions ci-dessus était satisfaite, sachant que (x_0, y_0, z_0) appartient à $\mathbb{T}^2(r, R)$, l'une des égalités suivantes serait vérifiée :

(i) $R^2 = r^2$, ce qui contredit $r < R$.

(ii) $4R^2r^2 = 0$, ce qui contredit $(r, R) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.

On en déduit qu'il existe $j \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\frac{\partial f}{\partial T_j}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Enfin, d'après la définition 1.22, (x_0, y_0, z_0) est un point régulier de $\mathbb{T}^2(r, R)$. □

2.3. L'ombilicale, une courbe du tore.

Proposition 2.4. L'intersection de l'homogénéisé complexe de $\mathbb{T}^2(r, R)$ avec le plan à l'infini de $P_3(\mathbb{C})$ est l'ombilicale comptée deux fois.

Démonstration. D'après la proposition 2.2 et la remarque 1.13, l'équation de l'homogénéisé complexe de $\mathbb{T}^2(r, R)$ est :

$$\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* : [X^2 + Y^2 + Z^2 + (R^2 - r^2)T^2]^2 = 4R^2(X^2 + Y^2)T^2.$$

On en déduit que l'on a :

$$\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \{T = 0\} : (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = 0 \text{ et } T = 0.$$

En particulier, d'après la définition 1.8, l'ensemble des points à l'infini de $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^*$ est d'équation :

$$(19) \quad (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = 0 \text{ et } T = 0.$$

Enfin, d'après (19) et la proposition 1.20, $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \{T = 0\}$ est l'ombilicale.

Par ailleurs, on introduit le polynôme suivant :

$$g := (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2)^2 \in \mathbb{C}[T_1, T_2, T_3].$$

D'après (19), on a :

$$\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \{T = 0\} : g(X, Y, Z) = 0 \text{ et } T = 0.$$

Pour déterminer la multiplicité des points de $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \{T = 0\}$, on s'intéresse aux dérivées partielles de g . Soit $[X : Y : Z : T] \in P_3(\mathbb{C})$, on constate que l'on a :

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial T_1}(X, Y, Z) &= 4X(X^2 + Y^2 + Z^2), \\ \frac{\partial g}{\partial T_2}(X, Y, Z) &= 4Y(X^2 + Y^2 + Z^2), \\ \frac{\partial g}{\partial T_3}(X, Y, Z) &= 4Z(X^2 + Y^2 + Z^2), \end{aligned}$$

et :

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial T_1^2}(X, Y, Z) &= 12X^2 + 4Y^2 + 4Z^2, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial T_2^2}(X, Y, Z) &= 4X^2 + 12Y^2 + 4Z^2, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial T_3^2}(X, Y, Z) &= 4X^2 + 4Y^2 + 12Z^2. \end{aligned}$$

Soit $[X : Y : Z : T] \in \mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \{T = 0\}$, d'après (19) et (20), on a :

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial T_1}(X, Y, Z) &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial T_2}(X, Y, Z) &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial T_3}(X, Y, Z) &= 0. \end{aligned}$$

Par l'absurde, si toutes les dérivées secondes de g en (X, Y, Z) sont nulles, en particulier, avec (21), on aurait :

$$(23) \quad \begin{aligned} 2X^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 &= 0, \\ 2Y^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 &= 0, \\ 2Z^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Avec (19) et (23), il viendrait $(X, Y, Z, T) = (0, 0, 0, 0)$, ce qui est exclu d'après la définition-proposition 1.1. Dès lors, d'après la définition 1.22 et avec (22), les points de $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \{T = 0\}$ sont exactement doubles. Finalement, l'intersection de $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^*$ avec le plan à l'infini de $P_3(\mathbb{C})$ est l'ombilicale comptée deux fois.

□

3. LES CERCLES DE VILLARCEAU, UNE FAMILLE REMARQUABLE DE CERCLES SUR LE TORE DE RÉVOLUTION

Définition 3.1. On appelle plan bitangent de $\mathbb{T}^2(r, R)$, un plan de \mathbb{R}^3 qui contient O et qui est tangent à $\mathbb{T}^2(r, R)$ en exactement deux points.

Théorème 3.2. L'intersection de $\mathbb{T}^2(r, R)$ avec un de ses plans bitangents est la réunion de deux cercles, on les appelle cercles de Villarceau.

Démonstration. Soit \mathcal{P}_b un plan bitangent à $\mathbb{T}^2(r, R)$, disons en M_1, M_2 . D'après la proposition 2.4, $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^*$ contient doublement l'ombilicale. Or, d'après la définition 1.18, les points cycliques de \mathcal{P}_b sont sur l'ombilicale, si bien que $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \mathcal{P}_b$ a les points cycliques de \mathcal{P}_b comme points doubles. Par ailleurs, d'après la définition-proposition 1.11 et les propositions 1.24, 2.2 et 2.3, $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \mathcal{P}_b$ est une courbe algébrique plane de degré inférieur ou égal à 4 dont les points M_1 et M_2 sont au moins doubles. En résumé, $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \mathcal{P}_b$ est une quartique possédant les points cycliques de \mathcal{P}_b comme points doubles et dont les points M_1, M_2 sont au moins doubles. En particulier, d'après le corollaire 1.31, $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \mathcal{P}_b$ se décompose en deux coniques projectives se recoupant aux points cycliques de \mathcal{P}_b . Finalement, d'après la proposition 1.16, $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{P}_b$ est la réunion de deux cercles. □

ANNEXE A. LES CERCLES DE VILLARCEAU, DES GRANDS CERCLES
DU TORE DE RÉVOLUTION

Proposition A.1. Les cercles de Villarceau de $\mathbb{T}^2(r, R)$ en sont des grands cercles *i.e.* ils sont tous les deux de rayon R .

Démonstration. Soit \mathcal{C} un cercle de Villarceau de $\mathbb{T}^2(r, R)$, on note Ω son centre et ρ son rayon. On introduit également M un des points d'intersection des deux cercles de Villarceau de $\mathbb{T}^2(r, R)$ et N un des points d'intersection d'un des cercles de Villarceau avec la droite $(O\Omega)$.

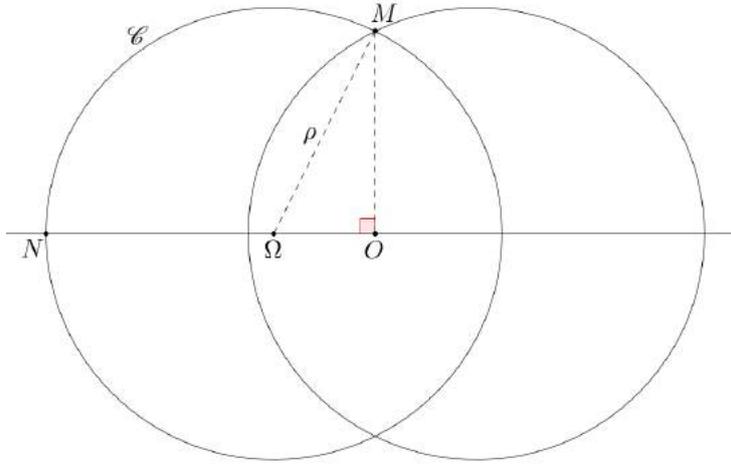


FIGURE 11. Vue en coupe de $\mathbb{T}^2(r, R)$ dans un plan bitangent.

Par construction de $\mathbb{T}^2(r, R)$ et de \mathcal{C} , on a :

$$(24) \quad ON = R + r.$$

Dès lors, en se référant à la figure 11, avec (24), on a :

$$(25) \quad O\Omega = ON - \Omega N = R + r - \rho.$$

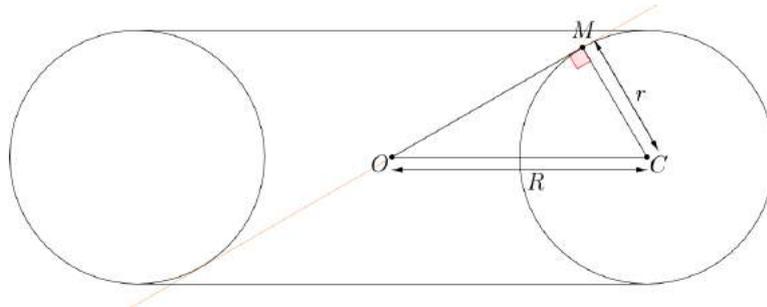


FIGURE 12. Vue en coupe de $\mathbb{T}^2(r, R)$ dans le plan $(\hat{x}O\hat{y})$.

Par construction, la droite (OM) est tangente à un des cercles méridiens de $\mathbb{T}^2(r, R)$, si bien que le triangle OMC est rectangle en M (voir la figure 12). Dès lors, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$(26) \quad OM = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Ainsi, d'après le théorème de Pythagore dans ΩOI et avec (26), on a :

$$(27) \quad O\Omega^2 = \rho^2 - OM^2 = \rho^2 + r^2 - R^2.$$

En rapprochant (25) et (27), on a :

$$\begin{aligned} (R + r - \rho)^2 = \rho^2 + r^2 - R^2 &\Leftrightarrow R^2 + r^2 + 2rR - 2\rho(R + r) + \rho^2 = \rho^2 + r^2 - R^2 \\ &\Leftrightarrow 2\rho(R + r) = 2R^2 + 2rR \\ &\Leftrightarrow 2\rho(R + r) = 2R(R + r) \\ &\Leftrightarrow \rho = R. \end{aligned}$$

Finalement, on a $\rho = R$.

□

RÉFÉRENCES

- [Aud06] M. Audin. *Géométrie*, pages 117, 192, 239, 256–257. EDP Sciences, 2006.
- [Ber87] M. Berger. *Geometry II*, pages 304–305. Springer, 1987.
- [Ber09] M. Berger. *Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob*, pages 32–35, 67–68, 120–121, 157–158, 217, 236–237, 253–255. Cassini, 2009.
- [Ber10] M. Berger. Les cercles de Villarceau. *BibNum*, 2010.
- [Far07] Rida T. Farouki. *Pythagorean-Hodograph Curves : Algebra and Geometry Inseparable*, pages 112–116, 199–207, 214–219. Springer, 2007.
- [Fel] D. Feldmann. Géométrie projective et cercles de Villarceau.
- [Hir02] A. Hirsch. Extension of the "Villarceau-Section" to the Surfaces of Revolution with a Generating Conic. *Journal for Geometry and Graphics (6)*, pages 121–132, 2002.
- [Per95] D. Perrin. *Géométrie algébrique : une introduction*, pages 21–22, 34–35. EDP Sciences/CNRS Éditions, 1995.
- [Sam86] P. Samuel. *Géométrie projective*, pages 13–15, 26–29. Presses Universitaires de France, 1986.

ANNEXE C. MON RAPPORT D'APPRENTISSAGE HORS MURS EN L3

Les pages suivantes constituent mon rapport d'apprentissage hors murs en L3.

L'objectif principal de ce document est de déterminer le profil de vitesse d'un écoulement de Marangoni induit par un gradient de tension superficielle à la surface d'un fluide incompressible.

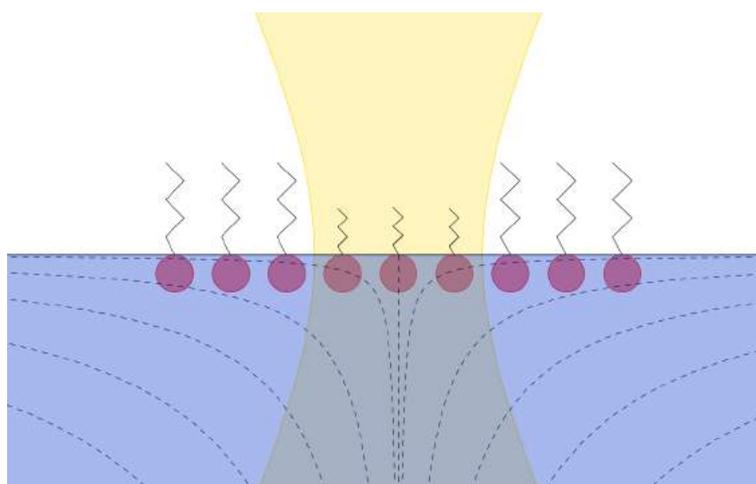
J'invite le lecteur à consulter le rapport complet pour des détails supplémentaires.

RAPPORT DE STAGE
3^{ème} année de Mathématiques

**ÉCOULEMENT DE MARANGONI CONTRÔLÉ PAR
LA LUMIÈRE**

Cyril FALCON

RÉSUMÉ. Si l'interface d'un liquide avec sa vapeur est soumise à un gradient de tension superficielle, le long de ladite interface s'effectue alors un transport de matière appelé écoulement de Marangoni. Dans ce rapport, le gradient de tension superficielle sera dû à une répartition inhomogène en tensioactif photocommutable dans l'état excité et le gradient de concentration sera lui-même provoqué par la localisation spatiale de l'excitation lumineuse; on cherchera à obtenir le champ de vitesse de l'écoulement induit.



Sous la direction de : Thomas BICKEL.

Date: 22 juin au 17 juillet.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	4
Introduction	5
1. Le profil de concentration en tensioactif dans l'état excité..	7
1.1. La photocommutation des tensioactifs	7
1.2. La diffusion des tensioactifs dans l'état excité.....	8
1.3. Le profil stationnaire du problème unidimensionnel	16
2. L'écoulement de Marangoni induit	21
2.1. La fonction de courant de l'écoulement	22
2.2. L'équation biharmonique en domaine rectangulaire	22
Analyse des résultats et prolongement du problème	29
Références.....	31

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde gratitude aux directions des études de l'Université Paris-Sud et du Magistère de mathématiques qui m'ont permis de compléter ma formation en suivant un apprentissage hors murs.

J'adresse mes sincères remerciements à la direction du Laboratoire Onde et Matière d'Aquitaine pour m'avoir généreusement accueilli dans leurs locaux sur la durée de quatre semaines.

Toute ma reconnaissance va enfin à Thomas BICKEL qui a bien voulu superviser mon stage et m'a encadré avec pertinence et dynamisme. Je le remercie d'avoir cherché à inscrire cette période d'apprentissage dans la continuité de mes connaissances mathématiques, en m'initiant notamment à la résolution des équations aux dérivées partielles.

INTRODUCTION

Si l'on considère un liquide en équilibre dynamique avec sa vapeur, les molécules au sein des deux milieux sont soumises à des interactions attractives, dites de Van Der Waals et à des interactions électrostatiques répulsives ; de telle manière qu'à l'intérieur des deux fluides la résultante de ces deux types d'interaction est nulle. Les molécules à l'interface des deux milieux étant soumises à l'action simultanée des deux fluides et la cohésion d'un liquide étant plus importante que celle d'un gaz, la résultante des interactions susnommées est non nulle (voir figure 1). L'équilibre dynamique assure alors l'existence d'une force à l'interface liquide-vapeur, il s'agit d'une tension de surface.

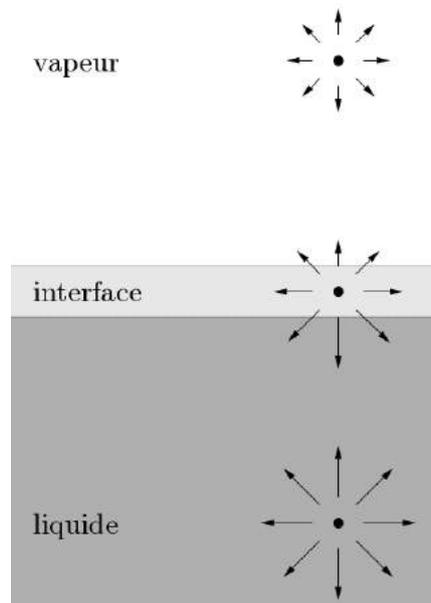


FIGURE 1. Représentation schématique des interactions microscopiques à une interface liquide-vapeur.

L'interface entre un liquide et sa vapeur est ainsi classiquement modélisée comme une surface mathématique à laquelle on associe une élasticité, nommée tension superficielle et que l'on exprime en $J.m^{-2}$ ou de manière équivalente en $N.m^{-1}$. Cette grandeur s'interprète comme l'énergie par unité de surface à fournir à l'interface d'un liquide avec sa vapeur pour la déformer ; un liquide avec une tension superficielle élevée résistera mieux aux contraintes dynamiques qu'un liquide avec une faible tension superficielle.

Certains composés chimiques appelés tensioactifs sont en mesure de modifier la tension superficielle de l'interface d'un liquide avec sa vapeur. Ces composés sont généralement constitués d'une chaîne carbonée

lipophile et d'une tête hydrophile (voir figure 2), c'est cette amphiphilie qui leur confère la capacité de s'agréger aux interfaces et d'en modifier la tension superficielle.

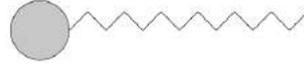


FIGURE 2. Représentation schématique d'un composé tensioactif typique.

Selon l'interprétation donnée de la tension superficielle, si l'interface d'un liquide avec sa vapeur est soumise à un gradient de tension superficielle, le long de ladite interface s'effectue alors un transport de matière des régions de basse tension vers les régions de haute tension superficielle ; ce transport de matière est nommé écoulement de Marangoni en l'honneur du physicien italien Carlo Marangoni (1840-1925) qui a étudié et caractérisé ce phénomène lors de sa thèse en 1865.

Dans le présent rapport, on provoquera un écoulement de Marangoni le long de l'interface de l'eau avec l'air grâce à des tensioactifs photo-commutables *i.e.* à des composés chimiques capables de modifier la tension superficielle de l'interface d'un liquide avec sa vapeur lorsqu'ils subissent une excitation lumineuse. C'est la localisation spatiale du faisceau laser qui sera responsable d'une inhomogénéité de la concentration en tensioactifs dans l'état excité et engendrera un gradient de tension superficielle. Notre étude débutera par la détermination du profil de concentration en tensioactif dans l'état excité et aboutira à l'expression du champ de vitesse de l'écoulement induit.

1. LE PROFIL DE CONCENTRATION EN TENSIOACTIF DANS L'ÉTAT EXCITÉ

Soit Ω un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 , il s'agit de l'interface avec l'air du mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables; on suppose initialement que les tensioactifs sont tous dans l'état non activé et que leur répartition dans Ω est homogène. Pour tout point $M \in \Omega$ et pour chaque instant $t > 0$, on note $c(M, t)$ la concentration en tensioactif dans l'état excité au point M et à l'instant t .

L'évolution spatiale et temporelle de c est régie par l'équation aux dérivées partielles linéaire suivante :

$$(1) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c - \alpha c + \beta I(M, t),$$

où $D > 0$ est la diffusivité de la matière dans l'eau exprimé en $m^2.s^{-1}$, $\alpha > 0$ est une constante multiplicative exprimée en s^{-1} , $\beta > 0$ est une constante multiplicative exprimée en $cd^{-1}.s^{-1}$ et $I(M, t)$ est l'intensité lumineuse du laser au point $M \in \Omega$ et à l'instant $t > 0$ exprimée en cd .

On admettra l'existence de solutions à l'équation (1) et pour assurer leur unicité il conviendra non seulement de spécifier le profil initial $c_0 : M \in \Omega \mapsto c(M, 0)$ mais aussi les conditions aux limites satisfaites par c , ce que l'on s'efforcera de faire lorsque que nous aurons spécifier la géométrie de l'interface Ω .

1.1. La photocommutation des tensioactifs. On s'intéresse ici à la photocommutation des tensioactifs *i.e.* à la réaction chimique de passage des tensioactifs dans l'état excité. On suppose que cette réaction chimique est univoque : une fois excités les tensioactifs le restent, d'ordre un et de constante de réaction $\alpha > 0$.

L'évolution de la concentration en tensioactif dans l'état excité est modélisé par l'équation différentielle ordinaire linéaire suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\alpha c.$$

Finalement, le profil de concentration en tensioactif dans l'état excité dans Ω est donné par :

$$c(M, t) = c(M, 0)e^{-\alpha t}.$$

Pour $t > 5/\alpha$, l'évolution temporelle de la concentration en tensioactif dans l'état excité n'est plus significative.

1.2. La diffusion des tensioactifs dans l'état excité. On s'intéresse désormais à la diffusion des tensioactifs dans l'état excité dans Ω , l'évolution de la concentration en tensioactif dans l'état excité est alors modélisée par l'équation aux dérivées partielles linéaire suivante :

$$(2) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c.$$

On admet l'existence de solutions à l'équation (2) et pour assurer leur unicité il convient non seulement de spécifier $M \in \Omega \mapsto c(M, 0)$ mais aussi les conditions aux limites satisfaites par c , ce qui nous amène à spécifier la géométrie de Ω .

1.2.1. Résolution à une dimension. On s'intéresse ici à l'équation (2) en domaine unidimensionnel *i.e.* $\Omega \subset \mathbb{R}$. On note alors x la variable d'évolution spatiale de c , sous ces conditions, on a :

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

L'équation (2) se réduit alors simplement à :

$$(3) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

1.2.1.1. Domaine borné. On suppose ici que Ω est borné, c'est-à-dire que l'interface avec l'air du mélange d'eau et de tensioactifs photo-commutables est spatialement limitée. Notons alors L la longueur du réceptacle exprimée en m *i.e.* $\Omega = [0, L]$. Pour cette géométrie de Ω , les conditions aux limites sont les suivantes :

$$(4) \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 = \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=L}.$$

Elles traduisent le fait que le mélange d'eau et de tensioactifs reste confiné au sein de l'interface Ω .

Dans le dessein de s'affranchir des grandeurs caractéristiques de notre problème, on introduit le \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme suivant :

$$\varphi : \begin{cases} [0, L] \times \mathbb{R}_+ & \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \\ (x, t) & \mapsto \left(\frac{x}{L}, \frac{Dt}{L^2} \right) \end{cases}.$$

En posant $f := c \circ \varphi$, le problème aux limites $\{(3), (4)\}$ s'exprime de la manière suivante en termes de variables adimensionnées :

$$(5) \quad \left\{ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=0} = 0 = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=1} \right\}.$$

On résout (5) en utilisant la méthode de séparation des variables *i.e* on cherche g satisfant (5) sous la forme :

$$g(u, v) = g_1(u)g_2(v),$$

où g_1 est une fonction deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et g_2 une fonction dérivable sur \mathbb{R}_+ . En supposant que g_1 et g_2 ne s'annulent pas sur leur domaine de définition respectif, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \Leftrightarrow \forall (u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+, \frac{g_1''(u)}{g_1(u)} = \frac{g_2'(v)}{g_2(v)}.$$

Sous cette hypothèse, on en déduit que les rapports $\frac{g_1''}{g_1}$ et $\frac{g_2'}{g_2}$ sont égaux et constants, si bien qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(6) \quad \begin{cases} g_1'' - kg_1 = 0 \\ g_2' - kg_2 = 0 \end{cases}.$$

Si l'on suppose par l'absurde que $k > 0$, $\lim_{+\infty} |g_2| = +\infty$ et puisque g_1 ne s'annule pas sur $[0, 1]$, il vient $\lim_{v \rightarrow +\infty} |g(0, v)| = +\infty$, ce que l'on interdit par soucis d'interprétation d'une concentration. Par conséquent, on dispose d'un $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $k = -\omega^2$ et avec (6), il vient :

$$\begin{cases} g_1(u) = A \cos(\omega u) + B \sin(\omega u) \\ g_2(v) = C e^{-\omega^2 v} \end{cases}.$$

Les conditions aux limites de (5) imposent à B d'être nul et garantissent l'existence d'un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = n\pi$. En résumé, on a :

$$\begin{cases} g_1(u) = A \cos(n\pi u) \\ g_2(v) = C e^{-\omega^2 v} \end{cases}.$$

En particulier, l'hypothèse de non annulation de g_1 et g_2 sur leur domaine de définition respectif est *a posteriori* vérifiée. Finalement, on a trouvé une famille de solutions de (5) sous la forme :

$$\left\{ g_n : (u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \mapsto \cos(n\pi u) e^{-n^2 \pi^2 v}; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

La fonction $n \in \mathbb{Z} \mapsto g_n$ étant paire, on peut se restreindre à la famille de solutions $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. La linéarité du problème aux limites (5) nous permet d'affirmer que tout élément de $\text{Vect}(\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ est encore solution de (5). Les propriétés des fonctions de $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nous permettent quant à elles de rendre licite l'inversion des opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

avec le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty}$, on en déduit que tout élément de $\overline{\text{Vect}(\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}})}$

est solution du problème aux limites (5). Finalement, par unicité des solutions du problème aux limites (5), il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$f(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\pi u) e^{-n^2 \pi^2 v}.$$

Il nous reste à déterminer la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ce que l'on va faire avec la donnée du profil initial f_0 . On constate pour cela que l'on a :

$$f_0(u) := f(u, 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\pi u).$$

On prolonge f_0 sur \mathbb{R} en une fonction \tilde{f}_0 paire et 2-périodique. De cette manière, pour tout $u \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$(7) \quad \tilde{f}_0(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\pi u).$$

Par ailleurs, puisque f est solution de (5), \tilde{f}_0 est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} . Par théorème, la série de Fourier de \tilde{f}_0 converge normalement vers \tilde{f}_0 sur \mathbb{R} , en particulier avec (7), il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_0(\xi) d\xi, & n = 0 \\ \int_{-1}^1 f_0(\xi) \cos(n\pi\xi) d\xi, & n > 0 \end{cases}.$$

Finalement, on a :

$$f(u, v) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\xi, 0) d\xi + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{-1}^1 f(\xi, 0) \cos(n\pi\xi) d\xi \right) \cos(n\pi u) e^{-n^2 \pi^2 v}.$$

Étudions graphiquement f lorsque nous imposons au profil initial de suivre une distribution de Dirac centrée en $1/2$. Dans ce cas précis, les coefficients intégraux se simplifient pour donner :

$$f(u, v) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\pi u) e^{-n^2 \pi^2 v}.$$

Commençons notre étude du comportement de cette solution par la représentation de quelques unes de ses lignes de niveau et intéressons nous plus précisément à celles données par $u \in [0, 1] \mapsto f(u, v)$ et obtenues pour des valeurs significatives du paramètre v (voir figure 3).

On constate que lorsque v croît, $u \in [0, 1] \mapsto f(u, v)$ se déforme continûment d'une distribution de Dirac centrée en $1/2$ en une fonction constante. Physiquement, cela signifie que les tensioactifs dans l'état

activé initialement présents se diffusent dans l'interface pour se répartir uniformément en son sein. Cette diffusion s'accompagne lorsque v croît d'une décroissance de l'amplitude maximale de $u \in [0, 1] \mapsto f(u, v)$.

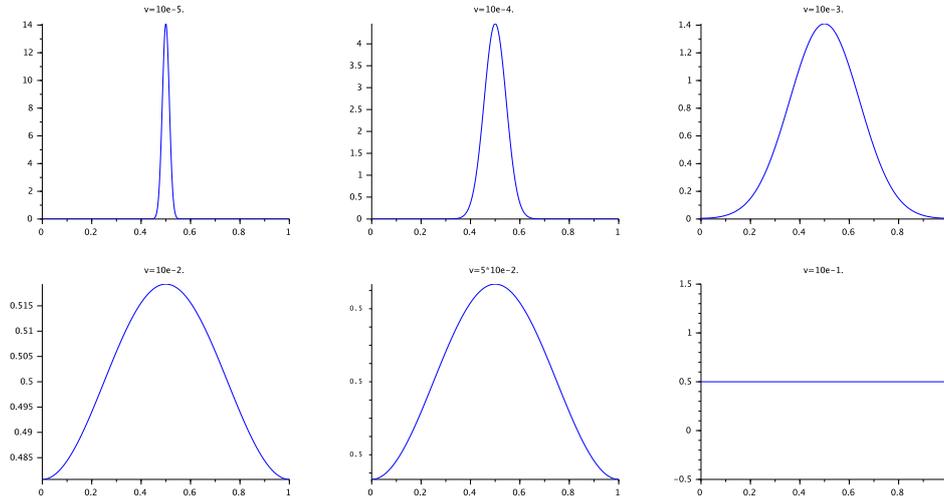


FIGURE 3. Représentation graphique de quelques lignes de niveaux de f obtenues pour des valeurs significatives du paramètre v .

Afin de donner une estimation de la décroissance, on trace en double échelle logarithmique $v \in \mathbb{R}_+ \mapsto f\left(\frac{1}{2}, v\right)$ (voir figure 4).

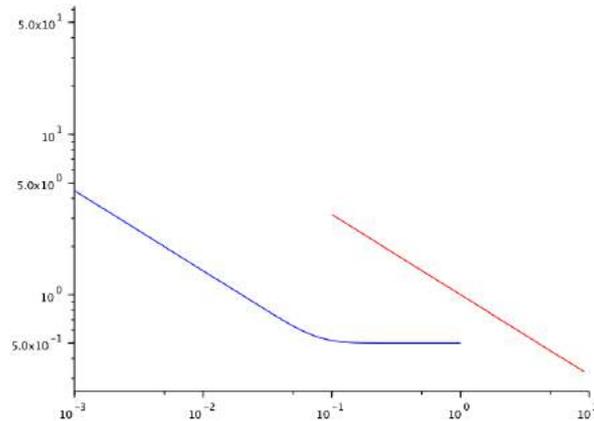


FIGURE 4. Représentations graphiques en échelle doublement logarithmique de $v \in \mathbb{R}_+ \mapsto f\left(\frac{1}{2}, v\right)$ (en bleu) et de $v \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{v}}$ (en rouge).

Si l'on néglige les effets de bords induits par le caractère borné de Ω , on constate que les représentations graphiques en échelle doublement logarithmique de $v \in \mathbb{R}_+ \mapsto f\left(\frac{1}{2}, v\right)$ et de $v \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{v}}$ sont des droites parallèles. On en déduit que lorsque v croît, l'amplitude maximale de $u \in [0, 1] \mapsto f(u, v)$ décroît comme $v \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{v}}$.

Pour conclure cette partie, exprimons la concentration en tensioactifs dans l'état activé, en se rappelant que $c = f \circ \varphi^{-1}$, il vient :

$$c(x, t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L c(\xi, 0) d\xi + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{-L}^L c(\xi, 0) \cos\left(n\pi \frac{\xi}{L}\right) d\xi \right) \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{Dt}{L^2}\right).$$

1.2.1.2. Domaine infini. On suppose ici que Ω est non borné, c'est-à-dire que l'interface avec l'air du mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables n'est pas spatialement limitée *i.e.* $\Omega = \mathbb{R}$. Pour cette géométrie de Ω , les conditions aux limites sont inexistantes.

On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R} \mapsto c(x, t)$ est de carré intégrable sur \mathbb{R} . De cette manière, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on peut définir $\widehat{c}(\cdot, t)$ la transformée de Fourier de $x \in \mathbb{R} \mapsto c(x, t)$ qui sera également une fonction intégrable sur \mathbb{R} et vérifiera la formule d'inversion de Fourier. On suppose également que c a les propriétés suffisantes pour rendre licite l'inversion des opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} c(x, \cdot) e^{-i\xi x} dx$.

Après avoir appliqué la transformée de Fourier par rapport à x à l'équation (3) et en tenant compte des hypothèses prises ci-dessus :

$$\frac{\partial \widehat{c}}{\partial t} = -D\xi^2 \widehat{c}.$$

On en déduit que l'on a :

$$\widehat{c}(\xi, t) = \widehat{c}(\xi, 0) e^{-D\xi^2 t}.$$

Finalement, d'après la formule d'inversion de Fourier, on a :

$$(8) \quad c(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{c}(\xi, 0) e^{-D\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi.$$

En particulier, si le profil initial $c_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto c(x, 0)$ a les bonnes propriétés, les hypothèses prises au début sont *a posteriori* vérifiées.

Déterminons c lorsque nous imposons au profil initial de suivre une distribution de Dirac centrée en 0. Dans ce cas précis, on a :

$$c(x, 0) = \delta(x).$$

Soit après avoir pris la transformée de Fourier par rapport à x :

$$\widehat{c}(\xi, 0) = 1.$$

Finalement, après calcul de l'expression intégrale (8), on a :

$$c(x, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

Commençons notre étude du comportement de cette solution par la représentation de quelques unes de ses lignes de niveau et intéressons nous plus précisément à celles données par $x \in [0, 1] \mapsto c(x, t)$ et obtenues pour des valeurs significatives du paramètre t (voir figure 5).

On constate que lorsque t croit, $x \in \mathbb{R} \mapsto c(x, t)$ se déforme continûment d'une distribution de Dirac centrée en 0 en une fonction constante. Physiquement, cela signifie que les tensioactifs dans l'état activé initialement présents se diffusent dans l'interface pour se répartir uniformément en son sein. Cette diffusion s'accompagne d'une décroissance de l'amplitude maximale de $x \in \mathbb{R} \mapsto c(x, t)$ en $\sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}}$.

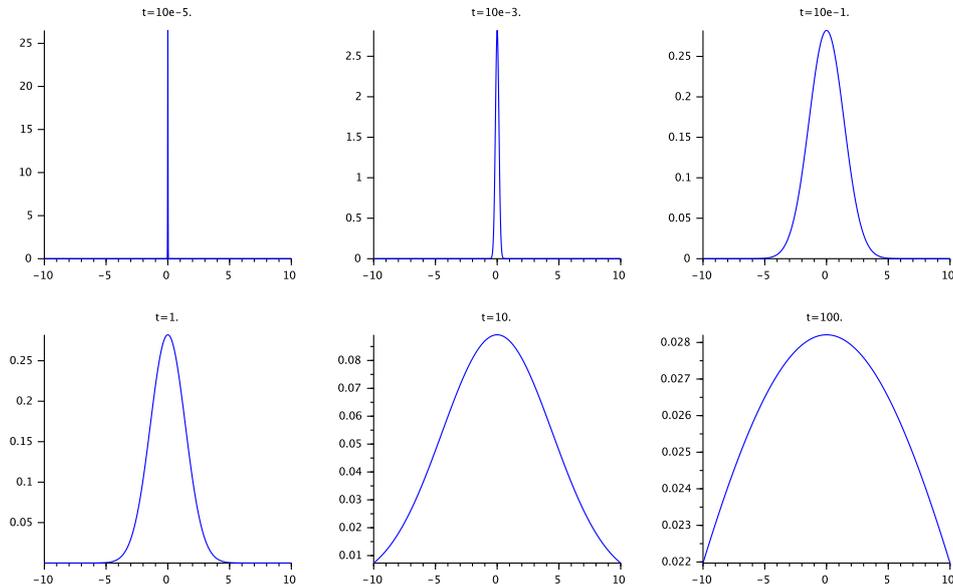


FIGURE 5. Représentation graphique de quelques lignes de niveaux de c obtenues pour des valeurs significatives du paramètre t .

Les solutions de l'équation (3) obtenues en domaine borné et infini ont des comportements similaires, ainsi, afin d'éviter la gestion des effets de bords induits par une interface bornée, les interfaces unidimensionnelles seront traitées comme étant infinies.

1.2.2. *Résolution dans un disque.* On s'intéresse ici à l'équation (2) en domaine circulaire borné *i.e.* on suppose Ω est le disque fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$. On décrit alors le problème à l'aide des coordonnées polaires, ici notées $[r, \theta]$. On suppose également que c est invariant par révolution autour de l'axe \hat{z} , sous ces conditions, on a :

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

L'équation (2) se réduit alors simplement à :

$$(9) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right).$$

Pour cette géométrie de Ω , il y a une seule condition aux limites :

$$(10) \quad \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$

Elle traduit le fait que le mélange d'eau et de tensioactifs reste confiné au sein de l'interface Ω .

Dans le dessein de s'affranchir des grandeurs caractéristiques de notre problème, on introduit le \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme suivant :

$$\varphi : \begin{cases} [0, R] \times \mathbb{R}_+ & \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \\ (r, t) & \mapsto \left(\frac{r}{R}, \frac{Dt}{R^2} \right) \end{cases}.$$

En posant $f := c \circ \varphi$, le problème aux limites $\{(9), (10)\}$ s'exprime de la manière suivante en termes de variables adimensionnées :

$$(11) \quad \left\{ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial u}, \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=1} = 0 \right\}.$$

On résout (11) en utilisant la méthode de séparation des variables *i.e.* on cherche g satisfant (11) sous la forme :

$$g(u, v) = g_1(u)g_2(v),$$

où g_1 est une fonction deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et g_2 une fonction dérivable sur \mathbb{R}_+ . En supposant que g_1 et g_2 ne s'annulent pas sur leur domaine de définition respectif, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial g}{\partial u} \Leftrightarrow \forall (u, v) \in]0, 1] \times \mathbb{R}_+, \frac{u^2 g_1''(u) + u g_1'(u)}{u^2 g_1(u)} = \frac{g_2'(v)}{g_2(v)}.$$

Sous cette hypothèse, on en déduit que $u \in]0, 1] \mapsto \frac{u^2 g_1(u)'' + u g_1'(u)}{u^2 g_1(u)}$

et $\frac{g_2'}{g_2}$ sont égales et constantes, si bien qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(12) \quad \begin{cases} u^2 g_1'' + u g_1' - k u^2 g_1 = 0 \\ g_2' - k g_2 = 0 \end{cases}.$$

Si l'on suppose par l'absurde que $k > 0$, $\lim_{v \rightarrow +\infty} |g_2| = +\infty$ et puisque g_1 ne s'annule pas sur $[0, 1]$, il vient $\lim_{v \rightarrow +\infty} |g(0, v)| = +\infty$, ce que l'on interdit par soucis d'interprétation d'une concentration. Par conséquent, on dispose d'un $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $k = -\omega^2$ et avec (12), il vient :

$$\begin{cases} g_1(u) = A J_0(\omega u) + B Y_0(\omega u) \\ g_2(v) = C e^{-\omega^2 v} \end{cases}.$$

Si par l'absurde B est non nul, on a $|g_1(0)| = +\infty$ et puisque g_2 ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+ , on a $|g(0, 0)| = +\infty$, ce que l'on interdit par soucis d'interprétation d'une concentration. La condition aux limites de (11) garantit l'existence d'un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega = j_{1,n}$, où $j_{1,n}$ est le n -ième zéro de la fonction de Bessel de première espèce J_1 . En résumé, on a :

$$\begin{cases} g_1(u) = A J_0(j_{1,n} u) \\ g_2(v) = C e^{-\omega^2 v} \end{cases}.$$

En particulier, l'hypothèse de non annulation de g_1 et g_2 sur leur domaine respectif de définition est *a posteriori* vérifiée. Finalement, on a trouvé une famille de solutions de (12) sous la forme :

$$\left\{ g_n : (u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \mapsto J_0(j_{1,n} u) e^{-j_{1,n}^2 v}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

La linéarité du problème aux limites (11) nous permet d'affirmer que tout élément de $\text{Vect}(\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ est encore solution de (11). Les propriétés des fonctions de $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nous permettent quant à elles de rendre

licite l'inversion des opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ avec le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty}$, on

en déduit que tout élément de $\overline{\text{Vect}(\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}})}$ est solution du problème aux limites (11). Finalement, par unicité des solutions du problème aux limites (11), il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$f(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n J_0(j_{1,n} u) e^{-j_{1,n}^2 v}.$$

On pourrait montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspond aux coefficients de la série de Fourier-Bessel de $f_0 : u \in [0, 1] \mapsto f(u, 0)$ prolongée à \mathbb{R} .

Pour conclure cette partie, exprimons la concentration en tensioactifs dans l'état activé, en se rappelant que $c = f \circ \varphi^{-1}$, il vient :

$$c(r, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n J_0 \left(j_{1,n} \frac{r}{R} \right) \exp \left(-j_{1,n}^2 \frac{Dt}{R^2} \right).$$

1.3. Le profil stationnaire du problème unidimensionnel. On s'intéresse à l'équation (1) en régime stationnaire et en domaine unidimensionnel infini *i.e.* $\Omega = \mathbb{R}$, en d'autres termes, on considère :

$$(13) \quad D \frac{d^2 c}{dx^2} - \alpha c + \beta I(x) = 0.$$

Pour cette géométrie de Ω , les conditions aux limites sont inexistantes.

1.3.1. Terme source : distribution de Dirac. On suppose ici que l'intensité du laser en fonction de la position suit une distribution de Dirac centrée en 0, l'équation (13) devient alors :

$$(14) \quad D \frac{d^2 c}{dx^2} - \alpha c + \beta \delta(x) = 0.$$

On suppose que c est de carré intégrable sur \mathbb{R} . De cette manière, \widehat{c} la transformée de Fourier de c sera également une fonction intégrable sur \mathbb{R} et vérifiera la formule d'inversion de Fourier.

Après avoir appliqué la transformée de Fourier à l'équation (4), on a :

$$\widehat{c}(\xi) = \frac{\beta}{D\xi^2 + \alpha}.$$

Finalement, d'après la formule d'inversion de Fourier, on a :

$$c(x) = \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} \exp \left(-\sqrt{\frac{\alpha}{D}} |x| \right).$$

L'hypothèse de carré intégrabilité de \widehat{c} est *a posteriori* vérifiée.

1.3.2. Terme source : fonction porte. On suppose ici que l'intensité du laser en fonction de la position suit une fonction porte centrée en 0 de demi-largeur $\sigma > 0$, l'équation (13) devient alors :

$$(15) \quad D \frac{d^2 c}{dx^2} - \alpha c + \beta \Pi_\sigma(x) = 0,$$

où l'on a noté :

$$\Pi_\sigma : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \{0, 1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-\sigma, \sigma] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} .$$

On obtient la solution de l'équation différentielle ordinaire linéaire (15) par convolution de la solution de (14) avec Π_σ :

$$c(x) = \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}|x-y|\right) \Pi_\sigma(y) dy.$$

Finalement, après calculs, on a :

$$c(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} \exp\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x\right) \sinh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\sigma\right), & \text{si } x \in]-\infty, -\sigma[\\ \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} \left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\sigma\right) \cosh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x\right)\right], & \text{si } x \in [-\sigma, \sigma] \\ \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x\right) \sinh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\sigma\right), & \text{si } x \in]\sigma, +\infty[\end{cases} .$$

1.3.3. *Terme source : gaussienne.* On suppose ici que l'intensité du laser en fonction de la position suit une gaussienne centrée en 0 et d'écart-type $\sigma > 0$, l'équation (13) devient alors :

$$(16) \quad D \frac{d^2c}{dx^2} - \alpha c + \beta \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = 0.$$

On obtient la solution de l'équation différentielle ordinaire linéaire (16) par convolution de la solution de (14) avec $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$:

$$c(x) = \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}|x-y|\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy.$$

Finalement, après calculs, on a :

$$c(x) = \frac{\beta}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi \exp\left(\frac{\sigma^2 \alpha}{D}\right)}{4\alpha D}} \left[2 \cosh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x\right) + e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x} \operatorname{erf}\left(\frac{x - \sigma^2 \sqrt{\frac{\alpha}{D}}}{\sigma \sqrt{2}}\right) - e^{\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x} \operatorname{erf}\left(\frac{x + \sigma^2 \sqrt{\frac{\alpha}{D}}}{\sigma \sqrt{2}}\right) \right].$$

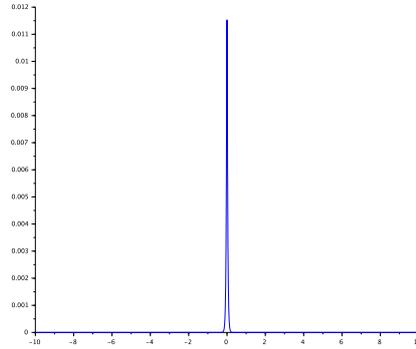


FIGURE 6. Le profil solution de l'équation (14), prédominance de la réaction chimique *i.e.* $D \ll \alpha$.

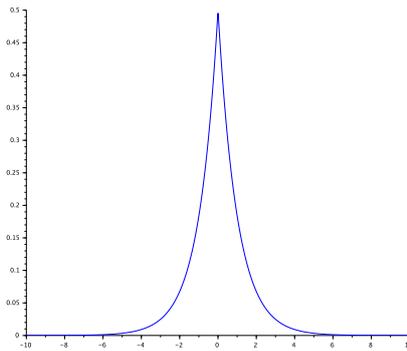


FIGURE 7. Le profil solution de l'équation (14), aucune prédominance *i.e.* $\alpha \approx D$.

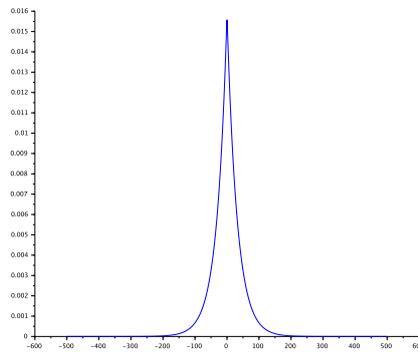


FIGURE 8. Le profil solution de l'équation (14), prédominance de la diffusion *i.e.* $\alpha \ll D$.

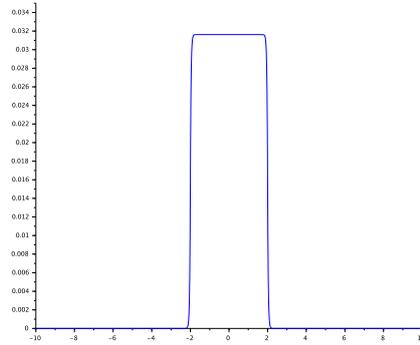


FIGURE 9. Le profil solution de l'équation (15), prédominance de la réaction chimique *i.e.* $D \ll \alpha$.

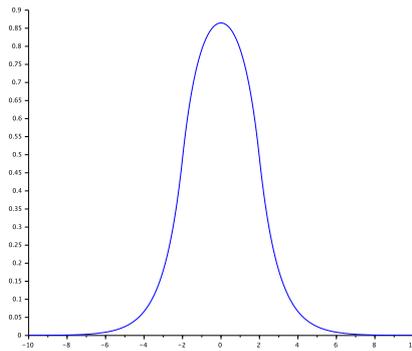


FIGURE 10. Le profil solution de l'équation (15), aucune prédominance *i.e.* $\alpha \approx D$.

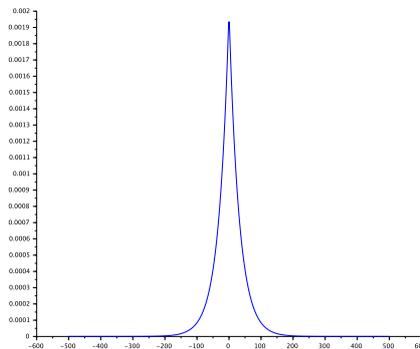


FIGURE 11. Le profil solution de l'équation (15), prédominance de la diffusion *i.e.* $\alpha \ll D$.

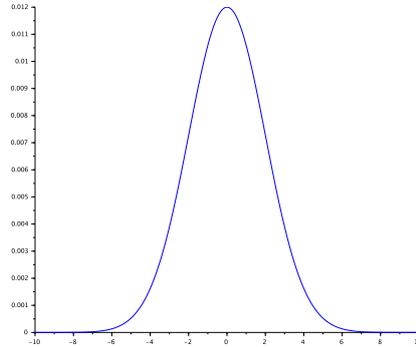


FIGURE 12. Le profil solution de l'équation (16), prédominance de la réaction chimique *i.e.* $D \ll \alpha$.

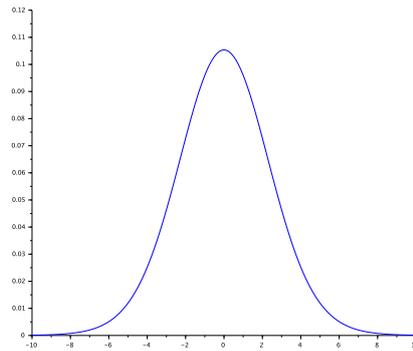


FIGURE 13. Le profil solution de l'équation (16), aucune prédominance *i.e.* $\alpha \approx D$.

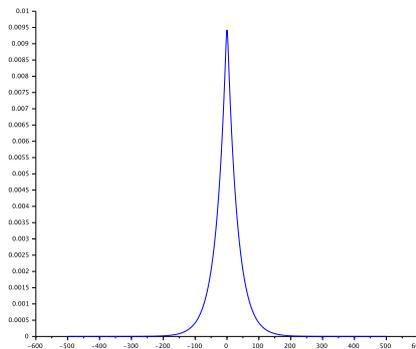


FIGURE 14. Le profil solution de l'équation (16), prédominance de la diffusion *i.e.* $\alpha \ll D$.

2. L'ÉCOULEMENT DE MARANGONI INDUIT

Dans l'intégralité de cette partie, on suppose que l'interface avec l'air, notée Ω , du mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables est unidimensionnelle infinie *i.e.* $\Omega = \mathbb{R}$. En particulier, le profil de la concentration en tensioactif dans l'état excité sera donné par l'un des résultats de la partie 1.3.. Par ailleurs, pour x dans Ω , on note $\gamma(x)$ la tension superficielle de Ω au point x et on modélise l'évolution spatiale de la tension superficielle dans Ω par l'équation suivante :

$$(17) \quad \gamma(x) = \gamma_0 + \gamma_1 c(x),$$

où γ_0, γ_1 sont des constantes exprimées en $J.m^{-2}$ (ou en $N.m^{-1}$) et où $c(x)$ désigne la concentration en tensioactif dans l'état activé en $x \in \Omega$. En raison, de la dépendance spatiale de c , la tension superficielle au sein de Ω est inhomogène et d'après ce que nous avons développé en introduction, le long de Ω s'effectue un écoulement de Marangoni.

On suppose que le régime transitoire de l'écoulement est succinct, si bien que l'on ne s'intéresse qu'à son régime stationnaire. On suppose également que le mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables est un fluide incompressible *i.e.* que le volume du mélange reste constant sous l'action d'une pression externe. Enfin, on suppose que le mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables est suffisamment visqueux par rapport à la grandeur caractéristique sur laquelle s'exerce l'écoulement, ce afin de pouvoir négliger l'influence des termes inertiels. Sous l'ensemble de ces conditions, l'écoulement induit par le gradient de tension superficielle dans Ω est décrit par l'équation de Stokes :

$$(18) \quad \begin{cases} \eta \Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} p \\ \text{div} \vec{v} = 0 \end{cases},$$

où $\vec{v}(x, z)$ est la vitesse du mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables au point (x, z) exprimée en $m.s^{-1}$, $p(x, z)$ est la pression dans le mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables au point (x, z) exprimé en Pa et μ est la viscosité du mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables exprimée en $Pa.s$.

On admet l'existence de solutions à l'équation (18) et afin de garantir leur unicité, il convient de spécifier les conditions aux limites associées à notre problème, ce que nous faisons immédiatement ci-dessous :

$$(19) \quad v_z(x, 0) = 0.$$

$$(20) \quad \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \Big|_{z=0} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial x}.$$

Avec l'équation (17) la condition (20) devient :

$$(21) \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \Big|_{z=0} = \frac{\gamma_1}{\eta} \frac{dc}{dx}.$$

La condition (19) traduit le fait que l'interface Ω ne subit pas de déplacements verticaux tandis que (20) correspond à un bilan des forces s'exerçant sur l'interface et exprime son équilibre, réunies, ces deux conditions signifient que l'interface Ω reste plane durant l'écoulement.

2.1. La fonction de courant de l'écoulement. Compte tenu de l'hypothèse d'incompressibilité du fluide *i.e.* de la contrainte $\text{div } \vec{v} = 0$, et de l'identité mathématique $\text{div} \circ \text{rot} \equiv 0$, on dispose d'un potentiel vecteur duquel derive \vec{v} . En d'autres termes, il existe une fonction vectorielle $\vec{A} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}}$ vérifiant :

$$(22) \quad \vec{v} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

Puisque $\vec{v} = \vec{v}(x, z)$, d'après (22) on peut imposer à A_x et A_z d'être identiquement nulles. En posant $\Psi := -A_y$, avec (22), il vient :

$$(23) \quad v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Ψ est la fonction de courant, sa seule donnée permet de déterminer le champ de vitesse de l'écoulement.

2.2. L'équation biharmonique en domaine rectangulaire. Pour transformer l'équation (18) en une équation aux dérivées partielles sur la fonction de courant Ψ , on en prend le rotationnel ; sachant l'identité mathématique $\text{rot} \circ \text{grad} \equiv \vec{0}$, il vient :

$$(24) \quad \begin{aligned} \text{rot}(\Delta \vec{v}) = \vec{0} &\Leftrightarrow \text{rot} \left[\Delta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}, 0, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right] = \vec{0}, \\ &\Leftrightarrow \text{rot} \left[\Delta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right), 0, -\Delta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right] = \vec{0}, \\ &\Leftrightarrow \text{rot} \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3}, 0, \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^2 \partial x} \right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Schwarz et l'équation (24), il vient :

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4} = 0.$$

Finalement, la fonction de courant vérifie l'équation biharmonique :

$$(25) \quad \Delta^2 \Psi = 0.$$

Exprimons désormais les conditions aux limites (19) et (21) en termes de la fonction de courant, avec (23), on a :

$$(26) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, 0) = 0,$$

$$(27) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{z=0} = \frac{\gamma_1}{\eta} \frac{dc}{dx}.$$

On choisit l'axe \hat{z} dirigé vers le haut et par conséquent $z \in \mathbb{R}_-$. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{R}_-$, $x \in \mathbb{R} \mapsto \Psi(x, z)$ est de carré intégrable sur \mathbb{R} . De cette manière, pour tout $z \in \mathbb{R}_-$ on peut définir $\widehat{\Psi}(\cdot, z)$ la transformée de Fourier de $x \in \mathbb{R} \mapsto \Psi(x, z)$ qui sera également une fonction intégrable sur \mathbb{R} et vérifiera la formule d'inversion de Fourier. On suppose également que Ψ a les propriétés suffisantes pour rendre licite l'inversion des opérateurs $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^4}{\partial z^4}$ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, \cdot) e^{-i\xi x} dx$.

Après avoir appliqué la transformée de Fourier par rapport à x à l'équation (25) et en tenant compte des hypothèses prises ci-dessus :

$$\frac{\partial^4 \widehat{\Psi}}{\partial z^4} - 2\xi^2 \frac{\partial^2 \widehat{\Psi}}{\partial z^2} + \xi^4 \widehat{\Psi} = 0.$$

On en déduit qu'il existe $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ telle que l'on ait :

$$\widehat{\Psi}(\xi, z) = [A(\xi) + B(\xi)z] e^{|\xi|z} + [C(\xi) + D(\xi)z] e^{-|\xi|z}.$$

L'intégrabilité de $\xi \in \mathbb{R} \mapsto \widehat{\Psi}(\xi, z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}_-$ assure que :

$$C \equiv 0 \equiv D.$$

À ce stade du raisonnement, on a :

$$(28) \quad \widehat{\Psi}(\xi, z) = [A(\xi) + B(\xi)z] e^{|\xi|z}.$$

Afin de déterminer complètement $\widehat{\Psi}$, prenons la transformée de Fourier par rapport à x des conditions aux limites (26) et (27) :

$$(29) \quad i\xi \widehat{\Psi}(\xi, 0) = 0,$$

$$(30) \quad \frac{\partial^2 \widehat{\Psi}}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \xi^2 \widehat{\Psi}(\xi, 0) = -\frac{\gamma_1}{i\eta} \xi \widehat{c}(\xi).$$

Par continuité de $\xi \in \mathbb{R} \mapsto \widehat{\Psi}(\xi, 0)$ en zéro et d'après (29), on a :

$$(31) \quad \widehat{\Psi}(\xi, 0) = 0.$$

En réinjectant cette information dans (30), on a :

$$(32) \quad \left. \frac{\partial^2 \widehat{\Psi}}{\partial z^2} \right|_{z=0} = -\frac{\gamma_1}{i\eta} \xi \widehat{c}(\xi).$$

D'après, (28), (31) et (32), on a :

$$\begin{aligned} A(\xi) &= 0, \\ B(\xi) &= -\frac{\gamma_1}{2i\eta} \frac{\xi}{|\xi|} \widehat{c}(\xi). \end{aligned}$$

En résumé, d'après (28), on a :

$$\widehat{\Psi}(\xi, z) = -\frac{\gamma_1}{2i\eta} \frac{\xi}{|\xi|} \widehat{c}(\xi) z e^{|\xi|z}.$$

Finalement, d'après la formule d'inversion de Fourier, on a :

$$(33) \quad \Psi(x, z) = -\frac{\gamma_1}{4i\pi\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{|\xi|} \widehat{c}(\xi) z e^{|\xi|z} e^{i\xi x} d\xi.$$

En particulier, si c a les propriétés suffisantes, les hypothèses prises au début sont *a posteriori* vérifiées.

2.2.1. *Terme source : distribution de Dirac.* On suppose ici que l'intensité du laser en fonction de la position suit une distribution de Dirac centrée en 0, d'après la partie 1.3.1., on a :

$$\widehat{c}(\xi) = \frac{\beta}{D\xi^2 + \alpha}.$$

L'identité (33) devient alors :

$$\Psi(x, z) = -\frac{\gamma_1\beta}{4i\pi\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{|\xi|} \frac{z e^{|\xi|z} e^{i\xi x}}{D\xi^2 + \alpha} d\xi.$$

En utilisant la relation de Chasles et après un changement de variable :

$$\Psi(x, z) = -\frac{\gamma_1\beta}{2\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{z e^{\xi z} \sin(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi.$$

Finalement, d'après (23), on en déduit que l'on a :

$$\begin{aligned} v_x(x, z) &= -\frac{\gamma_1\beta}{2\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{(1 + \xi z) e^{\xi z} \sin(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi, \\ v_z(x, z) &= \frac{\gamma_1\beta}{2\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{\xi z e^{\xi z} \cos(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi. \end{aligned}$$

2.2.2. *Terme source : fonction porte.* On suppose ici que l'intensité du laser en fonction de la position suit une fonction porte centrée 0 de demi-largeur $\sigma > 0$, d'après la partie 1.3.2., on a :

$$\widehat{c}(\xi) = \frac{2\sigma\beta}{D\xi^2 + \alpha} \text{sinc}(\sigma\xi).$$

L'identité (33) devient alors :

$$\Psi(x, z) = \frac{\gamma_1\beta\sigma}{2i\pi\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{|\xi|} \frac{ze^{|\xi|z} \text{sinc}(\sigma\xi) e^{i\xi x}}{D\xi^2 + \alpha} d\xi.$$

En utilisant la relation de Chasles et après un changement de variable :

$$\Psi(x, z) = -\frac{\gamma_1\beta\sigma}{\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{ze^{\xi z} \text{sinc}(\sigma\xi) \sin(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi.$$

Finalement, d'après (23), on en déduit que l'on a :

$$\begin{aligned} v_x(x, z) &= -\frac{\gamma_1\sigma\beta}{\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{(1 + \xi z)e^{\xi z} \text{sinc}(\sigma\xi) \sin(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi, \\ v_z(x, z) &= \frac{\gamma_1\sigma\beta}{\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{\xi ze^{\xi z} \text{sinc}(\sigma\xi) \cos(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi. \end{aligned}$$

2.2.3. *Terme source : gaussienne.* On suppose ici que l'intensité du laser en fonction de la position suit une gaussienne centrée 0 d'écart-type $\sigma > 0$, d'après la partie 1.3.3., on a :

$$\widehat{c}(\xi) = \frac{\sigma\beta\sqrt{2\pi}}{D\xi^2 + \alpha} \exp\left[-\frac{(\sigma\xi)^2}{2}\right].$$

L'identité (33) devient alors :

$$\Psi(x, z) = \frac{\gamma_1\sigma\beta\sqrt{2\pi}}{4i\pi\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{|\xi|} \frac{ze^{-|\xi|z} e^{-(\xi\sigma)^2/2} e^{i\xi x}}{D\xi^2 + \alpha} d\xi.$$

En utilisant la relation de Chasles et après un changement de variable :

$$\Psi(x, z) = -\frac{\gamma_1\sigma\beta}{\sqrt{2\pi}\eta} \int_0^{+\infty} \frac{ze^{\xi z} e^{-(\xi\sigma)^2/2} \sin(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi.$$

Finalement, d'après (23), on en déduit que l'on a :

$$\begin{aligned} v_x(x, z) &= -\frac{\gamma_1\sigma\beta}{\sqrt{2\pi}\eta} \int_0^{+\infty} \frac{(1 + \xi z)e^{\xi z} e^{-(\xi\sigma)^2/2} \sin(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi, \\ v_z(x, z) &= \frac{\gamma_1\sigma\beta}{\sqrt{2\pi}\eta} \int_0^{+\infty} \frac{\xi ze^{\xi z} e^{-(\xi\sigma)^2/2} \cos(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi. \end{aligned}$$

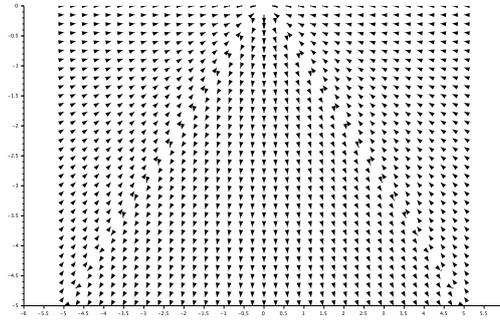


FIGURE 15. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source en distribution de Dirac, prédominance de la réaction chimique *i.e.* $D \ll \alpha$.

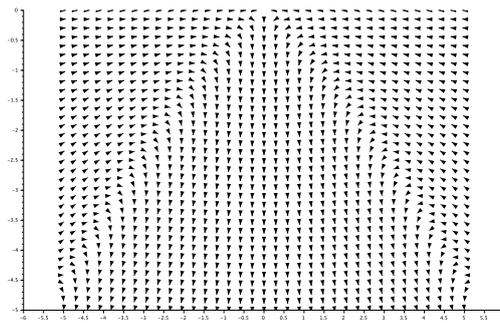


FIGURE 16. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source en distribution de Dirac, aucune prédominance *i.e.* $\alpha \approx D$.

