Mathématiques : Khôlles de MP

Thomas CHEN

13 novembre 2026

Avant-propos

Ce document est l'aventure en khôlles de Mathématiques avec Thomas Chen et les MP de la promotion 2023-2024 du lycée Louis Pasteur à Neuilly-sur-Seine. Chaque chapitre correspond à un programme de khôlle, prédéfini par Catherine Aymard, professeure de mathématiques en MP au lycée Louis Pasteur. Un chapitre contient deux structures : des exercices de difficultés variées, normalement tous exempt d'erreurs, complétés par des éléments de corrections. La locution « éléments de corrections » est cruciale. Je ne garantis pas avoir la rédaction suffisante digne des concours pour tous les exercices. Ils sont là pour que vous soyez suffisamment aiguillés pour conclure.

Rappelons que ces exercices ont été donnés en khôlle : la présence d'un examinateur est très souvent nécessaire pour cadrer vos recherches, et vous guider via quelques indications. Il est donc normal que certains exercices vous paraissent très difficile. C'est en cela que sert une correction. Toutefois, pour juger la difficulté d'un exercice, il faut s'y pencher un minimum. Selon le temps que vous avez, je préconise au moins 10 minutes afin d'exploiter vos pistes.

Ces exercices sont inspirés de différentes sources : livres, extraits d'oraux, planche de TD et divers exercices que j'ai pu croiser tout au long de mes études.

L'ouvrage a été entièrement écrit par ma main, et directement sur le compilateur : ils ne sont donc pas forcément exempt de coquilles. Si vous en voyez une, aussi petite soit elle, je vous serai gré de me le signaler par mail :

thomaschen(dot)maths[at]gmail(dot)com

Bonne lecture ! Thomas Chen.

Table des matières

1 Rappels d'analyse réelle **3**

2 Algèbre générale **5**

3 Espace vectoriel normé **11**

4 Topologie **15**

5 Polynômes **23**

6 Algèbre linéaire **27**

7 Réduction des endomorphismes **29**

8 Séries numériques **39**

9 Suites et séries de fonctions **47**

10 Séries entières **57**

11 Espace euclidien **67**

12 Intégrales généralisées **79**

13 Combinatoire et dénombrement **93**

14 Probabilités **97**

15 Equations différentielles ordinaires **107**

16 Calcul différentiel **117**

Chapitre 1

Rappels d'analyse réelle

1.1 Autour de $\mathbb{R}$

Exercice 1.
Existe-t-il une application continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie les rationnels sur les irrationnels et les irrationnels sur les rationnels ?

Corrigé : soit f une telle application. Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - x$. Pour x irrationnel, $g(x) = f(x) - x$ est la somme d'un rationnel et d'un irrationnel donc est irrationnel. Pour x rationnel, $g(x)$ est aussi irrationnel. Ainsi, $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, g étant continue, si g n'est pas constante, on peut trouver a, b des réels tels que $g([a, b])$ soit un intervalle non réduit à un singleton. Tout intervalle non réduit à un singleton contient un rationnel en vertu de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Cela contredit $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. g est donc constante, disons $c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $f(x) = x + c$. On a $f(c) = 2c \notin \mathbb{Q}$ alors que $c \notin \mathbb{Q}$: cela contredit l'existence de f.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle vérifiant $\forall p, q \in \mathbb{N}, u_{p+q} \leq u_p + u_q$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\inf\left\{\frac{u_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ avec la convention $\inf(A) = -\infty$ si A n'est pas une partie minorée de $\mathbb{R}$.

Corrigé : Il s'agit du lemme de Fekete. On montre d'abord par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_{kn} \leq k u_n$. Traitons deux cas. Supposons que l'inf existe. (c'est un réel en fait, que l'on note l). Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de l'infimum, je peux trouver un entier N tel que

$$l \leq \frac{u_N}{N} \leq l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n \geq N$. Alors il existe un unique k, r tel que $n = kN + r$, avec $0 \leq r \leq N - 1$. Par sous-additivité, j'ai

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{ku_N + u_r}{kN + r} \leq \frac{k}{kN + r} u_N + \frac{u_r}{n} \leq \frac{u_N}{N} + \frac{u_r}{n}.$$

En notant $M := \max\{u_i : 0 \leq i \leq N - 1\}$, on a

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_m}{m} + \frac{C}{n}.$$

Soit N_1, un rang à partir duquel $C/n \leq \varepsilon/2$. Alors

$$\forall n \geq \max(N, N_1), \frac{u_n}{n} \leq l + \varepsilon.$$

En écrivant la définition de la limite, le résultat en découle.
Traitons le cas $-\infty$. Soit $A < 0$. Il existe alors un entier N tel que $\frac{u_N}{n} < A - 1$ puisque la suite n'est pas

minorée. Alors de même, je peux trouver

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_N}{N} + \frac{u_r}{n} \leq A - 1 + \frac{M}{n}.$$

En prenant C/m avec m suffisamment grand pour que ce réel soit inférieur à 1, le résultat va aussi en découler.

Chapitre 2

Algèbre générale

Exercice 3.
Soit G, un groupe non réduit à $\{0\}$.

1. On suppose que $\forall x \in G, x^2 = e$. Montrer que G est abélien.
2. On veut montrer que si G est fini, G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/Z\mathbb{Z})^d$ pour un certain d. On propose deux méthodes.
   (a) Exhiber la forme des éléments de G. Conclure.
   (b) Montrer qu'il existe une loi interne $\times$ de sorte que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$ soit un corps. Conclure.

