

Supplémentaire commun

Thomas CHEN

Soit E de dimension n , et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Si F et G admettent un supplémentaire commun, il est évident que $\dim(F) = \dim(G)$ donc F et G sont isomorphes. On se demande si la réciproque est vraie et ce qu'il se passe en dimension infinie.

Soit E de dimension n , et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose qu'il existe un isomorphisme entre F et G . Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun. Que se passe-t-il en dimension infinie ?

Corrigé

On procède par récurrence sur p . Initialisation : pour $p = n - 1$, puisque $F \cup G \neq E$ (on utilise le fait qu'une union est un ev. lorsque l'un est inclus dans l'autre). Il existe alors $a \in E$ tel que $a \notin F, a \notin G$. Alors $\text{Vect}(a)$ est un supplémentaire commun par Grassmann. (le caractère direct est clair).

Supposons acquis le résultat au rang $p + 1$. Je prends un a comme précédemment. Soit $F_1 = F \oplus \text{Vect}(a)$ et $G_1 = G \oplus \text{Vect}(a)$. Alors par hypothèse de récurrence, il existe H tel que $F_1 \oplus H = E, G_1 \oplus H = E$. Ainsi, F et $\text{Vect}(a) \oplus H$ sont en somme directe (c'est facile à montrer), et de même avec G . D'où l'hérédité, et donc la récurrence.

Pour la dimension infinie, le sens direct devient faux. En effet, soit $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto XP(X) \in X\mathbb{R}[X]$. Alors φ est clairement bijective et linéaire. Pour autant, le seul supplémentaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ est $\{0\}$, qui n'est pas supplémentaire de $X\mathbb{R}[X]$.

La réciproque est cependant vraie. Soit H tel que $F \oplus H = E$ et $G \oplus H = E$. Soit p un projecteur sur F parallèlement à H . La forme géométrique du théorème du rang assure que p induit un isomorphisme d'un supplémentaire de son noyau dans son image. Le noyau de p est H donc un supplémentaire de H est G . L'image de p est F donc $p_G : x \in G \mapsto p(x) \in F$ est un isomorphisme.