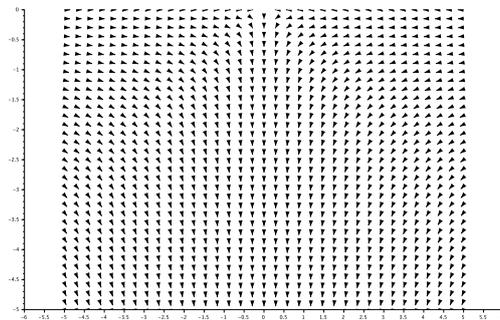


FIGURE 17. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source en distribution de Dirac, prédominance de la diffusion *i.e.* $\alpha \ll D$.

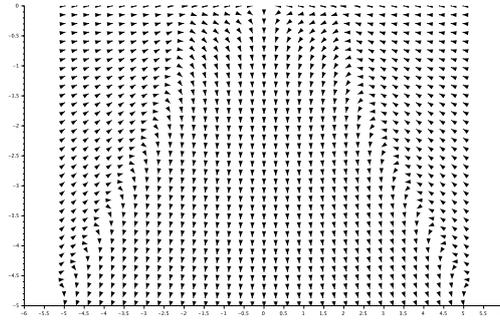


FIGURE 18. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source suivant une fonction porte, prédominance de la réaction chimique *i.e.* $D \ll \alpha$.

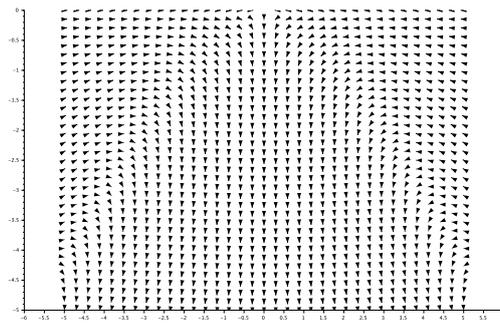


FIGURE 19. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source suivant une fonction porte, aucune prédominance *i.e.* $D \approx \alpha$.

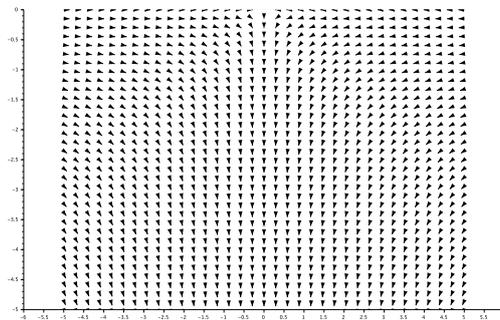


FIGURE 20. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source suivant une fonction porte, prédominance de la diffusion *i.e.* $\alpha \ll D$.

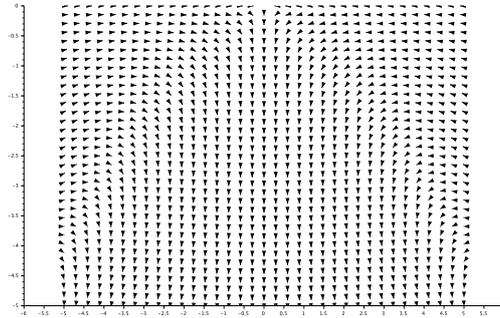


FIGURE 21. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source gaussien, prédominance de la réaction chimique *i.e.* $D \ll \alpha$.

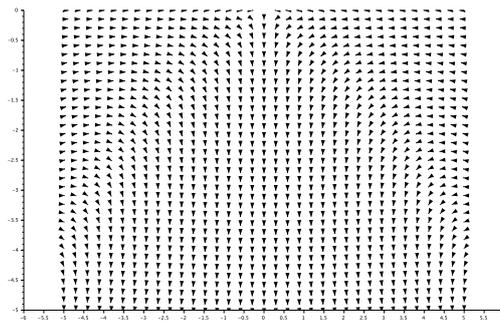


FIGURE 22. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source gaussien, aucune prédominance *i.e.* $\alpha \approx D$.

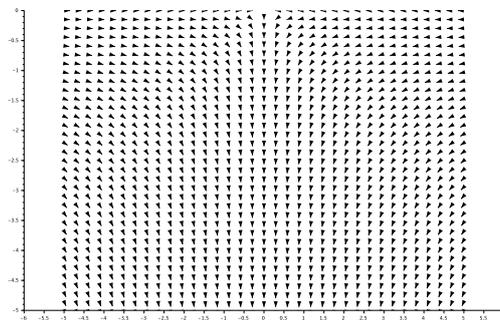


FIGURE 23. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source gaussien, prédominance de la diffusion *i.e.* $\alpha \ll D$.

ANALYSE DES RÉSULTATS ET PROLONGEMENT DU PROBLÈME

Les différents modèles adoptés pour la répartition spatiale de l'intensité d'un laser (distribution de Dirac, fonction porte, gaussienne) ont abouti à des profils stationnaires de la concentration en tensioactif dans l'état activé similaires. En effet, lorsque la réaction chimique est prédominante *i.e.* $D \ll \alpha$, le profil de concentration en tensioactif dans l'état activé prend la forme du terme source (voir figures 6, 9 et 12) alors que lorsque la diffusion est prédominante *i.e.* $\alpha \ll D$, le profil de concentration s'étale spatialement en prenant la forme d'un pic centré en la zone d'éclairement du laser (voir figures 8, 11 et 14). La régularité de la répartition spatiale de l'intensité du laser influence seulement le caractère lisse du profil de concentration.

Par ailleurs, on constate qu'en présence d'une prédominance de la réaction chimique ou de la diffusion, l'amplitude maximale de la concentration en tensioactif dans l'état activé diffère d'un facteur 1/10 avec celle que l'on obtiendrait si la réaction chimique et la diffusion étaient équilibrés *i.e.* $\alpha \approx D$ (voir figures 7, 10 et 13). Si la réaction chimique est prédominante, les tensioactifs photocommutables dans la zone d'éclairement du laser sont excités, la diffusion ne permettant pas de les évacuer de la zone, on aboutit alors à l'inhibition de la réaction chimique. En revanche, si la diffusion est prédominante, les tensioactifs photocommutables sont rapidement évacués de la zone d'éclairement empêchant alors la réaction chimique d'opérer efficacement.

Les différents profils de concentration dont il est fait mention ci-dessus ont induit des écoulements de Marangoni similaires. En effet, au niveau de l'interface, $z = 0$, les différents écoulements s'effectuent en surface, en convergeant vers la zone d'éclairement du laser, alors que pour $z \neq 0$, ils tendent à conduire le liquide en profondeur, sous cette même zone d'éclairement (voir figures 16, 19 et 22). Les paramètres du problème α et D n'influencent pas l'allure du champ de vitesse de l'écoulement de Marangoni induit. Cependant, lorsque la réaction chimique est prédominante, l'écoulement est plus prononcé (voir figures 15, 18 et 21), en revanche, lorsque la diffusion est prédominante l'écoulement est plus doux (voir figures 17, 20 et 23). La régularité de la répartition spatiale de l'intensité du laser n'a pas d'influence visible sur l'écoulement induit.

Remarque : En raison de la nature analytique du champ de vitesse de l'écoulement *i.e.* de son expression sous forme intégrale, nous avons été contraints d'approximer ces intégrales en exploitant la méthode de Simpson, ce qui nous a alors permis de visualiser l'écoulement.

Durant notre étude, nous avons supposé que l'interface avec l'air du mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables était plane et le restait même au cours de l'écoulement. Une meilleure description de notre problème consisterait à autoriser la déformation de cette interface, ce qui nous permettrait notamment de prendre en compte les effets de profondeur finie. En effet, sous nos hypothèses de travail, nous avons pu constater que le liquide a tendance à s'écouler en profondeur. Si le récipient était limité en profondeur, on observerait alors un reflux du liquide engendrant, à la manière d'une vague, une bosse en surface et donc un déplacement vertical de l'interface. La gestion des déformations de l'interface complexifierait l'expression des conditions aux limites et rendrait difficile la résolution du problème aux limites régissant le champ de vitesse de l'écoulement.

RÉFÉRENCES

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, pages 358,361. Applied Mathematics. National Bureau of Standards, 1972.
- [2] Alexander D. Poularikas. *Transforms and Applications Handbook*, chapter Fourier Transform. Electrical Engineering Handbook. CRC Press, 2010.
- [3] K. F. Riley and M. P. Hobson. *Essential Mathematical methods for the Physical Sciences*, pages 170–174,179,191–202,233–236,277–279,347–359,408–412,421–475. Cambridge University Press, 2011.
- [4] A. Royston. Notes on the Dirac Delta and Green Functions. Novembre 2008.
- [5] S. N. Varanakkottu, S. D. George, T. Baier, S. Hardt, M. Ewald, and M. Biesalski. Particle Manipulation Based on Optically Controlled Free Surface Hydrodynamics. *Angewandte Chemie Int. Ed.*, 52 :7291–7295, Juillet 2013.

ANNEXE D. MON MÉMOIRE DE M1

Les pages suivantes constituent mon mémoire de M1.

Le résultat principal de ce document est le suivant :

Théorème. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire définie sur un corps de caractéristique zéro, alors l'ensemble de ses zéros :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid u_n = 0\}$$

est l'union d'un ensemble fini et d'un nombre fini de progressions arithmétiques.

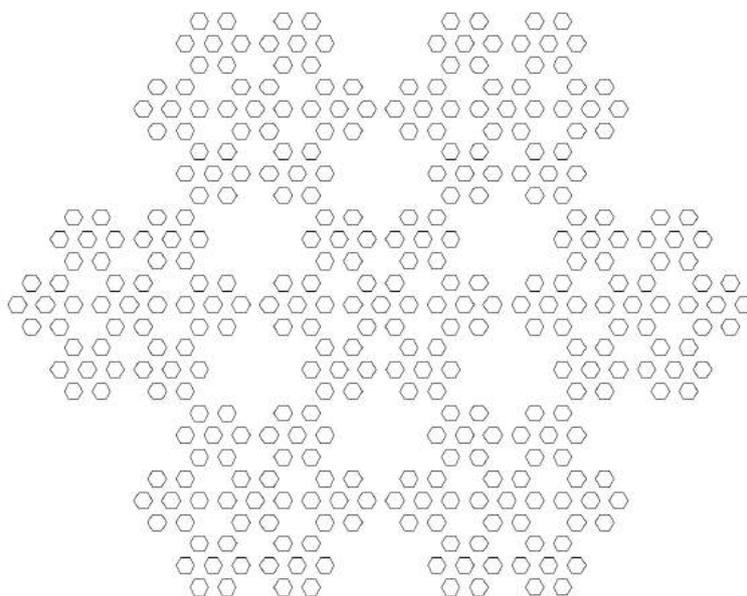
Une reformulation plus géométrique de ce théorème est également démontrée et une généralisation aux automorphismes des variétés affines est énoncée.

TRAVAIL ENCADRÉ DE RECHERCHE
4^{ème} année de Mathématiques

**SUR LA DYNAMIQUE DES AUTOMORPHISMES
POLYNOMIAUX AFFINES EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO**

Cyril FALCON

RÉSUMÉ. Dans ce dossier, on montrera qu'en caractéristique zéro, l'ensemble des indices en lesquels une suite récurrente linéaire s'annule est l'union d'un ensemble fini et d'un nombre fini de progressions arithmétiques. On donnera une version algébriquo-géométrique de ce résultat qui précisera le comportement des itérés des automorphismes linéaires en dimension finie. Les techniques employées pour établir ce théorème nous permettront d'en énoncer une généralisation aux automorphismes polynomiaux affines.



Sous la direction de : François CHARLES

Date: Janvier-Juin 2016.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	4
Introduction et motivations	5
1. Quelques rudiments d'analyse p -adique	9
1.1. Arithmétique élémentaire des entiers et des nombres p -adiques	9
1.2. Topologie élémentaire du corps des nombres p -adiques	15
1.3. Étude des zéros des séries entières à coefficients p -adiques	20
2. Interpolation p -adique des itérés de fonctions polynomiales	26
2.1. Quelques préliminaires techniques	26
2.2. Étude sommaire d'un opérateur de différence finie	29
2.3. Construction de la fonction p -analytique d'interpolation	30
3. Une généralisation du théorème de Skolem-Mahler-Lech	33
3.1. Plongement dans un corps de nombres p -adiques	33
3.2. Le cas des automorphismes linéaires	40
3.3. Le cas des automorphismes polynomiaux affines	43
Annexe A. Base de transcendance d'une extension de corps	44
Références	46

REMERCIEMENTS

Je témoigne tout d'abord mon entière reconnaissance à la direction des études du département de Mathématiques de l'Université Paris-Sud qui est à l'initiative des travaux encadrés de recherche. Ils favorisent l'instauration d'échanges privilégiés avec les chercheurs et valorisent de fait notre formation.

Je tiens ensuite à exprimer ma profonde gratitude à François CHARLES qui a accepté de me superviser dans un sujet de son initiative. Je suis sincèrement reconnaissant de la qualité de son encadrement, c'est en effet grâce à la pertinence de ses remarques et de ses conseils que j'ai pu pleinement m'épanouir dans ce travail. Je le remercie enfin de sa disponibilité et de sa gentillesse et ce malgré mes visites impromptues dans son bureau.

Je manifeste toute ma sympathie à Amadou BAH avec qui nous avons étudié le même thème et dont le travail de relecture m'a permis de corriger une preuve de l'annexe qui n'était initialement pas exhaustive.

Je souhaite finalement remercier mon lecteur dont la curiosité l'aura amené à s'intéresser au texte maladroit d'un étudiant. Je m'excuse d'ailleurs auprès de lui pour les éventuelles longueurs de ma rédaction.

INTRODUCTION ET MOTIVATIONS

Commençons par introduire la notion de suite récurrente linéaire sur un corps, il s'agira de l'objet central de notre étude :

Définition 1. Soit k un corps, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite récurrente linéaire si et seulement s'il existe un entier naturel d non nul et a_0, \dots, a_{d-1} dans k avec $a_0 \neq 0_k$ tels que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfasse à la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+d} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u_{n+i}.$$

On peut légitimement s'interroger sur la nature des zéros d'une telle suite, autrement dit, sur la répartition des indices en lesquels elle s'annule ; notamment, est-ce qu'un ensemble quelconque d'entiers naturels est systématiquement l'ensemble des zéros d'une suite récurrente linéaire ? Ou au contraire, est-ce que les zéros des suites récurrentes linéaires ont une structure rigide et se distribuent selon des motifs réguliers ? Le cas échéant, quelles sont les obstructions et les conditions nécessaires pour qu'un ensemble d'indices soit l'ensemble des zéros d'une suite récurrente linéaire ? Dans le suite de notre étude, on supposera que le corps k est de caractéristique zéro ; la situation en caractéristique positive est quant à elle plus subtile, on verra notamment l'article de H. Derksen [5].

Afin de mieux appréhender la nature des zéros des suites récurrentes linéaires en caractéristique zéro et de se construire une intuition sur leur répartition, considérons sans plus attendre un exemple. Nous nous plaçons dans \mathbb{Q} et nous rappelons alors que tout corps de caractéristique zéro est une extension de \mathbb{Q} . On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 := 0, u_1 := 0, u_2 := 1, u_3 := 0$ et satisfaisant à la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = u_{n+2} + u_n.$$

Par récurrence, on montre que u_n est nul si et seulement si $n = 0$ ou est impair. En d'autres termes, l'ensemble des indices en lesquels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'annule est :

$$\{0\} \cup \{2n + 1; n \in \mathbb{N}\}.$$

Il s'agit de l'union d'un ensemble fini et d'une progression arithmétique, ce que l'on peut reformuler en disant qu'à partir du rang 1, l'écart entre deux zéros consécutifs est constant égal à 2. Cette observation témoigne d'une très grande rigidité de la structure de l'ensemble des indices où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'annule. Plus généralement, la distribution des zéros d'une suite récurrente linéaire en caractéristique zéro est donnée par l'énoncé suivant :

Théorème 1. (Skolem [15], Mahler [11], Lech [10]) Soient k un corps de caractéristique 0 et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire sur k , alors l'ensemble :

$$\{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } u_n = 0\}$$

est union d'un ensemble fini et d'un nombre fini de progressions arithmétiques.

Étant donné une telle suite, ce résultat exprime qu'à partir d'un certain rang les indices en lesquels elle s'annule se disposent selon un même motif de longueur finie qui se répète indéfiniment, on dit également que l'ensemble de ses zéros est ultimement périodique ; on verra notamment la figure 1.



FIGURE 1. Un motif fini dans les zéros d'une suite récurrente linéaire.

Le théorème 1 constitue en particulier une obstruction à ce que l'ensemble des nombres premiers, respectivement l'ensemble des carrés parfaits, soit l'ensemble des zéros d'une suite récurrente linéaire en caractéristique zéro.

Historiquement, la première version de ce théorème est due à T. Skolem qui en 1933 avait établi le résultat pour les suites récurrentes linéaires sur le corps des nombres rationnels. Par la suite, K. Mahler a généralisé en 1935 la preuve de T. Skolem aux corps de nombres, c'est-à-dire aux extensions finies du corps des nombres rationnels. Cependant, il aura fallu attendre 1954 pour que C. Lech démontre la version du théorème sur tout corps de caractéristique zéro.

Même dans sa variante sur \mathbb{Q} , ce théorème présente un véritable intérêt et ce plus particulièrement lorsque les relations de récurrence sont d'ordre au moins égal à 2. En effet, les zéros des suites récurrentes linéaires contiennent une profonde complexité et il est notamment extrêmement difficile d'identifier de manière effective leurs zéros. À titre d'exemple, le problème suivant est ouvert :

Problème ouvert 1. Soient k un corps de caractéristique zéro et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire sur k . Est-ce que le statut de l'assertion suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$$

est vérifiable en temps fini ?

On donne désormais une formulation du théorème 1 en termes d'algèbre linéaire :

Théorème 2. Soient k un corps de caractéristique zéro, $x \in k^d$ et σ un automorphisme linéaire de k^d . Si H est un hyperplan de k^d , alors l'ensemble :

$$\{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \sigma^n(x) \in H\}$$

est union d'un ensemble fini et d'un nombre fini de progressions arithmétiques.

Avant d'établir l'équivalence annoncée, rappelons la terminologie suivante :

Définition 2. Soient R un anneau commutatif et d un entier naturel non nul, on appelle matrice compagnon de taille d , toute matrice de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-1} \end{pmatrix},$$

où a_0, \dots, a_{d-1} sont dans R .

Il est aisé de constater que si k est un corps, A est une matrice compagnon de taille $d \geq 2$ et $x \in k^d$, alors les composantes de $(A^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites récurrentes linéaires sur k . Il suffit pour cela de comprendre l'action de A sur x .

Nous pouvons désormais montrer que les théorèmes 1 et 2 sont équivalents.

Preuve. On procède par double implication.

- On suppose le théorème 1 acquis. En vertu du théorème de décomposition de Frobenius [6], il existe une base de k^d dans laquelle la matrice de σ , que l'on note A , soit constituée d'une diagonale de matrices compagnons. Par ailleurs, H étant de codimension 1 dans k^d , il existe $v \in k^d$ tel que :

$$H = \{y \in k^d \text{ t.q. } {}^t v y = 0\}.$$

Par conséquent, on en déduit que l'on a :

$$(1) \quad \{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \sigma^n(x) \in H\} = \{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } {}^t v A^n x = 0\}.$$

σ étant un automorphisme, la matrice A est inversible et les matrices compagnons qui la composent sont toutes de taille au moins égale à 2. Ainsi, puisqu'une combinaison linéaire de suites récurrentes linéaires est encore récurrente linéaire, $({}^t v A^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle aussi récurrente linéaire. Finalement, d'après (1) et le théorème 1, on a établi le théorème 2.

- On suppose le théorème 2 acquis. Par définition, il existe $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et a_0, \dots, a_{d-1} dans k avec $a_0 \neq 0_k$ tels que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+d} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u_{n+i}.$$

On introduit alors A la matrice compagnon associée aux a_0, \dots, a_{d-1} ; en développant le déterminant de A par rapport à sa première colonne, on constate que A est inversible. Ainsi, en notant σ l'unique endomorphisme de k^d dont la matrice dans la base canonique est A , on définit un automorphisme de k^d . En outre, on introduit les éléments de k^d suivants :

$$x := \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{d-1} \end{pmatrix} \text{ et } w := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De cette manière, en comprenant l'action de σ sur x , on montre que :

$$(2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = {}^t w \sigma^n(x).$$

On définit alors l'hyperplan de k^d suivant :

$$H := \{y \in k^d \text{ t.q. } {}^t w y\}.$$

Dès lors, d'après (2), on en déduit que l'on a :

$$(3) \quad \{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } u_n = 0\} = \{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \sigma^n(x) \in H\}.$$

Finalement, d'après (3) et le théorème 2, on a établi le théorème 1. \square

Avant de pouvoir donner une généralisation significative de la version algébriquo-géométrique du théorème de Skolem-Mahler-Lech (théorème 2), nous avons besoin d'introduire la notion d'automorphisme polynomial affine :

Définition 3. Soient R un anneau commutatif et d un entier naturel non nul, on appelle espace affine de rang d sur R et l'on note \mathbb{A}_R^d , le R -module R^d . Alors, les automorphismes de \mathbb{A}_R^d sont les inversibles de $R[X_1, \dots, X_d]^d$.

Théorème 3. (Bell [1]) Soient k un corps de caractéristique zéro, $x \in \mathbb{A}_k^d$ et σ un automorphisme de \mathbb{A}_k^d . Si X est une sous-variété de \mathbb{A}_k^d , alors l'ensemble :

$$\{m \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } \sigma^m(x) \in X\}$$

est union d'un ensemble fini et d'un nombre fini de progressions arithmétiques.

Le théorème 2 apparaît comme une version linéaire du théorème 3; en effet, un automorphisme linéaire est un automorphisme polynomial dont les composantes de lui-même et son inverse sont des polynômes homogènes de degré 1.

Le contexte et les enjeux ayant été introduits, détaillons désormais l'approche que nous adopterons pour obtenir les résultats annoncés ci-dessus.

Veillez tout d'abord noter que nous nous contenterons seulement d'établir intégralement le théorème 1. Cependant, nous insistons sur le fait que le cheminement suivi permettrait d'obtenir avec un moindre effort le théorème 3. En effet, il s'agirait essentiellement de vérifier que le résultat d'interpolation p -adique utilisé pour démontrer le théorème 1 s'applique encore.

Comme nous venons de le laisser sous-entendre, nous montrerons qu'il suffit d'établir les théorèmes 1 et 3 sur les corps de nombres p -adiques, notamment en montrant que toute extension finiment engendrée de \mathbb{Q} se plonge dans une infinité de \mathbb{Q}_p (partie 3.1). Cette restriction ayant été faite, nous utiliserons un résultat général d'interpolation p -adique pour les itérés de fonctions polynomiales (partie 2), ce qui nous permettra d'inclure l'ensemble qui intervient dans le théorème 1, respectivement dans le théorème 3, dans l'ensemble de zéros d'une fonction p -analytique. Finalement, nous conclurons grâce à un résultat sur la répartition dans \mathbb{Z}_p des zéros des séries entières p -adiques (partie 1.3).

Ce dossier a été construit de telle manière à ce que chaque partie puisse être lue indépendamment des autres. En effet, nous nous sommes dans la mesure du possible efforcés de montrer chaque résultat utile au moment venu et nous faisons systématiquement mention des énoncés exploités. De cette manière, le lecteur pourra parcourir ce rapport à son entière convenance et s'il est familier à l'analyse p -adique, il pourra se laisser tenter de passer à la partie 2.

1. QUELQUES RUDIMENTS D'ANALYSE p -ADIQUE

Soit p un nombre premier quelconque, l'objectif final de cette partie est la compréhension de la répartition dans l'anneau des entiers p -adiques des zéros de séries entières à coefficients p -adiques. Ce résultat sera crucial pour établir les théorèmes 1 et 3 énoncés en introduction. Notre cheminement débutera par une construction algébrique des entiers et des nombres p -adiques et se poursuivra par l'élaboration d'une topologie sur ces ensembles.

 1.1. Arithmétique élémentaire des entiers et des nombres p -adiques.

Quels que soient m et n des entiers naturel au moins égaux à 1 et tels que $m \leq n$, on introduit le morphisme d'anneaux suivant :

$$\varphi_m^n : \begin{cases} \mathbb{Z}/(p^n) & \rightarrow & \mathbb{Z}/(p^m) \\ x \pmod{p^n} & \mapsto & x \pmod{p^m} \end{cases} .$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x \equiv y \pmod{p^n}$, alors comme $p^m | p^n$, il vient :

$$x \equiv y \pmod{p^m} .$$

Ainsi, φ_m^n est constante sur les classes d'équivalence de \mathbb{Z} modulo p^n .

Définition 1.1. L'ensemble des entiers p -adiques, noté \mathbb{Z}_p , est défini par :

$$\left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mathbb{Z}/(p^n) \text{ t.q. } \forall (m, n) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2, m \leq n \Rightarrow \varphi_m^n(x_n) = x_m \right\} .$$

Remarque 1.2. C'est l'étude des équations diophantiennes qui a motivé K. Hensel à définir les entiers p -adiques dans son article fondateur [7] de 1897.

Remarque 1.3. Soient (I, \preceq) un ensemble ordonné, $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indexée par I et $(f_i^j : E_j \rightarrow E_i)_{\substack{(i,j) \in I^2 \\ i \preceq j}}$ une famille d'application satisfaisant aux deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall i \in I, f_i^i &= \text{id}_{E_i}, \\ \forall (i, j, k) \in I^2, i \preceq j \preceq k &\Rightarrow f_i^k = f_i^j \circ f_j^k. \end{aligned}$$

Une telle donnée constitue un système projectif d'ensembles. On appelle alors limite projective des E_i et on note $\varprojlim E_i$ l'ensemble suivant :

$$\left\{ (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i \text{ t.q. } \forall (i, j) \in I^2, i \preceq j \Rightarrow f_i^j(a_j) = a_i \right\} .$$

Selon le formalisme décrit ci-dessus, \mathbb{Z}_p est la limite projective du système :

$$\left\{ (\mathbb{Z}/(p^n))_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}, (\varphi_m^n)_{\substack{(m,n) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2 \\ m \leq n}} \right\} .$$

Par conséquent, la grande majorité des résultats que nous établirons dans cette partie s'inscrivent dans le cadre d'une théorie plus large et s'étendent en particulier naturellement aux limites projectives d'anneaux topologiques.

Définition-Proposition 1.4. Quels que soient $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ et $y := (y_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ des éléments de \mathbb{Z}_p , on définit :

$$x + y := (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}},$$

$$x \times y := (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}.$$

\mathbb{Z}_p muni de $+$ et \times est un anneau commutatif unitaire.

Preuve. Quel que soit $(m, n) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2$ satisfaisant à $m \leq n$, φ_m^n est un morphisme d'anneaux. Par conséquent, $+$ et \times sont des lois de compositions internes sur \mathbb{Z}_p et les deux éléments définis ci-dessous sont dans \mathbb{Z}_p :

$$0_{\mathbb{Z}_p} := (0_{\mathbb{Z}/(p^n)})_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}, 1_{\mathbb{Z}_p} := (1_{\mathbb{Z}/(p^n)})_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}.$$

Quel que soit $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \in \mathbb{Z}_p$, on définit l'élément de \mathbb{Z}_p suivant :

$$-x := (-x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}.$$

À partir des propriétés de l'addition et de la multiplication sur chacun des anneaux $\mathbb{Z}/(p^n)$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on vérifie que quel que soit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3$, on a :

- $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativité de $+$),
- $x + y = y + x$ (commutativité de $+$),
- $x + 0_{\mathbb{Z}_p} = x$ (élément neutre pour $+$),
- $x + (-x) = 0_{\mathbb{Z}_p}$ (inverse pour $+$),
- $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$ (associativité de \times),
- $x \times y = y \times x$ (commutativité de \times),
- $x \times 1_{\mathbb{Z}_p} = x$ (élément neutre pour \times),
- $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ (distributivité à gauche de $+$ sur \times).

Finalement, \mathbb{Z}_p est un anneau commutatif unitaire. □

Proposition 1.5. On définit l'application suivante :

$$i : \begin{cases} \mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z}_p \\ x & \mapsto & (x \bmod p^n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \end{cases}.$$

i est un morphisme d'anneaux injectif.

Preuve. On vérifie sans peine que i est à valeurs dans \mathbb{Z}_p et que $i(1) = 1_{\mathbb{Z}_p}$. Par ailleurs, quel que soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

- $i(x + y) = i(x) + i(y)$.
- $i(xy) = i(x)i(y)$.

Enfin, on observe que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a :

$$i(x) = 0_{\mathbb{Z}_p} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, p^n | x \Leftrightarrow x = 0.$$

D'où le résultat annoncé. □

Remarque 1.6. D'après la proposition 1.5, \mathbb{Z}_p est de caractéristique 0.

Proposition 1.7. Le groupe des unités des entiers p -adiques, noté \mathbb{Z}_p^\times , est :

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \in \mathbb{Z}_p \text{ t.q. } x_1 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*\}.$$

Preuve. On procède par double inclusion.

- Soit $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \in \mathbb{Z}_p^\times$, il existe $y := (y_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \in \mathbb{Z}_p$ satisfaisant à :

$$xy = 1_{\mathbb{Z}_p}.$$

Dès lors, en examinant les termes d'indice 1, il vient :

$$x_1 y_1 = 1_{\mathbb{Z}/(p)}.$$

Finalement, on a $x_1 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

- Soit $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \in \mathbb{Z}_p$ avec $x_1 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, il existe $y_1 \in \mathbb{Z}/(p)$ tel que :

$$x_1 y_1 = 1_{\mathbb{Z}/(p)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, supposons avoir construit $(y_k)_{k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ dans $\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{Z}/(p^k)$ satisfaisant aux deux propriétés suivantes :

- (1) $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, x_k y_k = 1_{\mathbb{Z}/(p^k)},$
- (2) $\forall (q, r) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2, q \leq r \leq n-1, \Rightarrow \varphi_q^r(y_r) = y_q.$

Soit \widetilde{x}_n un représentant de x_n modulo p^n , comme $\varphi_1^n(x_n) = x_1$, on a :

$$\widetilde{x}_n \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

On en déduit que \widetilde{x}_n et p sont premiers entre-eux. Dès lors, \widetilde{x}_n et p^n sont premiers entre-eux et il existe $\widetilde{y}_n \in \mathbb{Z}$ tel que l'on ait :

$$\widetilde{x}_n \widetilde{y}_n \equiv 1 \pmod{p^n}.$$

En d'autres termes, il existe $y_n \in \mathbb{Z}/(p^n)$ satisfaisant à l'égalité suivante :

- (3) $x_n y_n = 1_{\mathbb{Z}/(p^n)}.$

Soit $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}, m \leq n$, en appliquant le morphisme d'anneaux φ_m^n à (3), on obtient l'égalité suivante :

- (4) $\varphi_m^n(x_n) \varphi_m^n(y_n) = 1_{\mathbb{Z}/(p^m)}.$

Par ailleurs, en prenant l'égalité (1) en $k = m$, il vient $x_m y_m = 1_{\mathbb{Z}/(p^m)}$. Dès lors, en rapprochant cette égalité avec (4), il vient :

- (5) $\varphi_m^n(x_n) \varphi_m^n(y_n) = x_m y_m.$

Or, $\varphi_m^n(x_n) = x_m$ et injectant cette information dans l'égalité (5), on a :

- (6) $x_m \varphi_m^n(y_n) = x_m y_m.$

Finalement, d'après l'égalité (1) prise en $k = m$ ou d'après l'égalité (3), selon que $m < n$ ou $m = n$, en multipliant (6) par y_m , il vient :

- (7) $\varphi_m^n(y_n) = y_m.$

En résumé, d'après (1), (2), (3) et (7), on a construit $(y_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ dans $\prod_{k=1}^n \mathbb{Z}/(p^k)$ satisfaisant aux deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k y_k &= 1_{\mathbb{Z}/(p^k)}, \\ \forall (q, r) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2, q \leq r \leq n, &\Rightarrow \varphi_q^r(y_r) = y_q. \end{aligned}$$

Finalement, on construit par récurrence un inverse à x dans \mathbb{Z}_p .

D'où l'égalité annoncée. □

Remarque 1.8. Soit $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \in \mathbb{Z}_p$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \varphi_{n-1}^n(x_n) = x_{n-1}.$$

Par conséquent, p divise x_1 si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, p divise x_n . En accord avec la proposition 1.7, on a alors :

$$\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p.$$

Proposition 1.9. Quel que soit $x \in \mathbb{Z}_p^*$, il existe m un unique entier naturel et ε une unique unité de \mathbb{Z}_p tels que l'on ait la décomposition suivante :

$$x = p^m \varepsilon.$$

Preuve. On montre l'existence et l'unicité séparément.

- Soit $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \in \mathbb{Z}_p^*$, on distingue les deux cas suivants :
 - Supposons que $x \in \mathbb{Z}_p^\times$, alors $m = 0$ et $\varepsilon = x$ conviennent.
 - Supposons que $x \notin \mathbb{Z}_p^\times$, il existe $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ tel que l'on ait $x_k \neq 0_{\mathbb{Z}/(p^k)}$. Soit $\ell \in \mathbb{N}_{\geq k}$, comme $\varphi_k^\ell(x_\ell) = x_k$, on a $x_\ell \neq 0_{\mathbb{Z}/(p^\ell)}$ et l'ensemble des indices $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ tels que $x_n = 0_{\mathbb{Z}/(p^n)}$ est majoré par k . Or, d'après la proposition 1.7, $x_1 = 0_{\mathbb{Z}/(p)}$ et on peut alors introduire :

$$m := \max \{ n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ t.q. } x_n = 0_{\mathbb{Z}/(p^n)} \}.$$

Quel que soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on fixe \widetilde{x}_n un représentant de x_n modulo p^n . Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on constate que l'on a :

$$\varphi_m^{m+n}(x_{m+n}) = x_m = 0_{\mathbb{Z}/(p^m)}.$$

Dès lors, p^m divise \widetilde{x}_{n+m} et on introduit l'élément de $\mathbb{Z}/(p^n)$ suivant :

$$\varepsilon_n := \frac{\widetilde{x}_{m+n}}{p^m} \pmod{p^n}.$$

On pose $\varepsilon := (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$, quel que soit $(q, r) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2, q \leq r$, on a :

$$(8) \quad \varphi_q^r(\varepsilon_r) = \frac{\widetilde{x}_{m+r}}{p^m} \pmod{p^q}.$$

Or, comme $\varphi_q^{m+r}(x_{m+r}) = x_q = \varphi_q^{m+q}(x_{m+q})$, il vient :

$$\widetilde{x}_{m+q} \equiv \widetilde{x}_{m+r} \pmod{p^q}.$$

Dès lors, en réinjectant cette information dans l'égalité (8), on a :

$$\varphi_q^r(\varepsilon_r) = \varepsilon_q.$$

On a $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p$ et supposons par l'absurde que $\varepsilon_1 = 0_{\mathbb{Z}/(p)}$, alors on a :

$$x_{m+1} = 0_{\mathbb{Z}/(p^{m+1})}.$$

Dès lors, par définition de m , il vient $m + 1 \leq m$, ce qui n'est pas. Par conséquent, d'après la proposition 1.7, on a :

$$\varepsilon \in \mathbb{Z}_p^\times.$$

Enfin, quel que soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on observe que l'on a :

$$(9) \quad p^m \varepsilon_n = \widetilde{x_{m+n}} \pmod{p^n}.$$

Or, comme $\varphi_n^{m+n}(x_{m+n}) = x_n$, il vient :

$$\widetilde{x_{m+n}} \equiv \widetilde{x_n} \pmod{p^n}.$$

En réinjectant cette information dans (9), on a :

$$p^m \varepsilon_n = x_n.$$

Finalement, on a l'égalité suivante avec $m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$:

$$p^m \varepsilon = x.$$

- Soit $x \in \mathbb{Z}_p^*$, supposons que l'on dispose de m_1 et m_2 dans \mathbb{N} , ainsi que de $\varepsilon_1 := (\varepsilon_{1,n})_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ et $\varepsilon_2 := (\varepsilon_{2,n})_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ dans \mathbb{Z}_p^\times tels que l'on ait :

$$x = p^{m_1} \varepsilon_1 \text{ et } x = p^{m_2} \varepsilon_2.$$

Dès lors, on a les égalités suivantes :

$$(10) \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, p^{m_1} \varepsilon_{1,n} = p^{m_2} \varepsilon_{2,n}.$$

Par conséquent, en prenant $n = m_1$ dans (10), on a :

$$(11) \quad p^{m_2} \varepsilon_{2,m_1} = 0_{\mathbb{Z}/(p^{m_1})}.$$

Or, si $\widetilde{\varepsilon_{2,m_1}}$ est un représentant de ε_{2,m_1} modulo p^{m_1} , alors d'après la remarque 1.8, p ne divise pas $\widetilde{\varepsilon_{2,m_1}}$. On en déduit que p^{m_1} et $\widetilde{\varepsilon_{2,m_1}}$ sont premiers entre eux et que $\varepsilon_{2,m_1} \in (\mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z})^\times$. Ainsi, d'après (11), on a :

$$m_2 \geq m_1.$$

En reproduisant le même argument en prenant $n = m_2$ dans (10), on a :

$$m := m_1 = m_2.$$

Quel que soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, en prenant (10) en $n = n + m$, il vient :

$$p^m \varepsilon_{1,n+m} = p^m \varepsilon_{2,n+m}.$$

On en déduit que les représentants de $\varepsilon_{1,n+m}$ et $\varepsilon_{2,n+m}$ modulo p^{n+m} sont congruents modulo p^n , c'est-à-dire que l'on a :

$$\varphi_n^{m+n}(\varepsilon_{1,n+m}) = \varphi_n^{m+n}(\varepsilon_{2,n+m}).$$

Finalement, on a $\varepsilon_{1,n} = \varepsilon_{2,n}$. D'où l'unicité de la décomposition.

D'où le résultat annoncé. □

Corollaire 1.10. \mathbb{Z}_p est un anneau intègre.

Preuve. Chacun des $\mathbb{Z}/(p^n)$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ étant non nul, on a :

$$0_{\mathbb{Z}_p} \neq 1_{\mathbb{Z}_p}.$$

Soient x et y dans \mathbb{Z}_p^* , d'après la proposition 1.9, il existe m_x et m_y dans \mathbb{N} , ainsi que ε_x et ε_y dans \mathbb{Z}_p^\times tels que l'on ait :

$$x = p^{m_x} \varepsilon_x \text{ et } y = p^{m_y} \varepsilon_y.$$

Dès lors, il vient :

$$xy = p^{m_x+m_y} \varepsilon_x \varepsilon_y.$$

On en déduit que $xy \neq 0_{\mathbb{Z}_p}$, sinon on aurait $p^{m_x+m_y} = 0_{\mathbb{Z}_p}$, ce qui n'est pas. Par contraposition, on a alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}_p^2, xy = 0_{\mathbb{Z}_p} \Rightarrow x = 0_{\mathbb{Z}_p} \text{ ou } y = 0_{\mathbb{Z}_p}.$$

Finalement, \mathbb{Z}_p est un anneau intègre. □

Définition 1.11. On appelle corps des nombres p -adiques et l'on note \mathbb{Q}_p le corps des fractions de l'anneau intègre \mathbb{Z}_p .

Remarque 1.12. D'après la remarque 1.6, \mathbb{Q}_p est de caractéristique 0.

Proposition 1.13. Il existe un unique morphisme d'anneaux injectif de \mathbb{Q} dans \mathbb{Q}_p qui prolonge i , on le note $j : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$.

Preuve. On note $i_1 : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, respectivement $i_2 : \mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$, le plongement canonique de l'anneau \mathbb{Z} , respectivement de \mathbb{Z}_p , dans son corps des fractions. Dès lors, d'après la proposition 1.5, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z}_p \\ \downarrow i_1 & \searrow & \downarrow i_2 \\ K(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q} & & K(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Q}_p \end{array} .$$

Finalement, par propriété universelle du corps des fractions de \mathbb{Z} , il existe un unique morphisme d'anneaux injectif $j : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ tel que :

$$j \circ i_1 = i_2 \circ i.$$

En pensant à i_1 et i_2 comme à des inclusions, on a le résultat annoncé. □

Proposition 1.14. \mathbb{Q}_p est engendré par $\frac{1}{p}$ sur \mathbb{Z}_p , c'est-à-dire que l'on a :

$$\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p \left[\frac{1}{p} \right].$$

Preuve. D'après la remarque 1.8, un élément de \mathbb{Z}_p est non inversible si et seulement s'il appartient à $p\mathbb{Z}_p$. Dès lors, \mathbb{Q}_p est le localisé de \mathbb{Z}_p en $p\mathbb{Z}_p$. Finalement, $p\mathbb{Z}_p$ étant engendré par p , on a l'égalité annoncée. □

Proposition 1.15. Quel que soit $x \in \mathbb{Q}_p^*$, il existe m un unique entier relatif et ε une unique unité de \mathbb{Z}_p tels que l'on ait la décomposition suivante :

$$x = p^m \varepsilon.$$

Preuve. On montre l'existence et l'unicité séparément.

- Soit $x \in \mathbb{Q}_p^*$, d'après la proposition 1.14, il existe $P \in \mathbb{Z}_p[X]$ de degré n satisfaisant à l'égalité suivante :

$$x = P\left(\frac{1}{p}\right).$$

En réduisant chaque fraction de cette identité au même dénominateur, on obtient $a \in \mathbb{Z}_p$ tel que l'on ait :

$$x = \frac{a}{p^n}.$$

Comme $x \in \mathbb{Q}_p^*$, $a \in \mathbb{Z}_p^*$ et d'après la proposition 1.9, il existe $n' \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $a = p^{n'} \varepsilon$. Finalement, en posant $m := n' - n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$x = p^m \varepsilon.$$

- Soit $x \in \mathbb{Q}_p^*$, supposons qu'il existe m_1 et m_2 dans \mathbb{Z} , ainsi que ε_1 et ε_2 dans \mathbb{Z}_p^\times satisfaisants à :

$$x = p^{m_1} \varepsilon_1 \text{ et } x = p^{m_2} \varepsilon_2.$$

On commence par observer que m_1 et m_2 ont même signe ; en effet, sinon x serait à la fois dans \mathbb{Z}_p et $\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p$, ce qui ne peut être.

- Supposons que m_1 et m_2 soient tous les deux positifs, alors d'après la proposition 1.9, on a $m_1 = m_2$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.
- Supposons que m_1 et m_2 soient tous les deux négatifs, alors, on a :

$$p^{-m_2} \varepsilon_1 = p^{-m_2} \varepsilon_2.$$

$-m_1$ et $-m_2$ étant tous les deux positifs, d'après la proposition 1.9, on a $-m_1 = -m_2$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

D'où le résultat annoncé. □

1.2. Topologie élémentaire du corps des nombres p -adiques.

Définition 1.16. On appelle valuation p -adique et on note $v_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ l'application définie par :

- $v_p(0) := \infty$.
- Si $x \in \mathbb{Q}_p^*$, d'après la proposition 1.15, il existe m un unique entier relatif et ε une unique unité de \mathbb{Z}_p tels que l'on ait :

$$x = p^m \varepsilon.$$

On pose alors $v_p(x) := m$.

Remarque 1.17. Soit $x \in \mathbb{Q}_p^*$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$ satisfaisant à $x = p^{v_p(x)}\varepsilon$. La valuation p -adique de x est le plus grand entier relatif m tel que $x \in p^m\mathbb{Z}_p$. En effet, on a $x \in p^{v_p(x)}\mathbb{Z}_p$ et si l'on avait $x \in p^{v_p(x)+1}\mathbb{Z}_p$, alors $\varepsilon \in p\mathbb{Z}_p$, ce qui d'après la proposition 1.7 et la remarque 1.8 contredirait que ε soit dans \mathbb{Z}_p^\times . On en déduit les interprétations suivantes de la valuation p -adique :

- Si $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \in \mathbb{Z}_p^*$, alors $v_p(x) = \max \{n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ t.q. } x_n = 0_{\mathbb{Z}/(p^n)}\}$.
- Si $x \in \mathbb{Z}^*$, alors avec la proposition 1.5, $v_p(x) = \max \{n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ t.q. } p^n | x\}$.

Proposition 1.18. Quels que soient x et y dans \mathbb{Q}_p , on a :

- i. $v_p(x) = \infty$ si et seulement si $x = 0$.
- ii. $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.
- iii. $v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$ avec égalité si $v_p(x) \neq v_p(y)$.

Preuve. On montre indépendamment chaque propriété.

i. Cette propriété découle immédiatement de la définition 1.16.

ii. On distingue les deux cas suivants sur x et y :

- Supposons que x ou y soit nul, alors l'égalité est vraie.
- Supposons que x et y soient non nuls, il existe $\varepsilon_x, \varepsilon_y \in \mathbb{Z}_p^\times$ tels que :

$$x = p^{v_p(x)}\varepsilon_x \text{ et } y = p^{v_p(y)}\varepsilon_y.$$

Par conséquent, on a :

$$xy = p^{v_p(x)+v_p(y)}\varepsilon_x\varepsilon_y.$$

Comme $\varepsilon_x\varepsilon_y \in \mathbb{Z}_p^\times$, d'après la définition 1.16, il vient :

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y).$$

iii. On distingue les deux cas suivants sur x et y :

- Supposons que x ou y soit nul, alors la propriété est vraie.
- Supposons que x et y soient non nuls, il existe $\varepsilon_x, \varepsilon_y \in \mathbb{Z}_p^\times$ tels que :

$$x = p^{v_p(x)}\varepsilon_x \text{ et } y = p^{v_p(y)}\varepsilon_y.$$

On suppose sans perte de généralité que $v_p(x) \leq v_p(y)$, on a alors :

$$(12) \quad x + y = p^{v_p(x)} (\varepsilon_x + p^{v_p(y)-v_p(x)}\varepsilon_y).$$

Or, on a $p^{v_p(y)-v_p(x)}\varepsilon_y \in \mathbb{Z}_p$ et d'après (12), il vient :

$$(13) \quad x + y \in p^{v_p(x)}\mathbb{Z}_p.$$

Dès lors, d'après la remarque 1.17, on a :

$$v_p(x + y) \geq v_p(x).$$

Supposons désormais que $v_p(x) < v_p(y)$, alors on a :

$$(14) \quad p^{v_p(y)-v_p(x)}\varepsilon_y \in p\mathbb{Z}_p.$$

Si par l'absurde $x + y \in p^{v_p(x)+1}\mathbb{Z}_p$, alors d'après (12), on a :

$$\varepsilon_x + p^{v_p(y)-v_p(x)}\varepsilon_y \in p\mathbb{Z}_p.$$

Ainsi, d'après (14), on a $\varepsilon_x \in p\mathbb{Z}_p$, ce qui d'après la proposition 1.15 contredit $\varepsilon_x \in \mathbb{Z}_p^\times$ et on en déduit que l'on a :

$$(15) \quad x + y \notin p^{v_p(x)+1}\mathbb{Z}_p.$$

Finalement, d'après (13), (15) et la remarque 1.17, on a :

$$v_p(x + y) = v_p(x).$$

D'où le résultat annoncé. □

Définition 1.19. On appelle norme p -adique et on note $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow [0, +\infty[$ l'application définie par :

- $|0_{\mathbb{Q}_p}|_p = 0$.
- Si $x \in \mathbb{Q}_p^*$, on pose $|x|_p := p^{-v_p(x)}$.

Remarque 1.20. D'après la proposition 1.9 et la définition 1.19, on a :

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \text{ t.q. } |x|_p \leq 1\}.$$

Proposition 1.21. Quels que soient x et y dans \mathbb{Q}_p , on a :

- i. $|x|_p = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- ii. $|xy|_p = |x|_p|y|_p$.
- iii. $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$ avec égalité si $|x|_p \neq |y|_p$.

Preuve. Ses propriétés se déduisent de la proposition 1.18 par exponentiation et en remarquant que quel que soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} -\min(a, b) &= \max(-a, -b), \\ p^{\max(a, b)} &= \max(p^a, p^b). \end{aligned}$$

□

Définition 1.22. On appelle distance p -adique et on note $\delta_p : \mathbb{Q}_p^2 \rightarrow [0, +\infty[$ l'application définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}_p^2, \delta_p(x, y) := |x - y|_p.$$

Proposition 1.23. \mathbb{Q}_p muni de δ_p est un espace ultramétrique.

Preuve. Quel que soit $(x, y, z) \in \mathbb{Q}_p^3$, on a :

- (séparation) D'après le point i. de la proposition 1.21, on a :

$$\delta_p(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

- (symétrie) D'après le point ii. de la proposition 1.21, on a :

$$\delta_p(x, y) = \delta_p(y, x).$$

- (inégalité ultramétrique) On commence par écrire :

$$x - z = (x - y) + (y - z).$$

D'après le point iii. de la proposition 1.21 et le point précédent, on a :

$$\delta_p(x, z) \leq \max(\delta_p(x, y), \delta_p(y, z)).$$

Finalement, (\mathbb{Q}_p, δ_p) est un espace ultramétrique. □

Proposition 1.24. On note \mathcal{T} la topologie produit sur $\prod_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mathbb{Z}/(p^n)$ associée aux topologies discrètes sur chacun des $\mathbb{Z}/(p^n)$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. La topologie induite par \mathcal{T} sur \mathbb{Z}_p et la topologie associée à la restriction de δ_p sur \mathbb{Z}_p sont égales.

Preuve. Soient $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \in \mathbb{Z}_p$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ et $y := (y_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \in \mathbb{Z}_p$, on a :

$$(16) \quad y \in B_{\delta_p}(x, \varepsilon) \Leftrightarrow v_p(x - y) > -\log_p(\varepsilon).$$

Or, en posant $m := \lfloor -\log_p(\varepsilon) \rfloor$, d'après la remarque 1.17, on a :

$$(17) \quad v_p(x - y) > -\log_p(\varepsilon) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, n \leq m \Rightarrow x_n = y_n.$$

Dès lors, d'après (16) et (17), il vient :

$$y \in B_{\delta_p}(x, \varepsilon) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, n \leq m \Rightarrow x_n = y_n.$$

Finalement, on en déduit que l'on a :

$$B_{\delta_p}(x, \varepsilon) = \left(\prod_{n=1}^m \{x_n\} \times \prod_{n \geq m} \mathbb{Z}/(p^n) \right) \cap \mathbb{Z}_p.$$

Or, l'ensemble suivant constitue une base de voisinages ouverts de $(\mathbb{Z}_p, \mathcal{T}_{|\mathbb{Z}_p})$:

$$\left\{ \left(\prod_{n=1}^m \{x_n\} \times \prod_{n \geq m} \mathbb{Z}/(p^n) \right) \cap \mathbb{Z}_p, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}, (x_n)_{n \in \llbracket 1, m \rrbracket} \in \prod_{n=1}^m \mathbb{Z}/(p^n) \right\}$$

et celui ci-dessous est quant à lui une base de voisinages ouverts de (\mathbb{Z}_p, δ_p) :

$$\{B_{\delta_p}(x, \varepsilon), x \in \mathbb{Z}_p, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

D'où le résultat annoncé. □

Proposition 1.25. $i(\mathbb{N})$ est une partie dense de \mathbb{Z}_p .

Preuve. Soit $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ dans \mathbb{Z}_p , quel que soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on se donne y_n un représentant positif de x_n modulo p^n , en accord avec la proposition 1.5, on a :

$$x_n - i(y_n)_n = 0_{\mathbb{Z}/(p^n)}.$$

Or, d'après la remarque 1.17, on a :

$$v_p(x - i(y_n)) = \max \{m \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ t.q. } x_m - i(y_n)_m = 0_{\mathbb{Z}/(p^m)}\}.$$

Par conséquent, $v_p(x - i(y_n)) \geq n$ et on en déduit l'inégalité suivante :

$$\delta_p(x, i(y_n)) \leq p^{-n}.$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_p(x, i(y_n)) = 0.$$

Finalement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} i(y_n) = x$. D'où le résultat annoncé. \square

Proposition 1.26. $j(\mathbb{Q})$ est une partie dense de \mathbb{Q}_p .

Preuve. Soit $x \in \mathbb{Z}_p$, il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^*$ satisfaisant à :

$$(18) \quad x = ab^{-1}.$$

D'après la proposition 1.25, il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} i(a_n) = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} i(b_n) = b.$$

En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait :

$$(20) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow i(b_n) \in B_{\delta_p}(b, \varepsilon).$$

Or, b étant non nul, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ satisfaisant à :

$$(21) \quad 0 \notin B_{\delta_p}(b, \varepsilon).$$

Ainsi, i étant injectif (proposition 1.5), d'après (20) et (21), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow b_n \neq 0.$$

Quel que soit $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ on est alors en mesure de définir l'élément de \mathbb{Q} suivant :

$$x_n := \frac{a_n}{b_n}.$$

Dès lors, d'après la proposition 1.13, on a :

$$(22) \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}, j(x_n) = j(a_n)j(b_n)^{-1} = i(a_n)i(b_n)^{-1}.$$

Finalement, d'après (18), (19) et (22), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} j(x_n) = x.$$

D'où le résultat annoncé. \square

Lemme 1.27. \mathbb{Z}_p est fermé dans $\prod_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mathbb{Z}/(p^n)$ muni de \mathcal{I} .

Preuve. Soit $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \in \left(\prod_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mathbb{Z}/(p^n) \right) \setminus \mathbb{Z}_p$, on dispose de m et n des entiers naturels au moins égaux à 1 tels que $m \leq n$ et satisfaisants à :

$$\varphi_m^n(x_n) \neq x_m.$$

On introduit alors l'ensemble suivant :

$$V := \prod_{k=1}^n \{x_k\} \times \prod_{k \geq n+1} \mathbb{Z}/(p^k).$$

V est un ouvert de $\prod_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mathbb{Z}/(p^n)$ qui contient x et tel que $V \cap \mathbb{Z}_p = \emptyset$.

Finalement, V est un voisinage ouvert de x dans $\left(\prod_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mathbb{Z}/(p^n) \right) \setminus \mathbb{Z}_p$ et

$\left(\prod_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mathbb{Z}/(p^n) \right) \setminus \mathbb{Z}_p$ est ouvert dans $\prod_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mathbb{Z}/(p^n)$, d'où le résultat annoncé. \square

Proposition 1.28. \mathbb{Z}_p est compact dans \mathbb{Q}_p .

Preuve. Quel que soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $\mathbb{Z}/(p^n)$ étant fini, il est compact pour la topologie discrète. Dès lors, d'après le théorème de Tychonoff, $\prod_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mathbb{Z}/(p^n)$ muni

de \mathcal{T} est compact. Ainsi, d'après le lemme 1.27, $(\mathbb{Z}_p, \mathcal{T}_{\mathbb{Z}_p})$ est compact. Finalement, d'après la proposition 1.24, (\mathbb{Z}_p, δ_p) est compact. \square

Corollaire 1.29. L'espace métrique \mathbb{Z}_p est complet.

Proposition 1.30. L'espace métrique \mathbb{Q}_p est complet.

Preuve. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |x_n - x_N| \leq 1.$$

Dès lors, d'après la remarque 1.20, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow x_n - x_N \in \mathbb{Z}_p.$$

Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, $(x_n - x_N)_{n \geq N} \in \mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$ l'est également. Par conséquent, d'après la proposition 1.29, $(x_n - x_N)_{n \geq N}$ converge vers $x \in \mathbb{Z}_p$. Finalement, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x + x_N$ dans \mathbb{Q}_p . D'où le résultat annoncé. \square

Remarque 1.31. En accord avec les propositions 1.26 et 1.30, \mathbb{Q}_p est obtenu par complétion de \mathbb{Q} pour la distance δ_p .

1.3. Étude des zéros des séries entières à coefficients p -adiques.

Définition 1.32. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}}$, on appelle série entière formelle en l'indéterminée X de terme général $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la série $\sum a_n X^n$.

Notation 1.33. L'ensemble des séries entières formelles en l'indéterminée X et à coefficients dans \mathbb{Q}_p est noté $\mathbb{Q}_p[[X]]$.

Définition 1.34. Soient $f \in \mathbb{Q}_p[[X]]$ de terme général $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $x \in \mathbb{Q}_p$, on dit que f est convergente en x si et seulement si la série $\sum a_n x^n$ est convergente.

Proposition 1.35. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{Q}_p , la série $\sum a_n$ est convergente si et seulement si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Le cas échéant, on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right|_p \leq \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|_p.$$

Preuve. On introduit la suite des sommes partielles de $\sum a_n$:

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} := \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

On procède alors par double implication.

- Supposons que la série $\sum a_n$ soit convergente, alors $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Or, on observe que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = A_n - A_{n-1}.$$

Finalement, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

- Supposons que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, on observe que l'on a :

$$(23) \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \delta_p(A_m, A_{m+n}) \leq \left| \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k \right|_p.$$

Or, d'après la proposition 1.23, on a :

$$(24) \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \left| \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k \right|_p \leq \max_{k \in \llbracket m+1, m+n \rrbracket} |a_k|_p$$

Dès lors, d'après (23) et (24), il vient :

$$(25) \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \delta_p(A_m, A_{m+n}) \leq \max_{k \in \llbracket m+1, n \rrbracket} |a_k|_p.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq N \Rightarrow |a_k|_p \leq \varepsilon.$$

En particulier, on en déduit que l'on a :

$$(26) \quad \forall m \in \mathbb{N}, m \geq N, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \max_{k \in \llbracket m+1, m+n \rrbracket} |a_k|_p \leq \varepsilon.$$

Dès lors, d'après (25) et (26), il vient :

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq N, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \delta_p(A_m, A_{m+n}) \leq \varepsilon.$$

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et d'après la proposition 1.30, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Finalement, $\sum a_n$ est convergente.

Supposons que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, alors d'après ce qui précède $\sum a_n$ est convergente. Or, d'après le point iii. de la proposition 1.21, $|\cdot|_p$ est continue (1-lipschitzienne) et l'on en déduit l'égalité suivante :

$$(27) \quad \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right|_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=0}^n a_k \right|_p.$$

Or, d'après la proposition 1.23, on a :

$$(28) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=0}^n a_k \right|_p \leq \max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} |a_k|_p.$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0, elle est bornée et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_n|_p \leq \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|_p.$$

Par conséquent, on en déduit que l'on a :

$$\max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|_p = \max_{k \in [0, N]} |a_k|_p.$$

Dès lors, d'après (28), on a :

$$(29) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n a_k \right|_p \leq \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|_p.$$

Finalement, d'après (27) et par passage à la limite dans (29), on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right|_p \leq \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|_p.$$

□

Proposition 1.36. Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double d'éléments de \mathbb{Q}_p telle que $\lim_{\max(i,j) \rightarrow +\infty} a_{i,j} = 0$, alors les séries $\sum_i \sum_j a_{i,j}$ et $\sum_j \sum_i a_{i,j}$ sont convergentes dans \mathbb{Q}_p et convergent vers la même limite.

Preuve. Soit $i \in \mathbb{N}$, comme $\lim_{j \rightarrow +\infty} \max(i, j) = +\infty$, on a :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} a_{i,j} = 0.$$

Par conséquent, d'après la proposition 1.35, $\sum_j a_{i,j}$ est convergente et l'on a :

$$\left| \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} \right|_p \leq \max_{j \in \mathbb{N}} |a_{i,j}|_p.$$

Or, quel que soit $j \in \mathbb{N}$, $\lim_{i \rightarrow +\infty} \max(i, j) = +\infty$, d'où $\lim_{i \rightarrow +\infty} |a_{i,j}|_p = 0$ et l'on a :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \max_{j \in \mathbb{N}} |a_{i,j}|_p = 0.$$

Dès lors, $\lim_{i \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = 0$ et d'après la proposition 1.35, $\sum_i \sum_j a_{i,j}$ converge.

De la même manière, on montre que $\sum_j \sum_i a_{i,j}$ est convergente.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \max(i, j) \geq N \Rightarrow |a_{i,j}|_p \leq \varepsilon.$$

Dès lors, d'après la proposition 1.35, on a :

$$(30) \quad \left| \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} - \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{i,j} \right|_p = \left| \sum_{\substack{i \\ \max(i,j) > N}} \sum_j a_{i,j} \right|_p \leq \max_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ \max(i,j) > N}} |a_{i,j}|_p \leq \varepsilon,$$

$$(31) \quad \left| \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} - \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N a_{i,j} \right|_p = \left| \sum_{\substack{j \\ \max(i,j) > N}} \sum_i a_{i,j} \right|_p \leq \max_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ \max(i,j) > N}} |a_{i,j}|_p \leq \varepsilon.$$

L'ordre de sommation des sommes finies n'ayant pas d'importance, on a :

$$\left| \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} - \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} \right|_p = \left| \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} - \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{i,j} - \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} + \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N a_{i,j} \right|_p.$$

Ainsi, d'après le point iii. de la proposition 1.21, (30) et (31), il vient :

$$\left| \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} - \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} \right|_p \leq \varepsilon.$$

D'où le résultat annoncé. \square

Théorème 1.37. (Strassmann [16]) Soit $f \in \mathbb{Q}_p[[X]]$ de terme général $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle et converge vers 0, alors f converge sur \mathbb{Z}_p et l'on a :

$$\#\{x \in \mathbb{Z}_p \text{ t.q. } f(x) = 0\} \leq \max \left\{ n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } |a_n|_p = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|_p \right\} < \infty.$$

Preuve. D'après la remarque 1.20 et le point ii. de la proposition 1.21, on a :

$$\forall x \in \mathbb{Z}_p, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n x^n|_p \leq |a_n|_p.$$

Dès lors, on en déduit que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{Z}_p, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n x^n = 0.$$

Finalement, d'après la définition 1.34 et la proposition 1.35, f converge sur \mathbb{Z}_p .