Corrigé :

1. Pour tout $x \in G, x^2 = e$ donc $x = x^{-1}$. Soit donc $x, y \in G$. On a $(xy)^2 = e$ donc $xyxy = e$. En multipliant à gauche par x^{-1} et à droite par y^{-1}, on a $yx = x^{-1}y^{-1} = xy$ en vertu de la première remarque. G est donc abélien.
2. (a) Déjà, en notant $(x_1, \cdots, x_n)$ les éléments de G, $\{x_1, \cdots, x_n\}$ génère G. On peut donc considérer l'ensemble des parties génératrices de G et écrire celle de cardinal minimal $(g_1, \cdots, g_d)$. Tout élément de G s'écrit par commutativité de G

$$G = \left\{ \prod_{i=1}^{d} g_i^{\alpha_i} : \forall 1 \leq i \leq d, \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   Or tout élément de G est d'ordre 2 donc on peut se contenter de $\alpha_i \in \{0, 1\}$ pour tout $1 \leq i \leq d$ par division euclidienne de α_i par 2. Ainsi,

$$G = \left\{ \prod_{i=1}^{d} g_i^{\alpha_i} : \forall 1 \leq i \leq d, \alpha_i \in \{0, 1\} \right\}.$$

   Soit donc

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \to & \{0,1\}^d \\ & g & \mapsto & \{\alpha_1(g), \cdots, \alpha_d(g)\} \end{array}$$

   où $g = \prod_{i=1}^{d} g_i^{\alpha_i(g)}$ en vertu de l'écriture de G précédente. φ est alors un isomorphisme (c'est clairement un morphisme de groupe et admet une application inverse). De fait, $G \simeq \{0, 1\}^d \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$.

   (b) *Du fait que G soit abélien, on adopte la convention additive pour G.* Il s'agit de la multiplication standard de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et pour cette multiplication, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ pour p premier est un corps. Il suffit alors de montrer que G est un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-espace vectoriel pour conclure. On prend la loi externe

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G & \to & G \\ & (\overline{n}, x) & \mapsto & nx \end{array}.$$

On vérifie sans peine les propriétés d'espace vectoriel. G est donc un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-espace vectoriel mais est de cardinal fini donc en particulier de dimension finie. Notons d cette dimension. Alors $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ en tant qu'espace vectoriel donc en particulier en tant que groupes.

Exercice 4.

1. Est-ce que les groupes $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}^2, +)$ sont isomorphes ?
2. Est-ce que les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^2, +)$ sont isomorphes ?
3. Pour quelles valeurs de p, q les groupes $(\mathbb{Z}^p, +)$ et $(\mathbb{Z}^q, +)$ sont isomorphes ?

Corrigé :

1. Non, ils ne sont pas isomorphes. Pour le deviner, $\mathbb{Z}$ est monogène tandis que $\mathbb{Z}^2$ ne l'est pas. On va le voir. Supposons par l'absurde que ces deux groupes sont isomorphes. Soit donc φ isomorphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}^2$. Puisque 1 génère $\mathbb{Z}$, il est intéressant de fixer la valeur de $\varphi(1)$. Disons que $\varphi(1) = (a, b)$. Alors $\forall n \in \mathbb{Z}, \varphi(n) = n\varphi(1) = n(a, b) = (na, nb)$. Ainsi, $\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(a, b)$ donc on n'obtient qu'une droite de $\mathbb{Z}^2$.
   (a) Si $a = b$, $(0, 1)$ n'a pas d'antécédent par φ.
   (b) Si $a \neq b$, $(1, 1)$ n'a pas d'antécédent par φ.

   φ n'est donc pas surjective ce qui est absurde.

Exercice 5.
Déterminer tous les groupes de cardinal inférieur à 7 à isomorphisme près.

Corrigé : Soit G un groupe, on lui met une loi additive.

1. De cardinal 1, il n'y a que $\{0\}$ groupe ne contenant que le neutre.
2. De cardinal 2, soit 0 neutre de G et a l'autre élément. Alors $a + a = a$ (absurde car alors $a = e$) ou $a + a = e$ donc a est d'ordre 2. G est alors isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (on envoie a sur $\overline{2}$ et 0 sur $\overline{1}$).
3. De manière générale, si p est premier et G de cardinal G, alors $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. En effet, soit x un élément qui n'est pas le neutre de G. Son ordre divise p donc est p car ce n'est pas 1. Le sous-groupe engendré par x est alors de cardinal p donc par cardinalité, G est engendré par x. Il suffit alors d'envoyer x sur un générateur de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et on construit ainsi un isomorphisme.
4. Il ne reste que 6 et 4. Commençons par 4. Soit x un élément de G qui n'est pas le neutre. Alors x est d'ordre divisant 4 donc est 2 ou 4. Si c'est un élément d'ordre 4, par l'argument précédent, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. On peut donc supposer que tous les éléments de G sont d'ordre 2 et G est alors isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. Finissons par 6.
   - Soit $x \in G, x \neq e$. Si $w(x) = 6$, alors G est cyclique donc isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
   - Supposons que G admet aucun élément d'ordre 6. On va montrer que G contient un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre 3.
     - Supposons déjà qu'il n'existe pas d'élément d'ordre 3. Alors tout élément est d'ordre 1 ou 2 donc G est abélien (exercice classique). On peut montrer que le cardinal de G est alors une puissance de 2 ce qui n'est pas. G admet donc un élément d'ordre 3. Sinon, on peut aussi dire que si on prend x, y deux éléments d'ordre 2 distincts, alors xy est différent de x et y, et $\{e, x, y, xy\}$ est un sous-groupe de G. Par le théorème de Lagrange fort, c'est absurde.
     - Alors G contient e, x, x^2 avec x, un élément d'ordre 3. Supposons que tous les éléments sont d'ordre 3. Soit donc y d'ordre 3. Alors G contient e, x, x^2, y, y^2, éléments distincts. En effet,
       - si $y^2 = x$, alors $y^3 = e = yx$ donc $y = x^{-1} = x^2$. Absurde.
       - Si $y^2 = x^2$, alors $x^2y = e$ donc $x^3y = y = x$. Absurde.

