

Deux CNS de diagonalisabilité

Thomas CHEN

On peut étudier les endomorphismes semi-simples dans le sujet Mines Maths 2 PSI 2022.

Exercice. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Les questions sont indépendantes.

1. u est dit **semi-simple** lorsque pour tout F sous-espace vectoriel de E stable par u , il existe un supplémentaire de F dans E stable par u . On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que u est semi-simple si, et seulement si, u est diagonalisable.
2. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u . En déduire qu'un induit hérite de la diagonalisabilité.

Corrigé :

1. Soit u diagonalisable. Soit B une base de vecteur propre de E pour u . Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Notons (e_1, \dots, e_p) une base de F . On complète cette base en une base de E avec les éléments de B . Soit (e_{p+1}, \dots, e_n) les vecteurs ajoutés. Alors $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ vérifie $E = F \oplus G$ et G est stable par u en tant que somme d'espaces stables par u .

Réciproquement, soit u semi-simple. Raisonnons par récurrence sur la dimension de E . Si E est de dimension 1, le résultat est clair. Supposons le résultat acquis au rang $n - 1$. Soit E de dimension n . Soit λ une valeur propre de u (possible car χ_u est scindé vu qu'on est dans \mathbb{C}) et x un vecteur propre associé. Soit $F = \mathbb{C}x$ et G un supplémentaire de F (est de dimension $n - 1$) stable par u (possible car u est semi-simple et F est stable par u). u_G l'induit de u sur G est alors bien défini et est semi-simple : en effet, soit A un sous-espace vectoriel de G stable par u . A est stable par u donc par semi-simplicité de u , il existe B supplémentaire de A dans E et stable par u . Considérons alors $H = B \cap G$. Alors H est supplémentaire de A dans G et est stable par u_G : u_G est semi-simple.

Finalement, u_G est semi-simple donc par hypothèse de récurrence, u_G est diagonalisable : il existe une base de G constituée de vecteurs propres pour u . Alors cette base concaténée avec $\{x\}$ est alors une base de E constituée de vecteurs propres pour u : u est diagonalisable.

2. **Sens direct** : soit F un sous-espace vectoriel de E . Soit B_F une base de F . Comme c'est une famille libre de vecteurs de E , par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter avec une base de diagonalisation de u (existe car u est diagonalisable). Notons B_G la famille des vecteurs que l'on obtient pour compléter B_F . Alors $G := \text{Vect}(B_G)$ est un supplémentaire de F dans E stable par u .

Sens réciproque. On construit une base de diagonalisation par récurrence. Pour notre premier vecteur, soit H un hyperplan de E . Alors il existe un supplémentaire de H dans E — donc une droite engendrée disons par $e_1 \neq 0$ — stable par u : on a donc $u(e_1) \in \text{Vect}(e_1)$ donc e_1 est un vecteur propre. Supposons maintenant qu'on a construit e_1, \dots, e_k qui sont k vecteurs propres de E et tels que (e_1, \dots, e_k) soit libre.

Soit H un hyperplan contenant $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ (possible par exemple via le théorème de la base incomplète). Alors soit e_{k+1} vecteur engendrant un supplémentaire de H stable par u . e_{k+1} est un vecteur propre et comme $\mathbb{K}e_{k+1} \oplus H = E$, (e_1, \dots, e_{k+1}) est libre.

On construit ainsi une famille libre de vecteurs propres à n éléments par récurrence : c'est une base donc une base de diagonalisation : u est diagonalisable.

Passons à l'induit. Soit u diagonalisable et F stable par u . Alors u_F l'induit de u sur F est bien défini. Soit G un supplémentaire de F . Alors u étant diagonalisable, il existe A supplémentaire de G

dans E stable par u . Considérons donc $B = A \cap F$. Comme u stabilise A et F , u stabilise $A \cap F = B \subset F$ donc u_F stabilise B et on a $B \oplus G = F$. Ainsi, G admet un supplémentaire dans F stable par u_F donc u_F est diagonalisable.