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0, elle est bornée et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_n|_p \leq \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|_p.$$

On peut alors définir l'entier naturel suivant :

$$M := \max \left\{ n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } |a_n|_p = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|_p \right\}.$$

On procède alors par récurrence sur M .

- **Initialisation.** Si $M = 0$, alors par construction de M , on a :

$$(32) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Rightarrow |a_n|_p < |a_0|_p.$$

S'il existait $x \in \mathbb{Z}_p$ tel que $f(x) = 0$, on aurait l'égalité suivante :

$$a_0 = - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dès lors, d'après la remarque 1.20, le point ii. de la proposition 1.21, la proposition 1.35 et l'inégalité (32), il viendrait :

$$|a_0|_p \leq \max_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} |a_n|_p < |a_0|_p,$$

ce qui ne peut être. Finalement, f ne s'annule pas dans \mathbb{Z}_p .

- **Hérédité.** Si $M \geq 1$, on distingue les deux cas suivants sur f :

- Si f ne s'annule pas dans \mathbb{Z}_p , alors f a au plus M zéros dans \mathbb{Z}_p .
- S'il existe $y \in \mathbb{Z}_p$ tel que $f(y) = 0$, alors, on a :

$$(33) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_p, f(x) = f(x) - f(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x^n - y^n).$$

Or, on rappelle que quel que soit $x \in \mathbb{Z}_p$, on a l'identité suivante :

$$(34) \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}.$$

Dès lors, quel que soit $x \in \mathbb{Z}_p$, on définit $\alpha(x) \in \mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}^2}$ par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \alpha(x)_{i,j} = \begin{cases} a_i x^j y^{i-j-1} & , \text{ si } i \geq 1 \text{ et } j < i \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}.$$

De cette manière, d'après (33) et (34), on a l'égalité suivante :

$$(35) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_p, f(x) = (x - y) \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha(x)_{m,n}.$$

D'après la remarque 1.20 et le point ii. de la proposition 1.21, on a :

$$\forall x \in \mathbb{Z}_p, \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, |\alpha(x)_{i,j}|_p \leq |a_i|_p.$$

Dès lors, quel que soit $x \in \mathbb{Z}_p$, on a :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \lim_{i \rightarrow +\infty} |\alpha(x)_{i,j}|_p = 0.$$

Par ailleurs, on constate que quel que soit $x \in \mathbb{Z}_p$, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \lim_{j \rightarrow +\infty} |\alpha(x)_{i,j}|_p = 0.$$

Par conséquent, d'après la proposition 1.36 et l'égalité (35), il vient :

$$f(x) = (x - y) \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha(x)_{m,n}.$$

On en déduit l'égalité suivante :

$$(36) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_p, f(x) = (x - y) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sum_{m=n+1}^{+\infty} a_m y^{m-n-1}.$$

On pose $b_0 := 0$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on définit l'élément suivant :

$$b_n := \sum_{m=n+1}^{+\infty} a_m y^{m-n-1}.$$

Soit g la série entière de terme général $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'après (36), on a :

$$(37) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_p, f(x) = (x - y)g(x).$$

En outre, d'après la remarque 1.20, le point ii. de la proposition 1.21, la proposition 1.35 et par construction de M , on a :

$$(38) \quad \forall n \in \mathbb{N}, |b_n|_p \leq \max_{m \geq n+1} |a_m|_p \leq |a_M|_p.$$

Par ailleurs, par construction de M , on a également :

$$(39) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq M + 1 \Rightarrow |a_n|_p < |a_M|_p.$$

Dès lors, d'après la remarque 1.20, le point ii. de la proposition 1.21, la proposition 1.35 et l'inégalité (39), on a :

$$\left| \sum_{m=M+1}^{+\infty} a_m y^{m-M} \right|_p \leq \max_{m \geq M+1} |a_m|_p < |a_M|_p.$$

Par conséquent, d'après le point iii. de la proposition 1.21, il vient :

$$(40) \quad |b_{M-1}|_p = \max \left(|a_M|_p, \left| \sum_{m=M+1}^{+\infty} a_m y^{m-M} \right|_p \right) = |a_M|_p.$$

Enfin, d'après les inégalités (38) et (39), on a :

$$(41) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > M - 1 \Rightarrow |b_n|_p < |a_M|_p.$$

Dès lors, d'après (38), (40) et (41), on a :

$$\max \left\{ n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } |b_n|_p = \max_{k \in \mathbb{N}} |b_k|_p \right\} = M - 1.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, g a au plus $M - 1$ zéros dans \mathbb{Z}_p .
Finalement, d'après (37), f a au plus M zéros dans \mathbb{Z}_p .

D'où le résultat annoncé. □

Remarque 1.38. Le théorème 1.37 est l'analogie p -adique du théorème de Rouché sur les zéros des fonctions holomorphes dans un disque.

2. INTERPOLATION p -ADIQUE DES ITÉRÉS DE FONCTIONS POLYNOMIALES

Soient p un nombre premier quelconque, $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $f \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d$. On introduit $I := (X_1, \dots, X_d)$ et on montre que s'il existe une puissance de p suffisamment grande divisant les coefficients de chacune des composantes polynomiales de $f - I$, alors on peut interpoler à \mathbb{Z}_p les itérés de f prises en un point fixé de \mathbb{Z}_p^d . Autrement dit, sous ces hypothèses, quel que soit $x \in \mathbb{Z}_p^d$, on exhibera $g \in \mathbb{Q}_p[[X]]^d$ qui converge sur \mathbb{Z}_p et satisfaisant à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = f^n(x).$$

L'unicité d'une telle fonction est assurée par la proposition suivante :

Proposition 2.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{Q}_p , il existe au plus une fonction continue $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ satisfaisant à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = u_n.$$

Preuve. \mathbb{N} étant dense dans \mathbb{Z}_p (proposition 1.25), une fonction continue est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur \mathbb{N} . □

2.1. Quelques préliminaires techniques. On commence par donner un mineur de la norme p -adique de la factorielle d'un entier naturel.

Proposition 2.2. Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_p(m!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor.$$

Preuve. On rappelle que l'on a :

$$m! = \prod_{\ell=1}^m \ell.$$

Dès lors, d'après le point ii. de la proposition 1.18, il vient :

$$(1) \quad v_p(m!) = \sum_{\ell=1}^m v_p(\ell).$$

On introduit l'ensemble suivant :

$$A_m := \{(k, \ell) \in \mathbb{N}_{\geq 1} \times \llbracket 1, m \rrbracket \text{ t.q. } p^k | \ell\}.$$

D'une part, on constate que l'on a :

$$\#A_m = \sum_{k=1}^{+\infty} \#\{\ell \in \llbracket 1, m \rrbracket \text{ t.q. } p^k | \ell\}.$$

Or, quel que soit $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $\llbracket 1, m \rrbracket$ contient $\left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor$ multiple de p^k , d'où :

$$\#\{\ell \in \llbracket 1, m \rrbracket \text{ t.q. } p^k | \ell\} = \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor.$$

Par conséquent, on a l'égalité suivante :

$$(2) \quad \#A_m = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor.$$

D'autre part, on observe que l'on a :

$$\#A_m = \sum_{\ell=1}^m \# \{k \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } p^k | \ell\}.$$

Or, d'après la remarque 1.17, quel que soit $\ell \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a :

$$v_p(\ell) = \# \{k \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } p^k | \ell\}.$$

Par conséquent, on a également l'égalité suivante :

$$(3) \quad \#A_m = \sum_{\ell=1}^m v_p(\ell).$$

En rapprochant les égalités (1), (2) et (3), on a l'égalité annoncée. □

Corollaire 2.3. Quel que soit m entier naturel, on a :

$$|m!|_p \geq p^{-m/(p-1)}.$$

Preuve. On rappelle que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Par conséquent, d'après la proposition 2.2, on a :

$$v_p(m!) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m}{p^k} = \frac{m}{p-1}.$$

Finalement, d'après la définition 1.19, on a l'inégalité annoncée. □

Afin de vérifier que la fonction construite est donnée par une série entière, on aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.4. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_p^{(\mathbb{N})}$. Les séries $\sum_i a_i \sum_j b_j X^j$ et $\sum_j a_i \sum_i b_j X^j$ sont convergentes et égales sur \mathbb{Z}_p .

Preuve. Quel que soit $x \in \mathbb{Z}_p$, on définit $\alpha(x) \in \mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}^2}$ de la manière suivante :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \alpha(x)_{i,j} := a_i b_j x^j.$$

D'après le point ii. de la proposition 1.18 et la remarque 1.20, on a :

$$(4) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_p, \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, |\alpha(x)_{i,j}|_p \leq |a_i|_p |b_j|_p.$$

Or, comme par hypothèse $\lim_{i \rightarrow +\infty} a_i = 0$, d'après (4), il vient :

$$(5) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_p, \lim_{i \rightarrow +\infty} \alpha(x)_{i,j} = 0.$$

Par ailleurs, comme $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_p^{(\mathbb{N})}$, on a $\lim_{j \rightarrow +\infty} b_j = 0$ et d'après (4), il vient :

$$(6) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_p, \lim_{j \rightarrow +\infty} \alpha(x)_{i,j} = 0.$$

Par conséquent, d'après (5) et (6), il vient :

$$\forall x \in \mathbb{Z}_p, \lim_{\max(i,j) \rightarrow +\infty} \alpha(x)_{i,j} = 0.$$

Dès lors, d'après la proposition 1.36, quel que soit $x \in \mathbb{Z}_p$, les séries $\sum_i \sum_j \alpha(x)_{i,j}$

et $\sum_j \sum_i \alpha(x)_{i,j}$ sont convergentes dans \mathbb{Q}_p et convergent vers la même limite.

Finalement, on en déduit que l'on a :

$$\sum_i a_i \sum_j b_j X^j = \sum_j \left(b_j \sum_i a_i \right) X^j \in \mathbb{Q}_p[[X]].$$

D'où le résultat annoncé. □

Remarque 2.5. Quels que soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_p[X]^{\mathbb{N}}$, d'après la proposition 2.4, la série $\sum a_n P_n$ converge en chaque point de \mathbb{Z}_p et définit un élément de $\mathbb{Q}_p[[X]]$.

Afin de vérifier que la fonction construite interpole bien les itérés de f en un point fixé, on aura besoin de l'égalité combinatoire suivante :

Lemme 2.6. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et quel que soit $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\sum_{m=\ell}^n \binom{n}{m} \binom{m}{\ell} (-1)^{m-\ell} = \delta_{n,\ell}.$$

Preuve. Quel que soit $m \in \llbracket \ell, n \rrbracket$, on remarque que l'on a :

$$\binom{n}{m} \binom{m}{\ell} = \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \frac{(n-\ell)!}{(m-\ell)!(n-m)!} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{m-\ell}.$$

En sommant sur $m \in \llbracket \ell, n \rrbracket$ et en changeant d'indice, il vient :

$$\sum_{m=\ell}^n \binom{n}{m} \binom{m}{\ell} (-1)^{m-\ell} = \binom{n}{\ell} \sum_{m=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{m} (-1)^m.$$

Dès lors, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{m=\ell}^n \binom{n}{m} \binom{m}{\ell} (-1)^{m-\ell} = \binom{n}{\ell} (1-1)^{n-\ell} = \delta_{n,\ell}.$$

D'où l'égalité annoncé. □

2.2. Étude sommaire d'un opérateur de différence finie.

Définition 2.7. On définit $\Delta : \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d \rightarrow \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d$ par :

$$\forall h \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d, \Delta(h) := h \circ f - h.$$

Remarque 2.8. Pour $h \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d$, on notera parfois Δh pour $\Delta(h)$.

Proposition 2.9. Soit $(h_1, h_2) \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d \times \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d$, on a :

- i. $\Delta(h_1 + h_2) = \Delta h_1 + \Delta h_2$.
- ii. $\Delta(h_1 h_2) = (h_2 \circ f) \Delta h_1 + h_1 \Delta h_2$.

Preuve. On montre indépendamment chaque propriété.

- i. D'après la définition 2.7, on a :

$$\begin{aligned} \Delta(h_1 + h_2) &= (h_1 + h_2) \circ f - (h_1 + h_2), \\ &= h_1 \circ f + h_2 \circ f - h_1 - h_2, \\ &= \Delta h_1 + \Delta h_2. \end{aligned}$$

- ii. D'après la définition 2.7, on a :

$$\begin{aligned} \Delta(h_1 h_2) &= (h_1 h_2) \circ f - h_1 h_2, \\ &= (h_1 \circ f)(h_2 \circ f) - h_1 h_2, \\ &= (h_1 \circ f)(h_2 \circ f) - h_1(h_2 \circ f) + h_1(h_2 \circ f) - h_1 h_2, \\ &= (h_2 \circ f)(h_1 \circ f - h_1) + h_1(h_2 \circ f - h_2), \\ &= (h_2 \circ f) \Delta h_1 + h_1 \Delta h_2. \end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé. □

Proposition 2.10. Quels que soient $h \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d$ et $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Delta^m h = \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} (-1)^{m-\ell} h \circ f^\ell.$$

Preuve. On procède par récurrence sur m .

- **Initialisation.** Si $m = 0$, quel que soit $h \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d$, on a :

$$\Delta^m h = h = \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} (-1)^{m-\ell} h \circ f^\ell.$$

- **Hérédité.** Soit $m \geq 1$, on suppose que l'on a :

$$\forall h \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d, \Delta^{m-1} h = \sum_{\ell=0}^m \binom{m-1}{\ell} (-1)^{m-\ell-1} h \circ f^\ell.$$

Soit $h \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d$, d'après la définition 2.7, on a :

$$\Delta^m h = \Delta^{m-1}(h \circ f - h).$$

Dès lors, d'après le point i. de la proposition 2.9, il vient :

$$\Delta^m h = \Delta^{m-1}(h \circ f) - \Delta^{m-1}h.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \Delta^m h &= \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell} (-1)^{m-\ell-1} h \circ f^{\ell+1} \\ &\quad - \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell} (-1)^{m-\ell-1} h \circ f^\ell, \\ &= \sum_{\ell=1}^m \binom{m-1}{\ell-1} (-1)^{m-\ell} h \circ f^\ell \\ &\quad + \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell} (-1)^{m-\ell} h \circ f^\ell. \end{aligned}$$

Dès lors, d'après la formule du triangle de Pascal, il vient :

$$\Delta^m h = h + \sum_{\ell=1}^{m-1} \binom{m}{\ell} (-1)^{m-\ell} h \circ f^\ell + h \circ f^m.$$

Finalement, on a :

$$\Delta^m h = \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} (-1)^{m-\ell} h \circ f^\ell.$$

D'où l'égalité annoncée. □

2.3. Construction de la fonction p -analytique d'interpolation. On munit \mathbb{Q}_p^d de la norme infini associée à $|\cdot|_p$ que l'on note $\|\cdot\|_p$, on a :

$$\forall x := (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Q}_p^d, \|x\|_p := \max_{i \in [1, d]} |x_i|_p.$$

On rappelle qu'une suite d'éléments de \mathbb{Q}_p^d est convergente si et seulement si chacune de ses composantes converge dans \mathbb{Q}_p . Ainsi, en accord avec la proposition 1.35, une série d'éléments de \mathbb{Q}_p^d est convergente si et seulement si chacune des composantes de son terme général converge vers 0 dans \mathbb{Q}_p , c'est-à-dire si et seulement si son terme général converge vers 0.

Définition 2.11. Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle $n^{\text{ème}}$ polynôme binomial et on note $\binom{\cdot}{n} : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ l'application définie par :

- Quel que soit $x \in \mathbb{Z}_p$, $\binom{x}{0} := 1$.
- Quel que soit $x \in \mathbb{Z}_p$, $\binom{x}{n} := \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (x - k)$, si $n \geq 1$.

Remarque 2.12. Quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}$, le $n^{\text{ème}}$ polynôme binomial évalué en x coïncide avec le coefficient binomial usuel $\binom{x}{n}$.

Théorème 2.13. (Poonen [12]) On définit l'entier suivant :

$$c := \begin{cases} 2 & , \text{ si } p = 2 \\ 1 & , \text{ sinon} \end{cases}.$$

Si $f - I \in p^c \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d$, alors quel que soit $x \in \mathbb{Z}_p^d$, il existe $g \in \mathbb{Q}_p[[X]]^d$ qui converge en chaque point de \mathbb{Z}_p et satisfaisant à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = f^n(x).$$

Preuve. Quel que soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, on introduit l'élément de \mathbb{Z}_p^d suivant :

$$\varepsilon_i := (\delta_{i,j})_{j \in \llbracket 1, d \rrbracket}.$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2$, comme par hypothèse $f_i - X_i \in p^c \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]$, on a :

$$(7) \quad \Delta(X_i \varepsilon_j) = (f_i - X_i) \varepsilon_j \in p^c \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d.$$

Tout élément de $\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d$ étant une somme de produits de $(X_i \varepsilon_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2}$, d'après la proposition 2.9 et (7), il vient :

$$(8) \quad \Delta : \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d \rightarrow p^c \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d.$$

Or, on constate que l'on a :

$$(9) \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q}_p, \forall h \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d, \Delta(\lambda h) = \lambda \Delta h.$$

Dès lors, d'après (8) et (9), par récurrence immédiate, il vient :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \Delta^m I \in p^c \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d.$$

Soit $x \in \mathbb{Z}_p^d$, on en déduit que l'on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}, (\Delta^m I)(x) \in p^c \mathbb{Z}_p^d.$$

Dès lors, par construction de $\|\cdot\|_p$ et d'après la remarque 1.17, on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \|(\Delta^m I)(x)\|_p \leq p^{-c}.$$

Ainsi, d'après le corollaire 2.3, il vient :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \left\| \frac{(\Delta^m I)(x)}{m!} \right\|_p \leq p^{-m(c - \frac{1}{p-1})}.$$

En particulier, comme $c - \frac{1}{p-1} > 0$, on en déduit que l'on a :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(\Delta^m I)(x)}{m!} = 0.$$

Par conséquent, d'après les remarques 1.20 et 2.5, quel que soit $n \in \mathbb{Z}_p$, $\sum_m \binom{n}{m} (\Delta^m I)(x)$ est convergente et définit alors un élément de $\mathbb{Q}_p[[n]]^d$.

Ainsi, la fonction g définie comme suit est la somme d'un élément de $\mathbb{Q}_p[[X]]^d$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}_p, g(n) := \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{n}{m} (\Delta^m I)(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, quel que soit $m \in \mathbb{N}_{\geq m}$, d'après la remarque 2.12, on a :

$$\binom{n}{m} = 0.$$

En particulier, on en déduit que l'on a :

$$g(n) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (\Delta^m I)(x).$$

Dès lors d'après la proposition 2.10 appliquée en $h = I$, il vient :

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} (-1)^{m-\ell} f^\ell(x), \\ &= \sum_{\ell=0}^n f^\ell(x) \sum_{m=\ell}^n \binom{n}{m} \binom{m}{\ell} (-1)^{m-\ell}. \end{aligned}$$

Finalement, d'après le lemme 2.6, on a :

$$g(n) = \sum_{\ell=0}^n f^\ell(x) \delta_{n,\ell} = f^n(x).$$

D'où le résultat annoncé. □

3. UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE SKOLEM-MAHLER-LECH

On montre en préliminaire que l'on peut plonger toute extension finiment engendrée de \mathbb{Q} dans une infinité de \mathbb{Q}_p et que l'on peut même choisir ces plongements de telle manière à ce qu'ils envoient un nombre fini d'éléments prescrits sur des entiers p -adiques. Ce résultat nous permettra enfin d'établir les théorèmes 1 et 3, nous exploiterons les théorèmes 1.37 et 2.13.

3.1. Plongement dans un corps de nombres p -adiques.

Lemme 3.1. Soit d un entier naturel non nul, quels que soient $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $(f_n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_d]^N$ tous non nuls, il existe $(a_i)_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \in \mathbb{Z}^d$ tel que :

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, f_n(a_1, \dots, a_d) \neq 0.$$

Preuve. On définit l'élément de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_d]$ suivant :

$$f := \prod_{n=1}^N f_n.$$

On distingue alors les deux cas suivants sur d :

- Si $d = 1$, on suppose par l'absurde que f s'annule en chaque point de \mathbb{Z} . Dès lors, f a une infinité de racines dans le corps \mathbb{Q} et on a alors $f = 0$. Par intégrité de $\mathbb{Z}[X_1]$, il existe $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $f_n = 0$, contradiction. Finalement, il existe $a_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $f(a_1) \neq 0$ et en particulier, on a :

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, f_n(a_1) \neq 0.$$

- Si $d \geq 2$, on suppose par l'absurde que f s'annule en chaque point de \mathbb{Z}^d . On définit alors l'anneau intègre suivant :

$$A := \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{d-1}].$$

Ainsi, f vu comme élément de $A[X_d]$ s'annule en chaque point de $\mathbb{Z} \subseteq A$. f a une infinité de racines dans le corps des fractions de A et l'on a $f = 0$. Par intégrité de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_d]$, il existe $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $f_n = 0$, ce qui n'est pas. Finalement, il existe $(a_i)_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \in \mathbb{Z}^d$ tel que $f(a_1, \dots, a_d) \neq 0$ et en particulier, on a :

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, f_n(a_1, \dots, a_n) \neq 0.$$

D'où le résultat annoncé. □

Proposition 3.2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant, il existe une infinité de nombres premiers p tel que l'équation $P(x) \equiv 0 \pmod p$ ait une solution.

Preuve. On note d le degré de P , il existe $(a_i)_{i \in \llbracket 0, d \rrbracket} \in \mathbb{Z}^{d+1}$ telle que :

$$P = \sum_{i=0}^d a_i X^i.$$

On distingue les deux cas suivants :

- Si $a_0 = 0$, alors quel que soit p premier, on a $P(0) \equiv 0 \pmod p$.

- Si $a_0 \neq 0$, on définit le polynôme à coefficients dans \mathbb{Z} suivant :

$$R := 1 + \sum_{i=1}^d a_i a_0^{i-1} X^i.$$

On commence par constater que l'on a :

$$(1) \quad P(a_0 X) = a_0 R.$$

Soit E l'ensemble des p premiers tel que $R(x) \equiv 0 \pmod{p}$ soit résoluble. On suppose par l'absurde que E est fini et l'on définit alors :

$$x := \prod_{p \in E} p.$$

Quels que soient $p \in E$ et $N \in \mathbb{N}$, p divise Nx et l'on a :

$$(2) \quad R(Nx) \pmod{p} \equiv 1 \pmod{p}.$$

P étant non constant et a_0 étant non nul, d'après (1), R est non constant. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $R(Nx) \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$; sinon, $R - 1$ ou $R + 1$ aurait une infinité de racines et R serait constant, d'où une contradiction. Dès lors, il existe un nombre premier p_0 tel que :

$$(3) \quad R(Nx) \equiv 0 \pmod{p_0}.$$

Ainsi, $p_0 \in E$ et d'après (2), on a :

$$(4) \quad R(Nx) \equiv 1 \pmod{p_0}.$$

(3) et (4) étant incompatibles, E est infini, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de nombre premiers p tel que $R(x) \equiv 0 \pmod{p}$ ait une racine. Finalement, a_0 étant non nul, d'après (1), $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ a une solution pour une infinité de nombre premiers p .

D'où le résultat annoncé. □

Proposition 3.3. Soit p un nombre premier, \mathbb{Z}_p est non dénombrable.

Preuve. Supposons par l'absurde que \mathbb{Z}_p soit dénombrable, il existe alors une énumération de \mathbb{Z}_p que l'on note $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on écrit :

$$x_n := (x_{n,i})_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}}.$$

On construit récursivement un élément de \mathbb{Z}_p distinct de chaque x_n , $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

- **Initialisation.** Comme $\mathbb{Z}/(p)$ est de cardinal $p \geq 2$, on dispose d'un élément y_1 de $\mathbb{Z}/(p)$ qui soit distinct de $x_{1,1}$.
- **Hérédité.** Soit $n \geq 2$, on suppose avoir construit :

$$(y_k)_{k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket} \in \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{Z}/(p^k) \text{ t.q. } \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, y_k \neq x_{k,k}.$$

Si $n \geq 3$, on suppose de plus que l'on a :

$$\forall m \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \varphi_{m-1}^m(y_m) = y_{m-1}.$$

Comme $\llbracket 0, p^n - 1 \rrbracket$ contient p multiples de p^{n-1} et que le noyau de φ_{n-1}^n est constitué des classes modulo p^n des multiples de p^{n-1} , il vient :

$$\# \ker(\varphi_{n-1}^n) = p.$$

Par conséquent, y_{n-1} possède $p \geq 2$ antécédents par φ_{n-1}^n et il existe alors y_n dans $\mathbb{Z}/(p^n)$ distinct de $x_{n,n}$ satisfaisant à $\varphi_{n-1}^n(y_n) = y_{n-1}$. Finalement, on a construit :

$$(y_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \prod_{k=1}^n \mathbb{Z}/(p^k) \text{ t.q. } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_k \neq x_{k,k},$$

et tel que pour tout $m \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on ait $\varphi_{m-1}^m(y_m) = y_{m-1}$.

On a construit $y \in \mathbb{Z}_p$ qui n'est pas dans $\{x_n, ; n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$, ce qui ne peut être. D'où le résultat annoncé. \square

Corollaire 3.4. Soit p un nombre premier, toutes les bases de transcendance de \mathbb{Q}_p/\mathbb{Q} ont un cardinal infini.

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe $\{x_1, \dots, x_n\}$ une base de transcendance finie de \mathbb{Q}_p/\mathbb{Q} , alors \mathbb{Q}_p est algébrique sur $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ et l'on a :

$$(5) \quad \forall x \in \mathbb{Q}_p, \exists P \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)[X] \setminus \{0\} \text{ t.q. } P(x) = 0.$$

On introduit alors l'ensemble suivant :

$$E := \bigcup_{\substack{P \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)[X] \\ P \neq 0}} \{x \in \mathbb{Q}_p \text{ t.q. } P(x) = 0\}.$$

En particulier, d'après (5), on a l'inclusion suivante :

$$(6) \quad \mathbb{Q}_p \subseteq E.$$

Or, \mathbb{Q} étant dénombrable, $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ et $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)[X] \setminus \{0\}$ le sont aussi. Par ailleurs, \mathbb{Q}_p étant un corps, pour tout $P \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)[X] \setminus \{0\}$, on a :

$$\#\{x \in \mathbb{Q}_p \text{ t.q. } P(x) = 0\} < \infty.$$

Dès lors, E est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis. Finalement, d'après (6), \mathbb{Q}_p est dénombrable, ce qui contredit la proposition 3.3. D'où le résultat annoncé. \square

Corollaire 3.5. Quel que soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, il existe $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subseteq \mathbb{Q}_p$ qui soit algébriquement indépendant sur \mathbb{Q} .

Preuve. Soit S une base de transcendance de \mathbb{Q}_p/\mathbb{Q} , d'après le corollaire 3.4, S est de cardinal infini, si bien que pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, S contient un ensemble de cardinal n , disons $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. Comme S est algébriquement indépendant, $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ l'est également. D'où le résultat annoncé. \square

Lemme 3.6. Soient d un entier naturel non nul et (x, y) un élément de $(\mathbb{Z}_p^d)^2$. Si $x - y \in p\mathbb{Z}_p^d$, alors quel que soit $f \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]$, on a $f(x) - f(y) \in p\mathbb{Z}_p$.

Preuve. Soit $(h_1, h_2) \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^2$ tel que :

$$\forall i \in \{1, 2\}, h_i(x) - h_i(y) \in p\mathbb{Z}_p.$$

On constate alors que $h_1 + h_2$ et $h_1 h_2$ satisfont aussi à cette même propriété. En effet, on remarque que l'on a les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (h_1 + h_2)(x) - (h_1 + h_2)(y) &= (h_1(x) - h_1(y)) + (h_2(x) - h_2(y)), \\ (h_1 h_2)(x) - (h_1 h_2)(y) &= g(x)(h_1(x) - h_1(y)) + f(y)(h_2(x) - h_2(y)). \end{aligned}$$

Or, par hypothèse sur (x, y) , on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, X_i(x) - X_i(y) \in p\mathbb{Z}_p.$$

Ainsi, tout élément de $\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]$ étant une somme de produits de $(X_i)_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket}$, on a le résultat annoncé. □

Proposition 3.7. Soit $f \in \mathbb{Z}_p[X]$, supposons qu'il existe $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_p$ tel que :

$$f(\alpha_0) \in p\mathbb{Z}_p \text{ et } f'(\alpha_0) \notin p\mathbb{Z}_p,$$

alors il existe un unique $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ satisfaisant à $f(\alpha) = 0$ et $\alpha - \alpha_0 \in p\mathbb{Z}_p$.

Preuve. D'après la formule de Taylor, il existe $g \in \mathbb{Z}_p[X, Y]$ tel que l'on ait :

$$(7) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{Z}_p^2, f(y) = f(x) + (y - x)f'(x) + (y - x)^2 g(x, y).$$

On montre alors l'existence et l'unicité séparément.

- **Existence.** On construit par récurrence $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(\alpha_n) \in p^{n+1}\mathbb{Z}_p \text{ et } f'(\alpha_n) \notin p\mathbb{Z}_p.$$

On exige de plus que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfasse à :

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \alpha_n - \alpha_{n-1} \in p^n \mathbb{Z}_p.$$

- **Initialisation.** Si $n = 0$, α_0 convient par hypothèse.
- **Hérédité.** Soit $n \geq 1$, on suppose avoir construit α_{n-1} , alors comme $f'(\alpha_{n-1}) \notin p\mathbb{Z}_p$, d'après la proposition 1.7 et la remarque 1.8, il vient :

$$f'(\alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_p^\times.$$

Ainsi, nous sommes en mesure de définir l'élément de \mathbb{Z}_p suivant :

$$\alpha_n := \alpha_{n-1} - f(\alpha_{n-1})f'(\alpha_{n-1})^{-1}.$$

Par construction $f(\alpha_{n-1}) \in p^n \mathbb{Z}_p$ et on a alors :

$$(8) \quad \alpha_{n-1} - \alpha_n \in p^n \mathbb{Z}_p.$$

Par ailleurs, en appliquant (7) en $(x, y) = (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$, il vient :

$$f(\alpha_n) = (\alpha_n - \alpha_{n-1})^2 g(\alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

Dès lors, d'après (8), $f(\alpha_n) \in p^{2n} \mathbb{Z}_p$ et comme $n \geq 1$, on a :

$$(9) \quad f(\alpha_n) \in p^{n+1} \mathbb{Z}_p.$$

En outre, comme $n \geq 1$, d'après (8) et le lemme 3.6, il vient :

$$f'(\alpha_n) - f'(\alpha_{n-1}) \in p\mathbb{Z}_p.$$

Par conséquent, comme $f'(\alpha_{n-1}) \notin p\mathbb{Z}_p$, on en déduit que l'on a :

$$(10) \quad f'(\alpha_n) \notin p\mathbb{Z}_p.$$

Finalement, d'après (8), (9) et (10), le α_n construit convient.

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, d'après le point iii. de la proposition 1.21, on a :

$$(11) \quad |\alpha_{n+m} - \alpha_n|_p \leq \max_{k \in \llbracket 1, m \rrbracket} |\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k-1}|_p.$$

Or, par construction de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, quel que soit $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a :

$$|\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k-1}|_p \leq p^{-(n+k)}.$$

Dès lors, d'après (11), on en déduit que l'on a :

$$|\alpha_{n+m} - \alpha_n|_p \leq p^{-n}.$$

Par conséquent, on a montré que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisait à :

$$\forall n \in \mathbb{N}^2, \sup_{m \in \mathbb{N}} |\alpha_{n+m} - \alpha_n|_p \leq p^{-n}.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} |\alpha_{n+m} - \alpha_n|_p = 0$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

D'après la proposition 1.29, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, disons vers $\alpha \in \mathbb{Z}_p$.

Par construction de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et d'après la remarque 1.17, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(\alpha_n)|_p \leq p^{-n}.$$

Dès lors, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\alpha_n) = 0.$$

Comme f est continue en $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$, on en déduit que l'on a :

$$(12) \quad f(\alpha) = 0.$$

En outre, par construction de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et d'après la remarque 1.17, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n - \alpha_0|_p \leq p^{-1}.$$

Dès lors, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n - \alpha_0|_p \leq p^{-1}.$$

$|\cdot|_p$ étant continue (1-lipschitzienne) en $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$, on en déduit que $|\alpha - \alpha_0|_p \leq p^{-1}$ et d'après la remarque 1.17, il vient :

$$(13) \quad \alpha - \alpha_0 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Finalement, d'après (12) et (13), le α construit convient.

- **Unicité.** On suppose qu'il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_p^2$ tel que :

$$\forall i \in \{1, 2\}, f(\alpha_i) = 0 \text{ et } \alpha_i - \alpha_0 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Par conséquent, d'après (7) appliqué en $(x, y) = (\alpha_1, \alpha_2)$, on a :

$$(14) \quad (\alpha_2 - \alpha_1)f'(\alpha_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)^2g(\alpha_1, \alpha_2) = 0.$$

Comme $\alpha_1 - \alpha_0 \in p\mathbb{Z}_p$, d'après le lemme 3.6, on a $f'(\alpha_1) - f'(\alpha_0) \in p\mathbb{Z}_p$. Dès lors, comme $f'(\alpha_0) \notin p\mathbb{Z}_p$, on en déduit que l'on a $f'(\alpha_1) \notin p\mathbb{Z}_p$ et d'après la proposition 1.7 et la remarque 1.8, il vient :

$$f'(\alpha_1) \in \mathbb{Z}_p^\times.$$

En particulier, d'après (14), on a :

$$\alpha_2 - \alpha_1 = -(\alpha_2 - \alpha_1)^2 g(\alpha_1, \alpha_2) f'(\alpha_1)^{-1}.$$

En prenant la norme p -adique de cette égalité, d'après le point ii. de la proposition 1.21 et la remarque 1.20, il vient :

$$(15) \quad |\alpha_2 - \alpha_1|_p \leq |\alpha_2 - \alpha_1|_p^2.$$

Or, comme $\alpha_2 - \alpha_1 \in p\mathbb{Z}_p$, d'après la remarque 1.17, on a :

$$(16) \quad |\alpha_2 - \alpha_1|_p < 1.$$

Finalement, d'après (15) et (16), $|\alpha_2 - \alpha_1|_p = 0$ et d'après le point i. de la proposition 1.21, il vient $\alpha_1 = \alpha_2$.

D'où le résultat annoncé. □

Théorème 3.8. (Cassels [3]) Soit K/\mathbb{Q} une extension finiment engendrée et soit S un sous-ensemble fini de K , il existe alors une infinité de nombres premiers p tel qu'il existe un plongement $\alpha : K \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ satisfaisant à :

$$\forall s \in S, \alpha(s) \in \mathbb{Z}_p.$$

Preuve. K/\mathbb{Q} admet une base de transcendance finie, notons la $\{x_1, \dots, x_m\}$. Dans le cas contraire, K ne serait pas finiment engendré sur \mathbb{Q} , contradiction. On introduit alors le corps suivant :

$$k := \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_m).$$

Par ailleurs, K/k est une extension séparable de degré fini ; en effet, k est de caractéristique zéro et l'extension K/k est algébrique et finiment engendrée. Par conséquent, d'après le théorème de l'élément primitif [13], il existe $y \in K$ algébrique sur k satisfaisant à :

$$(17) \quad K = k[y].$$

Dès lors, quel que soit $s \in S$, il existe $(U_s, V_s) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m, Y] \times \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ avec $V_s \neq 0$ tels que l'on ait l'égalité suivante :

$$(18) \quad s = \frac{U_s(x_1, \dots, x_m, y)}{V_s(x_1, \dots, x_m)}.$$

Quitte à multiplier le polynôme minimal de y dans K/k par le produit des dénominateurs de ses coefficients, on dispose d'un polynôme annulateur de y qui est irréductible sur k et à coefficients dans $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, notons le G . Notamment, il existe $H \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m, Y]$ satisfaisant à :

$$(19) \quad H(x_1, \dots, x_m, Y) = G(Y).$$

Soit $H_0 \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ le coefficient dominant de H en l'indéterminée Y . Comme G est irréductible sur k de caractéristique 0, on en déduit que G est

séparable, c'est-à-dire que son discriminant est non nul. Plus précisément, le discriminant de G est de la forme $\Delta(x_1, \dots, x_n)$, où $\Delta \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$. Ainsi, $\{V_s\}_{s \in S} \cup \{H_0, \Delta\}$ forme un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m] \setminus \{0\}$ et d'après le lemme 3.1, il existe $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$ tel que l'on ait :

$$(20) \quad H_0(a_1, \dots, a_m) \neq 0,$$

$$(21) \quad \Delta(a_1, \dots, a_m) \neq 0,$$

$$(22) \quad \forall s \in S, V_s(a_1, \dots, a_m) \neq 0.$$

Comme G est irréductible sur k , on déduit de l'égalité (19) que H est de degré au moins égal à 1 en l'indéterminée Y . Ainsi, d'après (20), $H(a_1, \dots, a_m, Y)$ est non constant et d'après la proposition 3.2, il existe une infinité de nombres premiers p tels que $H(a_1, \dots, a_m, Y)$ ait une racine modulo p . Or, d'après (21) et (22), les diviseurs premiers de $\Delta(a_1, \dots, a_m)$ et $V_s(a_1, \dots, a_m), s \in S$ sont en nombre fini. Dès lors, il existe un infinité de nombres premiers p tel que :

$$(23) \quad \exists b \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } H(a_1, \dots, a_m, b) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$(24) \quad \Delta(a_1, \dots, a_m) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

$$(25) \quad \forall s \in S, V_s(a_1, \dots, a_m) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Par ailleurs, d'après le corollaire 3.5, il existe $\{\mu_1, \dots, \mu_m\} \subseteq \mathbb{Q}_p$ un ensemble algébriquement indépendant sur \mathbb{Q} , quitte à multiplier chacun des $\mu_i, i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ par l'entier naturel p^n , où $n := \max_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} v_p(\mu_i) + 1$, on suppose que l'on a :

$$(26) \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \mu_i \in p\mathbb{Z}_p.$$

Quel que soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on définit l'élément de \mathbb{Z}_p suivant :

$$\xi_i := \mu_i + a_i.$$

Dès lors, par construction des $\xi_i, i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, d'après le lemme 3.6, il vient :

$$H(\xi_1, \dots, \xi_m, b) - H(a_1, \dots, a_m, b) \in p\mathbb{Z}_p,$$

$$\Delta(\xi_1, \dots, \xi_m) - \Delta(a_1, \dots, a_m) \in p\mathbb{Z}_p.$$

Par conséquent, d'après (23) et (24), on en déduit que l'on a :

$$(27) \quad H(\xi_1, \dots, \xi_m, b) \in p\mathbb{Z}_p,$$

$$(28) \quad \Delta(\xi_1, \dots, \xi_m) \notin p\mathbb{Z}_p.$$

Par construction, $\Delta(\xi_1, \dots, \xi_m)$ est le discriminant de $H(\xi_1, \dots, \xi_m, Y)$ et avec (24), on en déduit que les racines de $H(\xi_1, \dots, \xi_m, Y)$ modulo $p\mathbb{Z}_p$ sont simples. En particulier, d'après (27), il vient :

$$(29) \quad H'(\xi_1, \dots, \xi_m, b) \notin p\mathbb{Z}_p.$$

Ainsi, d'après (27), (29) et la proposition 3.7, il existe $z \in \mathbb{Z}_p$ satisfaisant à :

$$H(\xi_1, \dots, \xi_m, z) = 0.$$

Supposons par l'absurde que $\{\xi_1, \dots, \xi_m\} \subseteq \mathbb{Q}_p$ ne soit pas algébriquement indépendant sur \mathbb{Q} , alors il existe $P \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_m] \setminus \{0\}$ tel que l'on ait :

$$P(\mu_1 + a_1, \dots, \mu_m + a_m) = 0.$$

Alors, comme les $a_i, i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ sont des entiers relatifs, le binôme de Newton appliqué à $P(\mu_1 + a_1, \dots, \mu_m + a_m)$ fournit $Q \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_m] \setminus \{0\}$ tel que :

$$Q(\mu_1, \dots, \mu_m) = 0,$$

ce qui contredit l'indépendance algébrique de l'ensemble $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ sur \mathbb{Q} . Dès lors, nous sommes en mesure de définir le morphisme d'anneaux suivant :

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_m)[y] & \rightarrow & \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_m)[z] \\ x_i & \mapsto & \xi_i \\ y & \mapsto & z \end{cases} .$$

Comme on a $\mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_m)[z] \subseteq \mathbb{Q}_p$, α réalise un plongement de K dans \mathbb{Q}_p . En outre, d'après la remarque 1.20, on a :

$$(30) \quad \forall s \in S, |U_s(\xi_1, \dots, \xi_m, z)|_p \leq 1.$$

De plus, d'après le lemme 3.6, on a :

$$\forall s \in S, V_s(\xi_1, \dots, \xi_m) - V_s(a_1, \dots, a_m) \in p\mathbb{Z}_p.$$

Dès lors, d'après (25), on en déduit que l'on a :

$$\forall s \in S, V_s(\xi_1, \dots, x_m) \notin p\mathbb{Z}_p$$

Ainsi, d'après la remarque 1.17, il vient :

$$(31) \quad \forall s \in S, |V_s(\xi_1, \dots, \xi_m)|_p = 1.$$

Finalement, d'après (18), (30) et (31), on a :

$$\forall s \in S, \alpha(s) \in \mathbb{Z}_p.$$

D'où le résultat annoncé. □

3.2. Le cas des automorphismes linéaires.

Lemme 3.9. Soit p premier, les anneaux $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Z}/(p)$ sont isomorphes.

Preuve. L'application suivante est un morphisme d'anneaux :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z}_p & \rightarrow & \mathbb{Z}/(p) \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} & \rightarrow & x_1 \end{cases} .$$

Soient $x \in \mathbb{Z}/(p)$ et $\bar{x} \in \mathbb{Z}$ satisfaisant à $x = \bar{x} \pmod{p}$, alors on a :

$$\varphi(i(\bar{x})) = x.$$

Ainsi, φ est surjectif. Or, d'après la proposition 1.7 et la remarque 1.8, on a :

$$\ker(\varphi) = p\mathbb{Z}_p.$$

Par conséquent d'après le théorème de factorisation, il vient :

$$\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/(p).$$

D'où le résultat annoncé. □

Remarque 3.10. D'après le lemme 3.9, $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ est un corps.

Corollaire 3.11. Soient p un nombre premier et d un entier naturel non nul, alors tout élément de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p)$ est d'ordre fini.

Preuve. D'après le lemme 3.9, $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ est fini, ainsi $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p)$ est aussi fini. D'où le résultat annoncé. \square

Remarque 3.12. L'ordre d'un élément de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p)$ divise

$$\#\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p) = \prod_{i=0}^{d-1} (p^d - p^i).$$

Théorème 3.13. (Skolem [15], Mahler [11], Lech [10]) Soient k un corps de caractéristique 0 et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire sur k , alors l'ensemble :

$$\{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } u_n = 0\}$$

est union d'un ensemble fini et d'un nombre fini de progressions arithmétiques.

Preuve. Il existe $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et a_0, \dots, a_{d-1} dans k avec $a_0 \neq 0_k$ tels que :

$$(32) \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+d} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u_{n+i}.$$

Soit K l'extension de \mathbb{Q} engendrée par u_0, \dots, u_{d-1} et a_0, \dots, a_{d-1} , d'après le théorème 3.8, il existe $p \geq 3$ premier et un plongement $\alpha : K \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ tels que :

$$\alpha(u_0), \dots, \alpha(u_{d-1}), \alpha(a_0), \alpha(a_0)^{-1}, \alpha(a_1), \dots, \alpha(a_{d-1}) \in \mathbb{Z}_p.$$

Par conséquent, en pensant à α comme à une inclusion, nous sommes en mesure de supposer que $a_0, a_0^{-1}, a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{Z}_p$ et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de \mathbb{Z}_p . On note A la matrice compagnon associée aux a_0, \dots, a_{d-1} et on introduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n := \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+d-1} \end{pmatrix}.$$

À l'aide de (32), on montre par récurrence que l'on a :

$$(33) \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = A^n v_0.$$

Soit f l'élément de $\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d$ obtenu par multiplication à droite de A par le vecteur colonne constitué des X_1, \dots, X_d . Ainsi, d'après (33) il vient :

$$(34) \quad v_n = f^n(v_0).$$

En développant le déterminant de A par rapport à sa première colonne, on a :

$$(35) \quad \det(A) = (-1)^{d+1} a_0.$$

On note \bar{A} la matrice obtenue en réduisant modulo $p\mathbb{Z}_p$ les coefficients de A . De cette manière, d'après (35), il vient :

$$(36) \quad \det(\bar{A}) = (-1)^{d+1} a_0 \pmod{p\mathbb{Z}_p}.$$

Or, comme $a_0 \in \mathbb{Z}_p^\times$, d'après la proposition 1.7 et la remarque 1.8, on a :

$$(37) \quad a_0 \pmod{p\mathbb{Z}_p} \neq 0.$$

Ainsi, d'après (36), (37) et la remarque 3.10, on en déduit que l'on a :

$$\overline{A} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p).$$

Dès lors, en notant I_d l'élément neutre de $\mathcal{M}_d(\mathbb{Z}_p)$, d'après le corollaire 3.11, il existe $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ tel que l'on ait l'égalité suivante dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p)$:

$$(\overline{A})^m = \overline{I}_d.$$

En d'autres termes, il existe $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{Z}_p)$ satisfaisant à l'égalité suivante :

$$(38) \quad A^m = I_d + pB.$$

Soit $I := (X_1, \dots, X_d)$, en multipliant (38) par le vecteur colonne constitué des X_1, \dots, X_d , on obtient l'existence de $h \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d$ tel que :

$$f^m = I + ph.$$

Autrement dit, on a $f^m - I \in p\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]^d$ et d'après le théorème 2.13, quel que soit $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, il existe $g_i \in \mathbb{Q}_p[[X]]^d$ qui converge en chaque point de \mathbb{Z}_p et satisfaisant à la relation suivante :

$$(39) \quad \forall n \in \mathbb{N}, g_i(n) = f^{mn}(v_i).$$

Par conséquent, d'après (34) et (39), il vient :

$$(40) \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{mn+i} = g_i(n).$$

Cependant, d'après le théorème 1.37, quel que soit $(i, j) \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket \times \llbracket 1, d \rrbracket$, on a la dichotomie suivante :

- La $j^{\text{ème}}$ composante de g_i est nulle, ce qui avec (40) implique que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{mn+i+j-1} = 0.$$

- La $j^{\text{ème}}$ composante de g_i ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans \mathbb{Z}_p , ce qui avec (40) implique que l'on a :

$$\#\{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } u_{mn+i+j-1} = 0\} < \infty.$$

$\{mn + i + j - 1; n \in \mathbb{N}\}_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, j \in \llbracket 1, d \rrbracket}$ recouvrant \mathbb{N} , on a le résultat annoncé. □

Compte tenu de la discussion faite lors de l'introduction, nous venons également d'établir le théorème suivant :

Théorème 3.14. Soient k un corps de caractéristique zéro, $x \in k^d$ et σ un automorphisme linéaire de k^d . Si H est un hyperplan de k^d , alors l'ensemble :

$$\{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \sigma^n(x) \in H\}$$

est union d'un ensemble fini et d'un nombre fini de progressions arithmétiques.

3.3. Le cas des automorphismes polynomiaux affines.

Définition 3.15. Soit X un sous-ensemble de k^d , X est une sous-variété de \mathbb{A}_k^d si et seulement s'il existe $P_1, \dots, P_m \in k[X_1, \dots, X_d]$ tels que l'on ait :

$$X := \{(x_1, \dots, x_d) \in k^d \text{ t.q. } \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, P_i(x_1, \dots, x_d) = 0\}.$$

Remarque 3.16. Autrement dit, une sous-variété de \mathbb{A}_k^d est l'ensemble des zéros communs sur k d'un ensemble fini de polynômes à d variables.

Théorème 3.17. (Bell [1]) Soient k un corps de caractéristique zéro, $x \in \mathbb{A}_k^d$ et σ un automorphisme de \mathbb{A}_k^d . Si X est une sous-variété de \mathbb{A}_k^d , alors l'ensemble :

$$\{m \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } \sigma^m(x) \in X\}$$

est union d'un ensemble fini et d'un nombre fini de progressions arithmétiques.

Soient x_1, \dots, x_d les coordonnées de x dans k et f_1, \dots, f_d , respectivement g_1, \dots, g_d , les coordonnées de σ , respectivement de σ^{-1} , dans $k[X_1, \dots, X_d]$. Par ailleurs, il existe P_1, \dots, P_m dans $k[X_1, \dots, X_d]$ tels que X soit l'ensemble des zéros communs dans k de P_1, \dots, P_m . On pose alors S l'ensemble constitué des x_1, \dots, x_d et des coefficients dans k de $f_1, \dots, f_d, g_1, \dots, g_d, P_1, \dots, P_m$. Dès lors, en notant K le corps engendré par S sur \mathbb{Q} , d'après le théorème 3.8, il existe un nombre premier $p \geq 3$ et un plongement $\alpha : K \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ tels que :

$$\forall s \in S, \alpha(s) \in \mathbb{Z}_p.$$

Par conséquent, en pensant à α comme à une inclusion, nous sommes en mesure de supposer que $x \in \mathbb{A}_{\mathbb{Z}_p}^d$, que σ est un automorphisme de $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}_p}^d$ et que X est définie par des polynômes à coefficients dans \mathbb{Z}_p . Finalement, pour établir complètement le théorème 3.17, il resterait à montrer que le théorème 2.13 s'applique à une itérée de σ et l'on conclurait en utilisant le théorème 1.37.

ANNEXE A. BASE DE TRANSCENDANCE D'UNE EXTENSION DE CORPS

Soit L/K une extension de corps.

Définition A.1. Soit S un sous-ensemble de L , S est algébriquement indépendant sur K si et seulement si pour toute partie finie $\{x_1, \dots, x_n\}$ de S , on a :

$$\forall P \in K[X_1, \dots, X_n], P(x_1, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow P = 0.$$

Définition A.2. Soit S un sous-ensemble de L , S est une base de transcendance de L/K si et seulement si S satisfait aux propriétés suivantes :

- i. S est algébriquement indépendant sur K .
- ii. L est algébrique sur $K(S)$.

Proposition A.3. Soit S un sous-ensemble de L , alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- i. S est une base de transcendance de L/K .
- ii. S est algébriquement indépendant sur K et maximal pour cette propriété, ainsi pour tout $x \in L$, $S \cup \{x\}$ est algébriquement dépendant sur K .

Preuve. On procède par double implication.

- Supposons que S soit une base de transcendance de L/K , alors S est algébriquement indépendant sur K . Par ailleurs, si $x \in L$, comme L est algébrique sur $K(S)$, il existe $F \in K(S)[X] \setminus \{0\}$ tel que l'on ait :

$$F(x) = 0.$$

F ayant un nombre fini de coefficients dans $K(S)$ et les éléments de $K(S)$ étant des fractions rationnelles en un nombre fini d'éléments de S , il existe $x_1, \dots, x_n \in S$ tels que $F \in K(x_1, \dots, x_n)[X] \setminus \{0\}$. Ainsi, en multipliant F par le produit des dénominateurs de ses coefficients, on obtient $P \in K[x_1, \dots, x_n][X] \setminus \{0\}$ satisfaisant à :

$$P(x) = 0.$$

En d'autres termes, il existe $\tilde{P} \in K[X_1, \dots, X_{n+1}] \setminus \{0\}$ tel que l'on ait :

$$\tilde{P}(x_1, \dots, x_n, x) = 0.$$

Dès lors, $S \cup \{x\}$ est algébriquement dépendant sur K . Finalement, S est algébriquement indépendant sur K et est maximal pour cette propriété.

- Supposons que S soit algébriquement indépendant sur K et maximal pour cette propriété, supposons par l'absurde que L ne soit pas algébrique sur $K(S)$, il existe alors $x \in L$ transcendant sur $K(S)$, on obtiendra une contradiction en montrant que $S \cup \{x\}$ est algébriquement indépendant. Pour ce faire, comme S est algébriquement indépendant sur K , il suffit de montrer que pour tout $x_1, \dots, x_n \in S$, $\{x_1, \dots, x_n, x\}$ est algébriquement indépendant sur K . Or, puisque x est transcendant sur $K(S)$, il vient :

$$\forall P \in K(S)[X], P(x) \Rightarrow P = 0.$$

En particulier, on en déduit que pour tous $x_1, \dots, x_n \in S$, on a :

$$\forall P \in K[X_1, \dots, X_n, X], P(x_1, \dots, x_n, x) = 0 \Rightarrow P = 0.$$

Ainsi, $S \cup \{x\}$ est algébriquement indépendant sur K , ce qui contredit la maximalité de S . Finalement, S est une base de transcendance de L/K .

D'où le résultat annoncé. □

Lemme A.4. Soient I un ensemble de parties de L et $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \bigcup_{S \in I} S$. Si (I, \subseteq) est totalement ordonné, alors il existe $S \in I$ contenant $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Preuve. On procède par récurrence sur n .

- **Initialisation.** Si $n = 1$, $x_1 \in \bigcup_{S \in I} S$ et il existe $S \in I$ contenant x_1 .
- **Hérédité.** Soit $n \geq 2$, on suppose qu'il existe $S_{n-1} \in I$ tel que l'on ait :

$$\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \subseteq S_{n-1}.$$

Par ailleurs, d'après l'étape d'initialisation, il existe $S_n \in I$ contenant x_n . Or, (I, \subseteq) étant totalement ordonné, on suppose sans perte de généralité que S_{n-1} est contenu dans S_n , si bien que S_n contient $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Finalement, on a $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S_n$.

D'où le résultat annoncé. □

Proposition A.5. Il existe au moins une base de transcendance de L/K .

Preuve. Soit E l'ensemble des parties algébriquement indépendantes de L/K . On commence par constater que l'ensemble E est non vide, en effet, $\emptyset \in E$. Soit I une partie de E totalement ordonnée pour l'inclusion, alors $\bigcup_{S \in I} S \in E$.

En effet, sinon il existerait $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \bigcup_{S \in I} S$ et $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ non nul satisfaisant à l'égalité suivante :

$$P(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

D'après le lemme A.4, il existerait alors $S \in I \subseteq E$ tel que l'on ait :

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S.$$

Dès lors, S serait algébriquement dépendant sur K et $S \notin E$, ce qui n'est pas. Par conséquent, d'après le lemme de Zorn [4], E contient un élément maximal. Finalement, d'après la proposition A.3, L/K admet une base de transcendance. D'où le résultat annoncé. □

Remarque A.6. On pourrait montrer que toutes les bases de transcendance de L/K ont même cardinal [9], on l'appelle le degré de transcendance de L/K .

RÉFÉRENCES

- [1] J.P. Bell. A generalised Skolem-Mahler-Lech theorem for affine varieties. *Journal of the London Mathematical Society*, 73 :367–379, 2006.
- [2] Z.I. Borevitch et I.R. Chafarevitch. *Number Theory*, pages 18–32. Academic Press, 1966.
- [3] J.W.S. Cassels. An embedding theorem for fields. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 14 :193–198, 1976.
- [4] K. Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician*, pages 53–54. London Mathematical Society, 1997.
- [5] H. Derksen. A Skolem-Mahler-Lech theorem in positive characteristic and finite automata. *Inventiones Mathematicae*, 168 :175–224, 2007.
- [6] X. Gourdon. *Les maths en tête, Algèbre*, pages 279–281. Ellipses, 2009.
- [7] K. Hensel. Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 6 :83–88, 1897.
- [8] S. Katok. *p -adic Analysis Compared with Real*, pages 53–60, 75–86 et 98–102. American Mathematical Society, 2007.
- [9] S. Lang. *Algebra*, pages 355–356. Springer, 2002.
- [10] C. Lech. A note on recurring series. *Arkiv för Matematik*, 2 :417–421, 1954.
- [11] K. Mahler. Eine arithmetische Eigenschaft der Taylor-koeffizienten rationaler Funktionen. *Akademie van Wetenschappen Amsterdam*, 38 :50–60, 1935.
- [12] B. Poonen. p -adic interpolation of iterates. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 46 :525–527, 2014.
- [13] P. Samuel. *Théorie algébrique des nombres*, pages 39–41. Hermann, 1967.
- [14] J.-P. Serre. *Cours d'arithmétique*, pages 23–30. PUF, 1995.
- [15] T. Skolem. Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf diophantische Gleichungen. *Skifter Norske Vitenskapsakademiet Oslo*, 6 :1–61, 1933.
- [16] R. Strassmann. Über den Wertevorrat von Potenzreihen im Gebiet der p -adischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 159 :13–28, 1928.

ANNEXE E. MON MÉMOIRE DE M2 ENSEIGNEMENT

Les pages suivantes constituent mon mémoire de M2 Enseignement.

Le résultat principal de ce document est le suivant :

Théorème. Deux immersions du cercle dans \mathbb{R}^2 sont régulièrement homotopes si, et seulement, si elles ont le même indice.

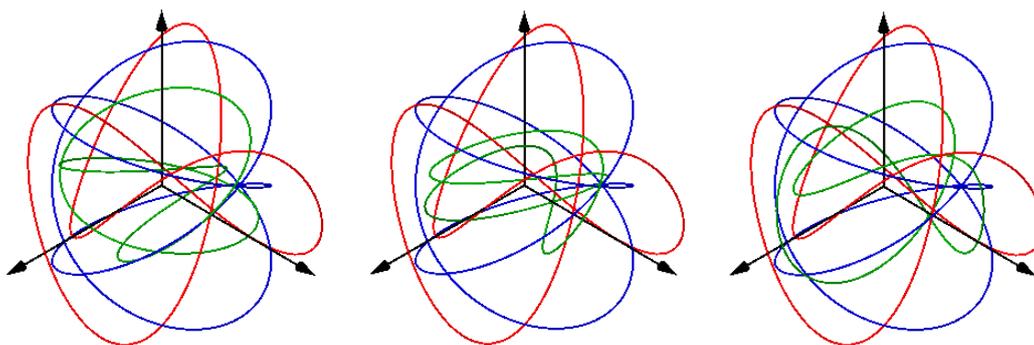
Je m'intéressais déjà à des problèmes proches de la théorie des nœuds.

TRAVAIL ENCADRÉ DE RECHERCHE
Préparation de l'agrégation

**SUR LA CLASSIFICATION DES IMMERSIONS DU CERCLE
DANS LES ESPACES EUCLIDIENS**

Cyril FALCON

RÉSUMÉ. Pour $n \geq 1$, on dégage des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux immersions de S^1 dans \mathbb{R}^n soient régulièrement homotopes. Géométriquement, il s'agit de classifier à déformation régulière près les courbes lisses fermées de \mathbb{R}^n . Les méthodes employées sont à l'origine de l'intégration convexe et du principe homotopique.



Sous la direction de : Anne VAUGON

À la mémoire de Marcel BERGER,

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	6
Introduction et motivations	7
Notations et conventions	10
1. Les immersions unidimensionnelles du cercle	11
2. Les immersions bidimensionnelles du cercle	12
2.1. Une première manifestation d'un h -principe 1-paramétrique ...	12
2.2. Les composantes connexes par arcs de $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$	18
2.3. Le théorème de Whitney-Grauert	19
3. Les immersions du cercle dans les dimensions supérieures	24
Annexe A. Sur les paramétrages normaux d'un arc régulier	29
A.1. Longueur et abscisses curvilignes d'un arc régulier	29
A.2. Paramétrages normaux d'un arc régulier	30
Annexe B. Petit glossaire des variétés différentielles	32
B.1. Notions de cartes, atlas et variétés	32
B.2. Sur les espaces tangents d'une variété différentielle	34
B.3. Applications différentiables entre variétés différentielles	37
Annexe C. La genericité dans les variétés différentiables	40
C.1. Ensembles négligeables d'une variété différentiable	40
C.2. Valeurs régulières, critiques et théorème de Sard	43
Annexe D. Un peu de topologie algébrique élémentaire	44
D.1. Homotopies d'applications continues	44
D.2. Ensembles d'homotopie, applications induites et revêtements .	47
D.3. Degré d'une application continue du cercle dans le cercle	51
Références	55

REMERCIEMENTS

Je souhaite en tout premier lieu remercier chaleureusement Anne VAUGON, ainsi que lui témoigner mon entière reconnaissance pour avoir accepté de superviser mon stage recherche. Je salue tout particulièrement la qualité de son encadrement : ses remarques et ses conseils se sont toujours avérés être véritablement éclairants et d'une réelle pertinence, notamment lorsque je me trouvais dans l'impasse.

En outre, je lui exprime ma profonde gratitude pour m'avoir laissé une liberté totale dans l'élaboration de ce mémoire ; j'avais tout le loisir d'explorer le sujet proposé comme bon me semblait. J'ose espérer qu'il s'agisse de la manifestation d'une certaine confiance qui m'a été accordée.