Il manque un élément, appelons z. Alors G contient z, z^2 et ces derniers sont distincts des x, x^2, y, y^2 par les deux points précédents. Ce qu'on a fait ne dépendait pas de x et y, seulement que ces deux éléments étaient d'ordre 3. Mais donc c'est absurde car G contiendrait 7 éléments : $e, x, x^2, y, y^2, z, z^2$.

Finalement, G contient un élément d'ordre 3 et un élément d'ordre 2, notés respectivement x et y. Ainsi, G contient e, x, x^2, y. G contient aussi xy, x^2y. Reste à savoir s'ils sont différents des éléments précédents. Si G était abélien, on a $xy \neq e, (xy)^2 = x^2y^2 = x^2 \neq e, (xy)^3 = x^3y^3 = y \neq e$ donc xy est d'ordre 6. Donc G est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Or, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \to & G \\ & (1,0) & \mapsto & x \\ & (0,1) & \mapsto & y \end{array}$$

est clairement un isomorphisme. Donc si G est abélien, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On va donc supposer G non abélien. On va essayer de montrer qu'il y a 2 éléments d'ordre 3 (les 3-cycles) et 3 éléments d'ordre 2 (les 2-cycles). Je te propose 2 méthodes :

- Si $xy = x$, alors $y = e$ absurde. Si $xy = x^2$, alors $x^3y = y = x^2x^2 = x$ absurde. Si $xy = y$, alors $x = e$, absurde. Bref, xy est distinct des autres, et de même pour x^2y. On peut en fait s'arrêter là. En effet, on considère l'application $\varphi : G \to \mathfrak{S}_3$ suivante :

  $$x \mapsto (1\ 2\ 3), x^2 \mapsto (1\ 3\ 2), y \mapsto (1\ 2), xy \mapsto (1\ 3), x^2y \mapsto (2\ 3)$$

  qui est un isomorphisme.
- On va regarder yxy qui est dans G. Si $yxy = e$, alors $x = y^{-1}y^{-1} = e$ absurde. Si $yxy = y$, alors $yx = e$ absurde. Si $yxy = xy$, alors $y = e$, absurde. Si $yxy = x^2y$, alors $y = x$, absurde. Donc yxy vaut soit x, soit x^2.
  - Si $yxy = x$, alors $yx = xy$. Puisque tous les éléments de G sont composés de x ou de y, alors G est abélien.
  - On a donc $yxy = x^2$. Donc $yx = x^2y$ donc $x^2yx^2y = yxx^2y = yy = e$ donc x^2y est d'ordre 2. Pareillement, $xyxy = x(x^2y)y = x^3y^2 = e$ donc xy est d'ordre 2. On peut donc faire le même isomorphisme.

Exercice 6.
Déterminer l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_n$.

Corrigé : la réponse est le max des ppcm pris sur une partition additive (ne contenant pas 0) de n. En effet, soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors en décomposant en cycles à support disjoints (même ceux de support à 1 élément), il existe $c_1, \cdots, c_k$ cycles de cardinal croissant tel que $\sigma = c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_k$. La somme des tailles des cycles vaut une partition additive de n. L'ordre de cet élément est alors $\text{ppcm}(n_1, \cdots, n_k)$ où n_i est le cardinal du support de c_i pour tout i. Puisqu'à une partition additive de n, on peut trouver une permutation convenable [1], on a donc le résultat voulu.

Exercice 7.
Soit G, un groupe cyclique de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit d, un entier naturel divisant n. Montrer que G possède un et un unique sous-groupe d'ordre d. (Bonus : En déduire que

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

où $\varphi(d)$ vaut le nombre d'entier de $[\![1, d]\!]$ divisant d. C'est l'indicatrice d'Euler.)

Corrigé : Puisque G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il suffit d'obtenir le résultat pour $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans toute la suite, on ne notera pas la barre au-dessus d'un élément de $\mathbb{Z}$: tous les éléments vivent dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $d|n$.

1. dont la décomposition en cycle à supports disjoints contient des cycles de taille suivant la partition choisie

Considérons $C_d = \{1, n/d, 2 * n/d, \cdots, (d-1)n/d\}$. Alors C_d est un groupe et est clairement de cardinal d. Par ailleurs, tout élément d'ordre d est dans C_d. En effet, soit x tel que $dx = 0$. En effet, – on note X, un représentant de x –, on a l'existence d'un k tel que $dX = kn$. Or, $d|n$ donc X est de la forme kn/d. Mais tous les éléments de la forme kn/d modulo n sont exactement les éléments de C_d. D'où ce résultat intermédiaire. Maintenant, soit H, un sous-groupe d'ordre d. Par Lagrange, tous les éléments de H vérifie $dx = 0$ donc $H \subset C_d$. Par cardinalité, on a l'égalité.