Enfin, il me semble indispensable de vanter ses qualités humaines. Je pense particulièrement à son extrême gentillesse et surtout à la grande étendue de sa patience. Mon enthousiasme pour la géométrie m'a bien souvent amené à lui poser de trop nombreuses questions et ce dans des moments parfois inadaptés.

En bref, c'était un authentique plaisir et une expérience incontestablement enrichissante de travailler sous sa direction.

Je tiens également à remercier vivement Julien DUVAL de m'avoir aimablement reçu afin que nous discutions du cas tridimensionnel du théorème 3.1. Malheureusement, ses explications limpides ne transparaisent pas exactement comme je l'aurais voulu dans mon texte. Cependant, j'insiste, notre échange m'a sans nul doute été profitable.

J'accorde ensuite toute ma reconnaissance à Michael HARRISON, ses indications pour traiter les cas pathologiques de la proposition 2.5 se sont révélées être essentielles pour l'écriture d'une preuve complète et efficace.

J'apprécie aussi grandement qu'il m'ait conseillé l'excellent [6].

J'exprime d'ailleurs toute ma sympathie à Guillaume MATHERON pour s'être procuré [6] à la bibliothèque de l'École Normale Supérieure de Paris, sans cet ouvrage ma compréhension du h -principe ne serait pas la même.

Enfin, je désire les remercier amicalement pour leur présence à ma soutenance de stage, il s'agit de : Gédéon CHEVALLIER, Marguerite FLAMMARION, Florian GRANGER, Elio JOSEPH et Alexandre LARTAUX.

Je ne pouvais pas clôturer ces remerciements sans rendre un dernier hommage à Marcel BERGER qui nous a tristement quittés en octobre 2016.

Il m'est cher de témoigner ici de l'ampleur de l'admiration que je lui voue. Chacun de ses livres a contribué à développer chez moi une véritable intuition, notamment à travers leurs nombreuses et éclairantes illustrations.

J'estime qu'à travers ses écrits, il aura nettement influencé ma conception de la géométrie et j'espère sincèrement que mon mémoire saura en être digne.

INTRODUCTION ET MOTIVATIONS

Lorsque l'on souhaite englober dans sa plus grande généralité la notion de *forme géométrique lisse*, ainsi qu'appréhender leurs *déformations régulières*, alors les *variétés différentielles* s'imposent naturellement comme objet d'étude. Il s'agit de la juste généralisation aux dimensions supérieures de l'intuition que l'on se forge des *courbes* et *surfaces* d'un espace affine tridimensionnel.

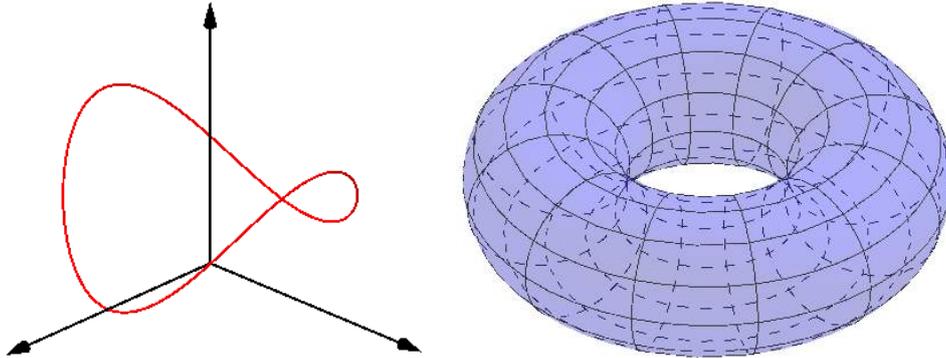


FIGURE 1. Un exemple de courbe et un exemple de surface.

Néanmoins, par opposition aux *sous-variétés différentielles*, leur description est intrinsèque, ce qui signifie qu'elles ne sont pas naturellement ambiancées. C'est l'affranchissement de tout espace environnant qui confère aux variétés différentielles une généralité vertigineuse et qui nous permet de modéliser les problèmes géométriques avec une grande flexibilité. Cependant, les variétés différentielles les plus raisonnables peuvent être réalisées dans les espaces affines comportant suffisamment de dimensions, c'est précisément ce qu'exprime le :

Théorème 1. (Whitney [13]) Soit M une variété différentielle de dimension m . Si M est dénombrable à l'infini, alors M peut être plongée dans \mathbb{R}^{2m+1} .

Si M est supposée compacte, la preuve du théorème 1 consiste essentiellement à construire une *partition de l'unité* adéquate à partir d'un *atlas* fini de M . En combinant astucieusement cette partition de l'unité avec les *cartes* de M , on exhibe un *plongement* de M dans \mathbb{R}^N , pour un N que l'on ne contrôle pas. Il s'agit désormais de diminuer N en postcomposant successivement le plongement obtenu avant par des projections orthogonales adaptées, on consultera [9]. Notons prématurément que l'on retrouvera des germes de cette dernière idée dans la preuve du théorème 3.1 de notre dossier.

L'idée de la preuve du théorème 1 que nous avons détaillée ci-dessus nous permet d'anticiper que les plongements d'une variété différentielle compacte dans un \mathbb{R}^N pour un N assez grand peuvent être véritablement abondants. Géométriquement, cela signifie que les réalisations de M sont hautement non-canoniques et *a priori* rien n'empêche qu'elles soient radicalement différentes. D'ailleurs, la richesse et la complexité de la théorie des nœuds qui consiste en l'étude des plongements du cercle unité dans \mathbb{R}^3 en témoignera, voir [2].

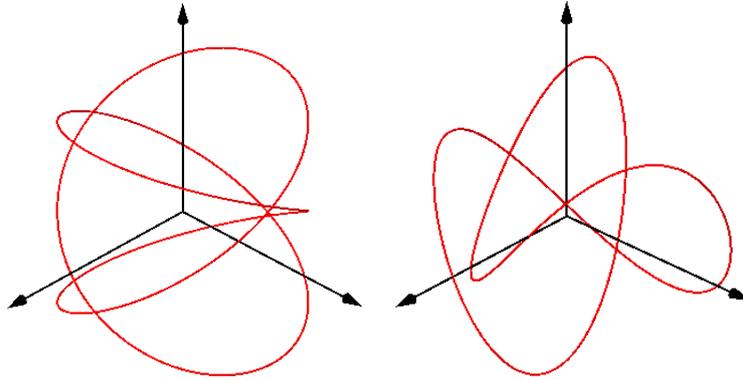


FIGURE 2. Une réalisation du nœud en huit et du nœud en trèfle.

Dans la pratique, il n'est pas vraiment commode de vérifier qu'une application donnée entre variétés différentielles réalise un plongement et ce même lorsque les variétés en question sont vraiment agréables, e.g. compactes et connexes. La principale difficulté provient du fait que l'on est systématiquement amené à tester l'injectivité de l'application donnée, ce qui n'est pas aisément manipulable. On relaxe alors la condition d'injectivité que l'on a imposé aux plongements en s'autorisant désormais les auto-intersections dans les représentations des variétés différentielles, voir la figure 3. En termes mathématiques, il s'agit de comprendre leurs *immersions* dans les espaces euclidiens \mathbb{R}^N .

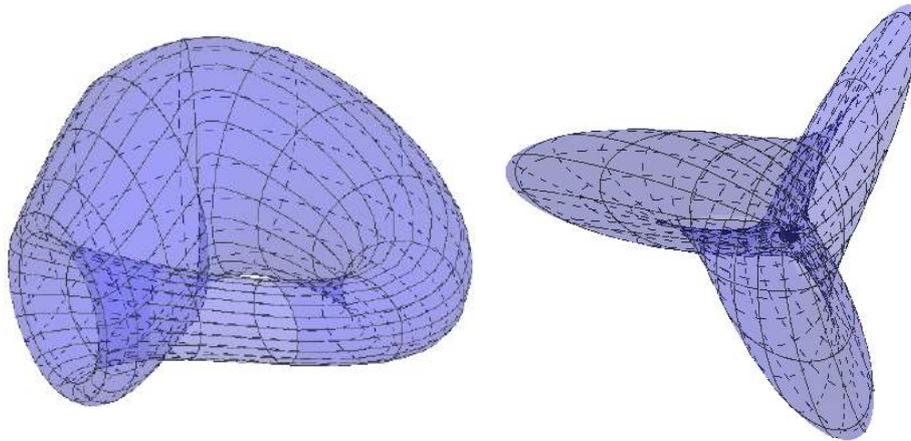


FIGURE 3. Immersions tridimensionnelles de la bouteille de Klein et du plan projectif réel (surface de Boy).

Suite à la discussion qu'a amené l'esquisse de la preuve du théorème 1, on ne sera pas vraiment surpris par le :

Théorème 2. Soit M une variété différentielle compacte de dimension m . Si $n \geq 2m$, alors les immersions de M dans \mathbb{R}^n sont denses dans $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ pour la topologie compacte-ouverte.

Le lecteur intéressé par une preuve complète du théorème 2 consultera [8].

Le théorème 2 peut être perçu comme une incitation à la classification des immersions des variétés différentielles compactes dans les espaces \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{N}$. Étant donné deux telles immersions, il s'agit de dégager une condition pertinente qui sera satisfaite si et seulement si les immersions en question peuvent être considérées comme identiques. On adopte le critère suivant :

Définition 3. Soient M et N deux variétés différentielles. Soient $f: M \rightarrow N$ et $g: M \rightarrow N$ deux immersions, alors f et g sont *régulièrement homotopes*¹ si et seulement s'il existe une application $F: M \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} N$ satisfaisant :

$$F(\cdot, 0) = f, F(\cdot, 1) = g$$

et telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $F(\cdot, t)$ soit une immersion.

Géométriquement, f et g sont régulièrement homotopes si et seulement si on peut continuellement déformer dans N le *support* de f , c'est-à-dire $f(M) \subseteq N$, sur celui de g , c'est-à-dire $g(M) \subseteq N$, et ce de sorte à ce que chaque état transitoire de la transformation soit encore un objet *régulier*.

Dans le présent rapport, on s'intéressera seulement aux cas où M est une variété différentielle compacte et connexe de dimension 1 et $N = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. On trouvera dans [9] une preuve du théorème de classification suivant :

Théorème 4. Soit M une variété différentielle compacte et connexe de dimension 1, alors M est difféomorphe au cercle \mathbb{S}^1 .

Il s'agit alors de déterminer les classes d'homotopies régulières de l'ensemble des immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^n . Les méthodes employées sont à l'origine de l'intégration convexe et du principe homotopique.

Notre volonté ayant été de rédiger un dossier pouvant être lu indépendamment de tout autre manuscrit, le lecteur trouvera l'ensemble des notions nécessaires à sa compréhension dans les annexes. Nous avons pris la décision d'y adopter un point de vue généralement plus vaste que celui imposé par notre étude. On pourrait ainsi adopter nos résultats à la classification des immersions des variétés compactes connexes de dimensions supérieures.

1. Si M est localement compacte, il est équivalent de demander qu'il existe un chemin d'immersions de M dans N qui relie f à g .

NOTATIONS ET CONVENTIONS

Ce dossier est consacré à la classification des courbes fermées de \mathbb{R}^n qui en chaque point admettent un vecteur vitesse non nul, elles sont dites *régulières*.

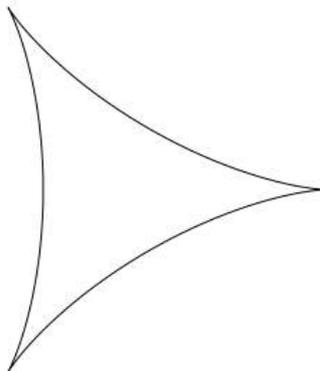


FIGURE 4. Une deltoïde n'est pas une courbe régulière.

Plus précisément, on dégage des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux telles courbes puissent être continument déformées l'une sur l'autre et cela en imposant à ce qu'au cours de la déformation le vecteur vitesse ne dégénère pas, c'est-à-dire qu'en chaque point il doit rester défini et non nul. Cette dernière contrainte signifie que la transformation ne doit pas faire apparaître d'angles et d'arêtes. Formellement, le problème consiste à décrire les composantes connexes par arcs de l'ensemble des immersions du cercle dans \mathbb{R}^n .

Dans toute la suite, \mathbb{R}^n est muni de la norme euclidienne standard notée $\|\cdot\|$ et on identifie indifféremment le cercle unité \mathbb{S}^1 de \mathbb{R}^2 avec l'un des quotients :

$$[0, 1]/\partial[0, 1] \text{ ou } \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Conformément aux identifications précédentes, on assimile $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ avec :

$$\{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n) \text{ t.q. } f(0) = f(1), f'(0) = f'(1)\}$$

ou encore avec l'ensemble des applications $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ qui sont 1-périodiques. De plus, comme \mathbb{S}^1 est compact, on munit $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ de la topologie de la convergence uniforme des applications, c'est-à-dire de la norme définie par :

$$f \mapsto \sup_{x \in \mathbb{S}^1} \|f(x)\|.$$

Similairement, $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme des applications et de leurs dérivées, c'est-à-dire de la norme définie par :

$$f \mapsto \sup_{x \in \mathbb{S}^1} \|f(x)\| + \sup_{x \in \mathbb{S}^1} \|f'(x)\|.$$

Finalement, on note $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des immersions du cercle dans \mathbb{R}^n , il s'agit de l'ensemble des $f \in C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ dont la dérivée ne s'annule pas. Il est naturellement muni de la topologie induite par celle de $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$.

1. LES IMMERSIONS UNIDIMENSIONNELLES DU CERCLE

Le théorème de Rolle assure que la dérivée d'une application $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ s'annule nécessairement, ce qui empêche l'existence d'immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R} , d'où :

Proposition 1.1. Il n'existe pas d'immersion de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R} .

Dans le même ordre de résultat, on rappelle que l'on a la :

Proposition 1.2. Il n'existe pas d'homéomorphisme de \mathbb{S}^1 sur un intervalle.

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe I un intervalle de \mathbb{R} et $\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow I$ un homéomorphisme, il existe $N \in \mathbb{S}^1$ tel que l'on ait :

$$(1) \quad \varphi(N) \notin \partial I.$$

En effet, φ étant un homéomorphisme son image est I qui est différent de ∂I . Dès lors, comme \mathbb{S}^1 est connexe, l'application g serait constante, contradiction. Par ailleurs, φ induit un homéomorphisme de $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ sur $I \setminus \{\varphi(N)\}$.

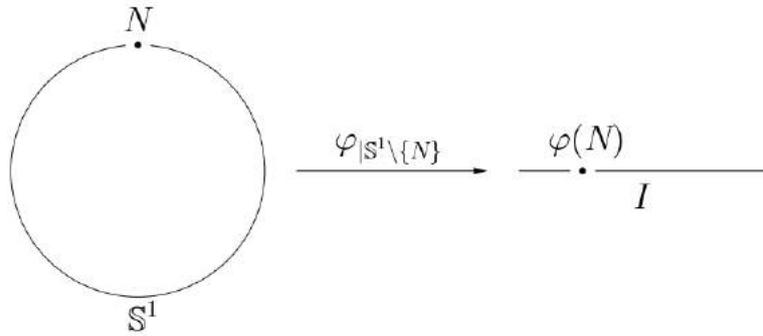


FIGURE 5. L'homéomorphisme induit par φ en restriction à $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$.

Or, la projection stéréographique de \mathbb{S}^1 de pôle N sur sa droite équatoriale réalise un homéomorphisme de $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ sur \mathbb{R} , ainsi $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ est connexe.

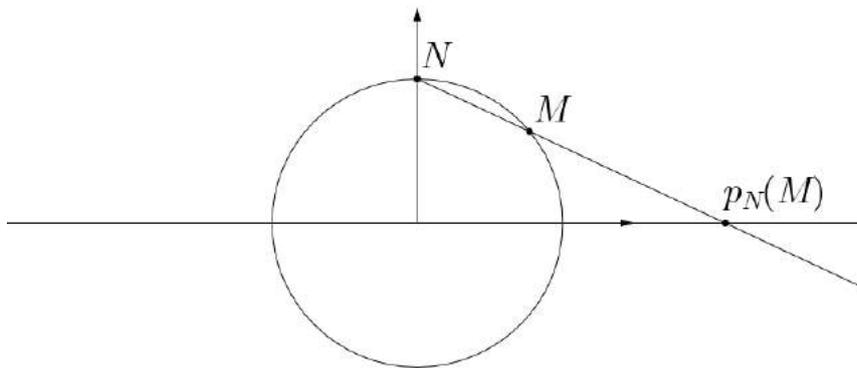


FIGURE 6. Construction de la projection stéréographique de \mathbb{S}^1 de pôle N sur sa droite équatoriale.

Finalement, on en déduit que $I \setminus \{\varphi(N)\}$ est connexe, ce qui contredit (1). D'où le résultat annoncé. ■

2. LES IMMERSIONS BIDIMENSIONNELLES DU CERCLE

Le cercle \mathbb{S}^1 étant naturellement plongé dans \mathbb{R}^2 , les immersions bidimensionnelles du cercle occupent une place centrale parmi les immersions du cercle, comme on le constatera en comparant les résultats des théorèmes 2.20 et 3.1.

2.1. Une première manifestation d'un h -principe 1-paramétrique.

On note X l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et on introduit l'application suivante :

$$J: \begin{cases} I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) & \rightarrow & C^0(\mathbb{S}^1, X) \\ f & \mapsto & f' \end{cases} .$$

On va s'attacher à montrer que l'application J induit une bijection sur les composantes connexes par arcs de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ et $C^0(\mathbb{S}^1, X)$.

Proposition 2.1. Soit $f \in C^0(\mathbb{S}^1, X)$, alors il existe $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ et une homotopie $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} X$ telles que $H(\cdot, 0) = f$ et $H(\cdot, 1) = J(g)$.

Preuve. Par homotopie radiale sur f , on va se ramener au cas où $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Plus précisément, on admet et on montrera dans la proposition 2.11 que les applications $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ et $f/\|f\|: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ sont homotopes dans $C^0(\mathbb{S}^1, X)$. Par conséquent, on suppose désormais sans perte de généralité que $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ et on distingue alors les deux cas suivants :

1. Supposons que f soit non constante, on montre alors que la valeur moyenne de f est à l'intérieur du disque unité $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$; pour ce faire, on introduit :

$$V := \int_0^1 f(u) du.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors :

$$(1) \quad |V| \leq \left(\int_0^1 \|1\|^2 du \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \|f(u)\|^2 du \right)^{1/2} = 1.$$

Il y a égalité si et seulement si la famille $(1, f)$ est liée dans l'espace $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$, autrement dit si et seulement si f est constante. Ainsi, par hypothèse, l'inégalité (1) est stricte, ce qui signifie que $V \in \overset{\circ}{\mathbb{D}}$. On introduit désormais l'application $g: [0, 1] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2$ définie par :

$$g(x) := \int_0^x f(u) du - xV.$$

On constate que $g(0) = g(1)$ et g induit alors une application de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2 . En outre, quel que soit $x \in [0, 1]$, on a :

$$(2) \quad g'(x) = f(x) - V.$$

Ainsi, comme f est à valeurs dans \mathbb{S}^1 et que $V \in \overset{\circ}{\mathbb{D}}$, la dérivée de g ne s'annule pas, d'où $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$. On introduit enfin l'homotopie suivante :

$$H: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow & X \\ (x, t) & \mapsto & f(x) - tV \end{cases} .$$

Soit $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, comme $f(x) \in \mathbb{S}^1$ et $tV \in \mathring{\mathbb{D}}$, car $V \in \mathring{\mathbb{D}}$, on a :

$$H(x, t) \neq 0.$$

En d'autres termes, H est correction définie, elle est de plus continue et elle vérifie également $H(\cdot, 0) = f$, ainsi que $H(\cdot, 1) = J(g)$, d'après l'égalité (2). Ce qui permet de clore ce cas de figure.

2. Supposons que f soit constante, alors on se ramène au cas 1 en montrant que f est homotope dans $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ à une application non constante. Pour ce faire, on introduit l'application $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ définie par :

$$H(x, t) := \begin{cases} \text{rot}(2\pi tx) \cdot f(0) & x \in [0, 1/2] \\ \text{rot}(2\pi t(1-x)) \cdot f(0) & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

où pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\text{rot}(\theta)$ désigne la rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle θ .

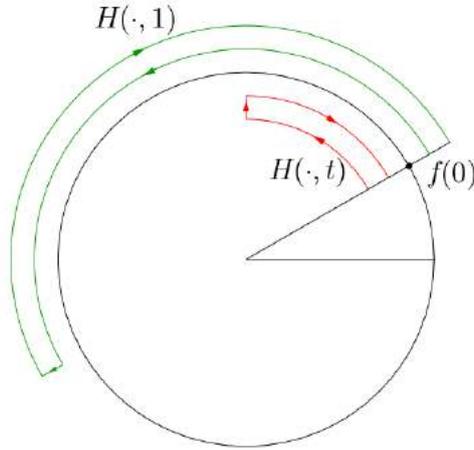


FIGURE 7. Représentation de l'homotopie H .

On rappelle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\text{rot}(\theta) \cdot (x, y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \cos(\theta)x + \sin(\theta)y).$$

En particulier, H est continue et quel que soit $t \in [0, 1]$, on a :

$$H(0, t) = H(1, t),$$

ce qui signifie que $H(\cdot, t)$ définit effectivement une application de $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$. En outre, puisque f est constante égale à $f(0)$, il vient :

$$H(\cdot, 0) = f.$$

Enfin, on constate que $H(\cdot, 1)$ est une application non constante de $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$. Finalement, d'après le cas 1, il existe $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ telle que $H(\cdot, 1)$ et $J(g)$ soient homotopes dans $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ et l'on en déduit que f et $J(g)$ sont homotopes dans $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$, ce qui permet de clore ce cas de figure.

D'où le résultat annoncé. ■

Corollaire 2.2. L'application induite par J sur les composantes connexes par arcs, $J_*: \pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) \rightarrow \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, X))$ réalise une surjection.

Afin de montrer que J_* est également une injection, on aura besoin du :

Lemme 2.3. Soient $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ et $\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un C^1 -difféomorphisme croissant, alors g et $g \circ \lambda$ sont homotopes dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$.

Preuve. On définit l'application $F: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, t) = g((1-t)x + t\lambda(x)).$$

Comme $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(1) = 1$, F est un chemin de g à $g \circ \lambda$ dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$. Remarquons que pour $t \in [0, 1]$, on a :

$$F(0, t) = g(0) = g(1) = F(1, t).$$

Par ailleurs, quel que soit $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, on a :

$$\frac{dF}{dx}(x, t) = ((1-t) + t\lambda'(x))g'((1-t)x + t\lambda(x)) \neq 0,$$

puisque $(1-t) + t\lambda'(x)$ est un point du segment d'extrémités 1 et $\lambda'(x) > 0$ et que l'application g' ne s'annule pas. D'où le résultat annoncé. ■

Remarque 2.4. Insistons sur le fait que le résultat du lemme 2.3 peut être mis en défaut si l'on considère des C^1 -difféomorphismes décroissants de $[0, 1]$. Pour un contre-exemple, il suffit de considérer $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ définie par :

$$g(x) := (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)),$$

ainsi que λ le C^1 -difféomorphisme décroissant de $[0, 1]$ défini par :

$$\lambda(x) := 1 - x.$$

On se réfère à l'exemple 2.23, où l'on prouve que g et $g \circ \lambda$ ne sont pas dans la même composante connexe par arcs de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$.

Proposition 2.5. Soient g_1 et g_2 dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ telles qu'il existe une homotopie $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} X$ satisfaisant $H(\cdot, 0) = J(g_1)$ et $H(\cdot, 1) = J(g_2)$, alors il existe une homotopie $F: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^2$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $F(\cdot, t) \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, $F(\cdot, 0) = g_1$ et $F(\cdot, 1) = g_2$.

Preuve. On distingue les deux cas suivants :

1. Pour $i \in \{1, 2\}$, supposons que g_i soit de longueur 1, alors par l'intermédiaire du lemme 2.3, on va se ramener au cas où g_i' et H sont à valeurs dans \mathbb{S}^1 . Remarquons en effet que les paramétrages normaux standards de g_i sont des C^1 -difféomorphismes croissants de $[0, 1]$, ainsi quitte à précomposer g_i par l'un de ces paramétrages, on suppose que $g_i': \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Enfin, l'application H étant à valeurs dans X , on peut définir $\overline{H}: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$ par :

$$\overline{H}(x, t) := \frac{H(x, t)}{\|H(x, t)\|}.$$

Or, comme $H(\cdot, 0) = g_1'$ et $H(\cdot, 1) = g_2'$ sont à valeurs dans \mathbb{S}^1 , il vient :

$$\overline{H}(\cdot, 0) = g_1' \text{ et } \overline{H}(\cdot, 1) = g_2'.$$

Dès lors, quitte à remplacer H par \overline{H} , on suppose que $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$. On distingue alors les deux sous-cas suivants :

- a. Supposons que $\deg(g_1') \neq 0$, alors pour $t \in [0, 1]$, on définit $h_t: \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$ comme étant l'application $H(\cdot, t)$. On constate que h_t est homotope à g_1' . En effet, il suffit de considérer l'homotopie suivante :

$$H_t: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{S}^1 \\ (x, s) & \mapsto & H(x, st) \end{cases}.$$

On en déduit que h_t est de même degré que g_1' et donc de degré non nul.

En particulier, $h_t: \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$ est non constante et comme on l'a déjà vu dans le cas 1 de la preuve de la proposition 2.1, on a :

$$V_t := \int_0^1 h_t(u) du \in \mathring{\mathbb{D}}.$$

On introduit alors l'application $F: [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^2$ définie par :

$$F(x, t) := \int_0^x h_t(u) du - xV_t.$$

On constate que pour tout $t \in [0, 1]$, $F(0, t) = F(1, t)$ et ainsi $F(\cdot, t)$ induit une application de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire que $F \in C^0(\mathbb{S}^1 \times [0, 1], \mathbb{R}^2)$. En outre, quel que soit $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, on a :

$$\frac{dF}{dx}(x, t) = h_t(x) - V_t.$$

Or, comme h_t est à valeurs dans \mathbb{S}^1 et que $V_t \in \mathring{\mathbb{D}}$, la dérivée de $F(\cdot, t)$ ne s'annule pas, c'est-à-dire que $F(\cdot, t)$ est une immersion de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2 . Soit $i \in \{0, 1\}$, comme $h_i = \overline{H}(\cdot, i) = g_i'$ et que $g_i(0) = g_i(1)$, on a $V_i = 0$. En particulier, on en déduit que l'on a :

$$F(\cdot, i) = g_i - g_i(0).$$

Autrement dit, $g_1 - g_1(0)$ et $g_2 - g_2(0)$ sont homotopes dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$. Pour conclure, il suffit de voir que pour $i \in \{1, 2\}$, g_i et $g_i - g_i(0)$ sont homotopes dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, ce qui peut être accompli par :

$$F_i: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, t) & \mapsto & g_i(x) - tg_i(0) \end{cases}.$$

En effet, comme $g_i(0) = g_i(1)$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$F_i(0, t) = F_i(1, t).$$

En outre, quel que soit $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, on a :

$$\frac{dF_i}{dx}(x, t) = g_i'(x) \neq 0.$$

Ce qui permet de conclure dans cette situation.

- b. Supposons que $\deg(g'_1) = 0$, alors on va se ramener au cas 1a en exhibant une homotopie de g'_1 à g'_2 qui soit non constante en restriction à $\mathbb{S}^1 \times \{t\}$, pour chaque $t \in [0, 1]$. En premier lieu, pour tout $i \in \{1, 2\}$, on considère $\theta_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un relèvement continu de g'_i pour le revêtement universel :

$$p: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{S}^1 \\ x & \mapsto & (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{cases} .$$

Dès lors, comme g'_1 et g'_2 sont toutes les deux de degré zéro, l'application continue θ_i est 1-périodique et elle atteint un minimum global en $x_i \in \mathbb{R}$. On introduit l'application $\overline{\theta}_2: \mathbb{R} \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ définie par :

$$\overline{\theta}_2(x) := \theta_2(x + x_2 - x_1).$$

L'application $\overline{\theta}_2$ est 1-périodique et atteint un minimum global en x_1 . Désormais, pour $t \in [0, 1]$, on introduit $\alpha_t: \mathbb{R} \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ définie par :

$$\alpha_t(x) := (1 - t)\theta_1(x) + t\overline{\theta}_2(x).$$

Supposons par l'absurde qu'il existe un $t \in [0, 1]$ tel que α_t soit constante, alors quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité suivante :

$$(1 - t) \underbrace{(\theta_1(x) - \theta_1(x_1))}_{\geq 0} + t \underbrace{(\overline{\theta}_2(x) - \overline{\theta}_2(x_1))}_{\geq 0} = 0.$$

Dès lors, comme $(1 - t) \geq 0$, $t \geq 0$ et que l'une de ces inégalités est stricte, au moins une des applications θ_1 ou $\overline{\theta}_2$ est constante. Ceci garantit l'existence d'un $i \in \{1, 2\}$ tel que θ_i soit constante, ce qui est impossible. En effet, cela signifierait que g'_i est constante non nulle et l'on aurait alors $g_1(0) \neq g_1(1)$, ce qui n'est pas. Finalement, l'application suivante :

$$A: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{S}^1 \\ (x, t) & \mapsto & p(\alpha_t(x)) \end{cases}$$

est une homotopie bien définie de g'_1 à $p \circ \overline{\theta}_2$. En effet, comme quel que soit $t \in [0, 1]$, α_t est 1-périodique, il est garanti que l'on ait :

$$\forall t \in [0, 1], A(0, t) = A(1, t).$$

Par ailleurs, on affirme que pour $t \in [0, 1]$, $A(\cdot, t)$ n'est pas constante. Dans le cas contraire, il existerait $t \in [0, 1]$ tel que l'application continue $\alpha_t - \alpha_t(0)$ soit à valeurs dans \mathbb{Z} et elle serait constante, ce qui n'est pas. Remarquons ensuite que l'application $B: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$ définie par :

$$B(x, t) := p(\theta_2(x + t(x_2 - x_1)))$$

est une homotopie bien définie de g'_2 à $p \circ \overline{\theta}_2$, ce qui est une conséquence de la 1-périodicité de l'application $x \mapsto \theta_2(x + t(x_2 - x_1))$ pour $t \in [0, 1]$. En outre, on constate que pour tout $t \in [0, 1]$, $B(\cdot, t)$ n'est pas constante. Si ce n'était pas le cas, il existerait un $t \in [0, 1]$ tel que par le même argument de connexité l'application $x \mapsto \theta_2(x + t(x_2 - x_1))$ soit constante.

Ainsi, θ_2 serait alors constante, ce que l'on a déjà prouvé être impossible. Enfin, on introduit l'application $C: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$ définie par :

$$C(x, t) := \begin{cases} A(x, 2t) & t \in [0, 1/2] \\ B(x, 2(1-t)) & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Il s'agit d'une homotopie de g_1' à g_2' qui est non constante en restriction à chaque $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, pour $t \in [0, 1]$. Finalement, si on lui applique la construction décrite dans le cas 1a, on obtient une homotopie de g_1 à g_2 dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, ce qui permet de conclure dans cette situation.

Ce qui permet de clore ce cas de figure.

2. On ne suppose plus que g_1 et g_2 sont de longueur 1, alors pour tout $i \in \{1, 2\}$, on note ℓ_i la longueur de g_i . On va montrer que g_i est homotope dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ à une immersion de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2 qui est de longueur 1, à savoir $\frac{g_i}{\ell_i}$.

Pour ce faire, on introduit l'application $F_i: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^2$ définie par :

$$F_i(x, t) := \frac{g_i(x)}{\ell_i^t}.$$

Il s'agit d'une famille d'homothéties telle que $F_i(\cdot, 0) = g_i$ et $F_i(\cdot, 1) = g_i/\ell_i$. En outre, quel que soit $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, on a :

$$\frac{dF_i}{dx}(x, t) = \frac{g_i'(x)}{\ell_i^t} \neq 0.$$

Or, d'après le cas 1, g_1/ℓ_1 et g_2/ℓ_2 sont homotopes dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, ce qui permet de clore ce cas de figure.

D'où le résultat annoncé. ■

Remarque 2.6. Dans la situation idéale que constitue le cas 1a, la preuve de la proposition 2.5 est une version à paramètres de celle de la proposition 2.1.

Corollaire 2.7. L'application induite par J sur les composantes connexes par arcs, $J_*: \pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) \hookrightarrow \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, X))$ réalise une injection.

En rapprochant les résultats des corollaires 2.2 et 2.7, on a établi le :

Théorème 2.8. L'application induite par J sur les composantes connexes par arcs, $J_*: \pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) \xrightarrow{\sim} \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, X))$ réalise une bijection.

Remarque 2.9. Le théorème 2.8 exprime que le problème de classification des immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2 satisfait à un h -principe 1-paramétrique.

2.2. Les composantes connexes par arcs de $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$.

À l'occasion de la détermination des composantes connexes par arcs de $C^0(\mathbb{S}^1, X)$, on revient sur une affirmation laissée sans argument lors de la preuve de la proposition 2.1 ; pour ce faire on introduit l'application suivante :

$$r: \begin{cases} C^0(\mathbb{S}^1, X) & \rightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1) \\ f & \mapsto \frac{f}{\|f\|} \end{cases}.$$

Proposition 2.10. L'application induite par r sur les composantes connexes par arcs, $r_*: \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, X)) \rightarrow \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1))$ réalise une surjection.

Preuve. Il suffit de remarquer que pour $f \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$, on a $r(f) = f$. ■

Proposition 2.11. Soit $f \in C^0(\mathbb{S}^1, X)$, alors il existe $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} X$ telle que $H(\cdot, 0) = f$ et $H(\cdot, 1) = r(f)$.

Preuve. On introduit $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ l'application définie par :

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tr(f)(x).$$

Soit $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, on a :

$$H(x, t) = \frac{(1 - t)\|f(x)\| + t}{\|f(x)\|} f(x).$$

Ainsi, comme $f(x) \neq 0$ et que t et $1 - t$ ne sont pas tous les deux nuls, on a :

$$H(x, t) \neq 0.$$

En d'autres termes, H est bien définie, elle est de plus continue et elle vérifie $H(\cdot, 0) = f$, ainsi que $H(\cdot, 1) = r(f)$. D'où le résultat annoncé. ■

Corollaire 2.12. Soient f_1 et f_2 dans $C^0(\mathbb{S}^1, X)$ telles qu'il existe une homotopie $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$ satisfaisant $H(\cdot, 0) = r(f_1)$ et $H(\cdot, 1) = r(f_2)$, alors il existe une homotopie $F: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$ telle que $F(\cdot, 0) = f_1$ et $F(\cdot, 1) = f_2$.

Preuve. D'après la proposition 2.11, pour tout $i \in \{1, 2\}$, f_i et $r(f_i)$ sont homotopes dans $C^0(\mathbb{S}^1, X)$. Or, par hypothèse les applications $r(f_1)$ et $r(f_2)$ sont homotopes dans $C^0(\mathbb{S}^1, X)$. D'où le résultat annoncé. ■

Corollaire 2.13. L'application induite par r sur les composantes connexes par arcs, $r_*: \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, X)) \hookrightarrow \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1))$ réalise une injection.

Les résultats du corollaire 2.13 et de la proposition 2.10 fournissent la :

Proposition 2.14. L'application induite par r sur les composantes connexes par arcs, $r_*: \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, X)) \xrightarrow{\sim} \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1))$ réalise une bijection.

Enfin, on se reportera à l'annexe D pour une preuve du très classique :

Théorème 2.15. Le degré induit une bijection bien définie de l'ensemble des composantes connexes par arcs de $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ sur \mathbb{Z} .

2.3. Le théorème de Whitney-Grauenstein.

On oriente \mathbb{R}^2 en décrétant que sa base canonique est directe, ainsi \mathbb{S}^1 est naturellement muni de l'orientation induite, celle du sens trigonométrique.

On résume les résultats du théorème 2.8, de la proposition 2.14 et du théorème 2.15 dans le diagramme suivant où toutes les flèches sont bijectives :

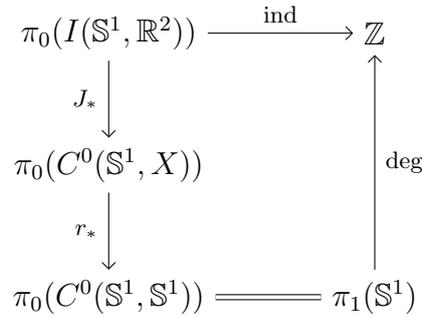


FIGURE 8. Diagramme synthétisant la détermination des composantes connexes par arcs de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$.

Une lecture directe du diagramme 8 conduit à la :

Proposition 2.16. L'ensemble des composantes connexes de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ est en correspondance bijective avec \mathbb{Z} .

On peut entièrement expliciter la correspondance de la proposition 2.16, mais cela nécessite d'introduire la :

Définition 2.17. Soit $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, on appelle *indice* de g et on note $\text{ind}(g)$ le degré de son *hodographe*, c'est-à-dire le degré de l'application $\frac{g'}{\|g'\|} : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$.

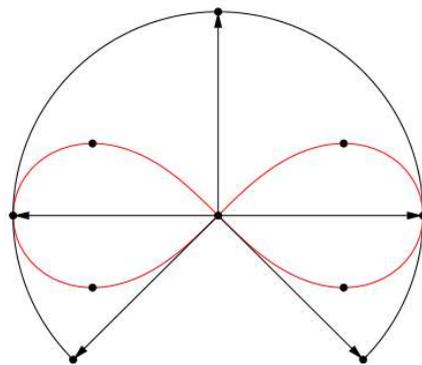


FIGURE 9. Représentation de l'hodographe d'une immersion associée à la figure en huit.

Remarque 2.18. Avec nos notations, quel que soit $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, on a :

$$\text{ind}(g) = (\text{deg} \circ r \circ J)(g).$$

Remarque 2.19. Soit $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, en chaque $x \in \mathbb{S}^1$, il existe U_x un voisinage de x dans \mathbb{S}^1 tel que $g: U_x \rightarrow \mathbb{R}^2$ soit un plongement, on consultera [9]. En particulier, $g(U_x)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^2 de dimension 1 et elle est naturellement orientée par \mathbb{S}^1 : on transporte l'orientation de \mathbb{S}^1 à $g(U_x)$ par l'intermédiaire de la différentielle de g . Cette dernière étant continue, l'orientation sur chacun des $g(U_x)$ est compatible : elle dépend continument de x . Notons que puisque \mathbb{S}^1 est compact, on peut choisir les U_x en nombre fini. Géométriquement, le support de g est obtenu en recollant un nombre fini de courbes orientées, ce qui y définit alors un sens de parcours privilégié.

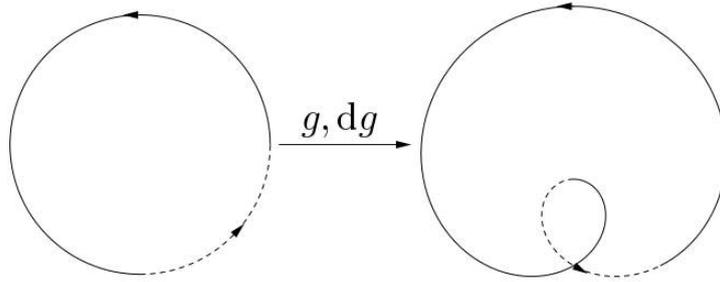


FIGURE 10. Définition d'un sens de parcours naturel sur un limaçon trisecteur.

On en déduit que le support de g admet en tout point un unique *vecteur tangent direct et unitaire*, c'est-à-dire que pour tout $g(x)$, $x \in \mathbb{S}^1$, il existe un unique vecteur unitaire formant une base directe de l'espace tangent de $g(U_x)$ en $g(x)$, il est donné par $g'(x)/\|g'(x)\|$. Il s'agit sommairement de l'unique vecteur tangent au support de g pointant dans son sens de parcours privilégié. Finalement, l'indice de g s'interprète géométriquement comme le nombre de tours complets réalisés par ce vecteur lorsqu'un point parcourt une et une unique fois le support de g . Autrement dit, l'indice de g quantifie l'enroulement des vecteurs tangents directs et unitaires à la courbe fermée du plan décrite par g .

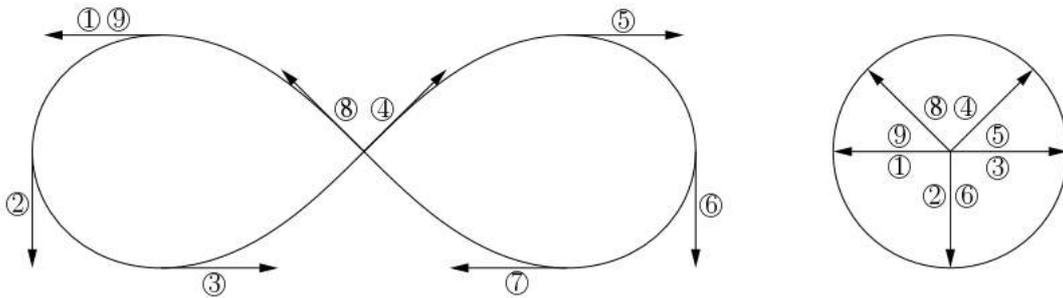


FIGURE 11. Illustration du calcul de l'indice d'une immersion associée à la figure en huit, il s'agit de 0.

En tenant compte de la nature des flèches du diagramme 8, on obtient le :

Théorème 2.20. (Whitney [14], Graustein) L'indice induit une bijection bien définie de l'ensemble des composantes connexes par arcs de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ sur \mathbb{Z} .

Remarque 2.21. On dira de deux courbes régulières fermées du plan qu'elles peuvent être *régulièrement déformées* l'une en l'autre si et seulement s'il existe une transformation continue de la première à la seconde dont chaque état transitoire est encore une courbe régulière fermée du plan. Du point de vue géométrique, le théorème 2.20 exprime alors que c'est le cas si et seulement si le nombre de tours complets réalisé par les vecteurs tangents directs et unitaires respectifs à ces courbes est le même.

Remarque 2.22. On précise l'affirmation de la remarque 2.4, soient g dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ et λ est un C^1 -difféomorphisme décroissant de $[0, 1]$, alors on a :

$$\text{ind}(g \circ \lambda) = -\text{ind}(g).$$

Dès lors, d'après le théorème 2.20, g et $g \circ \lambda$ sont dans la même composante connexe par arcs de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ si et seulement si $\text{ind}(g) = 0$.

Exemple 2.23. En particulier, le théorème 2.20 statue l'impossibilité de retourner le cercle dans le plan, c'est-à-dire de le déformer régulièrement au sens décrit dans la remarque 2.21, de sorte à ce que son orientation soit renversée.

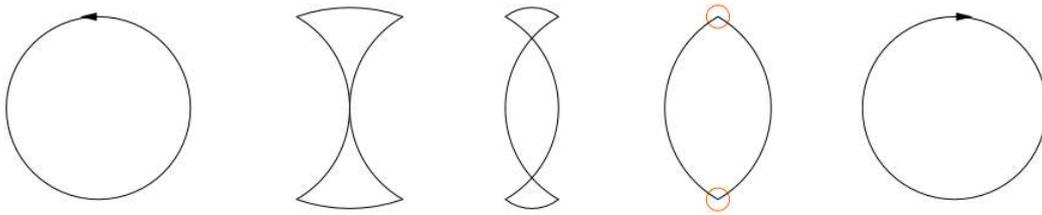


FIGURE 12. Une tentative infructueuse de retournement.

Remarque 2.24. Deux courbes (régulières) fermées du plan peuvent toujours être continument déformées l'une sur l'autre. En effet, si g_1 et g_2 sont dans $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, l'application suivante est une homotopie de g_1 à g_2 dans $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$:

$$H: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, t) & \mapsto & (1-t)g_1(x) + tg_2(x) \end{cases} .$$

Géométriquement, cette transformation consiste à déplacer chaque point du support de g_1 , disons $g_1(x)$, $x \in \mathbb{S}^1$, le long du segment qui le joint au point qui lui correspond sur le support de g_2 , à savoir $g_2(x)$. Il s'agit essentiellement de tirer graduellement et radialement le support de g_1 sur celui de g_2 .

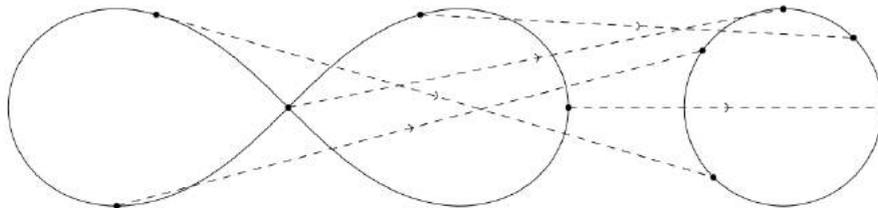


FIGURE 13. Illustration du procédé de poussé radial dans le cas de la figure en huit et du cercle.

Cette stratégie est mise à défaut lorsque l'on tente de régulièrement déformer la figure en huit sur le cercle, voir la figure 14.

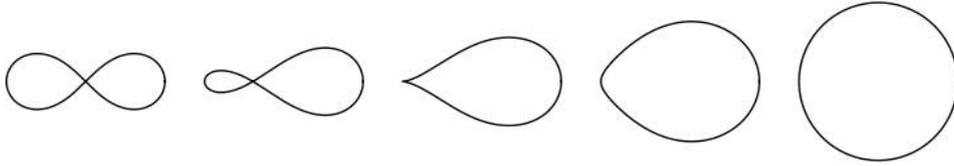


FIGURE 14. Poussé radial de la figure en huit sur le cercle ; apparition d'une singularité à la troisième étape.

Remarque 2.25. Il est essentiel de demander à ce que les états transitoires des transformations considérées dans le théorème 2.20 soient des courbes planes. Si l'on autorise désormais les déformations à se produire dans un espace possédant au moins trois dimensions, toute courbe régulière plane peut continument et régulièrement être déformée en une autre. Si l'on exploite l'une de ces dimensions nouvellement introduites, on peut désentrelacer ces courbes, c'est-à-dire que l'on élimine leurs auto-intersections et on les déforme en des cercles.

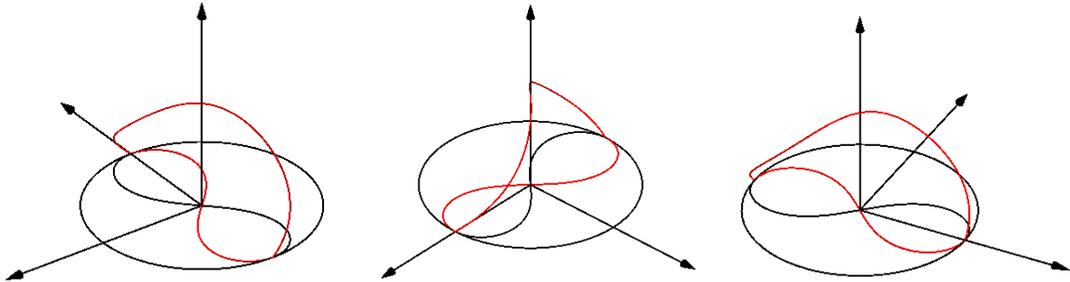


FIGURE 15. Désentrelacement de la figure en huit.

Ainsi, on est ramené à réaliser le retournement du cercle dans l'espace.

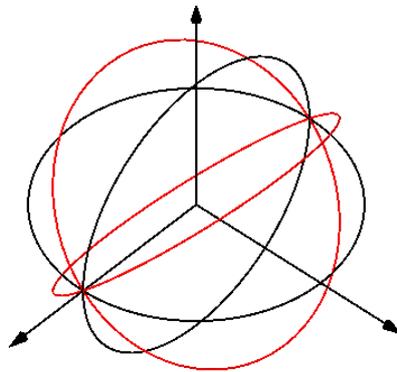


FIGURE 16. Réalisation du retournement du cercle dans l'espace.

Pour ce faire, on suppose qu'il se situe dans le plan (xOy) et on introduit :

$$H: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, t) & \mapsto & (\cos(2\pi x), \cos(\pi t) \sin(2\pi x), \sin(\pi t) \sin(2\pi x)) \end{cases} \cdot$$

On constate que pour tout $t \in [0, 1]$, $H(\cdot, t)$ est une immersion de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^3 . Géométriquement, H réalise graduellement une rotation d'angle π et d'axe x du cercle de centre $(0, 0, 0)$, de rayon 1 et d'axe z , voir la figure 16.

3. LES IMMERSIONS DU CERCLE DANS LES DIMENSIONS SUPÉRIEURES

En reprenant à l'identique les preuves du théorème 2.8 et de la proposition 2.14, on montre moralement que l'on a la correspondance bijective suivante :

$$\pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)) \cong \pi_1^*(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Néanmoins, si l'on souhaitait établir rigoureusement la proposition 2.5, il nous faudrait développer une théorie plus générale du degré, ce que l'on s'épargnera. Si l'on néglige cette subtilité, comme \mathbb{S}^{n-1} est simplement connexe pour $n \geq 3$, on verra [5], d'après la proposition D.12, $\pi_1^*(\mathbb{S}^{n-1})$ est trivial et on a le :

Théorème 3.1. Soit $n \geq 3$, alors l'espace $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ est connexe par arcs.

Cependant, par soucis de complétude, on s'attache désormais à donner une preuve du théorème 3.1 qui soit indépendante du théorème 2.8, cela au moins quand $n \geq 4$. Pour commencer, on aura besoin de la :

Proposition 3.2. Soient $n \geq 3$ et f une application de classe $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^{n-1})$, alors l'ensemble $f(\mathbb{S}^1)$ est négligeable dans \mathbb{S}^{n-1} .

Preuve. On commence par constater que puisque $n \geq 3$, on a :

$$\dim(\mathbb{S}^1) = 1 < n - 1 = \dim(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Dès lors, quel que soit $x \in \mathbb{S}^1$, l'application linéaire $d_x f: T_x \mathbb{S}^1 \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{S}^{n-1}$ n'est pas surjective. Ainsi, l'ensemble des valeurs critiques de f est $f(\mathbb{S}^1)$. D'où le résultat annoncé, d'après le théorème de Sard. ■

Remarque 3.3. Si l'application $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ est seulement continue, alors f peut être surjective, ce qui met très largement à défaut la proposition 3.2. On peut en effet construire $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, 1]^n$ continue et surjective, voir [11]. Finalement, si $\varphi: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ est une paramétrisation de la sphère \mathbb{S}^{n-1} , alors l'application $f := \varphi \circ g$ est continue et surjective de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{S}^{n-1} .

Remarque 3.4. Notons que la proposition 3.2 est une simple application du théorème de Sard. D'ailleurs, il s'agit de ce même résultat que l'on utiliserait pour définir le degré d'une application de classe C^∞ entre une variété compacte orientée et une variété connexe orientée, voir [10].

Remarque 3.5. La proposition 3.2 permet d'établir rapidement tout lacet de classe C^∞ de \mathbb{S}^{n-1} est homotope à un lacet constant, à condition que $n \geq 3$. En effet, d'après la proposition 3.2, un tel lacet évite toujours un point q , mais par convexité, l'image de ce lacet par une projection stéréographique de pôle q est alors homotope à un lacet constant de \mathbb{R}^{n-1} .

Si $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, π_v désigne la projection orthogonale de \mathbb{R}^n parallèlement à $\mathbb{R}v$. On va alors se ramener à la situation décrite en remarque 2.25 par le :

Lemme 3.6. Soient $n \geq 3$ et $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ de classe $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$, alors pour presque tout $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\pi_v \circ g$ est une immersion.

Preuve. L'application g' ne s'annulant pas, on peut définir $\varphi: \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{S}^{n-1}$ par :

$$\varphi(x) := \frac{g'(x)}{\|g'(x)\|}.$$

Soit $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, π_v étant linéaire, alors $\pi_v \circ g$ est $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ et on a l'égalité :

$$(\pi_v \circ g)' = \pi_v \circ g'.$$

En particulier, comme $\ker(\pi_v) = \mathbb{R}v$, quel que soit $x \in \mathbb{S}^1$, il vient :

$$(\pi_v \circ g)'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) \in \mathbb{R}v.$$

Dès lors, comme v est unitaire, l'application $\pi_v \circ g$ n'est pas une immersion si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{S}^1$ tel que $g'(x) \in \mathbb{R}v$, à savoir si et seulement si :

$$v = \pm \frac{g'(x)}{\|g'(x)\|}.$$

Finalement, $\pi_v \circ g$ n'est pas une immersion si et seulement si on a $\pm v \in \varphi(\mathbb{S}^1)$, mais d'après la proposition 3.2, $-\varphi(\mathbb{S}^1) \cup \varphi(\mathbb{S}^1)$ est négligeable dans \mathbb{S}^{n-1} . D'où le résultat annoncé. ■

Remarque 3.7. Le lemme 3.6 est très grossièrement faux en dimension 2. En effet, si $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ est de classe $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, alors d'après la proposition 1.1, quel que soit $v \in \mathbb{S}^1$, $\pi_v \circ g$ n'est pas une immersion, car $\dim(v^\perp) = 1$.

Suite au lemme 3.6, on montre que l'on ne change pas la composante connexe par arcs d'une immersion de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^n en la projetant orthogonalement sur un hyperplan, cela dès que l'application projetée est encore une immersion.

Lemme 3.8. Soient $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathbb{S}^{n-1}$. Si $\pi_v \circ g$ est une immersion, alors g et $\pi_v \circ g$ sont dans la même composante connexe de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$.

Preuve. On définit l'application $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ par :

$$H(x, t) = (1 - t)g(x) + t\pi_v(g(x)).$$

On constate que H est continue et elle vérifie $H(\cdot, 0) = g$ et $H(\cdot, 1) = \pi_v \circ g$. Supposons par l'absurde qu'il existe $t \in [0, 1]$ tel que $H(\cdot, t)$ ne soit pas une immersion, alors il existe $x \in \mathbb{S}^1$ satisfaisant :

$$\frac{dH}{dx}(x, t) = (1 - t)g'(x) + t\pi_v(g'(x)) = 0.$$

Or, comme g et $\pi_v \circ g$ sont des immersions, on ne peut pas avoir $t \in \{0, 1\}$. En particulier, on en déduit que l'on a :

$$\pi_v(g'(x)) = \frac{t-1}{t}g'(x).$$

Dès lors, comme $g'(x)$ est un vecteur non nul, $(t-1)/t$ est une valeur propre de la projection π_v , c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{t-1}{t} \in \{0, 1\},$$

ce qui n'est pas. D'où le résultat annoncé. ■

On ramène la preuve du théorème 3.1 à l'heuristique que l'on a décrite dans la remarque 2.25 par l'intermédiaire du :

Corollaire 3.9. Soient $n \geq 3$ et g_1, g_2 dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$, alors il existe Π un sous-espace vectoriel de dimension 2 de \mathbb{R}^n , ainsi que \overline{g}_1 et \overline{g}_2 dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ tels que pour tout $i \in \{1, 2\}$:

- Les immersions g_i et \overline{g}_i sont homotopes dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$.
- Le support de \overline{g}_i est inclus dans Π , c'est-à-dire que l'on a $\overline{g}_i(\mathbb{S}^1) \subseteq \Pi$.

Preuve. Soit m le plus petit entier naturel non nul tel qu'il existe Π un sous-espace vectoriel de dimension m de \mathbb{R}^n , ainsi que des applications \overline{g}_1 et \overline{g}_2 dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ tels que pour tout $i \in \{1, 2\}$:

- Les immersions g_i et \overline{g}_i sont homotopes dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$.
- Le support de \overline{g}_i est inclus dans Π .

Dans la suite, on travaille systématiquement dans une base de Π afin de considérer les applications \overline{g}_1 et \overline{g}_2 comme des immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^m . Supposons par l'absurde que $m > 2$, alors d'après le lemme 3.6, il existe $v \in \mathbb{S}^{m-1}$ tel que pour tout $i \in \{1, 2\}$, l'application $\pi_v \circ \overline{g}_i$ soit une immersion. Par ailleurs, d'après le lemme 3.8, \overline{g}_i et $\pi_v \circ \overline{g}_i$ sont homotopes dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$. Dès lors, pour tout $i \in \{1, 2\}$, on déduit que l'on a :

- Les immersions g_i et $\pi_v \circ \overline{g}_i$ sont homotopes dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$.
- Le support de $\pi_v \circ \overline{g}_i$ est inclus dans v^\perp .

Finalement, par minimalité de m pour ces propriétés, il vient :

$$m \leq \dim(v^\perp) = m - 1,$$

ce qui n'est pas, ainsi, on a $m \leq 2$. Or, d'après la proposition 1.1, on a $m > 1$, car il n'existe pas d'immersion de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R} . D'où $m = 2$ et le résultat annoncé. ■

Remarque 3.10. Le corollaire 3.9 signifie que tout couple de composantes connexes par arcs de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ admet des représentants dont les supports sont inclus dans un même plan de \mathbb{R}^n .

On peut désormais faire la preuve du théorème 3.1, plus précisément on va montrer que $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ est connexe par arcs dès que $n \geq 4$:

Preuve. Soient g_1 et g_2 dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$, il s'agit de montrer que les applications g_1 et g_2 sont dans une même composante connexe par arcs. Or, d'après le corollaire 3.9, il existe un plan Π de \mathbb{R}^n , ainsi que \overline{g}_1 et \overline{g}_2 des applications de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ tels que pour tout $i \in \{1, 2\}$:

- Les immersions g_i et \overline{g}_i sont homotopes dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$.
- Le support de \overline{g}_i est inclus dans Π .

Dans la suite, on travaille systématiquement dans une base de \mathbb{R}^n obtenue en complétant une base de Π de telle manière à ce que pour $i \in \{1, 2\}$, on ait :

$$\overline{g}_i := (\overline{g}_{i1}, \overline{g}_{i2}, 0, \dots, 0).$$

On introduit également l'application \tilde{g}_2 de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ définie par :

$$\tilde{g}_2(x) := (0, 0, \overline{g}_{21}(x), \overline{g}_{22}(x), 0, \dots, 0).$$

On remarque alors que \overline{g}_2 et \tilde{g}_2 sont homotopes dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$, pour cela il suffit de considérer l'application $F: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$ définie par :

$$F(x, t) := (1 - t)\overline{g}_2(x) + t\tilde{g}_2(x).$$

Quel que soit $t \in [0, 1]$, l'application $F(\cdot, t)$ est une immersion puisque pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, les vecteurs $\overline{g}_2'(x)$ et $\tilde{g}_2'(x)$ sont libres. Dès lors, il suffit pour conclure de montrer que \overline{g}_1 et \tilde{g}_2 sont homotopes dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$.

Pour ce faire, on considère l'application $G: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$ définie par :

$$G(x, t) := (1 - t)\overline{g}_1(x) + t\tilde{g}_2(x).$$

Encore une fois, quel que soit $t \in [0, 1]$, l'application $G(\cdot, t)$ est une immersion, puisque pour tout x de \mathbb{S}^1 , les vecteurs $\overline{g}_1'(x)$ et $\tilde{g}_2'(x)$ sont libres dans \mathbb{R}^n . D'où le résultat annoncé. ■

Remarque 3.11. Soient g_1 et g_2 deux immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^n , l'homotopie radiale $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de g_1 à g_2 définie par :

$$H(x, t) := (1 - t)g_1(x) + tg_2(x)$$

n'est pas systématiquement une immersion à t fixé. En effet, s'il existe $x \in \mathbb{S}^1$ tel que $g_1'(x)$ et $g_2'(x)$ soient colinéaires, alors il peut exister $t \in [0, 1]$ tel que :

$$\frac{dH}{dx}(x, t) = 0.$$

Il s'agit précisément du phénomène observé dans la remarque 2.24.

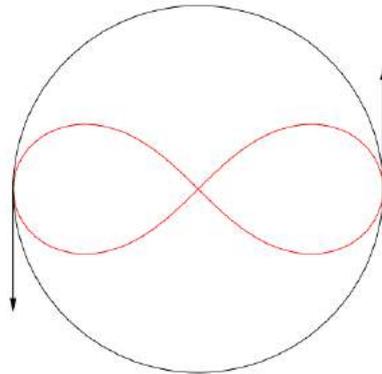


FIGURE 17. Des immersions associées au cercle et à la figure en huit qui sont non-transverses.

Réciproquement, s'il existe $t \in [0, 1]$ tel que $H(\cdot, t)$ ne soit pas une immersion, alors pour un certain $x \in \mathbb{S}^1$, les vecteurs $g_1'(x)$ et $g_2'(x)$ sont colinéaires. Cette simple observation étant faite, l'idée de la preuve du théorème 3.1 est alors naturelle et toute donnée : il s'agit de perturber les immersions g_1 et g_2 , sans changer leurs composantes connexes par arcs dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$, de sorte à ce que leurs supports soient *transverses* en chaque point.

Remarque 3.12. En vertu du corollaire 3.9, la stratégie que l'on a décrite dans la remarque 3.11 est sans peine mise en œuvre en dimension au moins 4. En effet, il s'agit de remarquer que sous cette condition, il est toujours possible de séparer deux plans de sorte à ce que leur intersection soit réduite à $\{0\}$. En dimension 3, la situation est *a contrario* légèrement plus délicate, puisque l'intersection de deux plans contient toujours une droite.

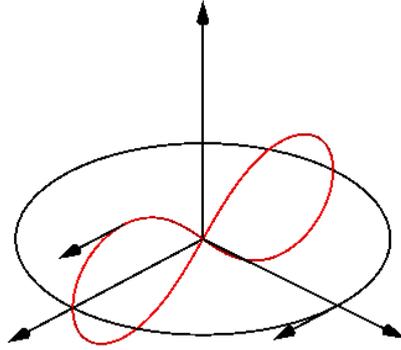


FIGURE 18. Un exemple de cas pathologique en dimension 3.