Exercice 8.
Soit $(A, +, \times)$, un anneau commutatif.

1. Montrer que A est un corps si, et seulement si, ses idéaux sont les idéaux triviaux.
2. On se place dans le cas fini. Montrer que A est un corps si, et seulement si, A est intègre.

Corrigé :

1. Soit $x \neq 0$. Alors $xA := \{xa : a \in A\}$ est un idéal de A. Il n'est pas nul car il contient x donc par hypothèse, $xA = A$. $1 \in xA$, c'est-à-dire qu'il existe un élément $a \in A$ tel que $1 = xa$. Alors x est inversible. Ainsi, tout élément non nul est inversible donc A est un corps.
2. Le sens direct est clair (un corps est intègre). Pour le sens réciproque, soit $a \neq 0$ et $f : x \in A \mapsto ax \in A$, définie ainsi, est un morphisme de groupe (l'anneau A étant vu comme $(A, +)$. ATTENTION : ce n'est pas un morphisme d'anneaux ! (exercice)). f est injective car A est intègre, et surjectif par cardinalité A étant fini. Donc f est bijective, donc 1 admet un antécédent par f, disons b. Alors $f(b) = 1$ donc $ab = 1$. a est donc inversible. Ainsi, A est un corps.

Exercice 9. Soit $p \in \mathcal{P}$. Montrer que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. En déduire $\varphi(p)$. On pourra utiliser le fait que

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

De manière générale, pour tout K corps, pour tout G sous-groupe fini de $K^\times$, G est cyclique. D'un autre point de vue plus général, on peut aussi montrer que $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$ est aussi cyclique pour $\alpha \in \mathbb{N}$ sauf $p = 2, \alpha \geq 3$.

Corrigé : On démontre le premier cas général. Soit n, cardinal de G. Supposons que G contienne un élément d'ordre d. Notons-le x. Alors $x^d = 1$ et tous les éléments g de $\langle x \rangle$ vérifient l'équation $X^d - 1 = 0$. Dans le corps K, cette équation a au plus d solutions. Par cardinalité, G_d est exactement l'ensemble des solutions de $X^d - 1$ dans G. G étant cyclique, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ donc possède $\varphi(d)$ générateurs. Ces générateurs sont exactement les éléments d'ordre d de G puisque un élément d'ordre d est solution de $X^d - 1$. Ainsi, si G admet un élément d'ordre d, il en admet $\varphi(d)$. Si non, il n'en admet... aucun. De fait, il existe $\varepsilon_d \in \{0, 1\}$ pour tout $d|n$ tel que

$$n = \sum_{d|n} \varepsilon_d \varphi(d)$$

en comptant les éléments de G selon leurs ordres possibles. Mais par le résultat admis, nécessairement, tous les ε_d sont égaux à 1 et en particulier, on a $\varphi(n)$ éléments d'ordre n : G est bien cyclique.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{P}_n$, l'ensemble des racines n-ème primitives de l'unité *i.e.* elles génèrent $\mathbb{U}_n$. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$. On appelle n-ème polynôme cyclotomique, le polynôme $\Phi_n = \prod_{\zeta \in \mathbb{P}_n} (X - \xi)$.

1. Déterminer une CNS sur k pour que ω^k soit une racine n-ème primitive de l'unité.
2. Déterminer Φ_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. Déterminer $\deg(\Phi_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Déterminer Φ_p pour $p \in \mathcal{P}$.
5. Montrer que $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$.
   (a) Déduire de cette question que
   $$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$
   (b) Déduire de cette même question que Φ_n est à coefficients entiers.

On peut aussi montrer que Φ_n est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ mais l'exercice devient beaucoup plus ardu.

Corrigé :

1. Il faut et suffit que k soit premier avec n. Supposons que k et n soit premiers entre eux. Par le théorème de Bézout, il existe u, v tel que $ku+nv = 1$. Donc $ku = 1[n]$. De fait, $e^{2iku\pi/n} = e^{2i\pi/n}$ et $e^{2iku\pi/n} \in \langle \omega^k \rangle$ donc $\langle \omega^k \rangle$ contient un générateur de $\mathbb{U}_n$: ω^k est bien racine n-ème primitive de l'unité. Réciproquement, supposons que ω^k soit racine n-ème primitive de l'unité. Il existe alors un $u \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega^{ku} = \omega$. De fait, $\omega^{ku-1} = 1$ donc $ku - 1 = 0[n]$. Par le théorème de Bézout, k est premier avec n.
2. On trouve respectivement $X - 1, X + 1, X^2 + X + 1, X^2 + 1, X^4 + X^3 + X^2 + X + 1, X^2 - X + 1$.
3. Le degré de Φ_n correspond au cardinal de $\mathbb{U}_n$: c'est $\varphi(n)$.
4. Puisque pour p premier, $\mathbb{P}_n = \mathbb{U}_n \backslash \{1\}$,
$$\Phi_p(X) = \frac{1}{X-1} \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = \sum_{k=0}^{p-1} X^k.$$
5. Il suffit de montrer que $\{\mathbb{U}_d^* : d|n\}$ forment une partition de $\mathbb{U}_n$. Il est clair que l'union est disjointe et que les $\mathbb{U}_d^*$ sont non vides. Il suffit de montrer le résultat par double inclusion. Soit $\omega \in \mathbb{U}_d^*$ pour $d|n$. Alors $\omega^d = 1$. De fait, d divisant n *i.e.* $n = kd$, $\omega^{kd} = 1$ donc $z \in \mathbb{U}_n$. Réciproquement, soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. On note d son ordre. Alors par Lagrange, $d|n$ d'où la réciproque. De fait, pour $n = 1$, on a $\Phi_1 = X - 1$ et pour $n \geq 2$,
$$X^n - 1 = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} (X - \zeta) = \prod_{d|n} \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_d^*} (X - \zeta) = \prod_{d|n} \Phi_d.$$
   (a) On prend les degrés et on a le résultat.
   (b) Par l'étape 1, on en déduit que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, X^n - 1 = \Phi_n \prod_{d|n, d \neq n} \Phi_d.$$
   Par récurrence forte, Φ_n est le quotient dans $\mathbb{Q}[X]$ de $X^n - 1$ et $\prod_{d|n,d\neq n} \Phi_d := B$ qui sont deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$. On peut montrer un résultat assez utile : on ne peut pas faire la division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$ a priori. On peut le faire si le coefficient dominant du polynôme par lequel on divise est inversible [2] ! Une preuve de ce résultat est écrite après. Un corollaire est le lemme suivant.