Remarque 3.13. Dans la preuve du théorème 3.1, on a seulement établi la connexité par arcs de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ et non de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$, pour $n \geq 4$. Cependant, toute immersion de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^n étant homotope dans $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ à une immersion de classe $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$, voir [8], on a le résultat sans plus d'effort.

Remarque 3.14. On revient sur l'heuristique décrite dans la remarque 2.25. Pour ce faire, on commence par définir $c \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ par :

$$c(x) := (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), 0, \dots, 0).$$

Soit $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, on constate alors que l'on a $\bar{g} := (g, 0, \dots, 0) \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$. Finalement, d'après le théorème 3.1, \bar{g} et c sont dans la même composante connexe par arcs de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$, ce qui prouve l'affirmation de la remarque 2.25.

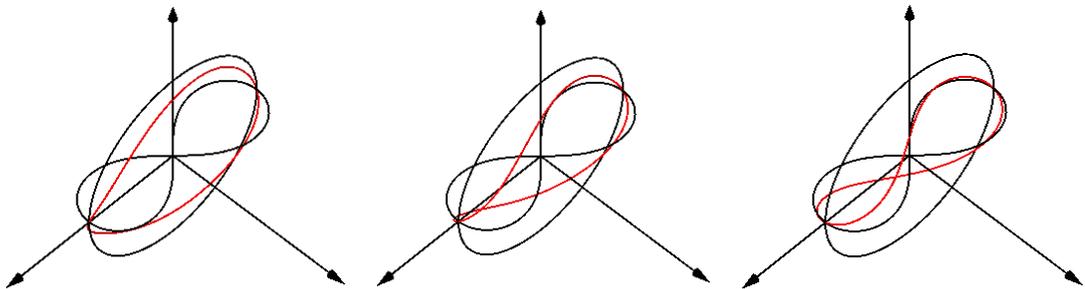


FIGURE 19. Désentrelacement de la figure en huit.

ANNEXE A. SUR LES PARAMÉTRAGES NORMAUX D'UN ARC RÉGULIER

Soit $n \geq 2$, on munit \mathbb{R}^n de la norme euclidienne standard que l'on note $\|\cdot\|$. Soit g une application de classe $C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ dont la dérivée ne s'annule pas.

A.1. Longueur et abscisses curvilignes d'un arc régulier.

Définition A.1. Soit $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que $a \leq b$, on appelle *longueur d'arc* de g entre a et b le scalaire positif suivant :

$$\ell(g, a, b) := \int_a^b \|g'(t)\| dt.$$

La *longueur* de g simplement notée $\ell(g)$ est égale à $\ell(g, 0, 1) > 0$.

Définition A.2. Une application $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est *abscisse curviligne* de g si et seulement si pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que $a \leq b$, on a :

$$\ell(g, a, b) = \sigma(b) - \sigma(a).$$

Proposition A.3. Les abscisses curvilignes de g sont exactement les primitives de l'application continue $\|g'\|: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

Preuve. On procède par double implication.

- Soit $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une abscisse curviligne de g , alors on a :

$$\forall s \in [0, 1], \sigma(s) - \sigma(0) = \ell(g, s, 0) := \int_0^s \|g'(t)\| dt.$$

Dès lors, σ est de classe $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et par différentiation, il vient :

$$\forall s \in [0, 1], \sigma'(s) = \|g'(s)\|.$$

Finalement, σ est une primitive de $\|g'\|$.

- Soient $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de $\|g'\|$ et $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que $a < b$. Ainsi, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, on a :

$$\sigma(b) - \sigma(a) = \int_a^b \|g'(t)\| dt =: \ell(g, a, b).$$

Finalement, σ est une abscisse curviligne de g .

D'où le résultat annoncé. ■

Remarque A.4. La propriété A.3 assure l'existence d'une infinité d'abscisses curvilignes pour g et elles diffèrent toutes d'une constante additive.

Lemme A.5. Soit $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une abscisse curviligne de g , alors σ est un C^1 -difféomorphisme croissant sur son image.

Preuve. L'application σ est de classe $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et pour tout $s \in [0, 1]$, on a :

$$\sigma'(s) = \|g'(s)\| > 0.$$

Dès lors, σ est strictement croissante. Finalement, d'après le théorème d'inversion globale, σ est un C^1 -difféomorphisme croissant sur son image. ■

A.2. Paramétrages normaux d'un arc régulier.

Définition A.6. Soit I un intervalle et $\lambda: I \rightarrow [0, 1]$ un C^1 -difféomorphisme, alors λ est un *paramétrage normal* de g si et seulement si $\|(g \circ \lambda)'\| = 1$.

Proposition A.7. Soit $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une abscisse curviligne de g d'image I , alors $\lambda := \sigma^{-1}: I \rightarrow [0, 1]$ est un paramétrage normal croissant de g .

Preuve. Notons que d'après le lemme A.5, λ est correctement définie et il s'agit d'un C^1 -difféomorphisme croissant de I sur $[0, 1]$. De plus, par différentiation de l'égalité $\sigma \circ \lambda = \text{id}_I$ et d'après la proposition A.3, on a :

$$\lambda' = \frac{1}{\sigma' \circ \lambda} = \frac{1}{\|g'\| \circ \lambda}.$$

En particulier, on en déduit que pour tout $t \in I$, on a :

$$\|(g \circ \lambda)'(t)\| = |\lambda'(t)| \cdot \|g'(\lambda(t))\| = \frac{\|g'(\lambda(t))\|}{\|g'(\lambda(t))\|} = 1.$$

Finalement, λ est un paramétrage normal de g . ■

Remarque A.8. La remarque A.4 et la proposition A.7 assurent l'existence d'une infinité de paramétrage normaux croissants de g .

Proposition A.9. Soit $\lambda: I \rightarrow [0, 1]$ un paramétrage normal de g , alors selon la monotonie de λ , l'application λ^{-1} ou $-\lambda^{-1}$ est une abscisse curviligne de g .

Preuve. Par définition d'un paramétrage normal, on a l'égalité suivante :

$$|\lambda'| \cdot \|g' \circ \lambda\| = 1.$$

Or, λ étant un C^1 -difféomorphisme, λ' est continue et elle ne s'annule pas. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, λ' est de signe constant sur l'intervalle I , c'est-à-dire $|\lambda'| = \pm \lambda'$ et d'après l'égalité précédente, il vient :

$$(1) \quad \lambda' = \pm \frac{1}{\|g' \circ \lambda\|}.$$

Or, par différentiation de l'égalité $\lambda \circ \lambda^{-1} = \text{id}_{[0,1]}$, on a :

$$(2) \quad (\lambda^{-1})' = \frac{1}{\lambda' \circ \lambda^{-1}}.$$

Dès lors, en rapprochant les égalités (1) et (2), il vient :

$$(\lambda^{-1})' = \pm \frac{1}{1/\|g' \circ \lambda \circ \lambda^{-1}\|} = \pm \|g'\|.$$

Finalement, d'après la proposition A.3, $\pm \lambda^{-1}$ est une abscisse curviligne de g . D'où le résultat annoncé. ■

Remarque A.10. La proposition A.9 assure que tous les paramétrages normaux croissants de g s'obtiennent en procédant comme dans la proposition A.7. Les paramétrages normaux décroissants de g sont exactement leurs opposés.

Proposition A.11. Soit $\lambda: I \rightarrow [0, 1]$ un paramétrage normal de g , il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ tel que $I = [a, b]$ et on a alors $\ell(g) = b - a$.

Preuve. Par définition, I est l'image de $[0, 1]$ par l'application continue λ^{-1} . Dès lors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires I est un intervalle qui est de surcroît compact et il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$ tel que $I = [a, b]$. En outre, comme λ est un paramétrage normal, on a :

$$(3) \quad \int_a^b \|(g \circ \lambda)'(t)\| dt = b - a.$$

Or, comme λ réalise un C^1 -difféomorphisme de $[a, b]$ sur $[0, 1]$, on a :

$$(4) \quad \int_a^b \|(g \circ \lambda)'(t)\| dt = \int_a^b \|g(\lambda(t))\| \cdot |\lambda'(t)| dt = \int_0^1 \|g'(t)\| dt =: \ell(g).$$

D'où le résultat annoncé en rapprochant (3) et (4). ■

Définition A.12. Soit $\lambda: I \rightarrow [0, 1]$ un paramétrage normal de g , on dit que λ est *standard* si et seulement si λ est croissant et $I = [0, \ell(g)]$.

Proposition A.13. Il existe des paramétrages normaux standards de g .

Preuve. Soit $\lambda: I \rightarrow [0, 1]$ un paramétrage normal croissant de g , alors d'après la proposition A.11, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $I = [a, b]$ et on a alors :

$$\ell(g) = b - a.$$

On remarque que $\lambda - a$ est un paramétrage normal et il a pour domaine :

$$\{a\} + I = [0, b - a] = [0, \ell(g)].$$

D'où le résultat annoncé puisque $\lambda - a$ est croissant. ■

ANNEXE B. PETIT GLOSSAIRE DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

Dans cette annexe, on présente les notions de base sur les variétés différentielles.

B.1. Notions de cartes, atlas et variétés.

Soit M un espace topologique séparé.

Définition B.1. Une *carte* de M est un couple (U, ϕ) , où U est un ouvert dit *domaine* de la carte et $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme sur son image.

Exemple B.2. Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, on introduit alors $N_\varepsilon := (0, \dots, 0, \varepsilon) \in \mathbb{S}^{n-1}$, $U_\varepsilon := \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N_\varepsilon\}$, ainsi que l'application $p_{N_\varepsilon}: U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ définie par :

$$p_{N_\varepsilon}(x) := \left(\frac{x_i}{1 - \varepsilon x_n} \right)_{1 \leq i \leq n-1}.$$

Il s'agit la projection stéréographique de pôle N_ε sur l'hyperplan équatorial. Son application réciproque est donnée par :

$$p_{N_\varepsilon}^{-1}(x) := \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_{n-1}}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\varepsilon(\|x\|^2 - 1)}{\|x\|^2 + 1} \right).$$

Finalement, le couple $(U_\varepsilon, p_{N_\varepsilon})$ est une carte de \mathbb{S}^{n-1} .

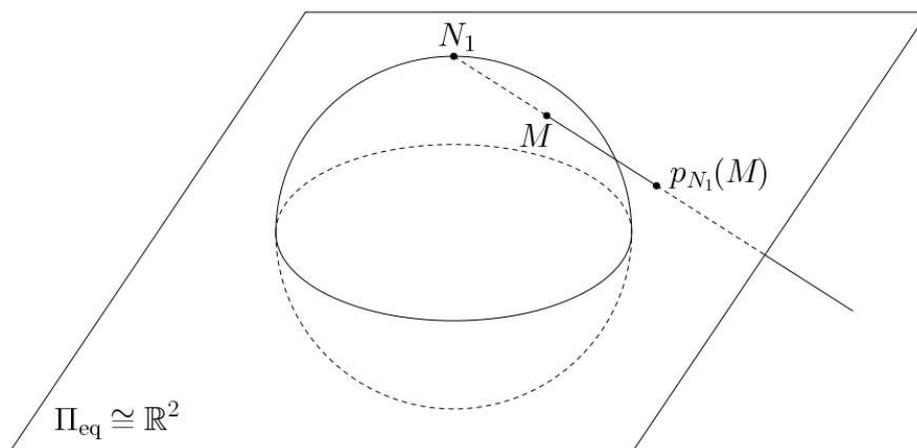


FIGURE 20. La projection stéréographique de pôle N_1 sur le plan équatorial de la sphère \mathbb{S}^2 .

Exemple B.3. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $V_k := \{x := [x_i]_{0 \leq i \leq n}; x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}P^n$, ainsi que l'application $\phi_k: V_k \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\phi_k(x) = \left(\frac{x_i}{x_k} \right)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}}.$$

Son application réciproque est donnée par :

$$\phi_k^{-1}(x) = \begin{cases} [1 : x_1 \cdots : x_n] & k = 0 \\ [x_1 : \cdots : x_{k-1} : 1 : x_k : x_{k+1} : \cdots : x_n] & k \neq 0, n \\ [x_1 : \cdots : x_n : 1] & k = n \end{cases}$$

Finalement, le couple (V_k, ϕ_k) est une carte de l'espace projectif $\mathbb{R}P^n$.

Définition B.4. Soient $p \in M$ et (U, ϕ) une carte de M , alors (U, ϕ) est *centrée* en p si et seulement si $p \in U$ et $\phi(p) = 0$.

Remarque B.5. Soit $p \in M$, s'il existe (U, ϕ) une carte de M avec $p \in U$, alors on peut toujours supposer (U, ϕ) centrée en p quitte à translater ϕ .

Définition B.6. Soit $\mathfrak{A} := \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ un système de cartes de M , alors \mathfrak{A} est un *atlas* de M si et seulement si $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement de M .

Exemple B.7. En reprenant les notations de l'exemple B.2, le système :

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{S}^{n-1}} := \{(U_1, p_{N_1}), (U_{-1}, p_{N_{-1}})\}$$

est un atlas de la sphère \mathbb{S}^{n-1} .

Exemple B.8. En reprenant les notations de l'exemple B.3, le système :

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{R}P^n} := \{(V_k, \phi_k)\}_{0 \leq k \leq n}$$

est un atlas de l'espace projectif $\mathbb{R}P^n$.

Définition B.9. Soit $\mathfrak{A} := \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ un atlas de M , alors \mathfrak{A} est un atlas *n -dimensionnel* si et seulement si pour tout $i \in I$, $\phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Définition B.10. L'espace topologique M est une *variété topologique* de *dimension* n si et seulement s'il est muni d'un atlas n -dimensionnel.

Remarque B.11. Concrètement, une variété topologique de dimension n est obtenue en recollant des ouverts de \mathbb{R}^n .

Remarque B.12. Si M est une variété topologique compacte, alors d'après le théorème de Borel-Lebesgue, il existe un atlas fini de M .

Exemple B.13. La sphère \mathbb{S}^{n-1} une variété topologique de dimension $n - 1$.

Exemple B.14. L'espace $\mathbb{R}P^n$ une variété topologique de dimension n .

Définition B.15. Soit M une variété topologique de dimension n et soit $\mathfrak{A} := \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ un atlas n -dimensionnel de M , alors les *applications de changements de cartes* ou *applications de recollement* de \mathfrak{A} sont les :

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

définies pour tout $(i, j) \in I^2$, avec $i \neq j$.

Exemple B.16. Les changements de cartes de l'atlas $\mathfrak{A}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ sont donnés par :

$$p_{N_{-1}} \circ p_{N_1}^{-1}(x) = \left(-\frac{x_i}{\|x\|^2} \right)_{1 \leq i \leq n-1} = p_{N_1} \circ p_{N_{-1}}^{-1}(x).$$

Il s'agit de l'opposée de l'inversion de sphère de centre 0 et de rayon 1.

Exemple B.17. Les changements de cartes de l'atlas $\mathfrak{A}_{\mathbb{R}P^n}$ sont donnés par :

$$\phi_k \circ \phi_\ell^{-1}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x_1}{x_k}, \dots, \frac{x_{\ell-1}}{x_k}, \frac{1}{x_k}, \frac{x_{\ell+1}}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k} \right) & k < \ell \\ \left(\frac{x_1}{x_{k-1}}, \dots, \frac{x_{\ell-1}}{x_{k-1}}, \frac{1}{x_{k-1}}, \frac{x_{\ell+1}}{x_{k-1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{k-1}} \right) & \ell < k \end{cases}$$

quel que soit le couple $(k, \ell) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ avec $k \neq \ell$.

Définition B.18. Soit M une variété topologique, alors M est une *variété différentielle* de dimension n si et seulement si elle est munie d'un atlas n -dimensionnel dont les applications de recollement sont de classe C^∞ .

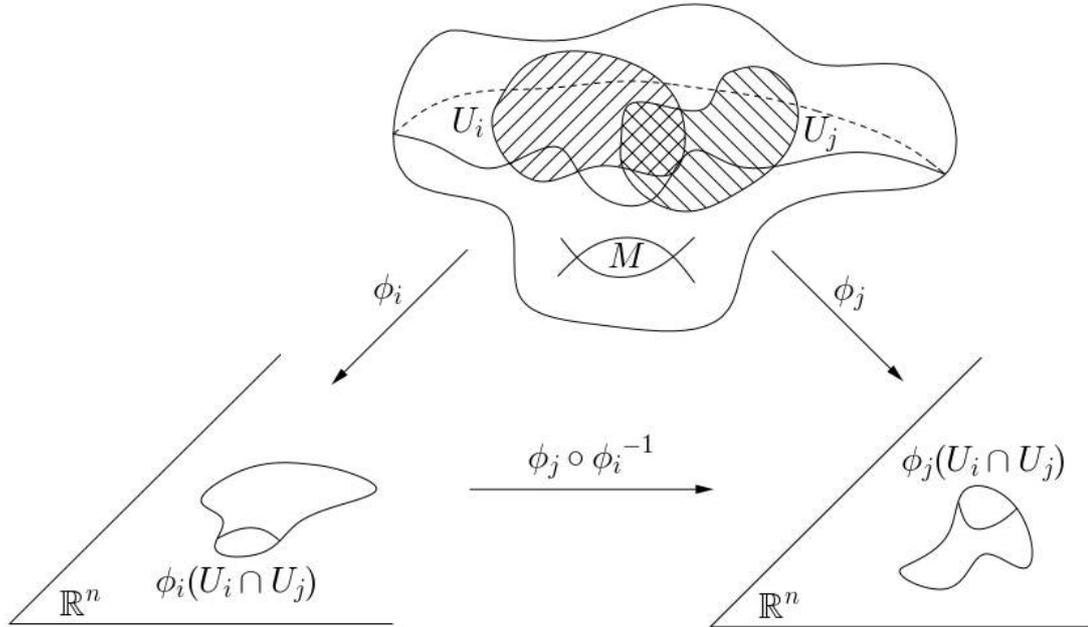


FIGURE 21. Représentation d'un changement de carte d'un atlas.

Remarque B.19. Si (M, \mathfrak{A}) est une variété différentielle, alors les applications de recollement de \mathfrak{A} sont des C^∞ -difféomorphismes.

Exemple B.20. La sphère \mathbb{S}^{n-1} une variété différentielle de dimension $n - 1$.

Exemple B.21. L'espace $\mathbb{R}P^n$ une variété différentielle de dimension n .

B.2. Sur les espaces tangents d'une variété différentielle.

Soient M une variété différentielle de dimension n , p un point de M , ainsi que (U, ϕ) une carte de M centrée en p .

Définition B.22. Une *courbe* de M passant par p est une application continue $c:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ définie sur un voisinage de 0 satisfaisant $c(0) = p$ et telle que :

$$\phi \circ c: c^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

soit une application de classe C^∞ en 0.

Remarque B.23. La continuité de c assure que $c^{-1}(U)$ est un ouvert de $]-1, 1[$ qui contient 0, ainsi on peut sans peine parler de la régularité de $\phi \circ c$ en 0. En particulier, la définition B.22 est raisonnable.

Remarque B.24. Les changements de cartes de M étant C^∞ , la définition B.22 est indépendante de la carte de M centrée en p choisie.

Notation B.25. Soit $\Omega_p M$ l'ensemble des courbes de M qui passent par p .

Définition B.26. Soit $(c_1, c_2) \in \Omega_p M^2$, alors c_1 et c_2 sont *tangentes* en p si et seulement si on a $(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$.

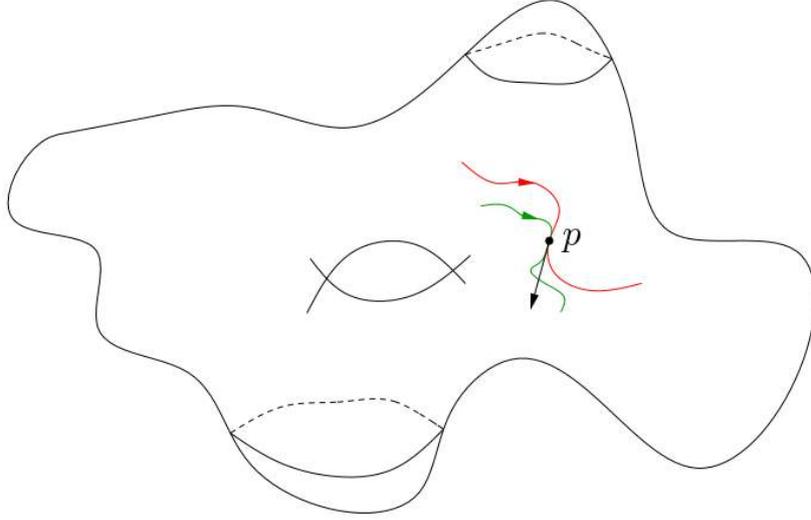


FIGURE 22. Illustration de la notion de tangence en un point.

Proposition B.27. On se donne (V, ψ) une autre carte de M centrée en p . Soit $(c_1, c_2) \in \Omega_p M^2$, alors c_1 et c_2 sont tangentes en p si et seulement si, on a :

$$(\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0).$$

Preuve. Soit $i \in \{1, 2\}$, sur l'ouvert $c_i^{-1}(U \cap V)$ contenant 0, on a :

$$\psi \circ c_i = (\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_i).$$

Dès lors, par différentiation en 0 et comme $\phi \circ c_i(0) = 0$, il vient :

$$(1) \quad d_0(\psi \circ c) = d_0(\psi \circ \phi^{-1}) \circ d_0(\phi \circ c).$$

Dès lors, en évaluant l'égalité (1) au point 1, on a :

$$(2) \quad (\psi \circ c_i)'(0) = d_0(\psi \circ \phi^{-1}) \cdot (\phi \circ c_i)'(0).$$

Or, $\psi \circ \phi^{-1}$ étant un C^∞ -difféomorphisme, $d_0(\psi \circ \phi^{-1}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est injective. Finalement, d'après (2), on en déduit que l'on a :

$$(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0) \Leftrightarrow (\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0).$$

D'où le résultat annoncé. ■

Remarque B.28. La proposition B.27 signifie que la définition B.26 est totalement indépendante de la carte de M centrée en p choisie.

Proposition B.29. La relation de tangence en p est d'équivalence sur $\Omega_p M$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la réflexivité, symétrie et transitivité de la relation d'égalité sur M . ■

Définition B.30. Soit $c \in \Omega_p M$, la classe d'équivalence de c pour la relation de tangence au point p est notée $[c]$, il s'agit d'un *vecteur tangent* à M en p . Leur ensemble noté $T_p M$ est appelé *espace tangent* de M en p .

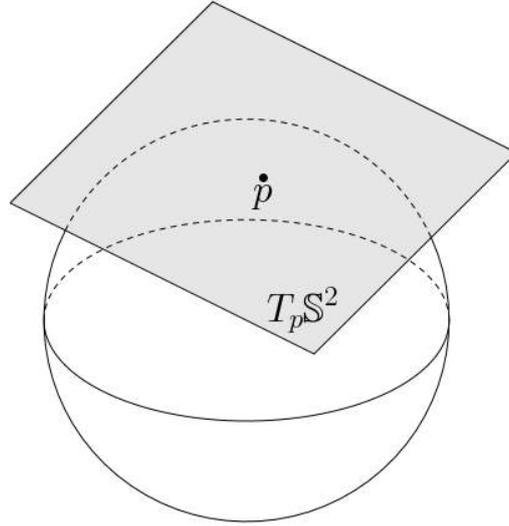


FIGURE 23. Un espace tangent d'une sphère en un point.

Proposition B.31. Le quotient $T_p M$ est un espace-vectoriel de dimension n .

Preuve. On commence par introduire l'application suivante :

$$\varphi: \begin{cases} T_p M & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ [c] & \mapsto & (\phi \circ c)'(0) \end{cases} .$$

On va montrer que φ est une bijection bien définie.

1. Soit $(c_1, c_2) \in \Omega_p M$ tangentes en p , alors par définition, on a :

$$(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0).$$

Finalement, φ ne dépend pas des représentants choisis dans $T_p M$.

2. Soient $[c_1]$ et $[c_2]$ dans $T_p M$ telles que $\varphi([c_1]) = \varphi([c_2])$, alors par définition les courbes c_1 et c_2 sont tangentes en p , c'est-à-dire que l'on a :

$$[c_1] = [c_2].$$

Finalement, φ est injective.

3. Soit v dans \mathbb{R}^n , on constate que $\phi^{-1}(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n qui contient 0. Par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on ait :

$$tv \in \phi^{-1}(U).$$

Par conséquent, comme $\phi: U \subseteq M \rightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme, on peut définir une application continue $c:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ par :

$$c(t) := \phi^{-1}(tv).$$

On constate alors que $c \in \Omega_p M$; en effet comme $\phi(p) = 0$, on a $c(0) = p$. En outre, l'application $\phi \circ c$ est C^∞ , puisque pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a :

$$\phi \circ c(t) = tv$$

En particulier, de cette dernière égalité, on déduit que l'on a :

$$\varphi([c]) = v.$$

Finalement, φ est surjective.

Finalement, on peut transporter la structure vectorielle de \mathbb{R}^n à $T_p M$ par φ . De manière explicite, pour $([c_1], [c_2]) \in \Omega_p M^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{aligned} [c_1] + [c_2] &:= \varphi^{-1}(\varphi([c_1]) + \varphi([c_2])) \\ \lambda[c_1] &:= \varphi^{-1}(\lambda\varphi([c_1])) \end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé. ■

Remarque B.32. La remarque B.28 assure que la structure vectorielle définie sur $T_p M$ est indépendante de la carte de M centrée en p choisie.

Définition B.33. Le *fibré tangent* de M noté TM est la somme ensembliste de tous les espaces tangents de M en tous ses points, c'est-à-dire que l'on a :

$$TM := \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p M).$$

Remarque B.34. Le fibré tangent de M peut être muni d'une structure de variété différentielle de dimension $2n$ indépendante des cartes de M , voir [9].

B.3. Applications différentiables entre variétés différentielles.

Soient M et N des variétés différentielles de dimensions respectives m et n . Soit p un point de M et soit $f: M \rightarrow N$ une application continue.

B.3.1. *Régularité d'une application entre variétés différentielles.*

Définition B.35. L'application f est C^∞ en p si et seulement si il existe (U, ϕ) une carte de M centrée en p , (V, ψ) une carte de N centrée en $f(p)$ telles que :

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(f^{-1}(V) \cap U) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

soit une application de classe C^∞ en 0.

Remarque B.36. La continuité de f assure que $\phi(f^{-1}(V) \cap U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^m qui contient 0, ainsi on peut sans peine parler de la régularité de l'application $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ en 0. En particulier, la définition B.35 est raisonnable.

Remarque B.37. Les changements de cartes des variétés M et N étant C^∞ , la définition B.35 ne dépend pas des cartes choisies.

Définition B.38. L'application f est de classe $C^\infty(M, N)$ si et seulement si elle est C^∞ en tout point de M .

B.3.2. *La différentielle d'une application entre variétés différentielles.*

Définition-Proposition B.39. Si f est de classe C^∞ en p , alors la *différentielle* de f en p est l'application $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ définie par :

$$d_p f([c]) := [f \circ c].$$

Il s'agit d'une application correctement définie : l'image d'un élément de $T_p M$ ne dépend pas du représentant choisi dans $\Omega_p M$.

Preuve. Soit $(c_1, c_2) \in \Omega_p M^2$ tangentes en p . On se donne aussi (U, ϕ) une carte de M centrée en p et (V, ψ) une carte de N centrée en $f(p)$ telles que :

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(f^{-1}(V) \cap U) \rightarrow \psi(V) \text{ soit } C^\infty \text{ en } 0.$$

Soit alors $i \in \{1, 2\}$, on remarque que sur l'ouvert $c_i^{-1}(f^{-1}(V) \cap U) \ni 0$, on a :

$$(3) \quad \psi \circ (f \circ c_i) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_i).$$

Or, d'après la remarque B.24, l'application $\phi \circ c_i$ est de classe C^∞ au point 0. Ainsi, d'après (3) et comme $(\phi \circ c_i)(0) = 0$, $\psi \circ (f \circ c_i)$ est de classe C^∞ en 0. Finalement, comme $(f \circ c_i)(0) = f(p)$, pour tout $i \in \{1, 2\}$, il vient :

$$f \circ c_i \in \Omega_{f(p)} N.$$

Pour conclure, il s'agit de montrer que $f \circ c_1$ et $f \circ c_2$ sont tangentes en $f(p)$. Soit $i \in \{1, 2\}$, comme $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est de classe C^∞ en 0 et que $(\phi \circ c_i)(0) = 0$, par différentiation de l'égalité (3) en 0, on a :

$$(4) \quad d_0(\psi \circ (f \circ c_i)) = d_0(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ d_0(\phi \circ c_i).$$

Dès lors, en évaluant l'égalité (4) au point 1, il vient :

$$(\psi \circ c_i)'(0) = d_0(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot (\phi \circ c_i)'(0).$$

Finalement, comme par hypothèse $(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$, on a :

$$(\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0).$$

D'où le résultat annoncé. ■

Proposition B.40. Si f est de classe C^∞ au point p , alors la différentielle de f en p est une application linéaire.

Preuve. Il s'agit de se rappeler de la structure vectorielle des espaces tangents. ■

Définition B.41. Si f est de classe $C^\infty(M, N)$, alors la *différentielle* de f est l'application $df: TM \rightarrow TN$ définie par :

$$df(p, v) := d_p f(v).$$

Remarque B.42. Soit f de classe $C^\infty(M, N)$, comme le fibré tangent d'une variété différentielle est lui-même muni d'une structure de variété différentielle, on peut récursivement définir les différentielles d'ordre supérieurs de f .

B.3.3. *Quelques applications régulières entre variétés différentielles.*

Définition B.43. L'application f est un C^∞ -difféomorphisme si et seulement si elle est $C^\infty(M, N)$ et qu'il existe $g: N \rightarrow M$ de classe $C^\infty(N, N)$ telle que :

$$g \circ f = \text{id}_M \text{ et } f \circ g = \text{id}_N.$$

Exemple B.44. Si (U, ϕ) est une carte de M , alors l'application $\phi: U \rightarrow \phi(U)$ est un C^∞ -difféomorphisme.

Définition B.45. Soit $p \in M$, l'application f est une *immersion* en p si et seulement si elle est C^∞ en p et $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est injective.

Définition B.46. L'application f est une *immersion* si et seulement si c'est une immersion en tout point de M .

Remarque B.47. Un C^∞ -difféomorphisme est une immersion.

Définition B.48. L'application f est un *plongement* si et seulement si c'est une immersion en tout point de M et un homéomorphisme sur son image.

Définition B.49. Soit $p \in M$, l'application f est une *submersion* en p si et seulement si elle est C^∞ en p et $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est surjective.

Définition B.50. L'application f est une *submersion* si et seulement si c'est une submersion en tout point de M .

Remarque B.51. Un C^∞ -difféomorphisme est une submersion.

ANNEXE C. LA GÉNÉRICITÉ DANS LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Cette annexe est consacrée à la formalisation de la notion de propriété générique, c'est-à-dire correspondant à l'intuition du vrai presque partout.

C.1. Ensembles négligeables d'une variété différentiable.

C.1.1. Le cas des espaces \mathbb{R}^n .

On commence par décrire la situation dans les espaces \mathbb{R}^n pour $n \geq 1$.

Définition C.1. Soit C un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , on dit que C est un n -pavé si et seulement s'il existe $(a_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ et $(b_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ dans \mathbb{R}^n avec $a_i < b_i$ tels que :

$$C = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i].$$

Définition C.2. Soit $C := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ un n -pavé, alors son *volume* noté $\text{vol}(C)$ est défini comme étant le réel positif suivant :

$$\text{vol}(C) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Remarque C.3. Soient C un n -pavé et λ un scalaire strictement positif, alors :

$$\text{vol}(\lambda C) = \lambda^n \cdot \text{vol}(C).$$

Définition C.4. Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , on dit que E est un *ensemble négligeable* de \mathbb{R}^n si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(C_k(\varepsilon))_{k \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de n -pavés qui recouvre E et qui satisfait :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \text{vol}(C_k(\varepsilon)) \leq \varepsilon.$$

Remarque C.5. Un sous-ensemble E de \mathbb{R}^n est négligeable si et seulement s'il est de mesure de Lebesgue nulle. En particulier, il est mesurable.

Exemple C.6. Si E est un sous-ensemble au plus dénombrable de \mathbb{R}^n , alors il est négligeable dans \mathbb{R}^n . En effet, soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une énumération de ces éléments, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $e_i := (x_{i,k})_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. Soit $\varepsilon > 0$, alors pour $i \in \mathbb{N}$, on définit :

$$C_i(\varepsilon) := \prod_{k=1}^n \left[x_{i,k} - \left(\frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \right)^{1/n}, x_{i,k} + \left(\frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \right)^{1/n} \right].$$

Par construction, $C_i(\varepsilon)$ est un n -pavé qui contient e_i et l'on a :

$$\text{vol}(C_i(\varepsilon)) = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Finalement, $(C_i(\varepsilon))_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de n -pavés qui recouvre l'ensemble E et qui satisfait l'égalité suivante :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \text{vol}(C_i(\varepsilon)) = \varepsilon.$$

Proposition C.7. Une union dénombrable d'ensembles négligeables de \mathbb{R}^n est encore un ensemble négligeable de \mathbb{R}^n .

Preuve. Soit $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ensembles négligeables de \mathbb{R}^n . On introduit alors E leur union :

$$E := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k.$$

Soit $\varepsilon > 0$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, il existe $(C_{k,\ell}(\varepsilon))_{\ell \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de n -pavés qui recouvre E_k et qui satisfait :

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \text{vol}(C_{k,\ell}(\varepsilon)) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

On en déduit que $(C_{k,\ell}(\varepsilon))_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille dénombrable de n -pavés qui recouvre l'ensemble E et qui satisfait l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \text{vol}(C_{k,\ell}(\varepsilon)) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

D'où le résultat annoncé. ■

C.1.2. Le cas des variétés différentielles abstraites.

Sur une variété différentiable abstraite, on se ramène à la situation décrite dans la sous-partie C.1.1 par l'intermédiaire de ses cartes ; on aura alors besoin du :

Lemme C.8. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Si E est un ensemble négligeable de \mathbb{R}^n , alors $f(E)$ est encore négligeable.

Preuve. Comme U est ouvert dans \mathbb{R}^n , il existe $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de boules ouvertes qui recouvre U , alors comme E est inclus dans U , il vient :

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E \cap B_k.$$

Dès lors, en prenant l'image directe par f de l'égalité précédente, il vient :

$$f(E) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(E \cap B_k).$$

Ainsi, d'après la proposition C.7, il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $f(E \cap B_k)$ est négligeable dans \mathbb{R}^n . Soit $\varepsilon > 0$, il existe $(C_\ell(\varepsilon))_{\ell \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de n -pavés recouvrant E et satisfaisant :

$$(1) \quad \sum_{\ell=0}^{+\infty} \text{vol}(C_\ell(\varepsilon)) \leq \varepsilon.$$

Soit $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ associée à la norme infini sur \mathbb{R}^n . L'application df étant continue sur le compact $\overline{B_k}$, il existe $M_k > 0$ tel que :

$$\forall x \in \overline{B_k}, \|d_x f\| \leq M_k.$$

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis², $f|_{B_k}$ est M_k -lipschitzienne. Dès lors, $f(C_\ell(\varepsilon) \cap B_k)$ est contenue dans un n -pavé $D_{k,\ell}(\varepsilon)$ satisfaisant :

$$(2) \quad \text{vol}(D_{k,\ell}(\varepsilon)) \leq M_k^n \cdot \text{vol}(C_\ell(\varepsilon)).$$

Or, comme $(C_\ell(\varepsilon))_{\ell \in \mathbb{N}}$ recouvre E , $(C_\ell(\varepsilon) \cap B_k)_{\ell \in \mathbb{N}}$ recouvre $E \cap B_k$ et il vient :

$$f(E \cap B_k) \subseteq \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} f(C_{k,\ell}(\varepsilon) \cap B_k) \subseteq \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} D_{k,\ell}(\varepsilon).$$

Finalement, $(D_{k,\ell}(\varepsilon))_{\ell \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de n -pavés qui recouvre l'ensemble $f(E \cap B_k)$; par ailleurs, d'après (1) et (2), on a :

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \text{vol}(D_{k,\ell}(\varepsilon)) \leq M_k^n \cdot \varepsilon.$$

D'où le résultat annoncé. ■

Définition C.9. Soient M une variété différentielle de dimension n et E un sous-ensemble de M , alors E est un *ensemble négligeable* de M si et seulement si quel que soit $p \in M$, il existe (U, ϕ) une carte de M centrée en m telle que l'ensemble $\phi(E \cap U)$ soit négligeable dans $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

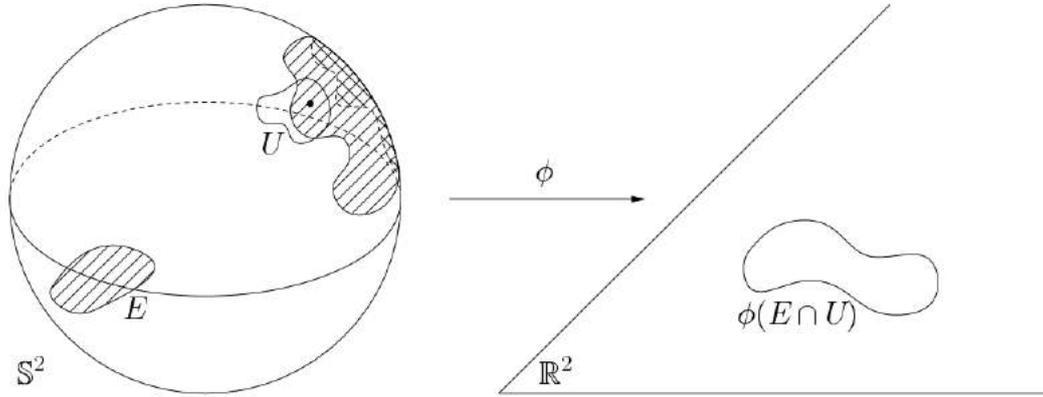


FIGURE 24. Un ensemble non négligeable de S^2 .

Remarque C.10. La définition C.9 ne dépend pas des cartes choisies : il suffit d'appliquer le lemme C.8 aux changements de cartes de M qui sont C^∞ .

Proposition C.11. Soit M une variété différentielle, une réunion dénombrable d'ensembles négligeables de M est encore un ensemble négligeable de M .

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition C.7. ■

Définition C.12. Soit M une variété différentielle, on dit qu'une propriété est vraie *presque partout* sur M si et seulement si elle est satisfaite sur le complémentaire d'un ensemble négligeable de M .

2. Pour appliquer l'inégalité des accroissements finis, on remarquera que B_k est convexe.

C.2. Valeurs régulières, critiques et théorème de Sard.

On énonce le théorème de Sard qui constitue un outil redoutablement efficace pour établir la généricité de certaines propriétés sur les variétés différentielles. On pourra voir ce résultat comme un raffinement du lemme C.8.

Soient M et N deux variétés différentielles.

Définition C.13. Soient $f: M \rightarrow N$ de classe $C^\infty(M, N)$ et q un point de N , alors n est une *valeur régulière* de f si et seulement si pour tout $p \in f^{-1}(\{q\})$, l'application linéaire $d_p f: T_p M \rightarrow T_q N$ est surjective.

Remarque C.14. Soient $f: M \rightarrow N$ de classe $C^\infty(M, N)$ et q un point de N . Si q n'est pas dans l'image de f , alors q est une valeur régulière de f .

Définition C.15. Soient $f: M \rightarrow N$ de classe $C^\infty(M, N)$ et $q \in N$, alors q est une *valeur critique* de f si et seulement si ce n'est pas une valeur régulière.

Remarque C.16. Soient $f: M \rightarrow N$ de classe $C^\infty(M, N)$, alors les valeurs critiques de f sont des éléments de l'image de f .

Définition C.17. Un espace topologique est *dénombrable à l'infini* si et seulement s'il est réunion dénombrable de compacts.

On consultera [7] pour une preuve du classique :

Théorème C.18. (de Sard) Soit $f: M \rightarrow N$ une application de classe $C^\infty(M, N)$. Si M est dénombrable à l'infini, alors l'ensemble des valeurs critiques de f est un ensemble négligeable de N .

ANNEXE D. UN PEU DE TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE ÉLÉMENTAIRE

Dans cette annexe, on s'attache à développer les notions de topologie algébrique nécessaires à la bonne compréhension de notre rapport.

D.1. Homotopies d'applications continues.

Soient X et Y deux espaces topologiques, on suppose X localement compact. On munit alors l'espace $C^0(X, Y)$ de la topologie compacte-ouverte³.

Définition D.1. Soient $f: X \rightarrow Y$ et $g: X \rightarrow Y$ deux applications continues, alors f et g sont *homotopes* si et seulement s'il existe une application continue $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ dite *homotopie* de f à g telle que $H(\cdot, 0) = f$ et $H(\cdot, 1) = g$.

Proposition D.2. La relation d'homotopie est d'équivalence sur $C^0(X, Y)$.

Preuve. Soient $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$ et $h: X \rightarrow Y$ continues.

1. L'application $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ définie par :

$$H(x, t) = f(x)$$

est une homotopie de f à f et la relation d'homotopie est réflexive.

2. Supposons que $G: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ soit une homotopie de f à g , alors l'application $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ définie par :

$$H(x, t) = G(x, 1 - t)$$

est une homotopie de g à f et la relation d'homotopie est symétrique.

3. Supposons que $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ et $G: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ soient des homotopies de f à g et de g à h , alors l'application $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ définie par :

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & t \in [0, 1/2] \\ G(x, 2t - 1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est une homotopie de f à h et la relation d'homotopie est transitive.

D'où le résultat annoncé. ■

Pour faire le lien entre homotopies et chemins dans $C^0(X, Y)$, montrons le :

Lemme D.3. Soient A un espace topologique, $a_0 \in A$ et B un espace compact. Soit U un ouvert de $A \times B$ muni de la topologie produit⁴, si U contient $\{a_0\} \times B$, alors il existe V un ouvert de A satisfaisant :

$$\{a_0\} \times B \subseteq V \times B \subseteq U.$$

3. La topologie compacte-ouverte est engendrée par les ensembles suivants :

$$V(K, U) := \{f \in C^0(X, Y) \text{ t.q } f(K) \subseteq U\},$$

où K est un compact de X et U est un ouvert de Y . Notons que si Y est un espace métrique, il s'agit seulement de la topologie de la convergence localement uniforme sur X .

4. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques, on note alors X leur produit cartésien. La topologie produit sur X est engendrée par les $p_i^{-1}(U_i)$, où $p_i: X \rightarrow X_i$ est la projection sur le facteur X_i et U_i est un ouvert de X_i .

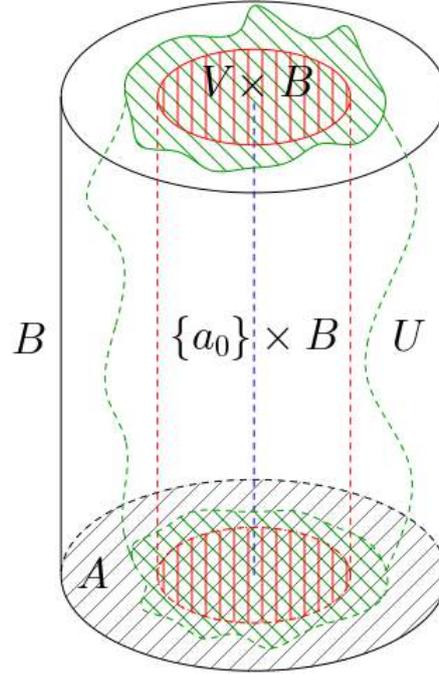


FIGURE 25. Illustration du résultat du lemme D.3.

Preuve. Quel que soit $b \in B$, on a $(a_0, b) \in U$ qui est un ouvert de $A \times B$. Ainsi, par construction de la topologie produit, il existe V_b un ouvert de A , ainsi que W_b un ouvert de B tels que :

$$(1) \quad (a_0, b) \in V_b \times W_b \subseteq U.$$

On constate alors que la famille $(W_b)_{b \in B}$ est un recouvrement ouvert de B . Par compacité, on peut alors en extraire $(W_{b_i})_{1 \leq i \leq n}$ un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire que l'on a l'égalité suivante :

$$(2) \quad B = \bigcup_{i=1}^n W_{b_i}.$$

On introduit $V := \bigcap_{i=1}^n V_{b_i}$, d'après (1), il s'agit d'un ouvert de A contenant a_0 .

En particulier, on en déduit immédiatement que l'on a :

$$(3) \quad \{a_0\} \times B \subseteq V \times B.$$

Soit désormais $(a, b) \in V \times B$, d'après (2), il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $b \in W_{b_i}$. Or, par construction de V , on a $a \in V_{b_i}$ et on en déduit que $(a, b) \in V_{b_i} \times W_{b_i}$. Finalement, d'après (1), on a $(a, b) \in U$, ce qui implique alors que l'on ait :

$$(4) \quad V \times B \subseteq U.$$

D'où le résultat annoncé, d'après (3) et (4). ■

Proposition D.4. Soient $f: X \rightarrow Y$ et $g: X \rightarrow Y$ deux applications continues, alors f et g sont homotopes si et seulement si f et g sont dans la même composante connexe par arcs de $C^0(X, Y)$.

Preuve. On procède par double implication.

1. Supposons que $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ soit une homotopie de f à g , on introduit alors l'application $\gamma: [0, 1] \rightarrow C^0(X, Y)$ définie par :

$$\gamma(t) := H(\cdot, t).$$

Tout d'abord, vérifions que γ est effectivement à valeurs dans $C^0(X, Y)$. Soient $t \in [0, 1]$, U un ouvert de Y et $x \in \gamma(t)^{-1}(U)$, alors, il vient :

$$(x, t) \in H^{-1}(U).$$

Or, l'application H étant continue, $H^{-1}(U)$ est un ouvert de $X \times [0, 1]$. Dès lors, par définition de la topologie produit, il existe V un voisinage ouvert de x dans X et I un voisinage ouvert de t dans $[0, 1]$ tels que :

$$(x, t) \in V \times I \subseteq H^{-1}(U).$$

En particulier, cela signifie que l'on a :

$$x \in V \subseteq \gamma(t)^{-1}(U).$$

Finalement, on a montré que $\gamma(t)^{-1}(U)$ est ouvert dans X et $\gamma(t) \in C^0(X, Y)$. Pour conclure, il s'agit désormais d'établir la continuité de l'application γ . Par construction de la topologie compacte-ouverte, il suffit de voir que pour tous K compact de X et U ouvert de Y , $\gamma^{-1}(V(K, U))$ est ouvert dans $[0, 1]$. Soit $t \in \gamma^{-1}(V(K, U))$, on constate que l'on a :

$$K \times \{t\} \subseteq H^{-1}(U).$$

Or, l'application H étant continue, $H^{-1}(U)$ est un ouvert de $X \times [0, 1]$. Par conséquent, comme K est compact, d'après le lemme D.3, il existe I un ouvert de l'intervalle $[0, 1]$ tel que :

$$K \times \{t\} \subseteq K \times I \subseteq H^{-1}(U).$$

En particulier cela signifie que l'on a :

$$t \in I \subseteq \gamma^{-1}(V(K, U)).$$

On en déduit que $\gamma^{-1}(V(K, U))$ est ouvert dans $[0, 1]$ et γ est continue. Finalement, γ est un chemin de f et g dans $C^0(X, Y)$.

2. Supposons que $\gamma: [0, 1] \rightarrow C^0(X, Y)$ soit un chemin de f à g , on introduit alors l'application $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ définie par :

$$H(x, t) = \gamma(t)(x).$$

On introduit l'application d'évaluation sur $C^0(X, Y)$, il s'agit de :

$$\text{ev}: \begin{cases} X \times C^0(X, Y) & \rightarrow & Y \\ (x, f) & \mapsto & f(x) \end{cases} .$$

On constate alors que l'on a :

$$H = \text{ev} \circ (\text{id}_X, \gamma).$$

Ainsi, γ est continue, l'application (id_X, γ) est également continue. En particulier, pour établir la continuité de H , il suffit d'établir celle de ev . Soient U un ouvert de Y et $(x, f) \in \text{ev}^{-1}(U)$, on constate alors que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X contenant x et par locale compacité de X , il existe W un voisinage ouvert de x dans X d'adhérence compacte dans X satisfaisant :

$$x \in W \subseteq f^{-1}(U).$$

On introduit alors V l'ouvert de $X \times C^0(X, Y)$ définie par :

$$V := W \times V(\overline{W}, U).$$

Par définition de l'application ev et par construction de V , il vient :

$$(x, f) \in V \subseteq \text{ev}^{-1}(U).$$

On en déduit que $\text{ev}^{-1}(U)$ est ouvert dans $X \times C^0(X, Y)$ et ev est continue. Finalement, H est une homotopie de f à g .

D'où le résultat annoncé. ■

D.2. Ensembles d'homotopie, applications induites et revêtements.

Soient X et Y deux espaces topologiques totalement quelconques.

Définition D.5. Soit $x \in X$, on note $[x]_0$ la composante connexe par arcs de x dans X et $\pi_0(X)$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X .

Remarque D.6. D'après la proposition D.4, $\pi_0(X)$ s'identifie avec les classes d'équivalence de $C^0(\{0\}, X)$ pour la relation d'homotopie.

Lemme D.7. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue et $(x, y) \in X^2$. Si x et y sont dans la même composante connexe par arcs de X , alors $f(x)$ et $f(y)$ sont dans la même composante connexe par arcs de Y .

Preuve. Soit $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ soit un chemin de x à y , alors $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow Y$ est un chemin de $f(x)$ à $f(y)$, c'est-à-dire que $f(x)$ et $f(y)$ sont dans la même composante connexe par arcs de Y . D'où le résultat annoncé. ■

Définition D.8. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue, alors l'*application induite* par f sur les π_0 est l'application $f_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ définie par :

$$f_*([x]_0) = [f(x)]_0.$$

Le lemme D.7 assure la bonne définition de cette application.

Définition D.9. Si l'on désigne par \mathbb{S}^1 le quotient $[0, 1]/\partial[0, 1]$, alors l'*espace des lacets* de X est $C^0(\mathbb{S}^1, X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Définition D.10. Si X est connexe par arcs, on désigne par $\pi_1^*(X)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de l'espace des lacets de X .

Remarque D.11. D'après la proposition D.4, $\pi_1^*(X)$ s'identifie au quotient de l'espace $C^0(\mathbb{S}^1, X)$ pour la relation d'homotopie.

Si x est un point de X , on note $\pi_1(X, x)$ le *groupe fondamental* de X basé en x . On se contentera de décrire ses éléments comme les classes d'homotopie des lacets de X basé en x sans imposer aux homotopies d'être à extrémités fixées. On consultera [5] pour une exposition détaillée du groupe fondamental.

Proposition D.12. Si X est connexe par arcs et x est un point de X , alors l'inclusion naturelle $\iota: \pi_1(X, x) \hookrightarrow \pi_1^*(X)$ est surjective.

Preuve. Soit $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ continue, il s'agit de montrer que f est homotope à un lacet de X basé en x . Or, comme X est connexe par arcs, il existe une application continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ telle que l'on ait $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = f(0)$. Dès lors, on introduit l'application continue $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ définie par :

$$g(x) := \begin{cases} \gamma(3x) & x \in [0, 1/3] \\ f(3x - 1) & x \in [1/3, 2/3] \\ \gamma(3 - 3x) & x \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

On vérifie que g d'un lacet de X basé en x ; en effet, on a $g(0) = x = g(1)$. Pour se donner une idée de ce que représente g , on verra les figures 26 et 28. Il s'agit tout d'abord de parcourir γ , puis f et enfin de suivre γ à contresens.

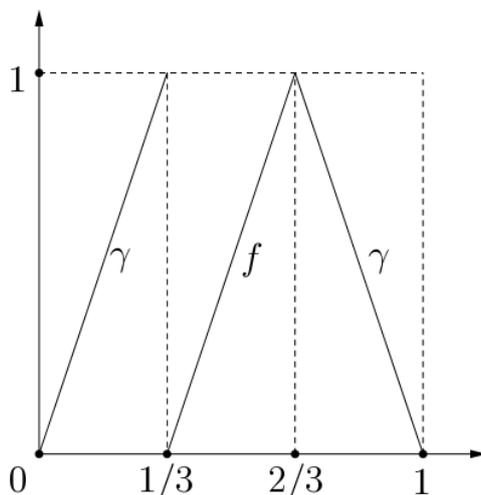


FIGURE 26. Diagramme de concaténation pour g .

Pour conclure, il suffit de voir que f est homotope à g , ce que l'on va montrer en rétractant continument le lacet γ sur le point $f(0)$ de X , voir la figure 27. Rigoureusement, on introduit l'application $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ définie par :

$$H(x, t) := \begin{cases} \gamma(3x + 1 - t) & x \in [0, t/3] \\ f\left(\frac{3x - t}{3 - 2t}\right) & x \in [t/3, 1 - t/3] \\ \gamma(4 - t - 3x) & x \in [1 - t/3, 1]. \end{cases}$$

Pour se donner une idée de ce que représente H , on verra les figures 27 et 28. Au temps $t \in [0, 1]$, il s'agit tout d'abord de parcourir γ à partir du point $\gamma(1 - t)$, puis f et enfin de suivre γ à contresens jusqu'au point $\gamma(1 - t)$.

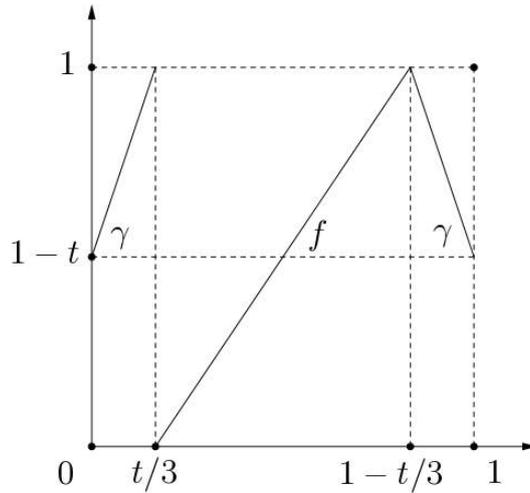


FIGURE 27. Diagramme de concaténation pour $H(\cdot, t)$, $t \in [0, 1]$.

Tout d'abord, H est correctement définie puisque pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$H(0, t) = \gamma(1 - t) = H(1, t).$$

On vérifie également que H est continue et telle que $H(\cdot, 0) = f$, $H(\cdot, 1) = g$.

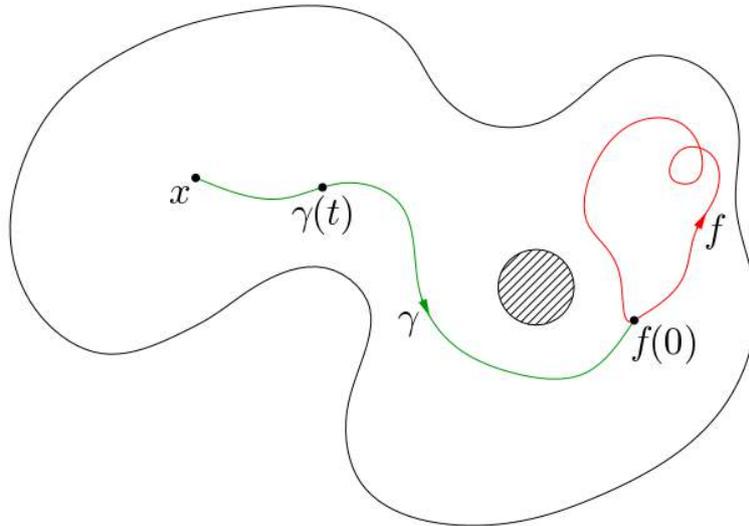


FIGURE 28. Un lacet de X est homotope à un lacet de X basé en x .

D'où le résultat annoncé. ■

Remarque D.13. Si l'on se proposait pour décrire plus précisément $\pi_1(X, x)$, on compléterait la preuve de la proposition D.12 en montrant que ι induit une correspondance bijective entre les classes de conjugaison de $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1^*(X)$. En particulier, si $\pi_1(X, x)$ est abélien, alors il est en bijection avec $\pi_1^*(X)$.

Définition D.14. Soient T et B deux espaces topologiques, alors une application continue $\pi: T \rightarrow B$ est un *revêtement* de base B et d'espace total T si et seulement si pour tout point $b \in B$, il existe V_b un voisinage ouvert de b dans B et $\{U_{b,i}\}_{i \in I}$ une collection d'ouverts disjoints de T tels que :

$$\pi^{-1}(V_b) = \bigcup_{i \in I} U_{b,i}$$

et que pour tout $i \in I$, $\pi|_{U_{b,i}}: U_{b,i} \rightarrow V_b$ soit un homéomorphisme.

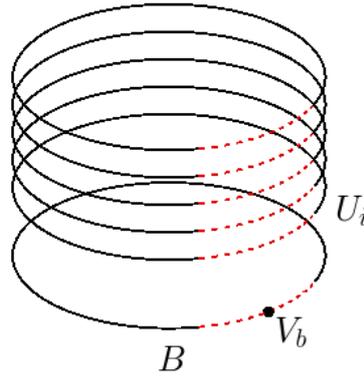


FIGURE 29. Schématisation d'un revêtement.

Exemple D.15. L'application $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ définie par la formule :

$$p(x) := (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

est un revêtement de \mathbb{S}^1 par \mathbb{R} , voir la figure 30.

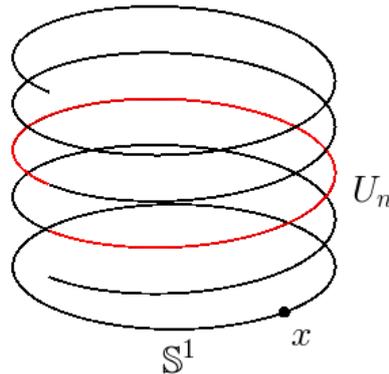


FIGURE 30. Le revêtement du cercle par la droite.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $x = (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta))$. Soit alors V_x le voisinage ouvert de x dans \mathbb{S}^1 défini par :

$$V_x := \left\{ (\cos(2\pi(\theta + t)), \sin(2\pi(\theta + t))); t \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\right\}.$$

Désormais, pour $n \in \mathbb{Z}$, on introduit $U_{x,n}$ l'ouvert de \mathbb{R} défini par :

$$U_{x,n} := \left] \theta - \frac{1}{2} + n, \theta + \frac{1}{2} + n \right[.$$

On constate que $\{U_{x,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une collection d'ensemble disjoints telle que :

$$p^{-1}(V_x) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_{x,n}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $p|_{U_{x,n}} : U_{x,n} \rightarrow V_x$ est un homéomorphisme.

D.3. Degré d'une application continue du cercle dans le cercle.

On note \mathbb{S}^1 le cercle unité de \mathbb{R}^2 muni de sa norme euclidienne standard $\|\cdot\|$. On identifiera indifféremment \mathbb{S}^1 avec le quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} . De plus, l'application $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ désignera systématiquement le revêtement de l'exemple D.15.

Définition D.16. Soient $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ et $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ continues, alors θ est un *relèvement* de f si et seulement si elle fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}^1 \\ f \uparrow & \nearrow \theta & \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

En d'autres termes, θ est un relèvement de f si et seulement si $f = p \circ \theta$.

Remarque D.17. Un relèvement d'une application continue de $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ correspond à une mesure continue de son angle.

On consultera [5] pour une preuve de cette technique mais non moins classique :

Théorème D.18. Soit $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ continue, alors f admet un relèvement.

Remarque D.19. La preuve consiste essentiellement à exploiter le fait que $p: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est un revêtement et admet à ce titre des sections locales.

Proposition D.20. Soient $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une application continue et $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un relèvement de f , alors $\theta(1) - \theta(0)$ est un entier relatif indépendant de θ .

Preuve. On montre les deux propriétés indépendamment.

1. On remarque que $f(0) = f(1)$, dès lors $\theta(1) - \theta(0) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un autre relèvement de f , alors $\theta - \phi$ est une application continue à valeur dans \mathbb{Z} et il existe donc $a \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\theta = \phi + a.$$

Finalement, on a $\theta(1) - \theta(0) = \phi(1) - \phi(0)$.

D'où le résultat annoncé. ■

Définition D.21. Soit $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une application continue, on appelle *degré* de l'application f et l'on note $\deg(f)$ l'entier relatif donné par $\theta(1) - \theta(0)$, où $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un relèvement quelconque de f .

Remarque D.22. Le degré d'une application continue $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ correspond à la variation globale d'une mesure continue de son angle. Géométriquement, il s'interprète comme le nombre de tours complets réalisés par f .

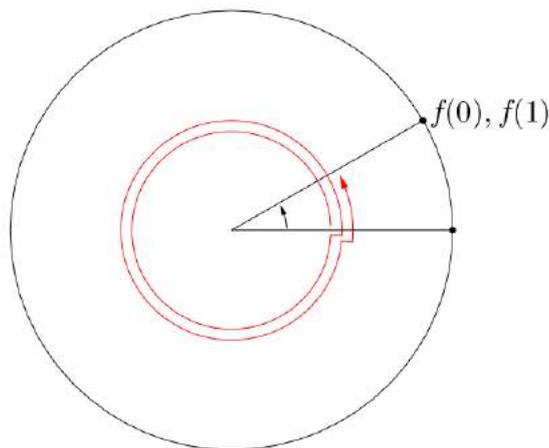


FIGURE 31. Interprétation géométrique du degré d'une application continue $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Lemme D.23. Soient $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ et $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ deux applications continues. Si f et g ne sont jamais antipodales, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| < 2,$$

alors f et g ont le même degré.

Preuve. Soit $\theta_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, respectivement $\theta_g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, un relèvement de f , respectivement un relèvement de g , alors par hypothèse, on a :

$$\theta_f(0) - \theta_g(0) \not\equiv \frac{1}{2} \pmod{[1]}.$$

Dans le cas contraire, on aurait alors :

$$\|f(0) - g(0)\| = 2\|f(0)\| = 2,$$

ce qui n'est pas. Dès lors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que l'on ait :

$$(5) \quad |\theta_f(0) - \theta_g(0) - k| < \frac{1}{2}.$$

En particulier, on en déduit que l'on a :

$$(6) \quad |\theta_f(1) - \theta_g(1) - k| < \frac{1}{2}.$$

Si ce n'était pas le cas, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $|\theta_f - \theta_g - k| - 1/2$ assurerait l'existence de $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$|\theta_f(x) - \theta_g(x)| = \frac{1}{2}.$$

En particulier, on aurait alors :

$$\|f(x) - g(x)\| = 2\|f(x)\| = 2,$$

ce qui n'est pas. Enfin, d'après les inégalités (5) et (6), il vient :

$$|\deg(f) - \deg(g)| \leq |\theta_f(1) - \theta_g(1) - k| + |\theta_g(0) - \theta_f(0) + k| < 1.$$

Finalement, $\deg(f)$ et $\deg(g)$ étant entiers, on a le résultat annoncé. ■

Corollaire D.24. Soient $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ et $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ des applications continues. Si f et g sont homotopes, alors f et g ont le même degré.

Preuve. Soit $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ une homotopie de f à g , alors comme $[0, 1]$ est compact, l'application donnée par $t \mapsto H(\cdot, t)$ est uniformément continue. En particulier, il existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{S}^1, \forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2, |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow \|H(x, t_1) - H(x, t_2)\| < 2.$$

Dès lors, pour $n \geq \max(1, 1/\delta)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{S}^1, \forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \left\| H\left(x, \frac{j}{n}\right) - H\left(x, \frac{j+1}{n}\right) \right\| < 2.$$

Finalement, d'après le lemme D.23, il vient :

$$\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \deg\left(H\left(\cdot, \frac{j}{n}\right)\right) = \deg\left(H\left(\cdot, \frac{j+1}{n}\right)\right).$$

En particulier, on en déduit que l'on a :

$$\deg(H(\cdot, 0)) = \deg(H(\cdot, 1)).$$

D'où le résultat annoncé, puisque $H(\cdot, 0) = f$ et $H(\cdot, 1) = g$. ■

Théorème D.25. Le degré induit une bijection bien définie de $\pi_1^*(\mathbb{S}^1)$ sur \mathbb{Z} .

Preuve. On montre indépendamment chacune des propriétés.

1. Soient $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ et $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ des applications continues et homotopes, alors d'après le corollaire D.24, f et g ont même degré, c'est-à-dire que le degré ne dépend pas de la classe d'homotopie dans $C^0(\mathbb{S}^1, X)$. Finalement, $\deg: C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ passe au quotient pour la relation être homotope.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$, on définit l'application continue $f_n: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ par la formule :

$$f_n(x) := (\cos(2\pi nx), \sin(2\pi nx)).$$

On constate que l'application $\theta_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\theta_n(x) := nx$ est un relevé de f_n , ainsi $\deg(f_n) = n$ et $\deg: C^0(\mathbb{S}^1, X) \rightarrow \mathbb{Z}$ est surjective.

3. Soient $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ et $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ continues et de même degré, il s'agit de faire voir que f et g sont homotopes. Soient $\theta_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, respectivement $\theta_g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, un relevé de f , respectivement de g . Afin de se ramener au cas où l'on a $f(0) = g(0)$, on introduit l'angle suivant :

$$\phi := \theta_f(0) - \theta_g(0).$$

On introduit alors l'application continue $\bar{g}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ définie par :

$$\bar{g}(x) = p(\theta_g(x) + \phi).$$

On remarque que g et \bar{g} sont homotopes, ce qui peut être accompli par :

$$G: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (x, t) & \mapsto p(\theta_g(x) + t\phi) \end{cases} .$$

Il suffit alors de montrer que f et \bar{g} sont homotopes. Soit alors $\theta_{\bar{g}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un relevé de \bar{g} , comme $f(0) = \bar{g}(0)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$(7) \quad \theta_{\bar{g}}(0) = \theta_f(0) + k.$$

Or, g et \bar{g} étant homotopes, d'après le corollaire D.24, elles ont même degré. Ainsi, par hypothèse, f et \bar{g} ont même degré, c'est-à-dire que l'on a :

$$\theta_{\bar{g}}(1) - \theta_{\bar{g}}(0) = \theta_f(1) - \theta_f(0).$$

Dès lors, d'après (7), il vient :

$$(8) \quad \theta_{\bar{g}}(1) = \theta_f(1) + k.$$

Désormais, on définit l'application $H: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$ par la formule :

$$H(x, t) = p((1 - t)\theta_f(x) + t\theta_{\bar{g}}(x)).$$

Il s'agit d'une homotopie bien définie de f à \bar{g} ; en effet d'après (7) et (8) :

$$\forall t \in [0, 1], H(0, t) = H(1, t).$$

Finalement, l'application induite par le degré sur $\pi_1^*(\mathbb{S}^1)$ est injective.

D'où le résultat annoncé. ■

Remarque D.26. Comme le groupe fondamental de \mathbb{S}^1 basé en n'importe lequel de ses points est isomorphe à \mathbb{Z} , voir [5], le résultat du théorème D.25 est en accord avec l'affirmation de la remarque D.13.

RÉFÉRENCES

- [1] M. Adachi. *Embeddings and Immersions*. American Mathematical Society, 1993.
- [2] C. Adams. *The Knot Book : An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. American Mathematical Society, 2004.
- [3] M. Berger ; B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Broché, 2013.
- [4] Y. Eliashberg ; N. Mishachev. *Introduction to the h-principle*. American Mathematical Society, 2002.
- [5] C. Godbillon. *Éléments de topologie algébrique*. Hermann, 1971.
- [6] H. Geiges. *h-principles and Flexibility in Geometry*. Memoirs of the American Mathematical Society, 2003.
- [7] V. Guillemin ; A. Pollack. *Differential topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [8] M. Hirsch. *Differential topology*. Springer, 1976.
- [9] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences, 2010.
- [10] J. Milnor. *Topology from the differentiable view point*. Princeton Landmarks, 1965.
- [11] E. H. Moore. On certain crinkly curves. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1 :72–90, 1900.
- [12] J. Munkres. *Topology*. Pearson, 2000.
- [13] H. Whitney. Differentiable manifolds. *The Annals of Mathematics*, 3 :645–680, 1936.
- [14] H. Whitney. On regular closed curves in the plane. *Compositio Mathematica*, 4 :276–284, 1937.

ANNEXE F. MON COURS SPÉCIFIQUE DE MAGISTÈRE 3^E ANNÉE

Les pages suivantes constituent mon cours spécifique de magistère 3e année. Il s'agit d'une présentation autour de l'exposé de Sylvain Courte lors de la conférence *Topologie différentielle et mathématiques d'aujourd'hui* à Orsay.

Le résultat principal de cet exposé est le suivant :

Théorème. Un plongement lagrangien exact stablement trivial admet une famille génératrice domptée à l'infinie.

Des obstructions plus élémentaires sont également discutés dans mon dossier.

TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE ET MATHÉMATIQUES D'AUJOURD'HUI

CYRIL FALCON

RÉSUMÉ. Dans ce rapport, nous revenons sur l'exposé de Sylvain Courte de l'Université Grenoble Alpes donné lors de la conférence en l'honneur de Jean Cerf au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay du 11 au 13 juin 2018. Ce travail constitue le cours supplémentaire de l'auteur pour sa troisième année de magistère de mathématiques à l'Université Paris-Sud.

INTRODUCTION

En 1956, John Milnor a exhibé dans son article novateur [12], les premiers exemples de variétés différentielles homéomorphes, mais non difféomorphes, à la sphère euclidienne standard de dimension sept. Ce résultat ouvrait alors la chasse aux *sphères exotiques*, à savoir aux structures différentielles sur les sphères qui ne sont pas équivalentes à la structure euclidienne standard.

Les topologues du monde entier se sont alors rapidement efforcés de déterminer toutes les structures différentielles non équivalentes de la sphère, ce problème se révèle être d'une richesse inouïe. Mentionnons qu'à ce jour, nous ignorons toujours s'il existe des structures exotiques sur la sphère de dimension quatre. Les sphères de dimension au plus trois sont dépourvues de structures exotiques, ce qui se montre facilement en dimension un et deux et pour la dimension trois, c'est, par exemple, une conséquence de la conjecture (théorème) de Poincaré.

Présentons l'une des stratégies utilisée pour construire des sphères exotiques. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considérons $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ un difféomorphisme qui préserve l'orientation et notons S_f la variété obtenue par recollement de deux copies du n -disque standard le long de leurs bords selon l'identification donnée par f :

$$S_f = D^n \cup_f D^n.$$

D'après John Milnor dans [13], S_f est homéomorphe à la n -sphère standard, mais ne lui est pas nécessairement difféomorphe, il s'agit d'une *sphère tordue*. Notons qu'une variété compacte sans bord munie d'une fonction de Morse ayant exactement deux points critiques est un exemple de sphère tordue.

Les sphères tordues revêtent une importance cruciale dans le problème de classification des structures différentielles de la sphère, puisque des travaux de Stephen Smale, comme son article [16] de 1961, établissent qu'en dimension au moins cinq, toute sphère exotique est difféomorphe à une sphère tordue.

Dès lors, nous concentrons désormais notre attention sur le problème de classification de toutes les structures tordues non équivalentes de la sphère. Nous équipons l'ensemble des classes de difféomorphismes de n -sphères tordues de la somme connexe, de sorte à obtenir un groupe abélien Γ_n et la suite exacte :

$$\pi_0 \text{Diff}^+(D^n) \rightarrow \pi_0 \text{Diff}^+(S^{n-1}) \rightarrow \Gamma_n \rightarrow 0.$$

Nous devons à Jean Cerf le résultat révolutionnaire suivant :

Théorème (J. Cerf, 1968, [3]). Le groupe des difféomorphismes qui préservent l'orientation de S^3 est connexe par arcs.

Nous en déduisons immédiatement $\Gamma_4 = 0$, ce qui a rendu célèbre Jean Cerf. Cette égalité est d'une importance capitale dans le problème d'existence de structures exotiques sur la sphère de dimension quatre puisqu'il anéantit tout espoir de les construire comme structures tordues.

Concluons sur les sphères exotiques, en évoquant enfin un autre théorème de Jean Cerf permettant cette fois-ci le calcul de Γ_n en grande dimension.

Définition. Soit M une variété différentielle, une *pseudo-isotopie* de M est un difféomorphisme ψ de $M \times [0, 1]$ fixant ponctuellement $(M \times \{0\}) \cup (\partial M \times [0, 1])$. Nous disons que le difféomorphisme $\psi(\cdot, 1)$ de M est *pseudo-isotope à l'identité*.

Dans ce contexte, Jean Cerf a démontré le résultat suivant :

Théorème (J. Cerf, 1970, [4]). Soit M une variété simplement connexe de dimension au moins cinq, alors un difféomorphisme de M est isotope à l'identité si, et seulement s'il est pseudo-isotope à l'identité.

Nous en déduisons que pour un entier $n \geq 6$, le groupe $\pi_0 \text{Diff}^+(D^n)$ est trivial, de sorte que le groupe Γ_n est isomorphe à $\pi_0 \text{Diff}^+(S^{n-1})$.

Jean Cerf a véritablement joué un rôle considérable dans le développement de la topologie différentielle en France et j'espère que les résultats brièvement discutés ci-dessus laisseront apercevoir l'impact majeur de ses travaux.

À l'occasion des quatre-vingt-dix ans de Jean Cerf, une conférence nommée *Topologie différentielle et mathématiques d'aujourd'hui* s'est déroulée en son honneur du 11 au 13 juin 2018 au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, des informations complémentaires sont disponibles sur la page suivante :

<https://www.math.u-psud.fr/Cerf90>

Il s'agissait aussi pour le Laboratoire de Mathématiques d'Orsay de témoigner sa reconnaissance à Jean Cerf pour la création de son équipe de Topologie.

Je tenais vivement à assister à cette conférence, car les méthodes développées¹ par Jean Cerf pour établir ses théorèmes ici évoqués constituent un aspect essentiel de mon doctorat² que je débute en octobre 2018.

1. Il s'agit d'une théorie de Morse à paramètres.

2. Mon projet doctoral s'intitule *Sur les propriétés des invariants homologiques par familles génératrices des sous-variétés legendriennes* et il est dirigé par Frédéric Bourgeois.

Dans ce rapport de conférence, nous souhaitons revenir en plus grands détails sur la présentation *Les sous-variétés legendriennes et les fonctions génératrices* de Sylvain Courte, maître de conférences à l'Université Grenoble Alpes. La volonté d'articuler notre compte-rendu autour de cet exposé provient de l'inscription directe des résultats dans la lignée des travaux de Jean Cerf, mais aussi de leur proximité et de leurs riches interactions avec mon doctorat. La philosophie commune consiste à proposer une approche par la théorie de Morse–Cerf à la géométrie symplectique et de contact.

Le présent document s'organise en deux parties, il s'agit d'abord d'effectuer les rappels de géométrie symplectique et de contact nécessaires pour ensuite présenter convenablement les résultats exposés par Sylvain Courte.

1. DE LA GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET DE CONTACT ÉLÉMENTAIRES

Considérons une voiture roulant sans glisser sur un revêtement supposé plat, alors son vecteur vitesse est constamment dirigé dans la direction de ses roues³. Réperons la position de la voiture à l'aide de coordonnées $(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$, où (x, y) situent son centre de masse et θ désigne l'angle de rotation des roues. L'observation faite dans notre première phrase se formule alors comme suit :

$$\dot{x} \sin(\theta) = \dot{y} \cos(\theta),$$

ou encore en disant que la trajectoire de la voiture est partout tangente à la distribution de plans de l'espace des configurations $\mathbb{R}^2 \times S^1$ donné par :

$$\xi := \ker(\sin(\theta)dx - \cos(\theta)dy).$$

Ce que nous venons de décrire correspond à une manifestation physique des notions de structure de contact et des sous-variétés legendriennes associées⁴. Il va désormais s'agir d'extraire et de formaliser l'essence de cette situation.

L'objectif n'est pas ici de faire un cours introductif à la géométrie de contact, ni même d'en discuter la pertinence, mais seulement d'en survoler les notions centrales qui seront nécessaires à la bonne compréhension de la suite du texte. L'ouvrage de référence pour cette partie est le livre [9] de Hansjörg Geiges.

Soit M une variété différentielle de dimension impaire $2n + 1$.

Définition. Une *forme de contact* sur M est une forme différentielle α sur M de degré 1 satisfaisant la condition de non dégénérescence $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$.

Remarque. La forme bilinéaire alternée $d\alpha$ est non dégénérée sur $\ker(\alpha)$, ce qui impose aux hyperplans $\ker(\alpha)$ de TM d'être de dimension paire.

Exemple. La forme $\sin(\theta)dx - \cos(\theta)dy$ est de contact sur $\mathbb{R}^2 \times S^1$.

3. Il s'agit d'une contrainte, la voiture ne peut pas réaliser toutes les trajectoires planes. Pourtant, nous pouvons toujours nous déplacer librement en voiture selon notre bon vouloir, il s'agit, par exemple, du théorème d'approximation legendrienne, voir [9].

4. Il s'agit aussi d'un cadre adapté à la formulation du principe d'Huyghens de l'optique géométrique et du premier principe de la thermodynamique.

Définition. Une *structure de contact* est un champ d'hyperplans ξ tangents à la variété M donné par le noyau d'une forme de contact.

Remarque. Les structures de contact et les feuilletages sont en contraste. Cette définition est à rapprocher d'un théorème de Frobenius selon lequel le champ d'hyperplans donné par le noyau de α est tangent à un feuilletage de codimension un si, et seulement, si $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Les structures de contact minimisent la dimension des sous-variétés qui sont partout tangentes à un champ d'hyperplans tangents.

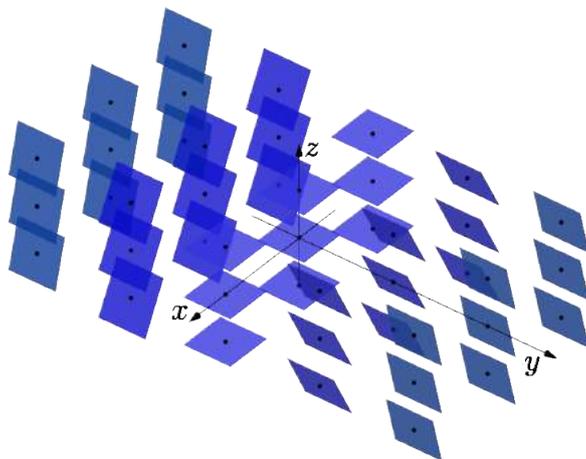


FIGURE 1. La structure de contact $\xi := \ker(dz - ydx)$ de \mathbb{R}^3 .

La variété M est désormais munie d'une structure de contact notée ξ .

Définition. Une sous-variété Λ de M de dimension n est *legendrienne* dès qu'elle satisfait la condition de tangence $T\Lambda \subset \xi$.

Les legendriennes sont les sous-variétés partout tangentes à une structure de contact de dimension maximale.

Exemple. Les trajectoires de nos voitures sont des sous-variétés legendriennes de $\mathbb{R}^2 \times S^1$ munie de la structure de contact $\ker(\sin(\theta)dx - \cos(\theta)dy)$.

Nous fermons ce court volet de topologie de contact en précisant la notion de déformation d'une sous-variété legendrienne.

Définition. Un chemin $(\psi_t: L \hookrightarrow M)_{t \in I}$ de plongements, où L est une variété, est une *isotopie legendrienne* lorsque pour tout $t \in I$, nous avons $T\psi_t(L) \subset \xi$.

Discutons succinctement de l'analogie en dimension paire des variétés de contact et des legendriennes : les variétés symplectiques⁵ et les lagrangiennes. Les interactions entre les mondes symplectique et de contact sont nombreuses, mais ici, nous ne les effleurons qu'à peine, il s'agira pour nous seulement d'un détour adapté à la formulation de certains résultats.

5. Les variétés symplectiques trouvent également leurs origines en sciences physiques, puisqu'elles apparaissent comme espaces des phases de la mécanique classique.

Soit W une variété différentielle de dimension paire $2n$.

Définition. Une *forme symplectique* sur W est une 2-forme ω sur W qui satisfait les conditions d'intégrabilité $d\omega = 0$ et de non dégénérescence $\omega^n \neq 0$.

Exemple. La forme $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ est symplectique sur \mathbb{R}^{2n} .

La variété W est désormais munie d'une forme symplectique notée ω .

Définition. Une sous-variété L de W de dimension n est *lagrangienne* dès que la condition $\omega|_L = 0$ est satisfaite.

Remarque. Par functorialité de la dérivée extérieure, la forme $\omega|_L$ est fermée.

De plus, lorsque $\omega = d\alpha$, nous disposons également la notion suivante⁶.

Définition. Une sous-variété lagrangienne L est *exacte* lorsque $\alpha|_L$ l'est.

Donnons enfin une notion stricte de déformation d'une variété symplectique.

Définition. Un champ de vecteurs X est *hamiltonien* lorsque $\iota_X\omega$ est exacte⁷.

Définition. Une isotopie $(\psi_t)_{t \in I}$ de W est *hamiltonienne* lorsque son générateur infinitésimal $\partial_t\psi_t$ est un champ de vecteurs hamiltonien.

Nous concluons cette discussion en rappelant que les variétés symplectiques, respectivement les variétés de contact, sont toutes localement identiques, elles sont «façonnées» sur le même modèle standard⁸ (théorème de Darboux). Retenons en qu'en géométrie symplectique et de contact, seuls les phénomènes semi-locaux ou globaux sont dignes d'intérêt, ils sont les seuls susceptibles de restituer une information non triviale sur la géométrie de ces variétés.

2. LES SOUS-VARIÉTÉS LEGENDRIENNES ET LES FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Dans cette partie, nous présentons le contenu de l'exposé de Sylvain Courte. Nous en consacrons les deux premières sections à la construction motivée des objets qui constituent le cœur de sa présentation, pour enfin discuter dans la troisième et dernière section du résultat central énoncé par Sylvain Courte. Je m'autorise parfois des digressions pour préciser brièvement les interactions de ces travaux avec mon doctorat.

2.1. Les variétés symplectique et de contact tautologiques.

Dans cette section, nous construisons les variétés symplectiques et de contact évoquées dans la partie précédente, ce sont celles qui modèlent toutes les autres. Les résultats sont ici énoncés sans faire mention des preuves, mais il ne s'agit jamais plus d'une simple observation ou d'un calcul direct.

Soient X une variété et $\pi: T^*X \rightarrow X$ son fibré cotangent.

6. Le cas échéant, nous disons que (W, ω) est une variété symplectique exacte.

7. Nous pourrions relâcher cette condition en demandant seulement que $i_X\omega$ soit fermée, ce qui d'après la formule de Cartan serait équivalent à ce que le flot de X préserve ω .

8. Ce résultat est à mettre en contraste avec le cas des variétés riemanniennes qui possèdent des invariants locaux, comme leur courbure.

Définition. La *forme de Liouville* λ de T^*X est la 1-forme sur T^*X telle que :

$$\lambda_p(v) = p(T_p\pi(v)),$$

où p est un élément de T^*X et v est un élément de T_pT^*X .

Exemple. La forme de Liouville de $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$\lambda = \sum_{i=1}^n x_i dy_i,$$

où (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées de la base et (y_1, \dots, y_n) celles de la fibre.

En plus d'être *canonique*, la forme de Liouville satisfait au résultat suivant :

Proposition. Pour toute 1-forme différentielle α de X , nous avons

$$\alpha^* \lambda = \alpha.$$

De plus, la forme de Liouville est caractérisée par cette propriété.

La forme de Liouville constitue l'ingrédient clef de la construction des variétés symplectique et de contact standards.

Proposition. La forme différentielle $d\lambda$ est symplectique sur T^*X .

L'*espace des premiers jets* de X , noté J^1X est la variété $T^*M \times \mathbb{R}$.

Proposition. La forme différentielle $dz - \lambda$ est de contact sur J^1X .

La variété J^1X est la *contactisation* de la variété symplectique exacte T^*X .

Proposition. Pour toute fonction lisse $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, les applications notées $i_f: M \rightarrow T^*M$ et $j_f: X \rightarrow J^1X$ définies par :

$$i_f(x) = (x, T_x f), \quad j_f(x) = ((x, T_x f), f(x))$$

sont respectivement des plongements lagrangien exact et legendrien.

Remarque. En vertu des théorèmes de Darboux, nous venons de construire une abondance remarquable de sous-variétés lagrangiennes et legendriennes dans des variétés symplectiques et de contact quelconques.

Nous introduisons les applications $\pi_{xz}: J^1X \rightarrow X \times \mathbb{R}$ et $\pi_{xy}: J^1X \rightarrow T^*X$,

$$\begin{aligned} \pi_{xz}(x, y, z) &= (x, z), \\ \pi_{xy}(x, y, z) &= (x, y) \end{aligned}$$

où $(x, y, z) \in X \times T_x^*X \times \mathbb{R}$, il s'agit des projections *frontale* et *lagrangienne*.

Proposition. Soit Λ une sous-variété legendrienne de J^1X , alors :

1. Le *diagramme lagrangien* $\pi_{xy}(\Lambda)$ de Λ est une sous-variété lagrangienne immergée de T^*X qui détermine complètement Λ .
2. Le *front legendrien* $\pi_{xz}(\Lambda)$ de Λ détermine complètement Λ .

Nous utiliserons ces projections pour visualiser les sous-variétés legendriennes. Nous représenterons les projections frontales comme des graphiques ayant les coordonnées selon X comme abscisses et la coordonnée selon \mathbb{R} en ordonnée.

2.2. Les familles génératrices.

Dans la section précédente, nous avons observé que la différentielle et le 1-jet d'une fonction induisent des sous-variétés lagrangienne exacte et legendrienne. Il va sans dire que les sous-variétés lagrangiennes exactes et legendriennes ainsi obtenues forment une classe extrêmement restreinte, puisque le front d'une telle sous-variété legendrienne est toujours un graphe.

Nous généralisons cette construction en considérant la différentielle et le 1-jet dans la direction de X d'une fonction définie sur un fibré vectoriel de base X . Les fibres permettent intuitivement d'obtenir des points multiples au-dessus d'une même abscisse dans le front de la sous-variété legendrienne décrite.

Notons x les coordonnées de X et v les coordonnées de \mathbb{R}^N .

Définition. Une application lisse $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une *famille génératrice*⁹ lorsque $\mathbf{0}$ est une valeur régulière de $\partial_v f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$.

Exemple. Une fonction lisse de X dans \mathbb{R} est une famille génératrice.

Notons Σ_f la sous-variété critique $\partial_v f^{-1}(\mathbf{0})$ de dimension n dans $X \times \mathbb{R}^N$, introduisons les applications $i_f: \Sigma_f \rightarrow T^*X$ et $j_f: \Sigma_f \rightarrow J^1X$ définies par :

$$i_f(x, v) = (x, \partial_x f(x, v)), \quad j_f(x, v) = ((x, \partial_x f(x, v)), f(x, v)),$$

et désignons leurs images par L_f et Λ_f .

Proposition. Les applications i_f et j_f sont respectivement des immersions lagrangienne et legendrienne.

Remarque. Le front legendrien de Λ_f est constitué des points $(x, v) \in X \times \mathbb{R}^N$, où v est un point critique de $f_x: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition. Une famille génératrice $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ engendre une sous-variété lagrangienne (resp. legendrienne) L de T^*X (resp. Λ de J^1X) lorsque

$$L = L_f \text{ (resp. } \Lambda = \Lambda_f \text{)}.$$

Nous disons que L (resp. Λ) *admet* une famille génératrice.

Remarque. Le cas échéant, les immersions i_f et j_f sont des plongements.

Une sous-variété legendrienne de J^1X admet une famille génératrice si, et seulement, si son front legendrien est un *diagramme de Cerf*¹⁰.

Exemple. L'application $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t, v) = v^3 - 3t(1-t)v$ est une famille génératrice pour un nœud legendrien trivial, nous avons :

$$\Sigma_f = \left\{ \left(t, \sqrt{t(1-t)} \right); t \in [0, 1] \right\} \cup \left\{ \left(t, -\sqrt{t(1-t)} \right); t \in [0, 1] \right\}$$

qui est composé de deux branches qui sont des graphes de fonctions.

9. Nous ne perdons pas de généralité à considérer seulement des fibrés vectoriels triviaux. Ils sont de toute façon amenés à être stabilisés (ajout de nouvelles dimensions dans la fibre), de sorte qu'ils finiraient quand même par devenir trivialisable.

10. Nous illustrons cette notion dans l'exemple suivant, voir [3] pour sa définition générale.

Nous représentons le front de ce nœud legendrien et sa famille génératrice f .

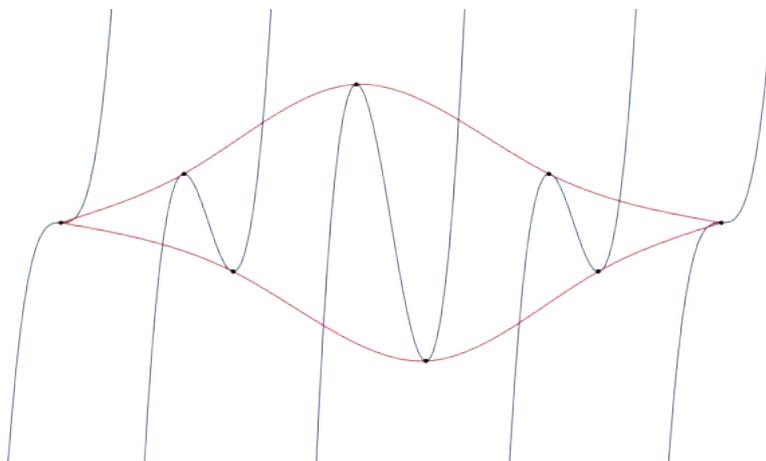


FIGURE 2. En rouge, le diagramme de Cerf de l'application f .

Dans toute la suite, nous nous concentrons plutôt sur les familles génératrices des sous-variétés legendriennes, faisons alors le parallèle entre les plongements lagrangiens exacts et les plongements legendriens.

Observons que $L \xrightarrow{i} T^*M$ est un plongement lagrangien exact avec $i^*\lambda = df$, où $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse si, et seulement, si l'application :

$$\begin{aligned} L &\hookrightarrow J^1M \\ x &\mapsto (i(x), f(x)) \end{aligned}$$

est un plongement legendrien, ce qui fournit le parallèle recherché.

Nous clôturons cette section en énonçant un théorème qui justifie à lui seul la pertinence des familles génératrices.

Théorème (Y. Chekanov, 1996, [5]). L'existence d'une famille génératrice persiste aux isotopies legendriennes.

2.3. Des obstructions à l'existence d'une famille génératrice.

Dans cette section, nous constatons que certaines sous-variétés legendriennes n'admettent pas de famille génératrice et nous dégageons des conditions topologiques, homotopiques (plus ou moins fines), nécessaires à leur existence. Nous discutons aussi de l'importance conjecturale de cette question.

Nous commençons par énoncer une conjecture de Vladimir Arnol'd suspectant un certain comportement global et rigide des plongements lagrangiens exacts. Dans toute la suite, M et L sont des variétés compactes sans bord.

Conjecture. Si $L \hookrightarrow T^*M$ est un plongement lagrangien exact, alors L est hamiltonniennement isotopique à la section nulle de T^*M .

Cette conjecture se révèle être d'une difficulté exceptionnelle, nous savons seulement qu'elle est vraie pour $M = S^1, S^2$ (2004, [11]) et T^2 (2016, [6]). Pour les dernières avancées générales, nous invitons à consulter l'article [1] de Mohammed Abouzaid et Thomas Kragh datant de 2016.

Heureusement, nous disposons du théorème suivant de Jean-Claude Sikorav :

Théorème (J.-C. Sikorav, 1987, [15]). Si L est hamiltonniennement isotopique à la section nulle de T^*M , alors L admet une famille génératrice.

Il nous permet de déduire une version affaiblie de la conjecture, que voici :

Conjecture. Si $L \hookrightarrow T^*M$ est un plongement lagrangien exact, alors L admet une famille génératrice.

Afin d'espérer un jour nous approcher de la résolution de ces conjectures, il est d'abord crucial et essentiel de dégager toutes les obstructions topologiques à l'existence d'une famille génératrice pour une sous-variété lagrangienne.

2.3.1. L'application de Gauss lagrangienne.

Nous notons $\Lambda(TT^*M)$ le fibré des sous-espaces vectoriels lagrangiens de T^*M , il s'agit de la *grassmannienne lagrangienne* de T^*M .

Définition. Une immersion lagrangienne $i: L \looparrowright T^*M$ définit une section du fibré vectoriel $i^*\Lambda(TT^*M)$, dite *application de Gauss*, par $Gi: x \mapsto T_x i(T_x L)$.

Nous transportons naturellement cette notion aux immersions legendriennes :

Définition. L'application de Gauss *lagrangienne* d'une immersion legendrienne est l'application de Gauss de sa projection lagrangienne.

Nous allons désormais voir que l'application de Gauss lagrangienne capture de nombreuses obstructions à l'existence d'une famille génératrice.

2.3.2. Le nombre de rotation, vers les classes de Maslov.

Nous associons à tout *nœud legendrien*¹¹ de \mathbb{R}^3 , un entier permettant de détecter une obstruction à l'existence d'une famille génératrice.

Nous commençons par observer que le cercle est *parallélisable*¹² de sorte que :

$$\Lambda(TT^*S^1) \cong S^1 \times \Lambda(\mathbb{R}^2),$$

où $\Lambda(\mathbb{R}^2)$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels lagrangiens de (\mathbb{R}^2, ω_0) . Or, comme toute droite vectorielle de (\mathbb{R}^2, ω_0) est lagrangienne¹³, il vient :

$$\Lambda(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}P^1 \cong S^1.$$

Une section de $\Lambda(TT^*S^1) \cong S^1 \times S^1$ s'identifie alors à une application $S^1 \rightarrow S^1$, ce qui nous permet alors de dégager la notion suivante.

11. C'est un plongement legendrien de S^1 dans J^1S^1 .

12. Le fibré (co)tangent du cercle est trivialisable.

13. La forme symplectique standard ω_0 de \mathbb{R}^2 n'est rien d'autre que le déterminant de \mathbb{R}^2 . Or, en restriction à une droite vectorielle quelconque de \mathbb{R}^2 ce déterminant est nul.

Définition. Le *nombre de rotation* r d'un nœud legendrien est le degré de son application de Gauss lagrangienne.

Remarque. Le nombre de rotation d'un nœud legendrien compte les tours orientés fait par les tangentes à son diagramme lagrangien.

Exemple. Le nœud legendrien de la figure 2 a un nombre de rotation nul.

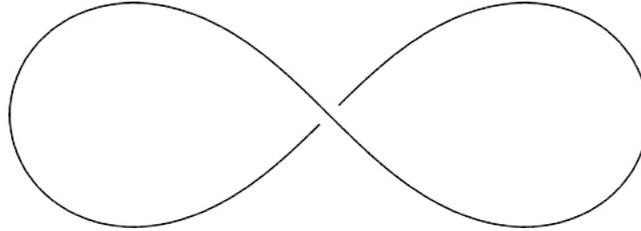


FIGURE 3. La projection lagrangienne d'un nœud legendrien trivial.

En pratique, il est souvent bien plus délicat de travailler avec le diagramme lagrangien d'un nœud legendrien plutôt qu'avec son front, c'est pourquoi nous décrivons maintenant le processus de conversion de l'un à l'autre.

Les correspondances entre le front legendrien et le diagramme lagrangien sont résumées dans le tableau suivant :

Front legendrien	Diagramme lagrangien

Exemple. Nous appliquons la correspondance front legendrien et diagramme lagrangien à un nœud de trèfle legendrien.

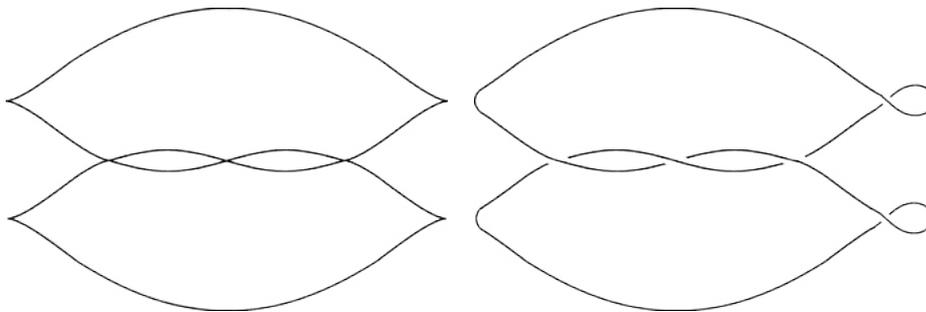


FIGURE 4. Un nœud de trèfle en projection frontale et lagrangienne.

Nous orientons les nœuds legendriens de (\mathbb{R}^3, ξ_0) en fixant une orientation de S^1 et nous en déduisons le calcul du nombre de rotation en projection frontale :

Proposition. Le nombre de rotation r d'un nœud legendrien est égal à

$$\frac{1}{2}(D - M),$$

où D , respectivement M , désigne le nombre de rebroussement descendants, respectivement, montants de son front legendrien.

Exemple. Nous représentons en projection frontale deux nœuds legendriens, le premier avec $r = 0$ et l'autre avec $r = 1$.

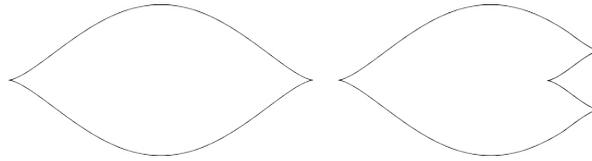


FIGURE 5. Les projections frontales de deux nœuds legendriens.

Nous discutons brièvement de la classification des nœuds legendriens.

Proposition. Le nombre de rotation est invariant par isotopie legendrienne.

Preuve. Une isotopie legendrienne entre deux nœuds legendriens induit une homotopie régulière entre les diagrammes lagrangiens qui leur sont associées, ainsi leurs applications de Gauss sont homotopes et elles ont le même degré. ■

Exemple. Les nœuds legendriens de la figure 5 sont topologiquement triviaux, mais il n'existe pourtant aucune isotopie legendrienne entre-eux, puisque leurs nombres de rotation sont différents.

Remarque. Nous venons de constater qu'une isotopie lisse entre sous-variétés legendriennes ne suffit pas pour garantir l'existence d'une isotopie legendrienne.

La topologie échoue à décrire les classes d'isotopies legendriennes :

Théorème. Une classe d'isotopie lisse d'une sous-variété legendrienne se scinde en une infinité de classes d'isotopie legendrienne distinctes¹⁴.

Nous parlons de la *rigidité* des sous-variétés legendriennes, elles contiennent une information géométrique non-triviale sur la structure de contact elle-même.

Ce phénomène est véritablement surprenant, car les sous-variétés legendriennes sont de grande codimension dans les variétés de contact, elles sont «petites», mais elles sont excessivement difficile à transporter, elles sont «encombrantes».

La classification des sous-variétés legendriennes à isotopie legendrienne près est un problème riche et intéressant qui se trouve au cœur de mon doctorat.

¹⁴. Lorsque nous remplaçons une portion du front d'un nœud legendrien par un zigzag, son nombre de rotation varie d'une unité et sa classe d'isotopie legendrienne change.

Revenons désormais au problème d'existence de familles génératrices.

Définition. Un *potentiel de Maslov* d'un nœud legendrien est une distribution d'entiers μ sur les *branches*¹⁵ de son front legendrien qui satisfait :

$$(\star) \quad \mu(b_+) = \mu(b_-) + 1,$$

pour toute paire (b_+, b_-) de branches concourantes avec b_+ au-dessus¹⁶ de b_- .



FIGURE 6. Deux de paires branches d'un front legendrien qui se rejoignent.

Exemple. Voici un potentiel de Maslov pour un nœud de trèfle legendrien.

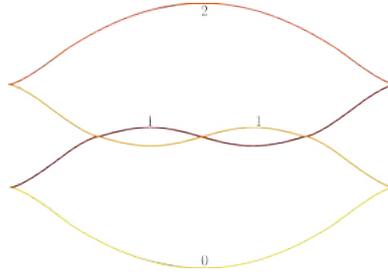


FIGURE 7. Le front d'un nœud de trèfle et un potentiel de Maslov.

Proposition. Un nœud legendrien peut être muni d'un potentiel de Maslov si, et seulement, si son nombre de rotation est nul.

Preuve. Nous considérons un nœud legendrien avec un nombre de rotation nul et nous observons qu'en parcourant son front legendrien dans le sens horaire, nous remontons autant de points de rebroussement que nous en descendons.

Nous pouvons ainsi définir un potentiel de Maslov sur ce nœud legendrien en suivant le procédé décrit ci-dessous :

- Nous attribuons un entier i à la branche la plus basse de son front.
- Nous parcourons son front à partir de sa branche la plus basse et nous numérotions les branches rencontrées en respectant la règle (\star) .

Notre observation initiale, nous assure que cette numérotation est cohérente, ce procédé est illustré sur la figure 7 en prenant $i = 0$.

Réciproquement, tous les potentiels de Maslov d'un nœud legendrien donné sont décrits par le procédé ci-dessus et comme cette numérotation est cohérente, son front doit contenir autant de rebroussement montants que descendants. Le nombre de rotation de ce nœud legendrien est donc nul. ■

15. Il s'agit des portions lisses maximales pour l'inclusion du front legendrien.

16. La courbe b_+ est au-dessus de b_- dans le plan de coordonnées (x, z) .

Faisons enfin le lien entre famille génératrice et nombre de rotation.

Théorème. Si un nœud legendrien admet une famille génératrice, alors son nombre de rotation est nul.

Preuve. Nous allons associer un potentiel de Maslov à une famille génératrice d'un nœud legendrien, ce qui nous permettra directement de conclure.

Soit $f: S^1 \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une famille génératrice pour un nœud legendrien donné, alors deux branches de son front se rencontrent au-dessus d'une abscisse x_0 si, et seulement, s'il y a naissance ou mort d'un point critique dans $(f_x)_x$ en $x = x_0$.

Notre problème s'inscrit alors très précisément dans la théorie de Morse-Cerf, pour laquelle nous invitons le lecteur à consulter l'ouvrage [14] de John Milnor. Pour notre étude, nous nous contentons d'en rappeler le résultat suivant.

Théorème. Soit $(f_x: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R})_{x \in \mathbb{R}}$ une famille à un paramètre d'applications. S'il y a naissance ou mort d'un point critique p_0 dans $(f_x)_{x \in \mathbb{R}}$ à l'instant $x = 0$, alors pour tous les x suffisamment petits, il existe un certain voisinage de p_0 contenant exactement deux points critiques $p_{\pm}(x)$ de f_x avec $p_-(x) < p_+(x)$. Ces deux points critiques satisfont de plus la relation suivante :

$$\text{ind}_{p_+(x)}(f_x) = \text{ind}_{p_-(x)}(f_x) + 1,$$

où ind désigne l'indice de Morse d'une application en un point critique.

Preuve. Des considérations homologiques analogues à celles que nous allons détailler dans la section suivante permettent d'obtenir facilement le résultat. ■

Soit b une branche du front du nœud legendrien considéré, nous définissons :

$$\mu(b) = \text{ind}_v(f_x),$$

où x ne se trouve en-dessous d'aucun branchement du front et $(x, f_x(v)) \in b$. Le théorème ci-dessus nous assure que μ est un potentiel de Maslov. ■

La *première classe de Maslov*, notée m_1 , d'une sous-variété lagrangienne ou legendrienne généralise le nombre de rotation dans les dimensions supérieures. Nous esquissons seulement sa définition dans un cas particulier générique.

Soit $i: L \hookrightarrow T^*M$ une immersion lagrangienne pour laquelle nous avons :

$$i^*\Lambda(TT^*M) \cong L \times \Lambda(\mathbb{R}^{2n}).$$

En d'autres termes, nous supposons que le fibré $i^*\Lambda(TT^*M)$ est trivialisable, ce qui nous permet d'identifier l'application de Gauss de i à $\text{Gi}: L \rightarrow \Lambda(\mathbb{R}^{2n})$. Le groupe fondamental de $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ étant infini cyclique¹⁷, nous posons :

$$m_1 = \text{Gi}^*u \in H^1(L, \mathbb{Z}),$$

où u est un générateur « distingué » du groupe fondamental de $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$.

17. L'ensemble des sous-espaces vectoriels lagrangiens de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ s'identifie à $U(n)/O(n)$.

Nous transposons immédiatement la notion de première classe de Maslov aux immersions legendriennes via leurs projections lagrangiennes.

Exemple. Le nombre de rotation et la première classe de Maslov coïncident dans le cas où $L = S^1 = M$.

Nous mentionnons que l'application de Gauss d'une immersion lagrangienne permet également de définir des invariants cohomologiques dans tous les degrés, il s'agit des classes de Maslov ; nous renvoyons à l'article [7] de Dmitry Fuchs.

2.3.3. Les zigzags des fronts legendriens.

Nous quittons temporairement les considérations de topologie algébrique pour évoquer une obstruction forte à l'existence d'une famille génératrice.

Proposition. Si le front d'une sous-variété legendrienne contient un zigzag, alors elle n'admet pas de famille génératrice.

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe un nœud legendrien dont le front contienne un zigzag, mais qui admet tout de même une famille génératrice f .

Notons x_0 et x_1 des abscisses qui délimitent un zigzag du front avec $x_0 < x_1$ et choisissons aussi a et b des valeurs régulières avec $a < b$ qui encadrent au sens strict toutes les valeurs critiques des applications f_x , pour tout $x \in [x_0, x_1]$. Introduisons i l'indice de Morse de f_{x_0} en v_0 choisi tel que $(v_0, f_{x_0}(v_0))$ soit un point de la branche la plus basse de la portion du front comprise entre x_0 et x_1 .

La situation est résumée sur la figure suivante :

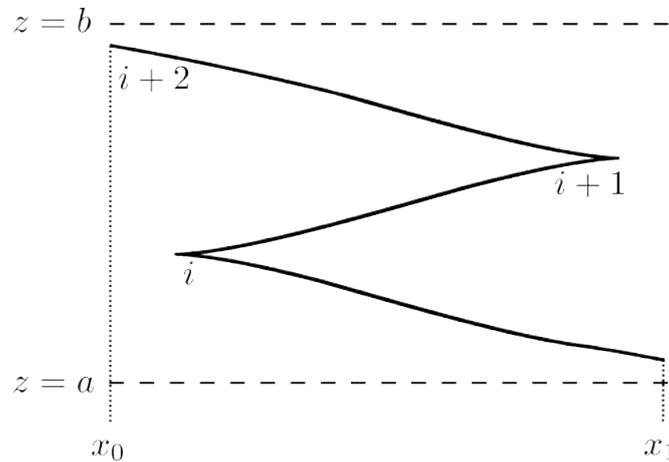


FIGURE 8. Un zigzag d'un front legendrien.

Par un résultat facile de théorie de Morse générale, le module gradué suivant :

$$H_{\bullet}(\{f_x \leq b\}, \{f_x \leq a\})$$

est indépendant de l'abscisse x , pourtant il est concentré en degré i en $x = x_0$, mais concentré en degré $i + 2$ en $x = x_1$, une contradiction. ■

Nous en déduisons que le nombre de rotation ne permet pas à lui seul d'encoder toutes les obstructions à l'existence d'une famille génératrice.

Exemple. La sous-variété legendrienne dont le front est représenté ci-dessous à un nombre de rotation nul et n'admet pourtant pas de famille génératrice.

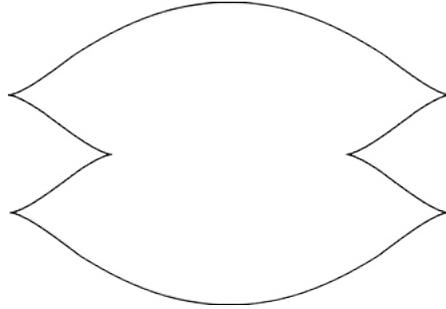


FIGURE 9. Un front avec $r = 0$ n'étant pas un diagramme de Cerf.

2.3.4. *Les travaux de Sylvain Courte et Stéphane Guillermou.*

Nous présentons un résultat qui garantit l'existence d'une famille génératrice sous réserve d'une condition homotopique sur l'application de Gauss.

Définition. Une immersion lagrangienne $i: L \looparrowright T^*M$ induit une section du fibré vectoriel $i^*\Lambda(TT^*M)$, dite *verticale*, définie par $V_i(x) := T_{i(x)}T^*L$.

Définition. Une immersion lagrangienne $i: L \looparrowright T^*M$ est *stablement triviale* lorsqu'il existe un entier naturel N tel que G_i et V_i soient homotopes en tant que sections du fibré vectoriel $i^*\Lambda(TT^*(M \times \mathbb{R}^N))$.

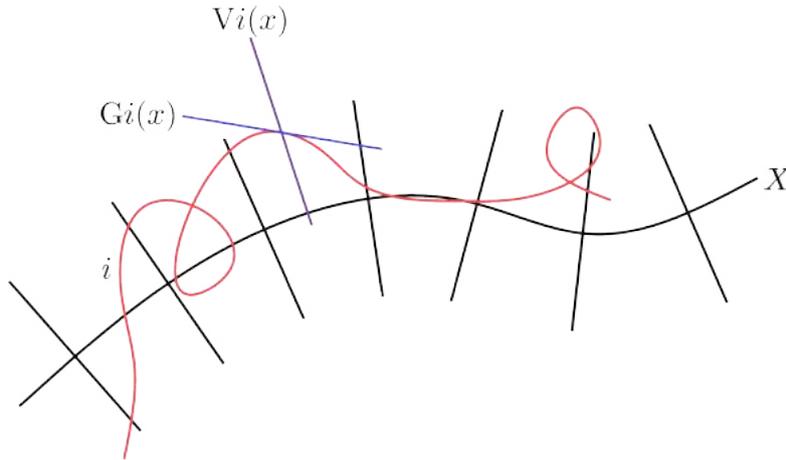


FIGURE 10. Une représentation schématique de l'application de Gauss et de la section verticale d'une immersion lagrangienne.

Les notions homotopiques nécessaires à la formulation du résultat étant posées, nous imposons le comportement à l'infini de nos familles génératrices.

Définition. Une famille génératrice $f: M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est *domptée à l'infini* lorsqu'il existe deux compacts $K \subset M \times \mathbb{R}$ et $K' \subset M \times \mathbb{R}^N$ tels que :

$$p_f: M \times \mathbb{R}^N \rightarrow M \times \mathbb{R}$$

$$(x, v) \mapsto (x, f(x, v))$$

induit des fibrations $p_f^{-1}(M \times \mathbb{R} \setminus K) \rightarrow M \times \mathbb{R} \setminus K$ et $p_f^{-1}(K) \setminus K' \rightarrow K$.

Exemple. Les familles génératrices respectivement linéaires et quadratiques non-dégénérées à l'infini sont domptées à l'infini.

Remarque. Une famille génératrice seule n'encode que peu d'information géométrique de la legendrienne, mais en imposant un certain contrôle sur son comportement à l'infini, nous pallions bien souvent cette limitation.

Par exemple, les familles génératrices linéaires à l'infini possèdent une théorie de Morse suffisamment agréable pour définir des invariants homologiques fins des sous-variétés legendriennes, voir les articles [2] et [8].

L'essentiel de mon doctorat consistera à dégager des résultats structuraux pour l'un de ces invariants, à savoir l'homologie pour paire de familles génératrices. Mon travail devrait aboutir à une meilleure compréhension de cet invariant encore excessivement difficile à calculer, ainsi qu'à une meilleure appréhension de la diversité des sous-variétés legendriennes.

Nous énonçons enfin le résultat de Sylvain Courte et Stéphane Guillermou, il s'agit de travaux encore non-publiés pour le moment.

Théorème (S. Courte, S. Guillermou, en cours). Un plongement lagrangien exact stablement trivial admet une famille génératrice domptée à l'infinie.

Preuve. La preuve est relativement accessible et ne présente pas de difficultés, mais afin de conserver une certaine concision avec laquelle ce rapport est écrit, nous l'évoquons seulement dans ses grandes lignes.

L'immersion lagrangienne considérée étant stablement triviale, un théorème d'Emmanuel Giroux ([10], 1988) en procure une famille génératrice semi-locale. Nous en déduisons alors une famille génératrice domptée à l'infinie pour une version dédoublée de l'immersion lagrangienne de départ, voir la figure 11.

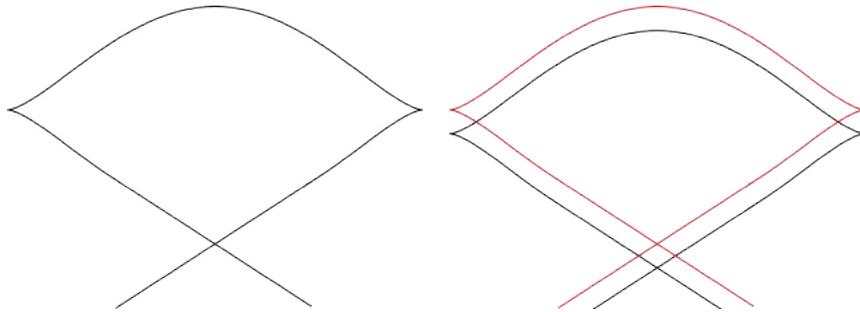


FIGURE 11. Une schématisation de l'opération de dédoublement.

Nous récupérons alors l'immersion lagrangienne initiale en séparant ces deux copies et comme elles sont plongées, la séparation est une isotopie legendrienne. Finalement, le théorème de persistance [5] nous assure que la famille génératrice domptée à l'infini est conservée à l'issue de la transformation. ■

Remarque. Nous insistons, l'hypothèse de plongement est cruciale !

Sylvain Courte et Stéphane Guillermou cherchent actuellement à s'affranchir de l'hypothèse homotopique du théorème quitte à travailler avec une version globale des familles génératrices qui sont dites *tordues*.

Conjecture (S. Courte, S. Guillermou, théorème en cours). Si une sous-variété lagrangienne exacte de T^*M est hamiltonniennement isotope à la section nulle, alors elle admet une famille génératrice tordue.

CONCLUSION

Je n'avais, avant *Topologie différentielle et mathématiques d'aujourd'hui*, jamais assisté à un cycle complet de conférences thématiques, mais seulement à des séminaires de l'équipe Topologie et Dynamique de l'Université Paris-Sud.

J'ai parfois éprouvé des difficultés à comprendre certaines des présentations, mais elles ont toujours été bénéfiques, puisque j'ai réellement apprécié mettre en parallèle les résultats discutés avec les connaissances que l'on m'a enseignées. Je pense également avoir mieux pris conscience des nombreuses interactions qui existent entre les différents domaines de la topologie différentielle moderne. Par ailleurs, j'ai commencé à prendre légèrement confiance en mon expertise naissante en topologie symplectique et de contact en constatant mon aisance avec le contenu des exposés d'Anne Vaugon et Sylvain Courte.

J'estime que les trois jours de cette conférence constituent un complément essentiel à ma formation : j'en tire des leçons pour réaliser un exposé réussi, comme la pertinence d'énoncer précocement les résultats qui vont être présentés. Cette règle s'appliquant même s'ils nécessitent des notions techniques qui ne seront présentées que bien plus tard, cela permet de laisser un fil directeur clair. Finalement, l'écriture de ce rapport m'a également été instructif, puisqu'il m'a permis de communiquer synthétiquement sur mes intérêts de recherche.

RÉFÉRENCES

- [1] M. Abouzaid et T. Kragh. On the immersion classes of nearby Lagrangian. *Journal of Topology*, 9 :1753–8424, 2016.
- [2] F. Bourgeois, J. Sabloff, et L. Traynor. Lagrangian cobordisms via generating families : Construction and geography. *Algebraic & Geometric Topology*, 15(4) :2439–2477, 2015.
- [3] J. Cerf. *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma_4 = 0$), volume 53 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1968.
- [4] J. Cerf. La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 39(1) :7–170, 1970.

- [5] Y. Chekanov. Critical points of quasifunctions and generating families of Legendrian manifolds. *Functional Analysis and Its Applications*, 30(2) :118–128, 1996.
- [6] G. Dimitroglou Rizell, E. Goodman, et A. Ivril. Lagrangian isotopy of tori in $S^2 \times S^2$ and $\mathbb{C}P^2$. *Geometric and Functional Analysis*, 26(5) :1297–1358, 2016.
- [7] D. Fuchs. Maslov-Arnold characteristic classes. *Soviet Mathematics Doklady*, 9 :96–99, 1968.
- [8] D. Fuchs et D. Rutherford. Generating families and legendrian contact homology in the standard contact space. *Journal of Topology*, 4 :190–226, 2011.
- [9] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge University Press, 2008.
- [10] E. Giroux. Formes génératrices d’immersions lagrangiennes. *Compte Rendu de l’Académie des Sciences de Paris, Série I*, 306(18) :761–764, 1988.
- [11] R. Hind. Lagrangian spheres in $S^2 \times S^2$. *Geometric Functional Analysis*, 14(2) :303–318.
- [12] J. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*, 64(2) :399–405, 1956.
- [13] J. Milnor. Differentiable structures on spheres. *American Journal of Mathematics*, 81(4) :962–972, 1959.
- [14] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.
- [15] J.-C. Sikorav. Problèmes d’intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne. *Commentarii mathematici Helvetici*, 62 :62–73, 1987.
- [16] S. Smale. Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four. *Annals of Mathematics*, 74(2) :391–406, 1961.

ANNEXE G. MON MÉMOIRE DE M2 RECHERCHE

Les pages suivantes constituent mon mémoire de M2 Recherche.

Le résultat principal de ce document est le suivant :

Théorème. Si $\Lambda \subset J^1X$ est une sous-variété legendrienne connexe qui admet une famille génératrice f linéaire à l'infini, alors :

$$\Gamma_f(t) = (q_0 + q_1t + \cdots + q_nt^n) + p(t) + t^{n-1}p(t^{-1}),$$

où $q_k + q_{n-k}$ est le k -ième nombre de Betti de Λ , $q_0 = 0$, $q_n = 1$ et p satisfait :

$$p(t) = \sum_{k \geq \lfloor (n-1)/2 \rfloor} p_k t^k,$$

avec tous les coefficients p_k qui sont des entiers naturels.

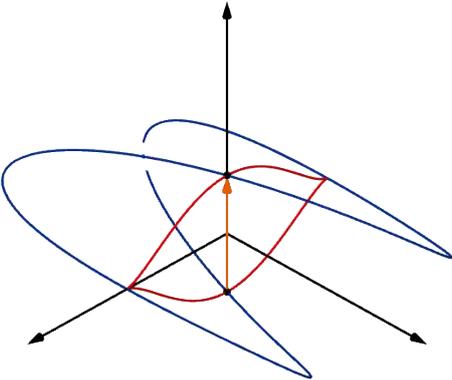
Il s'agit d'un résultat de structure d'un invariant algébrique qui est utilisé pour classer les sous-variétés legendriennes.

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES
Master 2 Recherche de Mathématiques

**SUR LA GÉOGRAPHIE DE L'HOMOLOGIE POUR LES
FAMILLES GÉNÉRATRICES**

Cyril FALCON

RÉSUMÉ. Nous proposons une approche par la théorie de Morse-Bott à la classification des sous-variétés legendriennes d'un espace de premiers jets. Dans ce mémoire, nous construisons et étudions l'homologie génératrice, un invariant pour les familles génératrices des sous-variétés legendriennes. En particulier, nous dégageons une longue suite exacte de dualité reliant l'homologie génératrice, la cohomologie correspondante et l'homologie de la sous-variété legendrienne ; elle généralise la dualité de Poincaré des variétés. Ce résultat de structure contraint les valeurs de l'homologie génératrice et permet de mieux appréhender la diversité des sous-variétés legendriennes.

$$HG_{\bullet}(f) := H_{\bullet+N+1}(\delta^{\omega}, \delta^{\varepsilon}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$


$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\tau_k} & H_k(\Lambda) & \xrightarrow{\sigma_k} & HG^{n-k}(f) & \xrightarrow{\rho_k} & HG_{k-1}(f) \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow \alpha & & \swarrow \tau_{n-k}^* & & \\ & & H^{n-k}(\Lambda) & & & & \end{array}$$

Sous la direction de Frédéric BOURGEOIS

Date : de Janvier à Août 2018.

C'est une question d'énergie,
un problème de contact.

La Compagnie Créole

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	6
Introduction et motivations	7
1. Un bref aperçu de la géométrie de contact	13
1.1. Les structures de contact	13
1.2. Les sous-variétés legendriennes	14
1.3. Les modèles locaux en géométrie de contact	15
2. Les sous-variétés legendriennes d'un espace de premiers jets	17
2.1. Les projections lagrangiennes et frontales	17
2.2. Les familles génératrices des sous-variétés legendriennes	20
2.3. Vers la classification des sous-variétés legendriennes	22
3. L'homologie pour les familles génératrices	23
3.1. La fonction différence d'une famille génératrice	23
3.2. Un invariant homologique pour les familles génératrices	24
3.3. La géographie de l'homologie pour les familles génératrices	27
Conclusion et ouverture	32
Annexe A. La forme de Liouville d'un fibré cotangent	34
Annexe B. Une boîte à outils d'algèbre homologique	35
B.1. Les anneaux et les modules gradués	35
B.2. Les complexes de chaînes et leurs homologies	35
B.3. La suite exacte longue induite en homologie	36
Annexe C. Un tour d'horizon de la théorie de Morse	37
C.1. Les fonctions de Morse	37
C.2. Les variétés stables et instables	39
C.3. Le complexe de Morse et son homologie	41
C.4. Des résultats structuraux de l'homologie de Morse	44
C.5. Quelques mots sur la théorie de Morse-Bott	45
Annexe D. Deux calculs explicites d'homologie génératrice	47
D.1. Le cercle legendrien standard usuel	47
D.2. Une déformation du cercle legendrien standard	47
D.3. Observations et conséquences	49
Références	50

REMERCIEMENTS

J'adresse mes tous premiers remerciements à Frédéric BOURGEOIS pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant sans hésitation de m'encadrer pour mon mémoire de Master 2. Je lui en suis d'autant plus reconnaissant qu'il s'est ensuite engagé à diriger mes recherches sur les trois prochaines années à venir. Je souhaite ici témoigner de mon impatience à poursuivre en doctorat aux côtés d'une personne aussi bienveillante et impliquée que Frédéric l'est.

Nous voulions initialement explorer les liens qu'entretiennent la géométrie de contact et la thermodynamique, mais je n'ai malheureusement pas su trouver des développements suffisamment intéressants pour en constituer ce mémoire. Quand je lui ai fait part de mes inquiétudes dues à l'impasse dans laquelle je me trouvais, il s'est montré rassurant et compréhensif puisqu'il m'a très rapidement proposé des directions de recherche plus proches de ma sensibilité.