> Lemme : Soit $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ avec B unitaire. On suppose que $B|A$ dans $\mathbb{Q}[X]$. Alors c'est vrai dans $\mathbb{Z}[X]$.
>
> *Démonstration.* Soit Q, le quotient dans $\mathbb{Q}[X]$. Par unitarité de Q, il existe C, R dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $A = BC + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$. Donc $(Q - C)B = R$. Par degré, $R = 0$ donc par intégrité, $Q = C$ et $Q \in \mathbb{Z}[X]$. □

2. donc ± 1

On applique donc le lemme pour $A = X^n - 1$ et $B = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} \Phi_d$ pour obtenir $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ (et unitaire par unitarité de A et B.

Preuve de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$.

Théorème 2.1. *Soit $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ et B unitaire. Alors il existe $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$ ou $R = 0$.*

Démonstration. Si B est un polynôme constant, il n'y a rien à faire car $B = 1$ par unitarité. On suppose donc que B est de degré au moins 1 que l'on note b. On procède par récurrence sur le degré de A. Soit $H_n : \forall A \in \mathbb{Z}_n[X], \exists Q, R \in \mathbb{Z}[X], A = BQ + R \wedge (\deg(R) < \deg(B) \vee R = 0)$.

- Pour $n = 0$, on prend $Q = 0$ et $R = A$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathbb{Z}_n[X]$ et a_n coefficient dominant de A . Alors $A - B(a_n X^{n-b})$ est de degré au plus $n - 1$. En effet, $\deg(A) = n = n - b + b = \deg(B) + \deg(a_n X^{n-b}) = \deg(a_n B X^{n-b})$ et le coefficient dominant de A est a_n tandis que celui de $a_n B X^{n-b}$ est $a_n \times 1$ (B est unitaire) donc le terme de degré n disparait. On applique l'hypothèse de récurrence sur cette différence. Il existe $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\deg(R) < \deg(B)$ ou $R = 0$ vérifiant $A - B(a_n X^{n-b}) = QB + R$. Ainsi, $A = B(a_n X^{n-b} + Q) + R$ et $(a_n X^{n-b} + Q) \in \mathbb{Z}[X]$. On a donc écrit une division euclidienne de A par B ce qui montre H_n.
- Par le principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Chapitre 3

Espace vectoriel normé

Exercice 11.
Soit $(E, \|\cdot\|)$, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme sur E. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que si $E = \mathbb{R}$, une suite est de Cauchy si, et seulement si, elle converge.
2. On se place dans le cas général. On dit que E est complet lorsque pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, si u est de Cauchy, alors u converge. Montrer que E est complet si, et seulement si, toute série absolument convergente est convergente. *Indication : on pourra trouver une extraction φ de sorte $\sum \|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\|$ soit convergente.*

Corrigé :

1. Soit u une suite réelle convergente. Notons ℓ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$. Soit $p, q \geq N$. Alors $|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq 2\varepsilon/2 = \varepsilon$ donc u est de Cauchy.
   Réciproquement, montrons un lemme.

   Lemme 3.1. Une suite de Cauchy de E est bornée.

   Démonstration. Soit u de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N, \|u_p - u_N\| \leq \varepsilon$. Soit $M = \max_{[0,N]} \|u\|$. Alors :

   $$\forall n \in [\![0, N]\!], \|u_n\| \leq M \ ; \ \forall n \geq N, \|u_p\| \leq \varepsilon + \|u_N\|.$$

   Ainsi, u est bornée par $\max(M, \varepsilon + \|u_N\|)$. □

   Soit maintenant u une suite réelle de Cauchy. Alors u est bornée, disons par M. u est à valeurs dans $[-M, M]$ qui est un compact de $\mathbb{K}$. Montrons alors que u n'a qu'une valeur d'adhérence (un résultat du cours nous dit alors que u converge). Soit ℓ, ℓ' deux valeurs d'adhérence de u. Soit φ, ψ deux extractions telles que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell, u_{\psi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

   (a) $\forall p, q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$,
   (b) $\forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$,
   (c) $\forall n \geq N, |u_{\psi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$.