J'ai été marqué par l'enthousiasme débordant et systématique avec lequel il m'a initié à ses recherches et a répondu à mes nombreuses interrogations. Je suis aussi sensible aux efforts qu'il a toujours fournis pour me transmettre ses intuitions géométriques, c'est pour moi un véritable modèle.

Je sais gré à Patrick MASSOT de m'avoir spontanément cédé son ancienne édition de l'ouvrage *Introduction to Symplectic Topology* de Dusa McDUFF et Dietmar SALAMON, ce livre m'accompagne depuis fidèlement dans mes débuts en topologie symplectique et de contact. Je tiens également à lui témoigner ma gratitude pour m'avoir présenté les théorèmes de Gray et d'extension des isotopies legendriennes sous l'angle plus intrinsèque des fibrations naturelles. J'ai désormais une compréhension enrichie et plus profonde de ces résultats.

Je veux remercier chaleureusement Patrick MASSOT et Anne VAUGON pour m'avoir fait répéter avec attention mon audition pour les allocations doctorales. Je sais que leurs conseils m'ont été précieux, ils m'ont permis d'aborder plus sereinement cet entretien de véritable importance.

Je suis à la fois ravi et honoré qu'ils aient tous les deux acceptés de faire partie de mon jury de soutenance de mémoire.

Je tiens enfin à témoigner toute mon amitié à Claudia et Irving CALDERÓN, ainsi qu'à Elio JOSEPH pour avoir assisté à ma soutenance, cela m'a réellement fait chaud au cœur d'avoir pu partager un peu de mes mathématiques avec eux.

INTRODUCTION ET MOTIVATIONS

L'une des motivations principales aux recherches en géométrie différentielle provient de son aptitude particulière à procurer un formalisme mathématique adapté à la modélisation des phénomènes physiques de notre univers.

L'*espace des configurations* d'un système physique est une variété différentielle, composée de l'ensemble de tous les états qui lui sont virtuellement accessibles. Les contraintes physiques qui s'exercent sur le système sont encodées dans une structure géométrique additionnelle généralement donnée par un tenseur. C'est de cette manière que la célèbre théorie de la relativité générale s'inscrit en géométrie riemannienne et que la mécanique hamiltonnienne relève de la géométrie symplectique des fibrés cotangents.

Nous donnons désormais un exemple détaillé de cette méthode appliquée, à un phénomène plus proche des considérations de ce mémoire :

Considérons une voiture roulant sans glisser sur un revêtement supposé plat, alors son vecteur vitesse est constamment dirigé dans la direction de ses roues. Réperons la position de la voiture à l'aide de coordonnées $(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$, où (x, y) situent son centre de masse et θ désigne l'angle de rotation des roues.

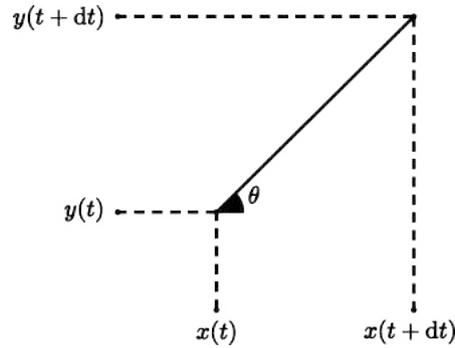


FIGURE 1. Le déplacement infinitésimal de la voiture.

Notre observation implique que le mouvement du véhicule est régi par :

$$\dot{x} \sin(\theta) = \dot{y} \cos(\theta),$$

ou encore en disant que la trajectoire de la voiture est partout tangente à la distribution de plans de l'espace des configurations $\mathbb{R}^2 \times S^1$ donné par :

$$\xi := \ker(\sin(\theta)dx - \cos(\theta)dy).$$

Les contraintes de roulement sans glissement sont encodées dans le champ ξ . Cette situation physique relève directement des structures de contact et tout particulièrement de l'étude de leurs sous-variétés legendriennes¹.

1. Notre voiture décrit ce qui est une sous-variété legendrienne des plans de contact ξ , mais pourquoi pouvons-nous, malgré cette contrainte, nous déplacer librement ?

Une *structure de contact* est un champ d'hyperplans tangents à une variété de dimension impaire qui minimise la dimension des sous-variétés qui lui sont partout tangentes, cette distribution est *maximalement non-intégrable*.

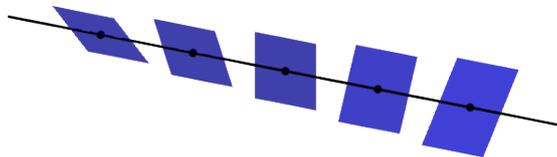


FIGURE 2. Une structure de contact.

Cette géométrie permet de réinterpréter formellement le principe d'Huyghens de l'optique géométrique, ainsi que le premier principe de la thermodynamique. Nous invitons d'ailleurs le lecteur intéressé par une introduction historique à la géométrie de contact à consulter l'article [13] de Hansjörg Geiges.

Les sous-variétés *legendriennes* d'une variété de contact sont partout tangentes à sa structure de contact et sont de dimension maximale pour cette propriété. Ces sous-variétés sont intrinsèquement en tension avec les structures de contact et leur comportement imprévisible en fait des objets d'étude privilégiés.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la classification des sous-variétés legendriennes à *isotopie legendrienne* près, qui sont les déformations qui restent au cours du temps partout tangentes à la structure de contact.

Ce problème conserve une saveur empruntée de la théorie des nœuds.

La topologie classique échoue complètement à décrire les classes d'isotopie legendrienne puisqu'une isotopie lisse, entre deux sous-variétés legendriennes, ne suffit pas à garantir l'existence d'une isotopie legendrienne :

Théorème. Une classe d'isotopie lisse d'une sous-variété legendrienne se scinde en une infinité de classes d'isotopie legendrienne distinctes.

Nous parlons de la *rigidité* des sous-variétés legendriennes, elles contiennent une information géométrique non triviale sur la structure de contact elle-même.

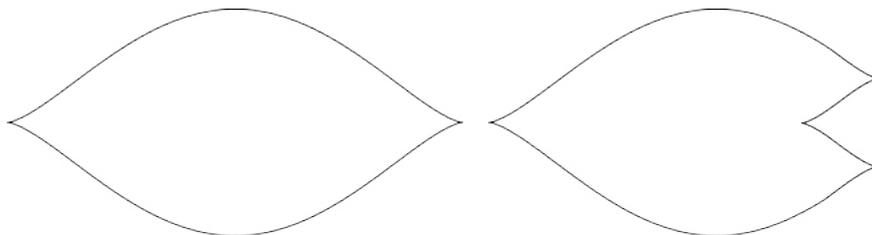


FIGURE 3. Les projections dans $\{y = 0\}$ de cercles legendriens non legendriennement isotopes de $(\mathbb{R}^3, \xi_{\text{std}} := \ker(dz - ydx))$.

Ce phénomène est véritablement surprenant, car les sous-variétés legendriennes sont de grande codimension dans les variétés de contact, elles sont « petites », mais elles sont excessivement difficile à transporter, elles sont « encombrantes ».

La classification des sous-variétés legendriennes à isotopie legendrienne près est un problème riche et encore très vastement ouvert, voir à titre d'exemple l'article [9] de Tobias Elkhölm, John Etnyre et Michael Sullivan.

Nous ignorons encore aujourd'hui qu'elle peut être la classification complète des sous-variétés legendriennes ayant une topologie donnée et ce y compris dans les variétés de contact relativement simples, comme les espaces de premiers jets. La résolution de ce problème ne peut être envisagée que par le développement d'invariants algébriques calculables, permettant de distinguer avec précision les différentes classes d'isotopie legendrienne.

Nous disposons par exemple des *nombre de rotation* et de *Thurston-Bennequin*, deux invariants qui permettent ensemble de distinguer complètement les nœuds legendriens triviaux de $(\mathbb{R}^3, \xi_{\text{std}})$, voir [10] de Yakov Eliashberg et Maia Fraser. Ces invariants dits *classiques* échouent cependant à différencier entièrement tous les nœuds legendriens de $(\mathbb{R}^3, \xi_{\text{std}})$, nous pouvons en trouver un exemple explicite dans l'article [8] de Yuri Chekanov.

Les *classes de Maslov* sont des invariants homologiques en tout degré qui généralisent le nombre de rotation aux sous-variétés legendriennes d'une variété de contact quelconque, voir l'article [11] de Dmitry Fuchs.

Les invariants algébriques les plus sophistiqués des sous-variétés legendriennes sont définis à partir des *cordes de Reeb*, qui sont les trajectoires non constantes du *champ de Reeb* joignant des points d'une même sous-variété legendrienne. Par construction, ce champ de vecteurs porte toute l'information provenant de la structure de contact, ce qui permet aux cordes de Reeb de restituer, au moins partiellement, la géométrie de contact des sous-variétés legendriennes.

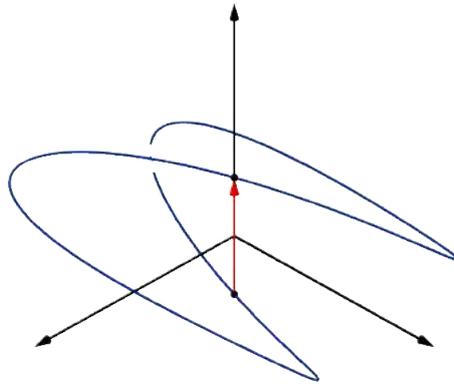


FIGURE 4. La seule corde de Reeb d'un nœud legendrien de $J^1\mathbb{R}$.

Nous étudions seulement les espaces de premiers jets, car ils « façonnent » toutes les variétés de contact au voisinage de leurs sous-variétés legendriennes. D'une certaine manière, nous nous concentrons seulement sur la classification locale des sous-variétés legendriennes des variétés de contact.

Certaines sous-variétés legendriennes $\Lambda \subset J^1X$ peuvent être décrites en termes des points et des valeurs critiques d'une *famille génératrice* $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\Lambda = \{(x, \partial_x f(x, e), f(x, e)) \mid \partial_e f(x, e) = 0\},$$

avec $\mathbf{0} \in (\mathbb{R}^N)^*$ une valeur régulière de l'application $\partial_e f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$.

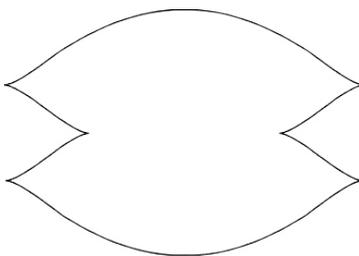


FIGURE 5. Un nœud legendrien n'admettant pas de famille génératrice.

Une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne en induit une infinité d'autres en la précomposant par des difféomorphismes *fibrés* et en la *stabilisant*, alors toutes les familles génératrices ainsi obtenues sont déclarées équivalentes. Cette première opération consiste à permuter dans les fibres les points critiques de la famille génératrice, alors que la seconde opération revient à rajouter des dimensions dans les fibres le long desquelles elle varie quadratiquement.

Un théorème important de Yuri Chekanov dans [7] assure que les isotopies legendriennes préservent les familles génératrices et leurs classes d'équivalence. Observons aussi que les cordes de Reeb d'une sous-variété legendrienne Λ décrite par une famille génératrice $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ s'apparient avec les points critiques de la *fonction différence* associée $\delta: X \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\delta(x, e_1, e_2) := f(x, e_1) - f(x, e_2).$$

Ces deux observations permettent ensemble d'envisager, dans la philosophie de l'homologie de Morse, la classification des sous-variétés legendriennes par celles de leurs familles génératrices.

Les familles génératrices *linéaires à l'infini* possèdent une théorie de Morse suffisamment agréable pour développer des invariants homologiques élaborés. Dans ce mémoire, nous étudions une homologie pour les familles génératrices, elle se nomme *homologie génératrice* $HG(f)$ de f et elle est définie comme l'homologie relative des sous-niveaux ω et ε de sa fonction différence δ :

$$HG_k(f) := H_{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

avec les valeurs critiques strictement positives de δ strictement comprises entre les réels ε et ω , voir les articles [18] et [22] de Joshua Sabloff et Lisa Traynor.

Nous attirons d'emblée l'attention du lecteur, la *graduation* de $HG_\bullet(\cdot)$ dépend directement de la dimension de la fibre du domaine de la famille génératrice, cette précaution est nécessaire pour assurer son invariance par stabilisation. Cette homologie « compte » les trajectoires d'un pseudo-gradient adapté de la fonction différence δ entre des cordes de Reeb de la sous-variété legendrienne engendrée par la famille génératrice f .

La connaissance des familles génératrices d'une sous-variété legendrienne est souvent trop qualitative pour que l'on puisse comprendre précisément la topologie des sous-niveaux des fonctions différences qui leurs sont associées. Par conséquent, le calcul de l'homologie génératrice est grandement compromis, mais nous arrivons à palier cette apparente difficulté en obtenant des résultats de structure sur l'homologie génératrice.

Dans ce mémoire, nous adaptions la dualité de Poincaré pour dégager une longue suite exacte de dualité reliant l'homologie génératrice, la cohomologie correspondante et l'homologie de la sous-variété legendrienne.

Théorème (F. Bourgeois, J. Sabloff, L. Traynor, 2015, [5]). Si Λ est une sous-variété legendrienne connexe de J^1X qui admet une famille génératrice f linéaire à l'infini, alors il existe une suite exacte longue :

$$\cdots \xrightarrow{\tau_k} H_k(\Lambda) \xrightarrow{\sigma_k} HG^{n-k}(f) \xrightarrow{\rho_k} HG_{k-1}(f) \rightarrow \cdots$$

De plus, les applications τ_k satisfont deux propriétés supplémentaires :

1. Si $\alpha: H^{n-k}(\Lambda) \rightarrow H_k(\Lambda)$ est l'isomorphisme de dualité de Poincaré, alors les applications $\sigma_k \circ \alpha$ et τ_{n-k} sont duales.
2. L'application $\tau_n: HG_n(f) \rightarrow H_n(\Lambda)$ est surjective.

En particulier, l'espace vectoriel $HG_n(f)$ est de dimension au moins un.

Ce résultat a permis à leurs auteurs de déterminer tous les modules gradués qui peuvent être réalisés comme l'homologie génératrice d'une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne, nous parlons de *géographie* ou *cartographie* :

Théorème (F. Bourgeois, J. Sabloff, L. Traynor, 2015, [5]). Si Λ est une sous-variété legendrienne connexe de J^1X ayant une famille génératrice f linéaire à l'infini, alors le polynôme de Poincaré de f est de la forme :

$$(\star) \quad \Gamma_f(t) = (q_0 + q_1t + \dots + q_nt^n) + p(t) + t^{n-1}p(t^{-1}),$$

où $q_k + q_{n-k}$ est le k -ième nombre de Betti de Λ , $q_0 = 0$, $q_n = 1$ et p satisfait :

$$p(t) := \sum_{k \geq \lfloor (n-1)/2 \rfloor} p_k t^k,$$

avec tous les coefficients p_k qui sont des entiers naturels.

Si $P \in \mathbb{N}[t, t^{-1}]$ est un polynôme de Laurent satisfaisant (\star) , alors pour $n \geq 2$, il existe une sous-variété legendrienne connexe de $J^1\mathbb{R}^n$ ayant une famille génératrice f linéaire à l'infini telle que $P(t) = \Gamma_f(t)$.

Concrètement, cela signifie que nous comprenons les obstructions à l'existence d'une isotopie legendrienne qui sont mesurées par l'homologie génératrice.

Notre lecteur ne devra pas s'en surprendre, nous avons jugé pertinent de plutôt énoncer les versions homologiques des résultats cohomologiques de l'article [5] de Frédéric Bourgeois, Joshua Sabloff et Lisa Traynor.

Nous ouvrons ce mémoire en fixant le cadre de la géométrie de contact, pour pouvoir ensuite aborder sereinement le contexte des familles génératrices². Ces notions clés étant dégagées, nous construisons et étudions l'homologie génératrice avant de démontrer la longue suite exacte de dualité annoncée. Dans le souci de ne pas allourdir ce document, nous avons relégué dans les annexes les notions nécessaires d'algèbre homologique et de théorie de Morse. Nous supposons néanmoins que notre lecteur est suffisamment familier avec la géométrie différentielle pour ne pas avoir à en rappeler les concepts de base qu'il trouvera dans le livre [16] de Jacques Lafontaine. Nous présentons dans notre dernière annexe des calculs d'homologie pour les familles génératrices, ces exemples illustrent les remarques parcemées dans notre mémoire.

Nous avons pris le parti de ne jamais détailler les calculs dans leur intégralité, mais plutôt d'indiquer les étapes et raisonnements clés pour les mener à bien. Nous sommes d'ailleurs convaincus qu'il est plus bénéfique pour notre lecteur de les reproduire, plutôt que de suivre bêtement des lignes de formules.

2. J'éprouve quelques regrets de ne pas avoir abordé ces sujets dans toute la profondeur qu'ils méritent, mais il était préférable de ne pas s'éloigner de nos préoccupations.

1. UN BREF APERÇU DE LA GÉOMÉTRIE DE CONTACT

Nous survolons les notions de géométrie de contact nécessaires à notre étude. L'ouvrage de référence pour cette partie est le livre [14] de Hansjörg Geiges.

Soit M une variété différentielle de dimension impaire $2n + 1$.

1.1. Les structures de contact.

Définition 1.1. Une *forme de contact* est une 1-forme différentielle α de M satisfaisant la condition de non dégénérescence $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$.

Remarque 1.2. La forme bilinéaire alternée $d\alpha$ est non dégénérée sur $\ker(\alpha)$ ³, ce qui impose aux hyperplans $\xi := \ker(\alpha)$ de TM d'être de dimension paire.

Une forme de contact α permet de définir par dualité un champ de vecteurs :

Définition 1.3. Le *champ de Reeb* R_α de α est défini par les équations :

$$\alpha(R_\alpha) = 1, d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0$$

Le champ R_α est transversal au champ des noyaux de α et dirige celui de $d\alpha$.

Remarque 1.4. Le flot du champ de Reeb préserve la forme de contact⁴.

Exemple 1.5. Sur \mathbb{R}^{2n+1} de coordonnées $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$, la forme

$$\alpha_{\text{std}} := dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$$

définit une forme de contact dont le champ de Reeb est donné par ∂_z .

Définition 1.6. Une *structure de contact* est un champ d'hyperplans $\xi \subset TM$ tangents localement donné par le noyau d'une forme de contact.

Remarque 1.7. La condition de contact étant invariante par multiplication par une fonction ne s'annulant pas, cette notion est correctement définie.

Exemple 1.8. La structure de contact standard de \mathbb{R}^{2n+1} est $\xi_{\text{std}} := \ker(\alpha_{\text{std}})$.

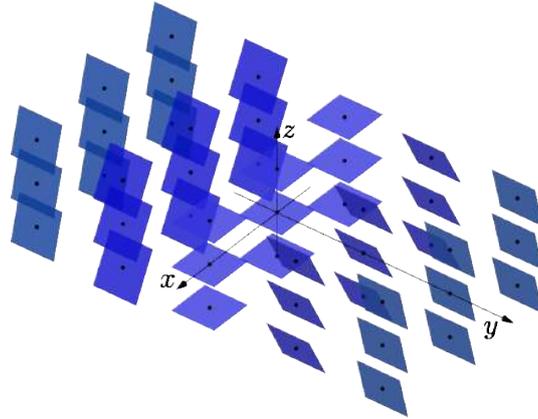


FIGURE 6. La structure de contact $\xi_{\text{std}} := \ker(dz - ydx)$ de \mathbb{R}^3 .

3. Quel que soit $p \in M$, l'application linéaire $d\alpha(p)|_{\xi_p} : \xi_p \rightarrow \xi_p^*$ est un isomorphisme.
 4. La formule de Cartan pour la dérivée de Lie donne $L_{R_\alpha} \alpha = \iota_{R_\alpha} d\alpha + d\iota_{R_\alpha} \alpha = 0$.

Remarque 1.9. Les structures de contact sont à l'opposé de l'intégrabilité⁵, leur définition est à rapprocher d'un théorème de Frobenius⁶ selon lequel le champ d'hyperplans $\ker(\alpha)$ est intégrable si, et seulement, si $\alpha \wedge d\alpha = 0$. Les structures de contact apparaissent comme les champs d'hyperplans qui minimisent la dimension des sous-variétés qui leur sont partout tangentes.

Nous précisons désormais la notion de symétrie entre variétés de contact.

Définition 1.10. Un *contactomorphisme* est un difféomorphisme entre deux variétés de contact $\psi: (M_1, \xi_1) \rightarrow (M_2, \xi_2)$ qui satisfait $T\psi(\xi_1) = \xi_2$.

Exemple 1.11. Les structures de contact $\ker(dz - ydx)$ et $\ker(dz + xdy - ydx)$ sont contactomorphes et l'application $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\psi(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, z - \frac{xy}{2} \right)$$

est un contactomorphisme explicite entre ces deux structures de contact⁷.

La variété M est désormais munie d'une structure de contact ξ .

Définition 1.12. Un *champ de contact* est un champ de vecteurs dont le flot local est une *isotopie de contact*, il est constitué de contactomorphismes.

Exemple 1.13. Un champ de Reeb d'une variété de contact est de contact.

Nous évoquons enfin un théorème venant éclairer la citation de notre mémoire :

Théorème 1.14. Soit α une forme de contact de M satisfaisant $\xi = \ker(\alpha)$.

1. L'*hamiltonien de contact* d'un champ de contact X est $H_X := \alpha(X)$.
2. Il existe un unique champ de contact X_H satisfaisant les équations :

$$\alpha(X_H) = H, d\alpha(X_H, \cdot) = dH(R_\alpha)\alpha - dH,$$

où $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ est une application lisse.

Une correspondance bijective entre les champs de contact et les applications lisses de M dans \mathbb{R} est donnée par $X \mapsto H_X$ et $H \mapsto X_H$.

Remarque 1.15. Il faut penser à un hamiltonien de contact comme à une énergie et à un champ de contact comme à un gradient.

1.2. Les sous-variétés legendriennes.

Les *legendriennes* sont les sous-variétés partout tangentes à une structure de contact qui sont de dimension maximale pour cette propriété.

Définition 1.16. Une sous-variété $\Lambda \subset M$ de dimension n est une *legendrienne* dès qu'elle satisfait la condition de tangence $T\Lambda \subset \xi$.

La tension régnant entre les structures de contact et les legendriennes n'empêche pas ces sous-variétés d'être extrêmement abondantes.

5. Un champ d'hyperplans tangents est dit *intégrable* lorsqu'il provient d'hypersurfaces, c'est-à-dire qu'il est réalisé comme la réunion de leurs fibrés tangents.

6. Pour appliquer l'énoncé classique de ce théorème, il suffit de remarquer que pour tous champs de vecteurs X et Y de M , nous avons $d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$.

7. Nous calculons facilement que $\psi^*(dz + xdy - ydx) = dz - ydx$, ce qui conclut.

Théorème 1.17. Si une sous-variété de M est de dimension n , alors elle peut être approximée en topologie C^0 par une sous-variété legendrienne.

Nous précisons la notion de déformation d'une sous-variété legendrienne :

Définition 1.18. Un chemin lisse $(j_t: L \hookrightarrow M)_{t \in [0,1]}$ de plongements de L est une *isotopie legendrienne* lorsque pour tout t , nous avons $Tj_t(L) \subset \xi$.

Nous utiliserons implicitement dans notre étude qu'une isotopie legendrienne compacte se prolonge toujours en une isotopie de contact.

Théorème 1.19. Soient L une sous-variété fermée de M et $(j_t: L \hookrightarrow M)_{t \in [0,1]}$ une isotopie legendrienne, alors il existe une isotopie de contact à support compact $(\psi_t: M \rightarrow M)_{t \in [0,1]}$ qui satisfait $j_t = \psi_t \circ j_0$, pour tout $t \in [0, 1]$.

Remarque 1.20. Un chemin lisse de sous-variétés legendriennes est obtenu en suivant une sous-variété legendrienne fixée au cours d'une déformation globale de la variété de contact ambiante.

Nous supposons désormais que ξ est donnée par une forme de contact α .

Définition 1.21. Une *corde de Reeb* d'une sous-variété legendrienne Λ est une trajectoire non constante du champ de Reeb de α qui débute et aboutit sur Λ .

Nous verrons dans la partie 3 que les cordes de Reeb permettent d'encoder la géométrie de contact des sous-variétés legendriennes et d'en construire des invariants legendriens fins.

1.3. Les modèles locaux en géométrie de contact.

Soit X une variété, son *espace de premiers jets* est la variété $J^1X := T^*X \times \mathbb{R}$, nous notons aussi λ la forme de Liouville de T^*X .

Proposition 1.22. La forme $dz - \lambda$ définit une forme de contact de J^1X , son champ de Reeb est donné par ∂_z .

Nos espaces de premiers jets seront toujours munis de cette forme de contact.

Remarque 1.23. Une corde de Reeb d'une sous-variété legendrienne de J^1X est un segment vertical non réduit à un point parcouru de bas en haut.

Exemple 1.24. La variété de contact $J^1\mathbb{R}^n$ s'identifie à $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{\text{std}})$.

Les variétés de contact sont toutes localement « façonnées » sur le même modèle⁸.

Théorème 1.25 (Darboux). Une variété de contact de dimension $2n + 1$ est localement contactomorphe à l'espace de premiers jets $J^1\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.26. Il existe une version encore plus précise du théorème 1.25 : une forme de contact s'écrit localement comme α_{std} .

Une version semi-locale du théorème 1.25 subsiste encore au voisinage des sous-variétés legendriennes d'une variété de contact quelconque.

⁸. Les variétés de contact sont radicalement différentes des variétés riemanniennes qui, elles, possèdent des invariants locaux comme leur courbure.

Théorème 1.27. Soit Λ une sous-variété legendrienne d'une variété de contact, alors il existe un voisinage ambiant de Λ qui est contactomorphe à un voisinage de la section nulle de l'espace de premiers jets $J^1\Lambda$.

Seuls les phénomènes semi-locaux ou globaux sont susceptibles de restituer une information non triviale sur la géométrie des variétés de contact.

2. LES SOUS-VARIÉTÉS LEGENDRIENNES D'UN ESPACE DE PREMIERS JETS

Nous étudions les sous-variétés legendriennes des espaces de premiers jets, car d'après le théorème 1.27, ces variétés de contact modèlent toutes les autres au voisinage de leurs sous-variétés legendriennes.

Soit X une variété différentielle de dimension n .

2.1. Les projections lagrangiennes et frontales.

Les applications $\pi_{xy}: J^1X \rightarrow T^*X$ et $\pi_{xz}: J^1X \rightarrow X \times \mathbb{R}$ sont définies par :

$$\begin{aligned}\pi_{xy}(x, y, z) &= (x, y), \\ \pi_{xz}(x, y, z) &= (x, z).\end{aligned}$$

où $(x, y, z) \in X \times T_x^*X \times \mathbb{R}$, il s'agit des projections *lagrangienne*⁹ et *frontale*.

Nous appelons *diagramme lagrangien*, respectivement *front legendrien*, d'une sous-variété legendrienne sa projection lagrangienne, respectivement frontale. Nous représenterons les fronts legendriens comme des graphiques (x, z) ayant les coordonnées selon X comme abscisses et la coordonnée selon \mathbb{R} en ordonnée.

Observons que si (x, y, z) est un paramétrage d'une sous-variété legendrienne, alors quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons l'égalité suivante :

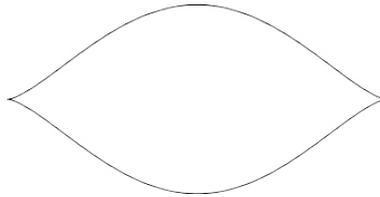
$$y_i = \frac{\partial x_i}{\partial z},$$

donc le front legendrien détermine uniquement la sous-variété legendrienne. Pour cette raison, nous utiliserons souvent les fronts legendriens pour décrire et visualiser les sous-variétés legendriennes des espaces de premiers jets.

Cette stratégie se révèle être particulièrement effective, puisque les sous-variétés legendriennes sont des objets de dimension n en dimension ambiante $2n + 1$, alors que leurs fronts vivent, eux, en dimension ambiante $n + 1$.

Exemple 2.1. Une sous-variété legendrienne de $(\mathbb{R}^3, \xi_{\text{std}})$ se « rapproche » de l'observateur quand les pentes de son front sont positives, alors qu'au contraire, elle s'en « éloigne » quand les pentes de son front sont négatives.

Nous définissons désormais S_{std}^n , la n -sphère legendrienne *standard* de $J^1\mathbb{R}^n$. Le front du cercle legendrien standard S_{std}^1 est représenté ci-dessous :



⁹ La projection lagrangienne L d'une sous-variété legendrienne donnée de J^1X est une sous-variété *lagrangienne* immergée de la variété *symplectique exacte* $(T^*X, d\lambda)$ i.e. $d\lambda|_L \equiv 0$.

Nous construisons par récurrence les autres sphères legendriennes standards. Si $q \mapsto (x_1(q), \dots, x_{n-1}(q), z(q))$ est un paramétrage local du front de S_{std}^{n-1} , alors un paramétrage local du front de S_{std}^n est donné par :

$$(q, \theta) \mapsto (x_1(q), \dots, x_{n-1}(q) \cos(\theta), x_n(q) \sin(\theta), z(q)).$$

Géométriquement, le front de S_{std}^n est obtenu par rotation complète autour du sous-espace $\{x_{n-1} = x_n = 0\}$ de la portion de front $\pi_{xz}(S_{\text{std}}^{n-1}) \cap \{x_{n-1} > 0\}$.

Exemple 2.2. Nous illustrons la construction de la 2-sphère legendrienne standard à partir du cercle legendrien standard.

Nous représentons tout d'abord la portion « droite » du front de S_{std}^1 .

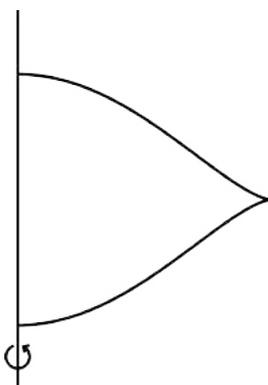


FIGURE 7. La portion $\pi_{xz}(S_{\text{std}}^1) \cap \{x > 0\}$ du front de S_{std}^1 .

Nous obtenons le front de S_{std}^2 en faisant tourner cette portion autour de l'axe z .

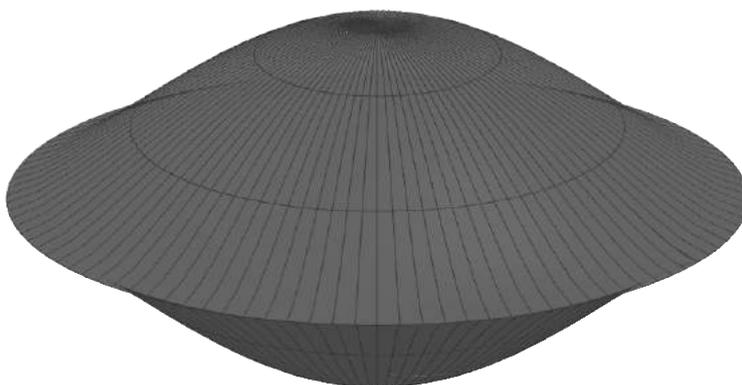


FIGURE 8. La projection frontale de $S_{\text{std}}^2 \subset J^1\mathbb{R}^2$.

Toutes les sphères legendriennes standards sont des sphères topologiques.

Exemple 2.3. Nous nous familiarisons avec les diagrammes lagrangiens et les fronts legendriens en considérant des exemples dans $J^1\mathbb{R}$.

Nous commençons par représenter le cercle legendrien standard.

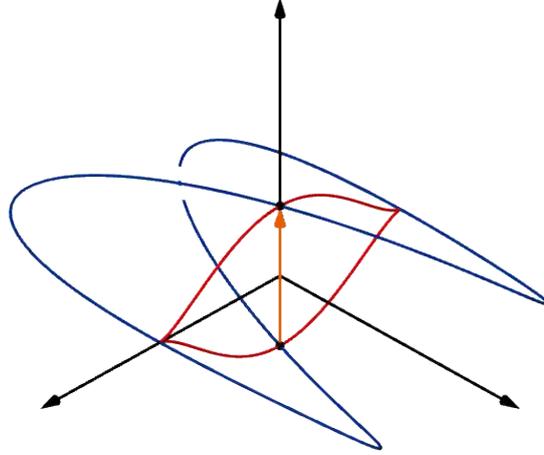


FIGURE 9. Le cercle legendrien standard $S^1_{\text{std}} \subset J^1\mathbb{R}$ (en bleu), son front (en rouge) et son unique corde de Reeb (en orange).

Nous représentons aussi le diagramme lagrangien et le front legendrien d'un nœud de trèfle legendrien.

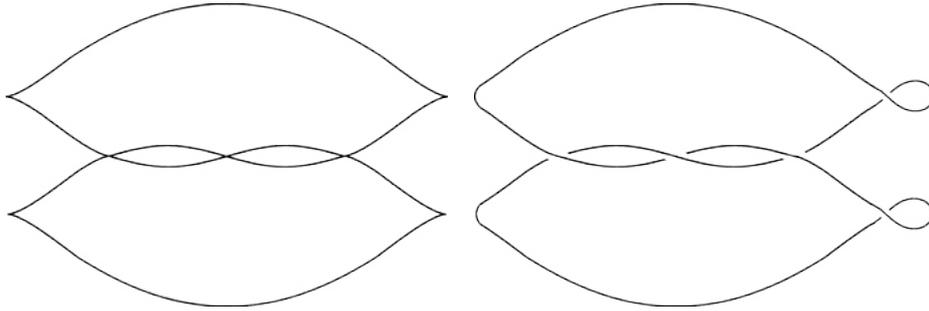


FIGURE 10. Un nœud de trèfle en projection frontale et lagrangienne.

Les diagrammes lagrangiens et les fronts legendriens permettent de détecter les cordes de Reeb d'une sous-variété legendrienne :

Génériquement, les cordes de Reeb d'une sous-variété legendrienne sont en correspondance bijective avec les points doubles de son diagramme lagrangien.

Exemple 2.4. Le diagramme lagrangien de S^1_{std} a un unique point double.

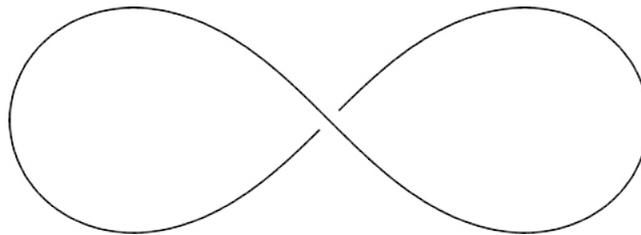


FIGURE 11. Le diagramme lagrangien de $S^1_{\text{std}} \subset J^1\mathbb{R}$.

Les cordes de Reeb d'une sous-variété legendrienne sont en bijection avec les points verticalement alignés de son front qui ont les mêmes espaces tangents.

Exemple 2.5. Le front legendrien du cercle legendrien standard ne possède que deux points verticalement alignés ayant des tangentes parallèles.

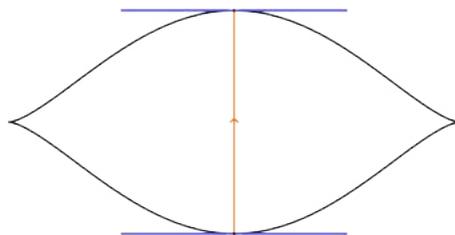


FIGURE 12. Le front de $S_{\text{std}}^1 \subset J^1\mathbb{R}$ et son unique corde de Reeb.

Les sphères legendriennes standards possèdent une unique corde de Reeb.

2.2. Les familles génératrices des sous-variétés legendriennes.

Nous décrivons certaines sous-variétés legendriennes à l'aide des points et des valeurs critiques d'une famille de fonctions $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 2.6. Si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse, alors $j^1(f): X \rightarrow J^1X$ définie par :

$$j^1(f)(x) := ((x, T_x f), f(x))$$

est un plongement legendrien dont la projection frontale est le graphe de f .

Preuve. Par propriété fondamentale de la forme de Liouville, nous avons :

$$j^1(f)^*(dz - \lambda) = df - df^*\lambda = df - df = 0,$$

ce qui assure que l'image de j_f est une sous-variété legendrienne de J^1X . ■

Remarque 2.7. D'après le théorème 1.25 et la proposition 2.6, par un point d'une variété de contact passe une infinité de sous-variétés legendriennes.

Nous généralisons la construction de la proposition 2.6 en considérant le 1-jet dans la direction de X d'une fonction définie sur un fibré vectoriel de base X . Intuitivement, les fibres permettent de décrire des sous-variétés legendriennes ayant des points multiples au-dessus d'une même abscisse de leur front.

Notons x les coordonnées de X et e les coordonnées de \mathbb{R}^N .

Définition 2.8. Une fonction lisse $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une *famille génératrice* lorsque $\mathbf{0}$ est une valeur régulière de l'application $\partial_e f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$.

Remarque 2.9. Nous ne perdons pas de généralité à considérer seulement des fibrés vectoriels triviaux dans notre définition des familles génératrices. Nous serons de toute façon amené à rajouter des dimensions dans leurs fibres, ce qui finirait quand même par les rendre trivialisables.

Exemple 2.10. Une fonction lisse de X dans \mathbb{R} est une famille génératrice.

Le lieu fibrement critique Σ_f de f est la sous-variété $\partial_e f^{-1}(\mathbf{0})$ de dimension n . Nous définissons également l'immersion legendrienne¹⁰ engendrée par f comme l'application $j_f: \Sigma_f \looparrowright \mathbb{R}$ donnée en coordonnées locales par :

$$j_f(x, e) := ((x, \partial_x f(x, e)), f(x, e)).$$

Nous désignons finalement l'image¹¹ de l'immersion legendrienne j_f par Λ_f .

Remarque 2.11. Le front legendrien de Λ_f est constitué des $(x, e) \in X \times \mathbb{R}^N$, où e est un point critique de l'application $f_x: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 2.12. Une sous-variété legendrienne Λ admet une famille génératrice lorsqu'il existe une famille génératrice f satisfaisant $\Lambda = \Lambda_f$.

Remarque 2.13. Une sous-variété legendrienne de J^1X admet une famille génératrice si, et seulement, si son front legendrien est un *diagramme de Cerf*¹².

Exemple 2.14. L'application $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t, e) = e^3 - 3t(1-t)e$$

est une famille génératrice¹³ du cercle legendrien standard de $J^1\mathbb{R}$, nous avons :

$$\Sigma_f = \left\{ \left(t, \sqrt{t(1-t)} \right); t \in [0, 1] \right\} \cup \left\{ \left(t, -\sqrt{t(1-t)} \right); t \in [0, 1] \right\}$$

qui est composé de deux branches qui sont des graphes de fonctions.

Nous représentons le front de ce nœud legendrien et sa famille génératrice f .

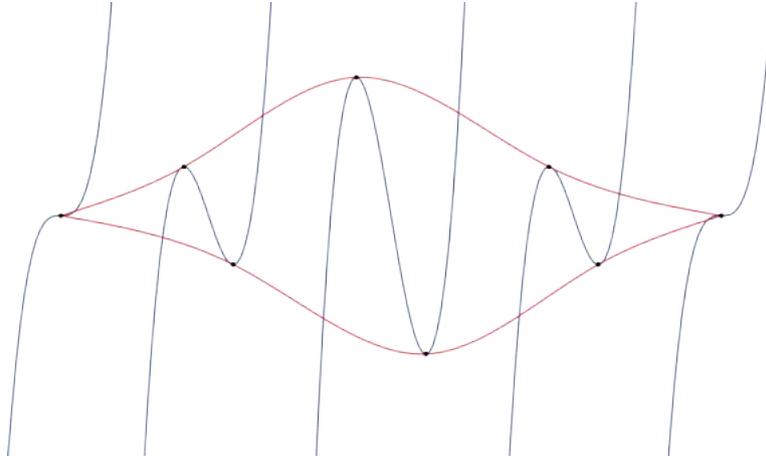


FIGURE 13. Le diagramme de Cerf (en rouge) de la famille f (en bleu).

Exemple 2.15. La famille génératrice de l'exemple 2.14 induit par rotation une famille génératrice de la sphère legendrienne standard de $J^1\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$.

Toutes les sous-variétés legendriennes n'admettent pas des familles génératrices, mais, dans notre étude, nous supposons que c'est toujours le cas.

10. C'est exactement la même preuve que celle de la proposition 2.6.

11. Nous insistons, l'image de j_f n'est pas nécessairement plongée!

12. Nous illustrons cette notion dans l'exemple suivant, voir [6] pour sa définition générale.

13. Le seul point critique de $\partial_e f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ est $(1/2, 0)$ de valeur critique non nulle.

2.3. Vers la classification des sous-variétés legendriennes.

Une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne en induit une infinité d'autres par modification à l'aide de deux opérations élémentaires.

Définition 2.16. Un difféomorphisme de $X \times \mathbb{R}^N$ est *fibré* lorsqu'il préserve globalement les niveaux $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ pour tout $x \in X$.

La précomposition d'une famille génératrice par un difféomorphisme fibré est une famille génératrice dont les points critiques ont été permutés fibre à fibre¹⁴.

Définition 2.17. Une *stabilisation* d'une famille génératrice $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une application $f \oplus Q: X \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, e_1, e_2) = f(x, e_1) + Q(e_2),$$

où $Q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique non dégénérée.

La stabilisation d'une famille génératrice est une famille génératrice obtenue en rajoutant des dimensions dans les fibres de son domaine, le long desquelles elle varie quadratiquement¹⁵.

Définition 2.18. Des familles génératrices *équivalentes* diffèrent par une suite de précomposition par des difféomorphismes fibrés et par des stabilisations.

Remarque 2.19. Si deux familles génératrices sont équivalentes, alors elles engendrent la même sous-variété legendrienne¹⁶, la réciproque n'est pas vraie!

Nous clôturons cette section en énonçant un théorème qui justifie à lui seul la pertinence des familles génératrices dans le problème de classification des sous-variétés legendriennes des espaces de premiers jets.

Théorème 2.20 (Y. Chekanov, 1996, [7]). L'existence d'une famille génératrice persiste aux isotopies legendriennes et sa classe d'équivalence est préservée.

Remarque 2.21. Une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne qui subit une isotopie legendrienne est amenée à être stabilisée.

La remarque 2.19 et le théorème 2.20 motivent la définition 2.18.

14. C'est une conséquence de la règle de la chaîne.

15. Une forme quadratique non dégénérée possède un unique point critique, en l'origine, et sa valeur critique est nulle.

16. Si les difféomorphismes considérés n'étaient pas fibrés, cela ne serait plus vrai.

3. L'HOMOLOGIE POUR LES FAMILLES GÉNÉRATRICES

Nous construisons une homologie permettant de distinguer partiellement les classes d'équivalence des familles génératrices et avant d'en étudier plus en détails la structure, nous l'exploitons pour élaborer des invariants legendriens.

Soient X une variété de dimension n et $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne Λ connexe.

3.1. La fonction différence d'une famille génératrice.

Nous introduisons une application nous permettant d'envisager la classification des sous-variétés legendriennes via celles de leurs familles génératrices.

Définition 3.1. La fonction différence $\delta: X \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\delta(x, e_1, e_2) := f(x, e_1) - f(x, e_2).$$

Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, nous notons δ^a le sous niveau $\delta^{-1}(] - \infty, a])$.

Remarque 3.2. Il nous sera utile d'observer que $\delta(x, e_1, e_2) = -\delta(x, e_2, e_1)$.

Les points critiques de la fonction différence portent une information cruciale sur la topologie et les cordes de Reeb de la sous-variété legendrienne Λ .

Proposition 3.3. Les points critiques de δ sont de deux types :

1. Les points critiques de δ de valeurs critiques strictement positives sont en correspondance bijective avec les cordes de Reeb de Λ .
2. L'ensemble des points critiques de δ de valeur critique nulle contient une unique sous-variété de $X \times \mathbb{R}^{2N}$, elle est difféomorphe à Λ .

Cette sous-variété critique est toujours non dégénérée et elle est d'indice N . Génériquement, ces points critiques sont aussi non dégénérés¹⁷.

Preuve. Nous calculons les dérivées partielles de δ au point (x, e_1, e_2) :

$$\begin{aligned} \partial_x \delta(x, e_1, e_2) &= \partial_x f(x, e_1) - \partial_x f(x, e_2), \\ \partial_{e_1} \delta(x, e_1, e_2) &= \partial_e f(x, e_1), \\ \partial_{e_2} \delta(x, e_1, e_2) &= \partial_e f(x, e_2). \end{aligned}$$

De ce calcul préliminaire, nous déduisons l'égalité suivante :

$$(1) \quad \text{Crit}(\delta) = \{(x, e_1, e_2) \mid (x, e_1), (x, e_2) \in \Sigma_f, \partial_x f(x, e_1) = \partial_x f(x, e_2)\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir les affirmations de la proposition.

D'après la remarque 1.23 et l'égalité (1), (x, e_1, e_2) est un point critique de δ de valeur critique strictement positive si, et seulement, s'il existe une corde de Reeb de Λ joignant $(x, \partial_x f(x, e_1), f(x, e_1))$ à $(x, \partial_x f(x, e_2), f(x, e_2))$.

¹⁷. Leur indice s'exprime avec l'indice de Conley-Zehnder des cordes de Reeb, voir [18].

Par ailleurs, d'après l'égalité (1), nous observons que l'ensemble des points critiques de δ de valeur critique nulle contient l'ensemble suivant :

$$\{(x, e, e) \mid (x, e) \in \Sigma_f\}$$

qui est une sous-variété de $X \times \mathbb{R}^{2N}$ difféomorphe à Λ via $(x, e, e) \mapsto j_f(x, e)$. Un calcul¹⁸ montre que cette sous-variété critique est non dégénérée d'indice N .

L'affirmation sur la non dégénérescence des points critiques de δ de valeurs critiques strictement positives suit de la généralité des fonctions de Morse. ■

Remarque 3.4. D'après le lemme de Morse et la proposition 3.3, les cordes de Reeb d'une sous-variété legendrienne générique sont isolées.

La proposition 3.3 motive le développement d'un invariant pour les familles génératrices à partir de la théorie de Morse de leurs fonctions différences.

3.2. Un invariant homologique pour les familles génératrices.

Une majeure partie des résultats en homologie de Morse repose inévitablement sur la compacité des sous-niveaux des fonctions de Morse que l'on considère, nous invitons le lecteur à s'en convaincre en consultant les ouvrages [2] et [17]. Or, le domaine des fonctions différences n'est jamais compact, c'est ce qui nous contraints d'imposer le comportement à l'infini des familles génératrices.

Définition 3.5. La famille génératrice $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est *linéaire à l'infini* lorsqu'il existe $A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle telle que :

$$f(x, e) = A(e)$$

pour tous les points (x, e) en dehors d'un compact de $X \times \mathbb{R}^N$.

Nous supposons désormais que la famille génératrice f est linéaire à l'infini, alors les valeurs critiques de δ forment un ensemble borné¹⁹ et symétrique. Nous choisissons maintenant $\omega > \varepsilon > 0$ de sorte que les valeurs critiques strictement positives de δ soient strictement comprises entre ε et ω .

Définition 3.6. L'*homologie génératrice* de f , notée $HG(f)$, est l'homologie relative des sous-niveaux ω et ε de sa fonction différence δ , nous avons :

$$HG_k(f) := H_{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

L'*homologie génératrice complète* de f , notée $\widetilde{HG}(f)$, est l'homologie relative des sous-niveaux ω et $-\varepsilon$ de sa fonction différence δ , nous avons :

$$\widetilde{HG}_k(f) := H_{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^{-\varepsilon}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

La *cohomologie génératrice* et la *cohomologie génératrice complète* de f sont définies en prenant les cohomologies relatives des mêmes sous-niveaux de δ avec la même graduation.

¹⁸ Il s'agit du lemme 6.1 de l'article [12] de Dmitry Fuchs et Dan Rutherford.

¹⁹ Une forme linéaire non nulle n'a pas de points critiques.

L'homologie génératrice (complète) de f provient du complexe $C(f)$ formé par les points critiques de δ de valeurs positives (ou nulle) muni de la graduation :

$$|p| := \text{ind}_p(\delta) - N - 1,$$

et l'application de bord de ce complexe est la différentielle de Morse usuelle. Nous reviendrons sur le choix de faire intervenir la dimension de la fibre du domaine de la famille génératrice f dans la graduation de ce complexe.

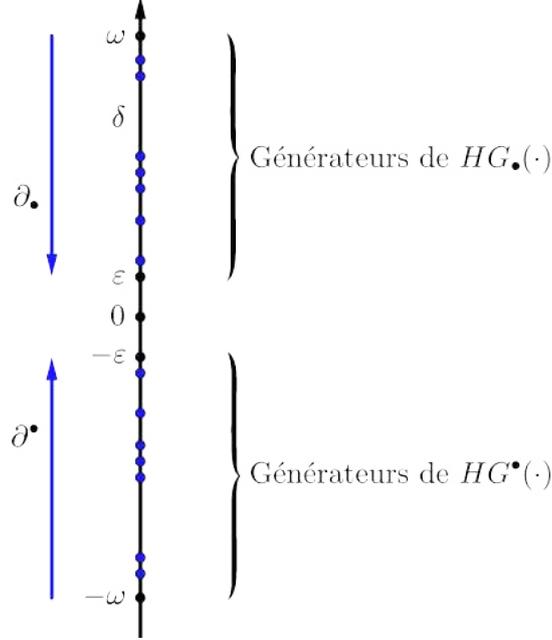


FIGURE 14. Calcul de l'homologie et de la cohomologie génératrice.

Remarque 3.7. Par un résultat standard de théorie de Morse (théorème C.16), cette homologie et cohomologie ne dépendent pas du choix des réels ω et ε .

La stabilisation d'une famille génératrice n'est jamais linéaire à l'infini et nos espoirs d'exploiter l'homologie génératrice pour distinguer partiellement les classes d'isotopie legendrienne semblent s'effondrer, cependant :

Proposition 3.8. La stabilisation d'une famille génératrice linéaire à l'infini l'est aussi après précomposition par un difféomorphisme fibré bien choisi.

Preuve. Soit $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une famille génératrice linéaire à l'infini, alors il existe une forme linéaire A non nulle de \mathbb{R}^N telle qu'en dehors d'un compact :

$$f(x, e) = A(e).$$

Nous considérons aussi $Q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée, alors en dehors d'un compact, nous avons l'égalité suivante :

$$f \oplus Q(x, e, e') = A(e) + Q(e').$$

Soient \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^N , \mathcal{B}' la base antédual d'une base complétant A et B l'application linéaire dont la matrice dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est l'identité.

Nous introduisons Φ le difféomorphisme fibré de $X \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$ défini par :

$$\Phi(x, e, e') := (x, B(e), e'),$$

de cette façon, pour les points (x, e, e') en dehors d'un compact, nous avons :

$$(f \oplus Q) \circ \Phi(x, e, e') = e_1 + Q(e').$$

Nous définissons alors l'application $g: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(e, e') = e_1 + Q(e')$ et il s'agit de construire un difféomorphisme Ψ de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$ satisfaisant :

$$g \circ \Psi(e, e') = e_1.$$

Nous munissons $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$ du produit scalaire standard, alors les trajectoires du gradient de g sont des droites qui intersectent transversalement et en un unique point l'hyperplan $\{e_1 = 0\}$, ce qui nous permet de construire :

$$\Psi^{-1}(e_1, \dots, e_N, e) = (g(e_1, \dots, e_N, e), e_2, \dots, e_N, e'),$$

où (e_1, \dots, e_N, e) et $(0, e_2, \dots, e_N, e')$ sont sur la même ligne du gradient de g . Le difféomorphisme recherché est donné par la composition $\Psi \circ \Phi$. ■

Remarque 3.9. La preuve est analogue au théorème de redressement des champs de vecteurs au voisinage d'un point régulier.

L'homologie génératrice est invariante par équivalence de familles génératrices.

Théorème 3.10. Si deux familles génératrices sont équivalentes, alors elles ont la même homologie génératrice.

Preuve. Si deux familles génératrices diffèrent d'un difféomorphisme fibré, alors elles ont la même homologie génératrice, c'est la même preuve que l'invariance de l'homologie de Morse par difféomorphisme (théorème C.27).

Soient $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une famille génératrice et δ sa fonction différence. Nous considérons aussi $Q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée, alors d'après la proposition 3.8, ainsi que la première partie de cette preuve, nous supposons que $f \oplus Q$ est linéaire à l'infini de fonction différence notée δ' ²⁰. Dans ce contexte, nous montrons à l'aide d'un calcul direct que :

$$p := (x, e_1, e_2) \in \text{Crit}_{>0}(\delta) \iff p' := (x, e_1, 0, p, e_2, 0) \in \text{Crit}_{>0}(\delta').$$

De plus, pour tout point critique p de δ , nous avons $\text{ind}_{p'}(\delta') = \text{ind}_p(\delta) + k$, et nous en déduisons une bijection u respectant les graduations²¹ donnée par :

$$\begin{aligned} C(f) &\xrightarrow{u} C(f \oplus Q) \\ (x, e_1, e_2) &\mapsto (x, e_1, 0, e_2, 0). \end{aligned}$$

Soit g une métrique riemannienne sur $X \times \mathbb{R}^{2N}$ avec (δ, g) de Morse-Smale, nous prolongeons alors g en une métrique riemannienne g' sur $X \times \mathbb{R}^{2(N+k)}$ en utilisant le produit scalaire standard de \mathbb{R}^{2k} dans les dimensions stabilisées.

20. Pour tout $(x, e_1, e'_1, e_2, e'_2)$, nous avons $\delta'(x, e_1, e'_1, e_2, e'_2) = \delta(x, e_1, e_2) + Q(e'_1) - Q(e'_2)$.

21. C'est pour cela que la graduation employée dépend de la dimension de la fibre.

Soient p et q des points critiques de δ , alors avec les notations de l'annexe C, il vient que l'application u induit une bijection :

$$u: \mathcal{L}(p, q; \delta, g) \rightarrow \mathcal{L}(p', q'; \delta', g')$$

car le flot du champ $-\nabla\delta'$ explose linéairement dans les directions stabilisées. Finalement, (δ', g') est de Morse-Smale et u est un isomorphisme de complexes de chaînes, d'où l'invariance par stabilisation de l'homologie génératrice. ■

Nous exploitons désormais l'homologie génératrice pour construire une famille d'invariants par isotopie legendrienne des sous-variétés legendriennes.

Définition 3.11. Quel que soit $0 \leq k \leq n$, nous introduisons :

$$\mathcal{HG}_k(\Lambda) := \{HG_k(f); f \text{ famille génératrice linéaire à l'infini de } \Lambda\},$$

c'est l'ensemble d'homologie génératrice en degré k de Λ .

Théorème 3.12. L'ensemble $\mathcal{HG}_k(\cdot)$ est invariant par isotopie legendrienne.

Preuve. C'est une application directe des théorèmes 2.20 et 3.10. ■

Cependant, le nombre de cordes de Reeb **n'est pas** un invariant legendrien²² ! Nous invitons notre lecteur à consulter l'annexe D pour un contre-exemple.

Ces invariants sont encore difficilement exploitables, car l'ensemble des familles génératrices linéaires à l'infini d'une sous-variété legendrienne est mal compris.

Exemple 3.13. Les familles génératrices linéaires à l'infini du cercle legendrien standard sont équivalentes, voir [19] de Joshua Sabloff et Lisa Traynor²³.

3.3. La géographie de l'homologie pour les familles génératrices.

Nous supposons désormais que Λ est générique, compacte et connexe, alors d'après la proposition 3.3, l'homologie génératrice de f est de dimension finie. Nous cherchons maintenant à établir une relation de dualité entre l'homologie génératrice et la cohomologie correspondante.

Lemme 3.14. Les homologies $H_{\bullet+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon})$ et $H_\bullet(\Lambda)$ sont isomorphes.

Preuve. En reprenant les notations de l'annexe C, d'après la proposition 3.3 et un résultat standard de théorie de Morse-Bott (théorème C.18), nous observons que le sous-niveau δ^ε est obtenu en recollant $E^u(\Lambda)$ sur $\delta^{-\varepsilon}$ le long de $\partial E^u(\Lambda)$. En particulier, quel que soit $0 \leq k \leq n$, nous avons un isomorphisme :

$$H_{k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon}) \cong H_{k+N}(E^u(\Lambda), \partial E^u(\Lambda)).$$

Or, par la proposition 3.3, $E^u(\Lambda) \rightarrow \Lambda$ est un fibré en disques de dimension N , ce qui permet de conclure avec l'isomorphisme de Thom (théorème C.34). ■

22. En effet, deux complexes de chaînes ayant un nombre de générateurs différents peuvent très bien avoir la même homologie, voir l'exemple C.26.

23. Le résultat y est montré pour les familles génératrices linéaires-quadratiques à l'infini. Cependant, la proposition 3.8 nous permet de conclure.

La suite exacte longue du triplet $(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon})$ (théorème C.33) et le lemme 3.14 permettent d'obtenir une suite exacte longue reliant l'homologie génératrice, l'homologie génératrice complète et l'homologie de la sous-variété legendrienne :

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(\Lambda) \rightarrow \widetilde{HG}_k(f) \rightarrow HG_k(f) \rightarrow \cdots .$$

Nous cherchons alors à identifier les modules d'homologie génératrice complète.

Lemme 3.15. Quel que soit $a \in \mathbb{R}$ avec $-a < \omega$, il existe un isomorphisme :

$$\beta: H_\bullet(\delta^\omega, \delta^{-a}) \rightarrow H^{2N+n-\bullet}(\delta^a, \delta^{-\omega})$$

qui est induit par l'application $(x, e_1, e_2) \mapsto (x, e_2, e_1)$ de $X \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Preuve. Nous commençons par observer que pour tout choix de réels $a < b$, l'homologie relative $H(\delta^a, \delta^b)$ est celle du complexe de Morse $C(a, b)$ engendré par les points critiques de δ dont la valeur critique est comprise entre a et b . Dès lors, en reproduisant la preuve de la dualité de Poincaré (théorème C.29), nous constatons immédiatement que l'application suivante :

$$\begin{aligned} C(\omega, -a) &\rightarrow C(a, -\omega) \\ (x, e_1, e_2) &\mapsto (x, e_2, e_1) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de complexes de chaînes, ce qui permet de conclure. ■

En utilisant le lemme 3.15 avec $a = \varepsilon$, il vient $\widetilde{GH}_k(f) \cong H^{n-k+N+1}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\omega})$.

Lemme 3.16. La paire $(\delta^\omega, \delta^{-\omega})$ est *acyclique*, son homologie s'annule.

Preuve. Comme f est linéaire à l'infini, il existe $A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle et $\delta^c: X \times \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact telle que :

$$\delta(x, e_1, e_2) = \delta^c(x, e_1, e_2) + A(e_1) - A(e_2).$$

Nous introduisons $B: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $B(e_1, e_2) := A(e_1) - A(e_2)$ et nous observons²⁴ que les niveaux $\pm\omega$ restent réguliers au cours de l'homotopie :

$$s \mapsto s\delta^c + B.$$

Une version à un paramètre d'un résultat de théorie de Morse (théorème C.16) montre alors que $(\delta^\omega, \delta^{-\omega})$ et $(B^\omega, B^{-\omega})$ sont des rétracts par déformation, d'où :

$$(2) \quad H(\delta^\omega, \delta^{-\omega}) \cong H(B^\omega, B^{-\omega}).$$

Or, comme l'application B ne possède pas de points critiques, le théorème C.16 assure que les sous-niveaux B^ω et $B^{-\omega}$ sont des rétracts par déformation. En particulier, la paire $(B^\omega, B^{-\omega})$ est acyclique, ce qui conclut avec (2). ■

La suite exacte longue de cohomologie de $(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \delta^{-\omega})$ (théorème C.33) donne :

$$H^{k+N}(\delta^\omega, \delta^{-\omega}) \rightarrow H^{k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\omega}) \xrightarrow{\partial_k} H^{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon) \rightarrow H^{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^{-\omega}).$$

Dès lors, d'après le lemme 3.16, l'application linéaire ∂ est un isomorphisme. En particulier, nous en déduisons que $\widetilde{GH}_k(f) \cong HG^{n-k-1}(f)$.

²⁴. Quitte à choisir une constante ω plus grande.

Nous sommes maintenant près à démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.17. Si Λ est une sous-variété legendrienne connexe ayant une famille génératrice f linéaire à l'infini, alors il existe une suite exacte longue :

$$(\star) \quad \cdots \xrightarrow{\tau_k} H_k(\Lambda) \xrightarrow{\sigma_k} HG^{n-k}(f) \xrightarrow{\rho_k} HG_{k-1}(f) \rightarrow \cdots .$$

De plus, les applications τ_k satisfont deux propriétés supplémentaires :

1. Si $\alpha: H^{n-k}(\Lambda) \rightarrow H_k(\Lambda)$ est l'isomorphisme de dualité de Poincaré, alors les applications $\sigma_k \circ \alpha$ et τ_{n-k} sont duales.
2. L'application $\tau_n: HG_n(f) \rightarrow H_n(\Lambda)$ est surjective.

En particulier, l'espace vectoriel $HG_n(f)$ est de dimension au moins un.