   Puisque $\psi(n) \geq n \geq N, \varphi(n) \geq n \geq N$, on a

   $$|\ell - \ell'| = |\ell - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)} + u_{\psi(n)} - \ell'| \leq |u_{\psi(n)} - \ell| + |u_{\varphi(n)} - \ell| + |u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)}| \leq 3\varepsilon.$$

   (cette inégalité, que j'appelle inégalité carrée, est une « méthode » à connaitre : pour aller à un point A à un point D, mieux vaut faire la ligne droite que de passer par B puis par C.) Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0), |\ell - \ell'| \leq 3\varepsilon$ donc $\ell = \ell'$. Ainsi, u admet une unique valeur d'adhérence donc converge.

2. Supposons que E est complet. Soit $(u_n)_n$ une suite de E et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose que la série $(S_n)_n$ converge absolument, ce qui veut dire que $\sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$ converge quand $n \to +\infty$ ce qui signifie que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \|u_k\| < \varepsilon.$$

Soit $p \geq q \geq N$. Alors

$$\|S_p - S_q\| = \left\| \sum_{k=p}^{q-1} u_k \right\| \leq \sum_{k=p}^{q-1} \|u_k\| \leq \varepsilon.$$

Alors $(S_n)_n$ est de Cauchy donc converge.

Réciproquement, la stratégie repose sur le lemme plus général suivant que l'on démontrera après.

Lemme 3.2. Si u est de Cauchy sur E et a une valeur d'adhérence, elle converge.

Supposons que toute série absolument convergente converge. Soit u une suite de Cauchy dans E. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N_k \in \mathbb{N}$[1] tel que $\forall p, q \geq N, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$. Construisions une extraction φ par récurrence. Une première remarque que si on prend $k \in \mathbb{N}$, alors il existe un entier $\varphi(k)$ tel que $\forall p, q \geq \varphi(k), \|u_p - u_q\| \leq \frac{1}{2^k}$ ce qui implique que $\forall p \geq \varphi(k), \|u_p - u_{\varphi(k)}\| \leq \frac{1}{2^k}$.

(a) Il existe $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq \varphi(0), \|u_p - u_{\varphi(0)}\| \leq 1$.

(b) Il existe $\varphi(1) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq \varphi(1), \|u_p - u_{\varphi(1)}\| \leq \frac{1}{2}$. On peut alors supposer que $\varphi(1) \geq \varphi(0)$.

(c) On construit ainsi par récurrence $\varphi(k) > \varphi(k-1)$ tel que $\forall p \geq \varphi(k), \|u_p - u_{\varphi(k)}\| \leq \frac{1}{2^k}$.

Soit $v_n = u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}$. Alors $\|v_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ par construction. De fait, la série $\sum v_n$ converge absolument donc converge par hypothèse. Par télescopage, cela revient à dire que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge. u est une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence : elle converge.

Démonstration. Montrons le lemme. Soit u de Cauchy dans E. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$. Soit φ une extraction telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge, disons vers ℓ. Il existe alors un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0, \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \varepsilon$.

Soit $n_1 = \max(N, n_0)$. Alors $\forall n \geq n_1, n \geq N, \varphi(n) \geq n \geq N, n \geq 0$. De fait,

$$\forall n \geq n_1, \|u_n - \ell\| \leq \|u_n - u_{\varphi(n)}\| + \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, u converge. □

Exercice 12.
Soit $(E, \|\cdot\|)$, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme sur E. Soit F, un sous-espace vectoriel de E et $f : F \to F$, une application k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$ (on dit que f est contractante). *On admet qu'une suite de Cauchy dans F est convergente.* Montrer que f admet un et unique point fixe. *Indication : on pourra construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, puis montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.*
Ce résultat reste-t-il vrai lorsque seule une des itérées de f est contractante ?

1. cet entier dépend de k

Corrigé : L'unicité d'abord. Soit a, b deux point fixes de f. On a

$$\|a-b\| = \|f(a)-f(b)\| \leq k\|a-b\|$$

donc $\|a-b\|(1-k) \leq 0$ sachant que $1-k>0$. On en déduit que $\|a-b\| \leq 0$ donc vaut 0 par positivité de la norme. Par séparation, $a=b$ et on a l'unicité.

Passons à l'existence. Soit $(u_n)_n$ une suite de F définie par $u_0 \in F, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Une telle suite est bien définie puisque $f(F) \subset F$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u_{n+1}-u_n\| = \|f(u_n)-f(u_{n-1})\| \leq k\|u_n-u_{n-1}\|$$

car f est k-contractante. Alors par récurrence immédiate,

$$\|u_{n+1}-u_n\| \leq k^n\|u_1-u_0\|.$$

On veut montrer que u est de Cauchy. Pour cela, soit $\varepsilon>0$ et considérons p, q deux entiers naturels, $p>q$. Par télescopage,

$$\|u_p-u_q\| = \left\|\sum_{n=q}^{p-1} u_{n+1}-u_n\right\| \leq \sum_{n=q}^{p-1}\|u_{n+1}-u_n\| \leq \sum_{n=q}^{p-1} k^n\|u_1-u_0\| = \|u_1-u_0\|k^q\frac{1-k^{p-q}}{k-1} \leq \frac{\|u_1-u_0\|}{k-1}k^q.$$

Ainsi, pour q assez grand (donc p assez grand), on a $\|u_p-u_q\| \leq \varepsilon$. u est donc de Cauchy donc converge, disons vers ℓ. Par continuité de f (lipschitzien implique continue), l'égalité $f(u_n)=u_{n+1}$ passe à la limite en $f(\ell)=\ell$ ce qui conclut l'existence.

Exercice 13. Soit A, une partie non vide de E munie d'une norme $\|\cdot\|$. Pour $x \in E$, on note $d(x,A) = \inf_{a\in A}\|x-a\|$.

1. Montrer que $d(x,A)=0 \iff x \in \overline{A}$.
2. Montrer que $x \mapsto d(x,A)$ est une application continue.
3. On pose $A_\varepsilon = \{x \in E : d(x,A) < \varepsilon\}$. Montrer que A_ε est ouverte. Que vaut $\bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$?

Corrigé :

1. C'est la caractérisation séquentielle de l'infimum.
2. On rappelle que $\forall z \in E, d(x,A) \leq |x-z|+d(z,A)$. De fait, $|d(x,A)-d(z,A)| \leq \|x-z\| : f : x \mapsto d(x,A)$ est donc 1-lipschitzienne donc continue.
3. $A_\varepsilon = f^{-1}(]-\infty, \varepsilon[)$ qui est ouverte car f est continue. L'intersection vaut $\{x \in E : d(x,A)=0\}$ donc $\overline{A}$.

Exercice 14. On considère $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Exhiber deux normes non équivalentes sur E.
2. Soit $D : P \in E \mapsto P' \in E$ et $M : P \in E \mapsto XP \in E$.
   (a) Donner une norme sur E de sorte que D soit continue, et une autre de sorte que D ne le soit pas.
   (b) Même question pour M.
3. Existe-t-il une norme de sorte que M et D soient continues ?

Corrigé :

1. On considère la norme infinie et la norme 1. Pour $P_n = \sum_{i=0}^{n} X^k$. Alors $\frac{\|P_n\|_1}{\|P_n\|_\infty} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc les normes ne sont pas équivalentes.

2. (a) De manière générale, pour toute suite de réels strictement positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour un polynôme $P=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, l'application définie par $N_u(P)=\sum_{k=0}^{n} u_k|a_k|$ est une norme sur E. Considérons alors la norme N pour $u=(n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

$$N(D(P))=\sum_{k=0}^{n-1}|a_{k+1}|(k+1)!\leq\sum_{k=0}^{n}|a_k|k!=N(P).$$

Donc D est continu pour N. Par contre, D n'est pas continu pour $\|\cdot\|_\infty$.

(b) On a $\|M(P)\|_\infty=\|P\|_\infty$. Par contre, pour la norme N précédente, on a $N(X^n)=n!, N(M(X^n))=(n+1)!$ donc $\dfrac{N(M(X^n))}{N(X^n)}=n+1$ donc M n'est pas continu pour N.

3. Supposons qu'une telle norme existe, disons $\|\cdot\|$. Alors il existe k,h tel que

$$\forall P\in\mathbb{R}[X], \|M(P)\|\leq k\|P\|, \|D(P)\|\leq h\|P\|.$$

Alors

$$\|nX^n\|\leq\|M(nX^{n-1}\|\leq k\|nX^{n-1}\|\leq k\|D(X^n\|\leq kh\|X^n\|.$$

Ainsi, on en déduit que $n\leq kh$, ce qui est absurde.

Remarque 1 : pour des raisons de spectre (voir Réduction), on peut montrer que le spectre d'un endomorphisme continue est borné par la norme triple de u. De fait, le spectre de $M\circ D$ est borné. Toutefois, $(M\circ D)(X^n)=nX^n$ donc $\mathbb{N}\subset\mathrm{Sp}(M\circ D)$.

Remarque 2 : avec l'exercice 15, on a automatiquement cette question.

Exercice 15. Soit E, un espace vectoriel normé, u,v deux endomorphismes continus de E. On suppose que $u\circ v-v\circ u=a\mathrm{Id}$.

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, u^n\circ v-v\circ u^n=anu^{n-1}$.
2. Montrer que u et v commutent (c'est-à-dire $a=0$).
3. Et si E est de dimension finie ?
4. Déduire de cet exercice qu'il n'existe pas de norme sur $\mathbb{K}[X]$ rendant les endomorphismes D et M continus (c.f. l'exercice 14).

Corrigé :

1. C'est une récurrence.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$n|a|\left|\left|\left|u^{n-1}\right|\right|\right|=|||u^n\circ v-v\circ u^n|||\leq 2|||u^n|||||v|||\leq 2\left|\left|\left|u^{n-1}\right|\right|\right||||u|||||v|||.$$

Il y a deux cas.
- Soit $u^{n-1}\neq 0$ pour tout $n\geq 1$ donc $|a|n$ est majorée : $a=0$.
- Soit il existe un rang p tel que $u^{p-1}=0$ donc a est nilpotente. Si $p=1$, alors u est nulle, donc u et v commutent. Si $p\geq 2$, supposons $a\neq 0$. Alors par 1, on en déduit que $u^{p-2}=0$. Par une récurrence descendante finie, $u=0$ contredisant le fait que $a\neq 0$. Donc $a=0$.

3. Si E est de dimension finie, on a, en prenant la trace, $0=a\dim(E)$ donc $a=0$.

Chapitre 4

Topologie

Exercice 16. Soit A, B, deux parties d'un espace vectoriel normé quelconque.

1. Comparer $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$.
2. Comparer $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$.
3. On suppose que A est ouverte. Comparer $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$. Que se passe-t-il quand A n'est pas ouverte ? *Indication : on utilisera et démontrera que $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, pour tout V voisinage de x, $V \cap A \neq \emptyset$.*

Corrigé : On utilise le fait que si A est inclus dans un fermé, son adhérence aussi.