Preuve. La suite exacte longue d'homologie de $(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon})$ (théorème C.33), le lemme 3.14 avec la dualité de Poincaré, ainsi que le lemme 3.15 permettent de construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \xrightarrow{\tau_k} & H_{k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon}) & \xrightarrow{s_k} & H_{k+N}(\delta^\omega, \delta^{-\varepsilon}) & \xrightarrow{p_k} & H_{k+N}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \alpha \uparrow & & \downarrow \beta & & & & \\ & & H^{n-k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon}) & \xleftarrow{s'_{n-k}} & H^{n-k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\omega}) & & & & \\ & & & & \downarrow \partial_{n-k} & & & & \\ & & & & H^{n-k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon) & & & & \end{array}$$

Les applications β et ∂ étant inversibles, nous introduisons les applications :

$$\begin{aligned} \rho_k &:= p_k \circ \beta^{-1} \circ \partial_{n-k}^{-1}: HG^{n-k}(f) \rightarrow HG_{k-1}(f), \\ \sigma_k &:= \partial_{n-k} \circ \beta \circ s_k: H_k(\Lambda) \rightarrow HG^{n-k}(f), \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir la suite exacte longue annoncée dans le théorème.

Pour établir la première propriété, nous commençons par observer que :

- La connexion de la suite exacte longue de cohomologie de $(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon})$ est duale²⁵ à la connexion de sa suite exacte longue d'homologie, τ .
- L'application s' est induite par l'inclusion i de $\delta^{-\omega}$ dans $\delta^{-\varepsilon}$ ²⁶.

Dès lors, les suites exactes longues de cohomologie de $(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \delta^{-\omega})$ et $(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon})$, ainsi que le morphisme induit en cohomologie par l'application $(\text{id}_{\delta^\omega}, \text{id}_{\delta^\varepsilon}, i)$ permettent d'obtenir le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^{n-k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\omega}) & \xrightarrow{\partial_{n-k}} & H^{n-k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon) \\ \downarrow s'_{n-k} & & \downarrow \text{id} \\ H^{n-k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon}) & \xrightarrow{\tau_{n-k}^*} & H^{n-k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon). \end{array}$$

25. Si les modules d'homologie n'étaient pas des espaces vectoriels, cela ne serait plus le cas.

26. Le théorème C.33 assure que l'application s est induite par l'inclusion de δ^ε dans δ^ω et c'est maintenant une conséquence de la dualité de Poincaré et du lemme 3.15.

Ainsi, en utilisant les deux diagrammes commutatifs de cette preuve, il vient :

$$\begin{aligned}\sigma_k \circ \alpha &= (\partial_{n-k} \circ \beta \circ s_k) \circ \alpha, \\ &= (\tau_{n-k}^* \circ s'_{n-k}) \circ \beta \circ s_k \circ \alpha, \\ &= \tau_{n-k}^* \circ (s'_{n-k} \circ \beta \circ s_k) \circ \alpha, \\ &= \tau_{n-k}^*.\end{aligned}$$

ce qui établit la première propriété du théorème.

La seconde propriété fait intervenir une légère extension de la machinerie usuelle de la théorie de Morse-Bott, nous choisissons de l'admettre.

La dernière affirmation est une conséquence de la connexité de Λ , de la dualité de Poincaré (théorème C.29) et de la seconde propriété du théorème. ■

Le théorème 3.17 permet de dégager des contraintes sur la structure des espaces vectoriels d'homologie génératrice, mais avant cela nous aurons besoin de :

Définition 3.18. Le *polynôme de Poincaré* de f est défini par :

$$\Gamma_f(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim(HG_k(f))t^k,$$

c'est un polynôme de Laurent à coefficients dans les entiers naturels.

Théorème 3.19. Soit Λ une sous-variété legendrienne connexe ayant une famille génératrice f linéaire à l'infini, alors le polynôme de Poincaré de f est :

$$(\star\star) \quad \Gamma_f(t) = (q_0 + q_1t + \dots + q_nt^n) + p(t) + t^{n-1}p(t^{-1}),$$

où $q_k + q_{n-k}$ est le k -ième nombre de Betti de Λ , $q_0 = 0$, $q_n = 1$ et p satisfait :

$$p(t) := \sum_{k \geq \lfloor (n-1)/2 \rfloor} p_k t^k,$$

avec tous les coefficients p_k qui sont des entiers naturels.

Preuve. Nous commençons par introduire les entiers naturels suivants :

$$\begin{aligned}d_k &:= \dim(HG_k(f)), & b_k &:= \dim(H_k(\Lambda)), \\ p_k &:= \dim(\ker(\tau_k)), & q_k &:= d_k - p_k.\end{aligned}$$

Tout d'abord, d'après la première propriété du théorème 3.17, des relations classiques de dualité²⁷ et le théorème du rang appliqué à τ_{n-k} , nous avons :

$$b_{n-k} = \dim(\ker(\sigma_k)) + q_{n-k}.$$

Or, en utilisant l'exactitude de la suite (\star) en $H_k(\Lambda)$ et en appliquant le théorème du rang à τ_k , nous établissons l'égalité suivante :

$$(3) \quad \dim(\ker(\sigma_k)) = q_k.$$

Finalement, par dualité de Poincaré (théorème C.29), nous avons montré que :

$$(4) \quad q_k + q_{n-k} = b_k.$$

²⁷ Si $u: E \rightarrow F$ est linéaire, alors $\ker(u^*) = \text{im}(u)^\perp$ et $\dim(\text{im}(u^\perp)) = \dim(F) - \text{rg}(u)$.

Nous allons maintenant établir que les p_k satisfont la relation de symétrie :

$$(5) \quad p_{n-k-1} = p_k.$$

Nous observons que l'exactitude de la suite (\star) en $HG_{n-k-1}(f)$ et $HG^k(f)$, ainsi que le théorème du rang appliqué à ρ_{n-k} impliquent l'égalité suivante :

$$p_{n-k-1} = d_k - \dim(\text{im}(\sigma_{n-k})).$$

Or, d'après (3), (4) et le théorème du rang appliqué à σ_{n-k} , il vient :

$$\dim(\text{im}(\sigma_{n-k})) = q_k,$$

ce qui permet bien d'établir l'égalité (5) que nous avons annoncée.

Nous remarquons enfin que puisque la sous-variété legendrienne Λ est connexe, la seconde propriété du théorème 3.17 et l'égalité (4) donnent $q_n = 1$ et $q_0 = 0$.

Nous utilisons les coefficients p_k et q_k pour définir les polynômes suivants :

$$p(t) := \sum_{k \geq \lfloor (n-1)/2 \rfloor} p_k t^k, \quad q(t) := \sum_{k=0}^n q_k t^k$$

Le théorème est maintenant une conséquence directe de (4) et (5)²⁸. ■

Remarque 3.20. Dans la preuve du théorème 3.19, nous avons utilisé :

$$\dim(HG_k(f)) = \dim(HG^k(f)),$$

car nous observons que l'homologie et la cohomologie génératrices proviennent de complexes de Morse dont les différentielles sont duales.

Remarque 3.21. Sans la seconde propriété supplémentaire du théorème 3.17, nous pouvons seulement conclure que $q_0 + q_n = 1$, mais pas $q_0 = 0$ et $q_n = 1$.

Dans l'article [5], Frédéric Bourgeois, Joshua Sabloff et Lisa Traynor montrent que le théorème 3.19 contient toute la structure de l'homologie génératrice :

Théorème 3.22. Si $P \in \mathbb{N}[t, t^{-1}]$ est un polynôme de Laurent satisfaisant $(\star\star)$, alors pour $n \geq 2$, il existe une sous-variété legendrienne connexe de $J^1\mathbb{R}^n$ ayant une famille génératrice f linéaire à l'infini telle que $P(t) = \Gamma_f(t)$.

La preuve consiste à construire²⁹ des sous-variétés legendriennes connexes qui possèdent des familles génératrices avec une homologie génératrice prescrite.

28. Nous recommandons d'établir l'égalité $(\star\star)$ de la droite vers la gauche, pour ce faire, il suffit de remarquer que $\dim(HG_k(f)) = p_k + q_k$ et que pour tout $k \geq n+1$, $q_k = 0$.

29. Les ingrédients clefs sont les remplissages, les rotations de fronts et les chirurgies.

CONCLUSION ET OUVERTURE

Afin d'aborder le problème de classification des sous-variétés legendriennes, deux grands types d'invariants algébriques, non classiques³⁰, sont exploités. Ces invariants s'inscrivent dans une même philosophie commune : dénombrer certaines trajectoires qui s'appuient sur des cordes de Reeb, mais ils reposent cependant sur des techniques mathématiques bien distinctes.

D'une part, la théorie de Morse-Bott-Cerf donne naissance aux invariants des sous-variétés legendriennes construits à partir des familles génératrices, parmi eux, citons l'homologie génératrice que nous avons étudiée dans ce mémoire.

Par ailleurs, la théorie de Fredholm permet quant à elle d'élaborer l'*homologie de contact legendrienne*, un invariant dont le lecteur trouvera la construction détaillée dans l'article [9] de Tobias Ekholm, John Etnyre et Michael Sullivan. Pour notre part, nous mentionnons seulement que son développement repose massivement sur l'utilisation des courbes pseudo-holomorphes³¹, introduites par Mikhaïl Gromov dans son article [15].

Ces invariants semblent bien différents, mais ils entretiennent des liens étroits :

Théorème (D. Fuchs, D. Rutherford, 2011, [12]). En dimension 3, l'homologie de contact legendrienne linéarisée et l'homologie génératrice sont équivalentes.

Il est d'ailleurs conjecturé que cette équivalence persiste en toute dimension. Nous sommes cependant encore relativement loin d'avoir établi ce résultat.

Malheureusement, l'homologie génératrice n'est pas un invariant complet : nous pouvons construire des familles génératrices non équivalentes pour une même sous-variété legendrienne qui possèdent la même homologie génératrice³².

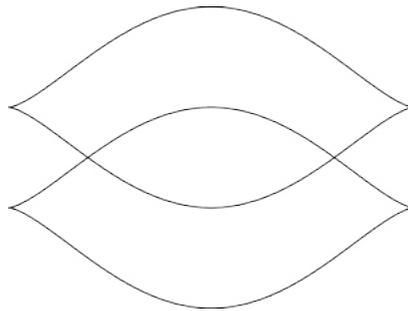


FIGURE 15. Un entrelacs de Hopf legendrien de $J^1\mathbb{R}$.

Cependant, nous contournons ces limitations en raffinant l'homologie génératrice.

30. Par opposition avec les nombres de rotation et de Thurston-Bennequin.

31. Une forme de contact détermine une structure presque-complexe sur son noyau.

32. C'est notamment le cas sur l'entrelacs de Hopf legendrien de $J^1\mathbb{R}$.

Une des approches possibles consiste à adapter l'homologie génératrice aux paires de familles génératrices, ainsi si f_1 et f_2 sont deux familles génératrices, nous définissons leur fonction différence comme suit :

$$\delta(x, e_1, e_2) := f_1(x, e_1) - f_2(x, e_2).$$

Lorsque les familles génératrices f_1 et f_2 sont linéaires à l'infini, nous définissons :

$$HG_k(f_1, f_2) := H_{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon),$$

avec les valeurs critiques strictement positives de δ comprises entre ε et ω . Cette nouvelle homologie raffine effectivement l'homologie génératrice :

Théorème. Si f_1, f_2 sont équivalentes, alors $HG(f_1) = HG(f_1, f_2) = HG(f_2)$.

Quand ces familles génératrices engendrent une même sous-variété legendrienne, nous pouvons adapter les preuves de la proposition 3.3 et du théorème 3.17 :

Théorème. Si Λ est une sous-variété legendrienne connexe ayant des familles génératrices f_1 et f_2 linéaires à l'infini, alors nous avons la longue suite exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\tau_k} H_k(\Lambda) \xrightarrow{\sigma_k} HG^{n-k}(f_2, f_1) \xrightarrow{\rho_k} HG_{k-1}(f_1, f_2) \rightarrow \cdots$$

Si $\alpha: H^{n-k}(\Lambda) \rightarrow H_k(\Lambda)$ est la dualité de Poincaré, $\sigma_k \circ \alpha$ et τ_{n-k} sont duales.

Cette dualité ne permet pas de généraliser directement le théorème C.29 au polynôme de Poincaré de la paire (f_1, f_2) , mais plutôt de dégager une relation entre les polynômes de Poincaré des paires (f_1, f_2) et (f_2, f_1) ³³.

La surjectivité de l'application $\tau_n: HG_n(f_1, f_2) \rightarrow H_n(\Lambda)$ n'est plus garantie³⁴. Durant un échange, Frédéric Bourgeois m'a confié être convaincu que :

Conjecture. La classe fondamentale de Λ provient de l'homologie $HG_n(f_1, f_2)$ si, et seulement, si les familles génératrices sont équivalentes³⁵.

L'homologie pour les paires de familles génératrices serait ainsi un invariant complet résolvant entièrement la classification des familles génératrices !

Pendant mon doctorat, j'envisage d'établir rigoureusement les résultats que nous avons ici esquissés sur l'homologie pour les paires de familles génératrices. Ces travaux s'inscrivent dans la volonté de rapprocher les invariants obtenus par familles génératrices et ceux déduits des courbes pseudo-homomorphes. En effet, cette homologie pour les paires de familles génératrices entretient sûrement des liens forts avec l'homologie de contact legendrienne bilinéarisée, étudiée par Frédéric Bourgeois et Baptiste Chantraine dans leur article [4].

33. La suite exacte fait intervenir l'homologie de (f_1, f_2) et la cohomologie de (f_2, f_1) .

34. La sous-variété critique de δ de valeur critique nulle ne se trouve plus dans $X \times \Delta \mathbb{R}^{2N}$, c'est une différence majeure avec le contexte du théorème 3.17.

35. Quitte à raisonnablement généraliser la notion d'équivalence des familles génératrices, nous envisageons notamment de faire dépendre les stabilisations du point de la base.

ANNEXE A. LA FORME DE LIOUVILLE D'UN FIBRÉ COTANGENT

Soient M une variété et $\pi: T^*M \rightarrow M$ son fibré cotangent.

Définition A.1. La *forme de Liouville* λ de T^*M est la 1-forme définie par :

$$\lambda_p(v) = p(T_p\pi(v)),$$

où p est un élément de T^*M et v est un élément de T_pT^*M .

Exemple A.2. La forme de Liouville de $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$\lambda = \sum_{i=1}^n x_i dy_i,$$

où (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées de la base et (y_1, \dots, y_n) celles de la fibre.

La forme de Liouville est *tautologique* et elle satisfait aussi la relation suivante :

Proposition A.3. Soit α une forme de degré 1 de M , alors $\alpha^*\lambda = \alpha$.

Preuve. Soit $q \in M$, alors par définition du tiré en arrière, nous avons :

$$(\alpha^*\lambda)(q) = \lambda(\alpha(q)) \circ T_q\alpha.$$

Dès lors, en utilisant la définition de λ , ainsi que la règle de la chaîne, il vient :

$$(\alpha^*\lambda)(q) = \alpha(q) \circ T_{\alpha(q)} \circ T_q\alpha = \alpha(q) \circ T_q(\pi \circ \alpha).$$

Or, α étant une section de π , nous avons $(\alpha^*\lambda)(q) = \alpha(q)$ et $\alpha^*\lambda = \alpha$. ■

Remarque A.4. Cette propriété est caractéristique de la forme de Liouville, ce que nous n'utiliserons pas dans ce mémoire.

ANNEXE B. UNE BOÎTE À OUTILS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

Nous exposons les notions d'algèbre homologique utilisées dans ce mémoire.

B.1. Les anneaux et les modules gradués.

Définition B.1. Un anneau A est *gradué* lorsqu'il est somme directe d'une collection $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de groupes abéliens satisfaisant :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, A_i A_j \subset A_{i+j}$$

Nous disons alors que $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une *graduation* de l'anneau A .

Exemple B.2. L'anneau des polynômes multivariés est gradué par le degré.

Définition B.3. Un module M sur un anneau gradué A est *gradué* lorsqu'il est somme directe d'une collection $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de modules satisfaisant :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, A_i M_j \subset M_{i+j}$$

Nous disons alors que $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une *graduation* du module M .

Exemple B.4. Un anneau gradué est un module gradué sur lui-même.

Si f est un endomorphisme d'un module gradué M , nous posons $f_\bullet := f|_{M_\bullet}$, où (M_\bullet) désigne la graduation de M .

B.2. Les complexes de chaînes et leurs homologies.

Définition B.5. Un *complexe de chaînes* (C, ∂) est un module gradué C muni d'un endomorphisme ∂ satisfaisant $\partial_0 = 0$, $\partial_\bullet : C_\bullet \rightarrow C_{\bullet-1}$ et $\partial_\bullet \circ \partial_{\bullet+1} = 0$. Les éléments de C sont les *chaînes* et ∂ est son *application de bord*.

Remarque B.6. La définition d'un complexe de cochaînes est analogue à celle d'un complexe de chaînes sauf que son application de cobord satisfait :

$$\partial^\bullet : C^{\bullet+1} \rightarrow C^\bullet, \partial^{\bullet+1} \circ \partial^\bullet = 0.$$

Un complexe de chaînes descend, alors qu'un complexe de cochaînes monte.

Toutes les notions et les résultats présentés ici s'étendent directement aux complexes de cochaînes en rajoutant le préfixe co-, en passant les indices en exposants et en inversant le sens des flèches.

Exemple B.7. L'anneau des formes différentielles³⁶ gradué par le degré et muni de la différentielle usuelle est un complexe de cochaînes.

Soit (C, ∂) un complexe de chaînes, son module $Z_\bullet(C, \partial)$ des *•-cycles* est :

$$Z_\bullet(C, \partial) := \ker(\partial_\bullet : M_\bullet \rightarrow M_{\bullet-1}),$$

nous définissons aussi son module $B_\bullet(C, \partial)$ des *•-bords* comme étant :

$$B_\bullet(C, \partial) := \text{im}(\partial_\bullet : M_\bullet \rightarrow M_{\bullet-1}).$$

Un bord d'un complexe de chaînes en est un cycle.

Exemple B.8. Les cocycles du complexe de cochaîne des formes différentielles sont les formes fermées et ses cobords sont les formes exactes.

³⁶. La loi multiplicative des formes différentielles est le produit extérieur.

Définition B.9. Un sous-module D d'un complexe de chaînes (C, ∂) est un *sous-complexe de chaînes* de (C, ∂) lorsque $(D, \partial|_D)$ est un complexe de chaînes.

Remarque B.10. Le sous-module D est un sous-complexe de chaînes de (C, ∂) si, et seulement, si ∂ stabilise D , à savoir $\partial_\bullet : D_\bullet \rightarrow D_{\bullet-1}$.

Un complexe de chaînes (C, ∂) est usuellement représenté comme suit :

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_2 \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\partial} 0.$$

L'*homologie* d'un complexe de chaînes mesure alors son défaut d'exactitude.

Définition B.11. Soit (C, ∂) un complexe de chaînes, alors son *homologie* est le module gradué quotient $H(C, \partial)$ défini par :

$$H_\bullet(C, \partial) = Z_\bullet(C, \partial) / B_{\bullet+1}(C, \partial).$$

L'homologie de (C, ∂) quantifie l'obstruction d'un cycle à être un bord.

Exemple B.12. La cohomologie de De Rham est la cohomologie du complexe de cochaînes des formes différentielles.

Définition B.13. Un *morphisme* $f : (C_1, \partial_1) \rightarrow (C_2, \partial_2)$ est une application linéaire entre complexes de chaînes qui commutent à leurs différentielles :

$$f \circ \partial_1 = \partial_2 \circ f.$$

Nous étendons alors les notions d'algèbre linéaire aux complexes de chaînes.

Proposition B.14. Un morphisme induit une application linéaire entre tous les modules d'homologie des complexes de chaînes source et but.

Preuve. Un morphisme commute aux différentielles des complexes de chaînes, donc l'image d'un \bullet -bord est un \bullet -bord et l'image d'un \bullet -cycle est un \bullet -cycle, ce qui nous permet de conclure en passant le morphisme au quotient. ■

Ces applications induites sont encore notées de la même manière.

B.3. La suite exacte longue induite en homologie.

Le résultat suivant est fondamental en algèbre homologique :

Théorème B.15. Une suite exacte³⁷ courte $C_1 \xrightarrow{\alpha} C_2 \xrightarrow{\beta} C_3$ de complexes de chaînes induit une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow H_k(C_1) \xrightarrow{\alpha} H_k(C_2) \xrightarrow{\beta} H_k(C_3) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(C_1) \rightarrow \cdots \xrightarrow{\beta} H_0(C_3)$$

entre les modules d'homologie de ces complexes de chaînes.

Preuve. En utilisant la proposition B.14, la seule difficulté est la construction de la *connexion* ∂ , et c'est une application directe du lemme du serpent³⁸. ■

Nous verrons deux applications de ce résultat dans l'annexe C, elle est consacrée à la construction de l'homologie (de Morse) d'une variété compacte.

37. Une suite $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ est *exacte* lorsque $\text{im}(u) = \ker(v)$.

38. Un résultat qui se résume seulement à suivre les flèches d'un diagramme commutatif.

ANNEXE C. UN TOUR D'HORIZON DE LA THÉORIE DE MORSE

Nous présentons brièvement les notions fondamentales de théorie de Morse, car dans ce mémoire, nous faisons un usage intensif de l'homologie éponyme. Les ouvrages de référence pour cette annexe sont [2], [17] et [20].

Soit M une variété différentielle et $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse.

C.1. Les fonctions de Morse.

Soit p un *point critique* de f , c'est-à-dire que $T_p f: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ est nulle.

Définition C.1. La *hessienne* $\text{Hess}(f)_p$ de f au point p est définie par :

$$\forall X \in T_p M, \forall Y \in T_p M, \text{Hess}(f)_p(X, Y) := X \cdot (\tilde{Y} \cdot f)(p),$$

où \tilde{Y} est un champ de vecteurs de M étendant localement Y .

Remarque C.2. Si $p \in M$, $X \in T_p M$ et $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse, nous posons :

$$X \cdot g(p) := T_p g(X_p).$$

Il suffit que g soit définie au voisinage de p pour que cette définition fasse sens.

Proposition C.3. La hessienne de f en p est une forme bilinéaire symétrique.

Preuve. Quels que soient X et Y des vecteurs tangents à M en p , nous avons :

$$\text{Hess}(f)_p(X, Y) - \text{Hess}(f)_p(Y, X) = [\tilde{X}, \tilde{Y}] \cdot f(p) = T_p f \left([\tilde{X}, \tilde{Y}]_p \right) = 0,$$

ce qui assure aussi que la hessienne de f au point p est correctement définie, elle ne dépend pas du prolongement du vecteur tangent Y choisi. ■

Remarque C.4. Plus généralement, cette preuve montre que la hessienne est correctement définie sur le noyau de l'application tangente.

Définition C.5. Le point critique p est *non dégénéré* lorsque $\text{Hess}(f)_p$ l'est.

Exemple C.6. L'origine n'est pas un point critique non dégénéré de $x \mapsto x^3$.

Définition C.7. L'indice $\text{ind}_p(f)$ de f en un point critique p non dégénéré est la signature de la forme bilinéaire symétrique $\text{Hess}(f)_p$.

Remarque C.8. Géométriquement, $\text{ind}_p(f)$ est le nombre de directions issues du point p le long desquelles f décroît.

Exemple C.9. Un maximum est d'indice $\dim(M)$ et un minimum d'indice 0. Un point col/selle en dimension ambiante 2 est d'indice 1.

Définition C.10. Une *fonction de Morse* est une application lisse dont tous les points critiques non dégénérés.

Exemple C.11. La *hauteur* $(x, y, z) \mapsto z$ de S^2 , la sphère euclidienne de \mathbb{R}^2 , est une fonction de Morse possédant un point critique d'indice 2 au pôle Nord et un point critique d'indice 0 au pôle Sud.

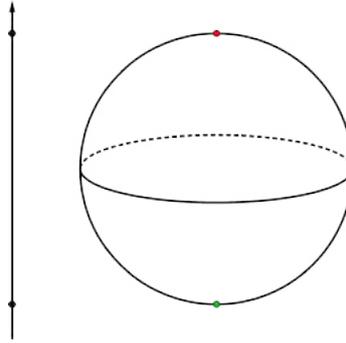


FIGURE 16. La fonction hauteur de la sphère euclidienne $S^2 \subset \mathbb{R}^2$.

Les fonctions de Morse sont génériques³⁹, illustrons leur abondance par :

Théorème C.12. Si M est une sous-variété de \mathbb{R}^n , alors pour presque tout point $p \in \mathbb{R}^n$, l'application $x \mapsto \|x - p\|^2$ est une fonction de Morse.

Preuve. C'est une application du théorème de Sard⁴⁰. ■

Il existe un unique modèle local pour les points critiques d'indice fixé.

Théorème C.13. Si p est un point critique d'indice k de f , alors il existe une carte (x_1, \dots, x_n) de M centrée en p dans laquelle nous avons :

$$f(x) = f(p) - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{j=k+1}^n x_j^2.$$

Les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés⁴¹.

Preuve. C'est une application de la formule de Taylor avec reste intégral, de la réduction des formes quadratiques et du théorème d'inversion locale. ■

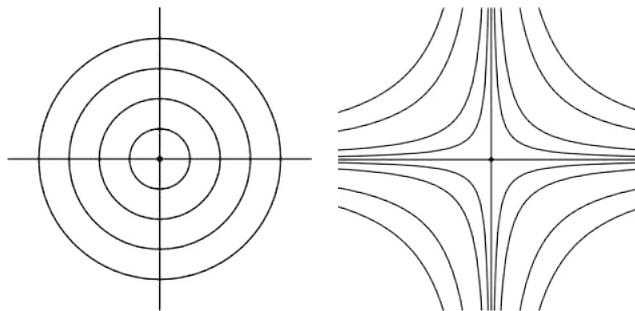


FIGURE 17. Un point critique d'indice 0 et 1 en dimension 2.

C'est un résultat central pour comprendre la topologie d'une variété compacte par l'évolution de la topologie des sous-niveaux d'une fonction de Morse.

39. Toute fonction lisse peut être approximée en topologie C^0 par une fonction de Morse.

40. L'ensemble des valeurs critiques d'une fonction lisse est *négligeable*.

41. Le nombre de points critiques d'une fonction de Morse d'une variété compacte est fini.

C.2. Les variétés stables et instables.

Soient g une métrique⁴² sur M et $(\phi_t)_t$ le flot de $-\nabla f$, l'antigradient⁴³ de f . Nous supposons que M est sans bord et que la fonction f est de Morse.

Le théorème C.13 assure que les trajectoires de l'opposé du gradient de f débutent et aboutissent sur des points critiques et nous pouvons introduire :

Définition C.14. La *variété stable* de p est formée des points de M qui sont joints à p , dans le futur⁴⁴, par une trajectoire de l'opposé du gradient de f :

$$W^s(p; f, g) := \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = p \right\}.$$

C'est une sous-variété de M dont la dimension est égale à $\dim(M) - \text{ind}_p(f)$. En contraste, la *variété instable* de p est formée des points de M qui sont joints à p , dans le passé⁴⁵, par une trajectoire de l'opposé du gradient de f :

$$W^u(p; f, g) := \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = p \right\}.$$

C'est une sous-variété de M dont la dimension est égale à $\text{ind}_p(f)$.

Exemple C.15. Soient g la métrique riemannienne de S^2 induite par le produit scalaire de \mathbb{R}^2 et $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction hauteur, alors nous avons :

$$\begin{aligned} W^s(p; f, g) &= \{p\}, W^u(p; f, g) = S^2 \setminus \{p\}, \\ W^s(q; f, g) &= S^2 \setminus \{p\}, W^u(q; f, g) = \{p\}, \end{aligned}$$

où p désigne le pôle Nord de S^2 et q son pôle Sud.

Nous supposons désormais que la variété M est compacte et pour tout réel a , nous notons f^a le sous-niveau $f^{-1}(] - \infty, a])$.

Sans passage de valeur critique, la topologie des sous-niveaux est inchangée.

Théorème C.16. Soient $a < b$ deux nombres réels tels que l'intervalle $[a, b]$ ne contient pas de valeurs critiques de f , alors f^a et f^b sont difféomorphes.

Preuve. Le difféomorphisme est donné par le flot au temps $b-a$ du champ $-\nabla f$, nous poussons f^b sur f^a le long des trajectoires du gradient de f . ■

Lorsqu'il y a franchissement d'une valeur critique, la situation est plus subtile. Nous notons n la dimension de la variété M et nous aurons besoin de :

Définition C.17. Soient V^n une variété à bord et $\varphi: \partial D^k \times D^{n-k} \hookrightarrow \partial V$ un plongement, $k \leq n$, alors le résultat d'un *attachement d'une k -anse* sur V est :

$$W := V \cup_{\varphi} (D^k \times D^{n-k}),$$

où les points de $\partial D^k \times D^{n-k}$ sont identifiés à ceux de ∂V via le plongement φ . Autrement dit, la variété ∂W est obtenue par *chirurgie d'indice $k-1$* sur ∂V .

42. Quel que soit $x \in M$, g_x est un produit scalaire sur $T_x M$ et $x \mapsto g_x$ est lisse.

43. C'est l'unique champ qui vérifie $T_x f(v) = g_x(v, \nabla f(x))$, pour tous $x \in M$ et $v \in T_x M$.

44. Ils se rapprochent du point p sous l'action du flot de $-\nabla f$.

45. Ils s'éloignent du point p sous l'action du flot de $-\nabla f$.

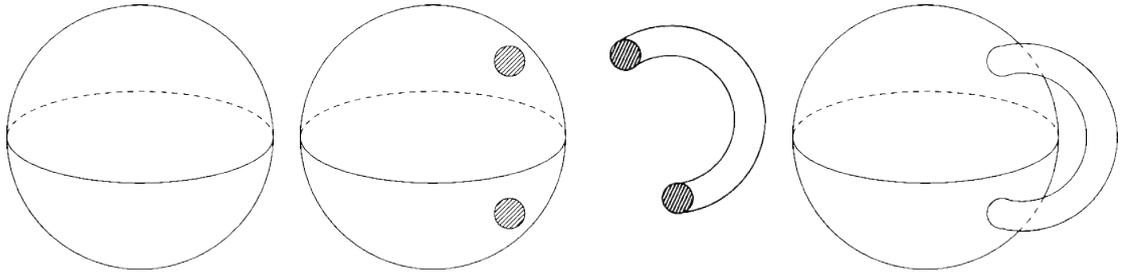


FIGURE 18. Un tore obtenu par chirurgie d'indice 0 sur la sphère.

Nous pouvons maintenant décrire l'évolution de la topologie des sous-niveaux d'une fonction de Morse lorsqu'il y a franchissement d'une valeur critique.

Théorème C.18. Soient p un point critique non dégénéré de f et $a := f(p)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $f^{-1}([a - \varepsilon, a + \varepsilon])$ ne contient pas de points critiques de f autre que a , alors $f^{a+\varepsilon}$ est homéomorphe à $f^{a-\varepsilon}$ avec une $\text{ind}_p(f)$ -anse attachée.

Exemple C.19. Les sous-niveaux de la hauteur sur le tore sont d'abord vide, puis un point, un disque, un cylindre, un tore troué et enfin le tore.

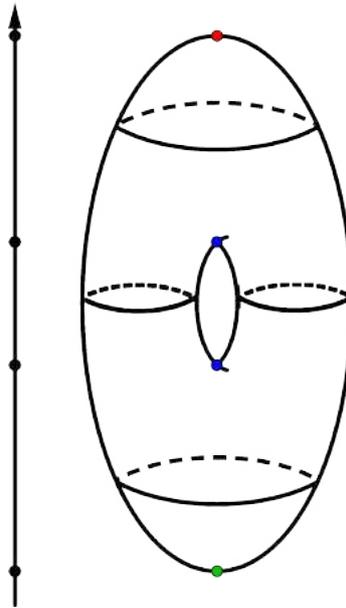


FIGURE 19. La topologie des sous-niveaux de la hauteur du tore.

Exemple C.20. Considérons un paysage de montagne inondé que l'on draine progressivement, quand le niveau de l'eau passe juste en-dessous d'un :

- sommet, il y a apparition d'une nouvelle composante dans le paysage,
- col, les deux composantes des sommets autour du col fusionnent.

Nous venons essentiellement de décrire le contenu du théorème C.18.

L'existence de fonctions de Morse et le théorème C.18 assurent que toutes les variétés compactes sont obtenues par attachements d'anses sur la boule.

C.3. Le complexe de Morse et son homologie.

La variété M étant compacte, il existe $\omega > 0$ satisfaisant $f^{-\omega} = \emptyset$ et $f^\omega = M$, alors les théorèmes C.16 et C.18 permettent de reconstruire M à partir de f . Une fonction de Morse est une sorte de plan de construction d'une variété.

L'objectif de l'homologie de Morse est d'encoder algébriquement la topologie de la variété qui portée par l'une de ses fonctions de Morse.

Génériquement, les variétés stables et instables s'intersectent transversalement.

Définition C.21. La paire (f, g) est de *Morse-Smale* lorsque nous avons :

$$W^s(p; f, g) \pitchfork W^u(q; f, g),$$

quels que soient les points critiques p et q de l'application f .

Exemple C.22. La paire (f, g) de l'exemple C.15 est de Morse-Smale.

Nous supposons que la paire (f, g) est de Morse-Smale, de sorte que l'ensemble des points qui se trouvent sur une trajectoire de $-\nabla f$ joignant p à q :

$$\mathcal{M}(p, q; f, g) := W^u(p; f, g) \cap W^s(q; f, g),$$

forment une sous-variété de M de dimension égale à $\text{ind}_p(f) - \text{ind}_q(f)$.

Le groupe \mathbb{R} des translations du temps agit librement⁴⁶ sur $\mathcal{M}(p, q; f, g)$ par :

$$s \cdot x := \varphi_s(x),$$

son quotient, noté $\mathcal{L}(p, q; f, g)$, est une sous-variété compacte de dimension :

$$\text{ind}_p(f) - \text{ind}_q(f) - 1$$

qui s'identifie à l'ensemble des trajectoires du champ $-\nabla f$ qui joignent p à q . Nous en déduisons que l'indice de Morse de f décroît le long des lignes de $-\nabla f$, car $\mathcal{L}(p, q; f, g)$ est non vide si, et seulement, si $\text{ind}_p(f) > \text{ind}_q(f)$.

Si $\text{ind}_p(f) = \text{ind}_q(f) + 1$, alors la sous-variété $\mathcal{L}(p, q; f, g)$ est de dimension 0 et comme elle est compacte, elle constituée d'un nombre fini de points, posons :

$$n(p, q; f, g) := \#\mathcal{L}(p, q; f, g) \bmod 2.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'associer un complexe de chaînes à (f, g) .

Le module $C(f)$ engendré par les points critiques de f est gradué par l'indice :

$$C_k(f) = \text{Vect}(\{p \in \text{Crit}_k(f)\}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

où $\text{Crit}_k(f)$ désigne l'ensemble des points critiques d'indice k de la fonction f . Nous définissons aussi $\partial^{f,g}$ un endomorphisme de $C(f)$ par :

$$\partial_k^{f,g}(p) = \sum_q n(p, q; f, g)q,$$

quels que soient $k \in \{1, \dots, n\}$, $p \in \text{Crit}_k(f)$ et $q \in \text{Crit}_{k-1}(f)$.

⁴⁶ Il s'agit de l'action naturelle du sous-groupe à un paramètre donné par le flot de $-\nabla f$.

Théorème C.23. Le couple $C(f, g) := (C(f), \partial^{f,g})$ est un complexe de chaînes.

Preuve. Soient $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $p \in \text{Crit}_{k+1}(f)$, il s'agit de voir que :

$$\partial_k^{f,g} \circ \partial_{k+1}^{f,g}(p) = \sum_q \sum_r n(p, r; f, g) n(r, q; f, g) q = 0,$$

pour ce faire, nous montrons que pour tout $q \in \text{Crit}_{k-1}(f)$, nous avons :

$$\sum_r n(p, r; f, g) n(r, q; f, g) = 0.$$

Or, cet entier est le cardinal de la réunion disjointe sur $\text{Crit}_k(f)$ donnée par :

$$\coprod_r \mathcal{L}(p, r; f, g) \times \mathcal{L}(r, q; f, g),$$

cet ensemble est le bord d'une variété compacte de dimension un ⁴⁷ et à ce titre, il contient un nombre pair de points, ce qui conclut. ■

Définition C.24. L'homologie de Morse $HM(M)$ de la variété M est définie comme l'homologie du complexes de chaînes $(C(f), \partial^{f,g})$.

L'homologie de Morse de M ne dépend pas de la paire de Morse-Smale (f, g) . Il s'agit en fait de l'homologie singulière modulo 2 de la variété M .

La variété M étant compacte, ses modules d'homologie sont de dimension finie.

Définition C.25. Pour $0 \leq k \leq n$, le k -ième nombre de Betti de M est :

$$b_k(M) := \dim(HM_k(M)).$$

L'entier $b_k(M)$ compte les sous-variétés *indépendantes* de dimension k de M ⁴⁸.

Les *inégalités de Morse* assurent que le nombre de points critique d'indice k d'une fonction de Morse est minoré par le k -ième nombre de Betti.

Exemple C.26. Nous calculons l'homologie de Morse d'une noix de cajou S . Nous choisissons la hauteur de S comme fonction de Morse et la métrique riemannienne employée est induite par le produit scalaire de \mathbb{R}^3 .

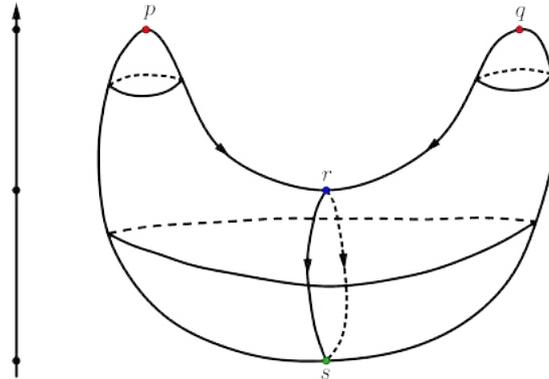


FIGURE 20. Le calcul de l'homologie de Morse de la noix de cajou.

47. Une variété compacte et connexe de dimension 1 est difféomorphe à S^1 ou $[0, 1]$.

48. L'entier $b_0(M)$ compte les composantes connexes de M .

Le complexe de Morse de cette paire est formé de deux points critiques p et q d'indice 2, d'un point critique r d'indice 1 et d'un point critique s d'indice 0. De plus, l'application de bord de ce complexe est donnée par :

$$\begin{aligned}\partial p &= r = \partial q, \\ \partial r &= 2s = 0, \\ \partial s &= 0.\end{aligned}$$

Nous en déduisons les égalités suivantes entre modules :

$$\begin{aligned}\ker(\partial_0) &= \langle s \rangle, \operatorname{im}(\partial_1) = \{0\}, \\ \ker(\partial_1) &= \langle r \rangle, \operatorname{im}(\partial_2) = \langle r \rangle, \\ \ker(\partial_2) &= \langle p + q \rangle, \operatorname{im}(\partial_3) = \{0\}.\end{aligned}$$

Finalement, l'homologie de Morse de S est donnée par :

$$HM_0(S) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, HM_1(S) = \{0\}, HM_2(S) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

ce qui se trouve aussi être l'homologie de Morse de la sphère S^2 de \mathbb{R}^2 .

L'homologie de Morse est un invariant de difféomorphisme de la variété.

Théorème C.27. Un difféomorphisme entre deux variétés fermées induit un isomorphisme entre leurs homologies de Morse.

Preuve. Soient $\varphi: M \rightarrow N$ difféomorphisme et $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Morse, alors φ^*f est une fonction de Morse sur M et d'après la règle de la chaîne :

$$(6) \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}, x \in \operatorname{Crit}_k(\varphi^*f) \iff \varphi(x) \in \operatorname{Crit}_k(f).$$

Soit g une métrique riemannienne de M telle que (φ^*f, g) est de Morse-Smale, alors φ_*g est une métrique riemannienne sur N pour laquelle nous avons :

$$\nabla(\varphi^*f) = \varphi^*\nabla f,$$

car quels que soient $x \in M$ et $v \in T_xM$, la règle de la chaîne nous donne :

$$g_x(v, (\varphi^*\nabla f)_x) = (\varphi_*g)_{\varphi(x)}(T_x\varphi(v), \nabla_{\varphi(x)}f) = T_x(\varphi^*f)(v).$$

Ainsi, les flots des champs de vecteurs $\nabla(\varphi^*f)$ et ∇f sont conjugués⁴⁹ par φ et nous en déduisons que le difféomorphisme φ induit une bijection :

$$(7) \quad \varphi: \mathcal{L}(p, q; \varphi^*f, g) \rightarrow \mathcal{L}(\varphi(p), \varphi(q); f, \varphi_*g).$$

Finalement, (f, φ_*g) est de Morse-Smale et d'après les points (6) et (7) :

$$\varphi: C(\varphi^*f, g) \rightarrow C(f, \varphi_*g)$$

est un isomorphisme de complexes de chaînes, ce qui permet de conclure. ■

Remarque C.28. Cet invariant n'est pas *complet*, certaines variétés non difféomorphes ont la même homologie de Morse, voir [1] de James Alexander.

La *cohomologie de Morse* $HM^\bullet(M)$ de M est l'homologie de Morse de $(-f, g)$.

⁴⁹. Si $(\phi_t)_t$ est le flot de ∇f , alors $(\varphi^{-1} \circ \phi_t \circ \varphi)_t$ est celui de $\nabla(\varphi^*f)$ (règle de la chaîne).

C.4. Des résultats structuraux de l'homologie de Morse.

La dualité de Poincaré permet de comprendre les modules gradués qui peuvent être réalisés comme l'homologie de Morse d'une variété fermée.

Théorème C.29. Si M est fermée de dimension n , alors pour tout $0 \leq k \leq n$, les espaces vectoriels $HM_k(M)$ et $HM^{n-k}(M)$ sont isomorphes.

Preuve. Soit (f, g) une paire de Morse-Smale, alors nous avons :

$$\text{Crit}_{n-k}(-f) = \text{Crit}_k(f).$$

Par ailleurs, pour des points critiques p et q de f , nous avons l'égalité suivante :

$$\mathcal{L}(p, q; f, g) = \mathcal{L}(q, p; -f, g).$$

Finalement, nous en déduisons que l'inclusion $C_\bullet(f, g) \rightarrow C_{n-\bullet}(-f, g)$ est un isomorphisme de complexes de chaîne, ce qui permet de conclure. ■

L'homologie de Morse en degré 0 d'une variété fermée connexe est cyclique, engendrée par la *classe du point*, alors par dualité de Poincaré, son homologie en degré maximal est aussi cyclique, engendrée par la *classe fondamentale*.

Les nombres de Betti sont *symétriques*, nous avons la relation suivante :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, b_k(M) = b_{n-k}(M),$$

c'est une contrainte structurelle sur les espaces vectoriels d'homologie de Morse.

Nous construisons maintenant l'homologie de Morse relative et nous établissons les suites exactes longues pour les paires et les triplets.

Soient W une sous-variété fermée de M et $i: W \hookrightarrow M$ l'inclusion.

Nous supposons désormais que $C(f|_W, g|_W)$ est un sous-complexe de $C(f, g)$.

Définition C.30. Le complexe de Morse *relatif* de (M, W) est défini par :

$$C_k(f, g; M, W) := C_k(f, g) / C_k(f|_W, g|_W),$$

où $C_k(f|_W, g|_W)$ est identifié avec son image par i dans $C_k(f, g)$.

Définition C.31. L'homologie de Morse *relative* $HM(M, W)$ de (M, W) est l'homologie du complexe de Morse relatif $C(f, g; M, W)$.

L'homologie de Morse relative de (M, W) ne dépend pas de la paire (f, g) .

Théorème C.32. L'inclusion de W dans M induit une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow HM_k(W) \rightarrow HM_k(M) \rightarrow HM_k(M, W) \rightarrow HM_{k-1}(W) \rightarrow \dots,$$

entre les modules d'homologie de Morse de W et M .

Preuve. L'inclusion i induit une suite exacte de complexe de chaînes :

$$C(f|_W, g|_W) \rightarrow C(f, g) \rightarrow C(f, g; M, W),$$

d'où le résultat d'après la suite exacte longue induite du théorème B.15. ■

Soient V une sous-variété fermée de W et $j: V \hookrightarrow W$ l'inclusion. Nous supposons désormais que $C(f|_V, g|_V)$ est un sous-complexe de $C(f|_W, g|_W)$.

Théorème C.33. Les inclusions i et j induisent une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow HM_k(W, V) \rightarrow HM_k(M, W) \rightarrow HM_k(M, V) \rightarrow HM_{k-1}(W, V) \rightarrow \cdots,$$

entre les modules d'homologie de Morse de V , W et M .

Preuve. Les inclusions i et j induisent une suite exacte de complexe de chaînes :

$$C(f|_V, g|_V; W, V) \rightarrow C(f|_W, g|_W; M, W) \rightarrow C(f|_V, g|_V; M, V),$$

d'où le résultat d'après la suite exacte longue induite du théorème B.15. ■

Nous énonçons enfin un résultat structural sur l'homologie d'un fibré en disques relativement à son bord, il s'agit de l'isomorphisme de Thom.

Théorème C.34 (R. Thom, 1954, [21]). Si $E \rightarrow B$ est un fibré en disques de dimension N au-dessus d'une variété compacte B de dimension n , alors pour tout $0 \leq k \leq n$, les modules $HM_k(B)$ et $HM_{k+N}(E, \partial E)$ sont isomorphes.

Sous couvert d'hypothèses techniques d'orientabilité, nous pouvons aussi définir une homologie de Morse à coefficients dans \mathbb{Z} et tous les résultats énoncés dans cette annexe restent encore valables.

C.5. Quelques mots sur la théorie de Morse-Bott.

Dans la plupart des situations importantes⁵⁰, un groupe G de Lie agit sur M et la fonction $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ est G -invariante⁵¹, ce qui semble permettre de décrire la topologie de l'espace homogène M/G à partir de f .

Cependant, la fonction f n'est généralement pas de Morse, car son ensemble critique est G -invariant et il est typiquement formé de sous-variétés critiques. Nos espoirs semblent alors s'effondrer.

Exemple C.35. La fonction hauteur du tore est invariante par l'action de S^1 donnée par la rotation autour de l'axe z , son ensemble critique est formé de deux cercles horizontaux.

La théorie de Morse-Bott est une adaptation de la théorie de Morse pour les fonctions dont l'ensemble critique est formé de sous-variétés ([3]).

Soient N une sous-variété critique de f et $\nu(N) \rightarrow N$ son fibré normal⁵².

Définition C.36. La sous-variété N est *non dégénérée* lorsque pour $x \in N$, la hessienne de f en x est non dégénérée en restriction à $\nu(N)_x$ ⁵³.

Nous supposons que N est une sous-variété critique connexe et non dégénérée.

50. Il s'agit des situations où la variété M possèdent de nombreuses symétries.

51. Quels que soient $x \in M$ et $g \in G$, nous avons $f(g \cdot x) = f(x)$.

52. Pour $x \in N$, nous avons $\nu(N)_x := (T_x N)^\perp$, où l'orthogonal est pris par rapport à g_x .

53. Il est équivalent de demander que $\ker(\text{Hess}(f)_x) = T_x N$.

Définition C.37. Soit $x \in N$, l'*indice* de N est la signature de $\text{Hess}(f)_{x|\nu(N)_x}$.

Remarque C.38. La valeur de $\text{ind}_f(N)$ ne dépend pas du point $x \in N$ choisi, car $x \mapsto \text{sgn}(\text{Hess}(f)_{x|\nu(N)_x})$ est continue et N est connexe.

Définition C.39. Une fonction est de *Morse-Bott* lorsque ses points critiques forment une réunion disjointe de sous-variétés critiques non dégénérées.

Exemple C.40. Une fonction de Morse est une fonction de Morse-Bott dont les sous-variétés critiques sont de dimension 0.

Une version paramétrique du théorème C.13 fournit directement un résultat analogue au lemme de Morse pour les fonctions de Morse-Bott.

Ainsi, les trajectoires de l'opposé du gradient d'une fonction de Morse-Bott commencent et aboutissent sur des sous-variétés critiques, nous introduisons :

Définition C.41. Le *fibré stable* de N est constitué des points de M qui aboutissent sur N sous l'action du flot de l'opposé du gradient de f :

$$E^s(N; f, g) := \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) \in N \right\}.$$

C'est un fibré en disques de dimension $\dim(M) - \text{ind}_N(f)$ au-dessus de N ⁵⁴. Le *fibré instable* de N est constitué des points de M qui s'éloignent de N sous l'action du flot de l'opposé du gradient de f :

$$E^u(N; f, g) := \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) \in N \right\}.$$

C'est un fibré en disques de dimension $\text{ind}_N(f)$ au-dessus de N ⁵⁵.

Les théorèmes C.16 et C.18 s'étendent aux fonctions de Morse-Bott.

54. La fibre au dessus de $p \in N$ est $W^s(p; f, g)$.

55. La fibre au dessus de $p \in N$ est $W^u(p; f, g)$.

ANNEXE D. DEUX CALCULS EXPLICITES D'HOMOLOGIE GÉNÉRATRICE

Dans cette annexe, nous calculons l'homologie de deux familles génératrices du cercle legendrien standard dont l'un d'eux possède plus d'une corde de Reeb.

Nous utiliserons la proposition 3.3 sans y faire mention.

D.1. **Le cercle legendrien standard usuel.**

Nous introduisons $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la famille génératrice de S_{std}^1 définie par :

$$f_1(t, e) = e^3 - 3t(1 - t)e,$$

en utilisant une fonction plateau, nous supposons que f_1 est linéaire à l'infini. Nous observons que sa fonction différence δ_1 possède un unique point critique de valeur critique strictement positive, noté p , c'est un maximum (indice 2). La situation est décrite sur la figure suivante :

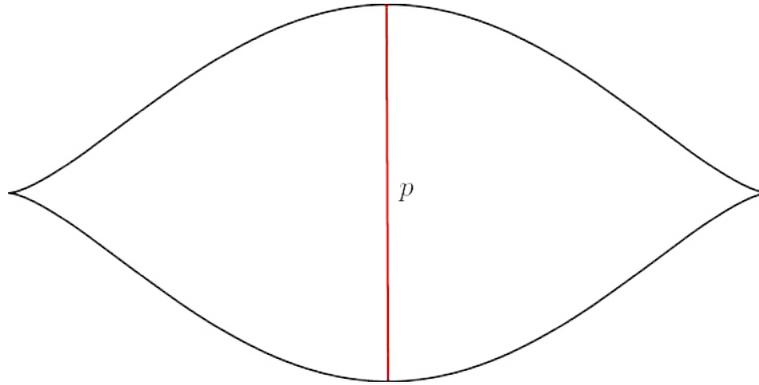


FIGURE 21. Le front de S_{std}^1 et l'unique point critique de δ_1 .

Finalement, nous en déduisons que $HG(f_1)$ est cyclique concentrée en degré 1 et avec les notations du théorème 3.19, il vient $\Gamma_{f_1}(t) = t$, $q(t) = t$ et $p(t) = 0$.

D.2. **Une déformation du cercle legendrien standard.**

Nous considérons L le nœud legendrien dont le front est représenté ci-dessous :

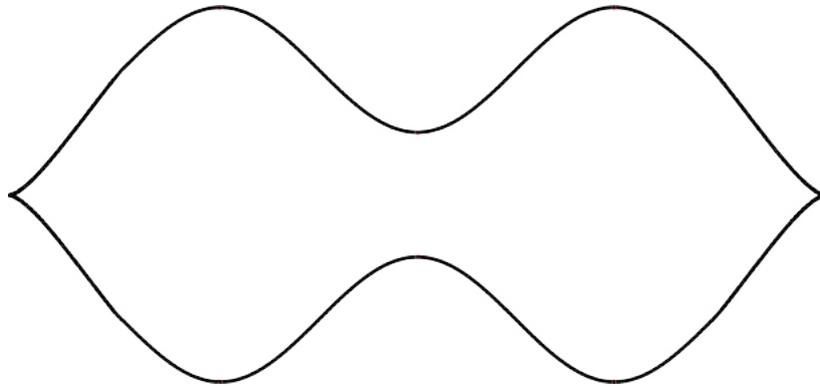


FIGURE 22. Un autre front du cercle legendrien standard.

Nous constatons alors que les fronts de L et S_{std}^1 sont régulièrement homotopes, de cette façon, ces deux nœuds legendriens sont legendriennement isotopes⁵⁶.

Soit f_2 la famille génératrice obtenue par isotopie legendrienne⁵⁷ à partir de f_1 , alors d'après les théorèmes 2.20 et 3.10, les familles génératrices f_1 et f_2 ont la même homologie, c'est ce que nous allons vérifier explicitement.

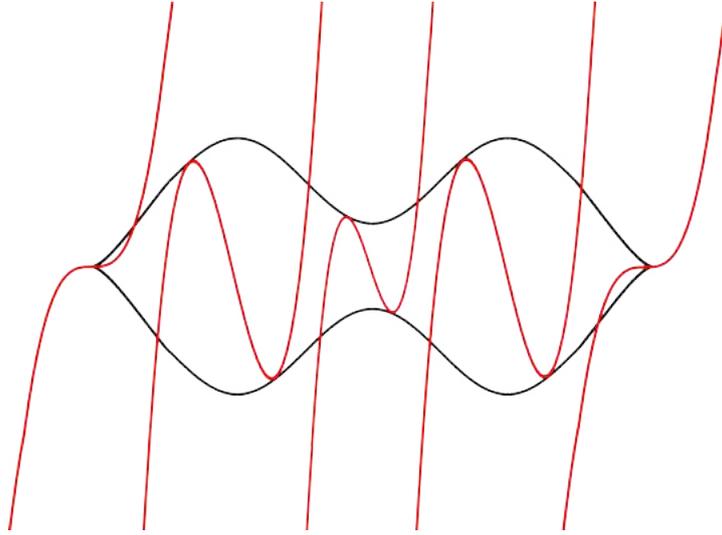


FIGURE 23. La famille génératrice f_2 .

La fonction différence δ_2 de la famille génératrice f_2 possède exactement trois points critiques de valeurs critiques strictement positives :

- les points p et q qui sont des maxima (indice 2),
- et le point r qui est un point col (indice 1).

La situation est décrite sur la figure suivante :

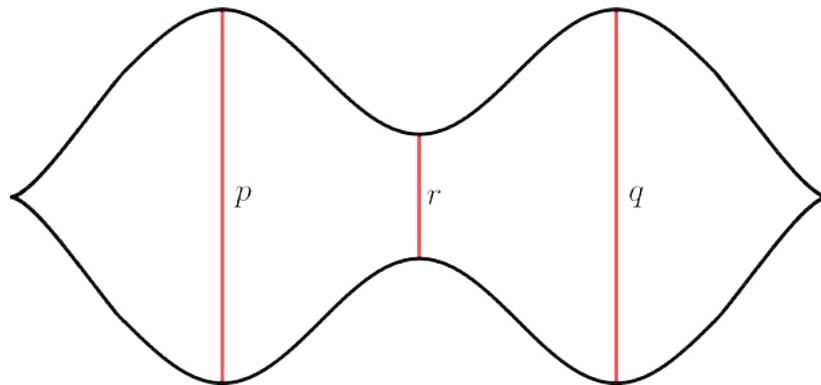


FIGURE 24. Les points critiques de δ_2 .

⁵⁶. Une homotopie régulière entre deux fronts se relève en une isotopie legendrienne.

⁵⁷. Cette isotopie legendrienne provient d'une homotopie régulière entre les deux fronts, ainsi, il n'est pas nécessaire de stabiliser la famille génératrice f_1 pour obtenir f_2 .

Le complexe de Morse formé par les points critiques de δ_2 de valeurs critiques strictement positives est le suivant :

$$0 \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})p \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})q \xrightarrow{\partial} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})r \rightarrow 0.$$

Si par l'absurde $r \notin \text{im}(\partial)$, alors le polynôme de Poincaré de f_2 est donné par :

$$\Gamma_{f_2}(t) = 1 + 2t,$$

et d'après le théorème 3.19, il existe aussi un polynôme p satisfaisant l'égalité :

$$p(t) + p(t^{-1}) = 1 + t,$$

ce qui est impossible, ainsi nous avons donc établi que r est dans l'image de ∂ . Or, par symétrie axiale du front de L , les trajectoires du gradient⁵⁸ de δ_2 qui joignent les points p et r correspondent à celles qui joignent q et r , donc :

$$\partial p = r = \partial q.$$

Finalement, nous en déduisons que $HG(f_2)$ est cyclique⁵⁹ concentrée en degré 1, ce qui est aussi l'homologie de la famille génératrice f_1 .

D.3. Observations et conséquences.

Le nombre de cordes de Reeb n'est pas invariant par isotopie legendrienne, nous venons, en effet, d'exhiber deux cercles legendriens standards possédant respectivement une seule et trois cordes de Reeb.

D'ailleurs, en rajoutant des bosses et des creux au front de la figure 22, nous construisons un cercle legendrien standard possédant $2k + 1$ cordes de Reeb et ce quel que soit l'entier $k \geq 1$ choisi.

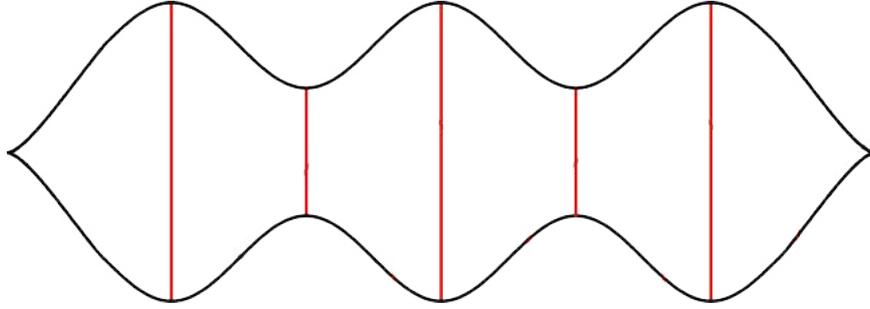


FIGURE 25. Un cercle legendrien standard avec cinq cordes de Reeb.

Nous avons aussi observé que, même pour des sous-variétés legendriennes extrêmement simples, le calcul direct de l'homologie génératrice sur le front legendrien est délicat⁶⁰. Pour contourner cette difficulté, nous avons dû mener un raisonnement combinatoire au niveau du complexe de chaînes sous-jacent. C'est l'une des principales limitations de l'homologie génératrice.

58. La métrique riemannienne de \mathbb{R}^3 est celle donnée par son produit scalaire standard.

59. Un générateur est donné par la classe d'équivalence de $p + q$.

60. Les trajectoires du gradient de la fonction différence ne se visualisent pas sur le front.

RÉFÉRENCES

- [1] J. Alexander. Note on two three-dimensional manifolds with the same group. *Transactions of the American Mathematical Society*, 20 :339–342, 1919.
- [2] M. Audin et M. Damian. *Théorie de Morse et Homologie de Floer*. EDP Sciences, 2010.
- [3] R. Bott. Lectures on Morse theory, old and new. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 7(2) :331–358, 1982.
- [4] F. Bourgeois et B. Chantraine. Bilinearised Legendrian contact homology and the augmentation category. *Journal of Symplectic Geometry*, 12(3) :553–583, 2014.
- [5] F. Bourgeois, J. Sabloff, et L. Traynor. Lagrangian cobordisms via generating families : Construction and geography. *Algebraic & Geometric Topology*, 15(4) :2439–2477, 2015.
- [6] J. Cerf. *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma_4 = 0$), volume 53 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1968.
- [7] Y. Chekanov. Critical points of quasifunctions and generating families of Legendrian manifolds. *Functional Analysis and Its Applications*, 30(2) :118–128, 1996.
- [8] Y. Chekanov. Differential algebra of Legendrian links. *Inventiones mathematicae*, 150 :441–483, 2002.
- [9] T. Ekholm, J. Etnyre, et M. Sullivan. Non-isotopic Legendrian submanifolds in \mathbb{R}^{2n+1} . *Journal of Differential Geometry*, 71(1) :85–128, 2005.
- [10] Y. Eliashberg et M. Fraser. Topologically trivial Legendrian knots. *Journal of Symplectic Geometry*, 7(2) :77–127, 2009.
- [11] D. Fuchs. Maslov-Arnold characteristic classes. *Soviet Mathematics Doklady*, 9 :96–99, 1968.
- [12] D. Fuchs et D. Rutherford. Generating families and legendrian contact homology in the standard contact space. *Journal of Topology*, 4 :190–226, 2011.
- [13] H. Geiges. A brief history of contact geometry and topology. *Expositiones Mathematicae*, 19(1) :25–53, 2001.
- [14] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge University Press, 2008.
- [15] M. Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 82 :307–347, 1985.
- [16] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences, 2010.
- [17] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.
- [18] J. Sabloff et Lisa Traynor. Obstructions to Lagrangian cobordisms between Legendrians via generating family. *Algebraic & Geometric Topology*, 13(5) :2733–2797, 2013.
- [19] J. Sabloff et L. Traynor. Generating family invariants for legendrian links of unknots. *Algebraic & Geometric Topology*, 6(2) :895–933, 2006.
- [20] M. Schwarz. *Morse Homology*. Birkhäuser Basel, 1993.
- [21] R. Thom. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 28 :17–86, 1954.
- [22] L. Traynor. Generating function polynomials for Legendrian links. *Geometry & Topology*, 5(2) :719–760, 2001.