1. On a $A \cap B \subset A \subset \overline{A}, A \cap B \subset B \subset \overline{B}$. Ainsi, $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Le membre de droite étant fermé, on a donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. L'inclusion réciproque est fausse : on peut considérer $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
2. Comme $A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$ et $B \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$, on a $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Ainsi, $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Par ailleurs, $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$, on a $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Le membre de droite étant un fermé, on a l'autre inclusion, d'où l'égalité.
3. Soit $x \in A \cap \overline{B}$. Soit V, un voisinage de x. Alors $V \cap A$ est un voisinage de x car A est ouverte. Puisque $x \in \overline{B}$, on a
$$V \cap (A \cap B) = (V \cap A) \cap B \neq \emptyset.$$
La réciproque est fausse : on peut considérer $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
Preuve du petit lemme : Soit $x \in \overline{A}$. Alors $x \notin \overline{A}^C = \overset{\circ}{(A^C)}$. Ainsi, A^C n'est pas un voisinage de x. A^C ne contenant aucun voisinage de x, tout voisinage de x intersecte donc A. Réciproquement, si tout voisinage de x intersecte A, alors A^C n'est pas un voisinage de x ce qui est donc équivalent par précédent à $x \in \overline{A}$.

Exercice 17. Soit E, un espace vectoriel normé. Soit $\varphi \in E^*$ non nul et $H = \ker(\varphi)$, hyperplan de E. Montrer que H est fermé ou dense dans E.

Corrigé : En dimension finie, un sous-espace vectoriel est bien fermé. *On rappelle la preuve. Soit x, une suite convergente de F sev de E. Alors x est bornée dans F. Il existe donc R tel que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B_f(0, R)$. Donc $B_f(0, R) \cap F$ est une boule fermée de E donc compact par dimension finie de F. Il existe donc une sous-suite convergente dans F. Par unicité, la limite de x est dans F.* Sinon, H est le noyau d'une application linéaire, continue par dimension finie. Donc H est fermé.
En dimension infinie, si φ est continue, alors H est fermé. Supposons donc que φ n'est pas continue. Alors φ n'est pas lipschitzienne : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in E, |\varphi(a_n)| > n\|a_n\|$.

Soit $x \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x + \lambda_n a_n$. Alors $\varphi(y_n) = 0$ pour $\lambda_n = -\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a_n)}$. Ainsi définie,

$y_n \in H$ pour tout n. Or

$$\|y_n - x\| = \left\| \frac{\varphi(x)}{\varphi(a_n)} a_n \right\| = |\varphi(x)| \frac{\|a_n\|}{|\varphi(a_n)|} \leq \frac{|\varphi(x)|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc H est bien dense dans E.

Il existe une alternative plus élémentaire mais je tiens à présenter cette méthode.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. Montrer que ce n'est pas le cas pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : Pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on pose $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On pose $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \det(zA + (1-z)B) \in \mathbb{C}$. Alors f est un polynôme en z de degré au plus n. Par d'Alembert-Gauss, f admet au plus n racine(s) complexe(s). Notons alors $V = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \neq 0\}$. V contient 0 et 1 et est connexe par arcs. On peut donc trouver $g : [0,1] \to V$ continue vérifiant $g(0) = 0, g(1) = 1$. Considérons alors $h : t \in [0,1] \mapsto g(t)A + (1-g(t))B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors h est continue, $h(0) = B, h(1) = A$. CQFD.

Par contre, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. En effet, par continuité de det : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^*$ n'étant pas convexe, on a le résultat. Pour obtenir les deux composantes connexes, on pense au pivot de Gauss. Soit M, une matrice inversible. Par le théorème de pivot de Gauss, il existe des transvections/dilatations $(T_{i_k,j_k,\lambda_k})_{1\leq k\leq p}$ (c'est la matrice associée à $L_{i_k} \to L_{i_k} + \lambda_k L_{j_k}$) de sorte que

$$M = \left(\prod_{k=1}^{p} T_{i_k,j_k,\lambda_k} \right) \underbrace{\mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, \det(M))}_{=:D}.$$

On considère alors $\gamma : t \in [0,1] \mapsto \left(\prod_{k=1}^{p} T_{i_k,j_k,t\lambda_k} \right) D$. Alors γ est clairement continue en tant que produit d'applications continues, et $\gamma(0) = D, \gamma(1) = M$. Par ailleurs, $\forall t \in [0,1], \det(\gamma(t)) = \det(D) = \det(M)$. De fait, on a un chemin continue entre toute matrice et la matrice avec que des 1 et son déterminant à la fin. Donc toute matrice de déterminant positif sont reliés, toute matrice de déterminant négatif sont reliés. La question maintenant est : sont-ils reliés dans leurs espaces respectifs ?

Exercice 19. Soit E, un espace vectoriel normé. Soit K, un compact non vide de E. Soit $f : K \to K$ vérifiant $\forall x \neq y \in \mathbb{K}, \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Montrer que f admet un unique point fixe. Montrer que ce dernier est obtenu par limite d'une suite vérifiant $u_0 \in X, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Corrigé : Soit $g : x \in K \mapsto \|f(x) - x\| \in \mathbb{R}^+$. g est clairement continue sur K donc par le théorème des bornes atteintes, g admet un minimum sur K compact. Notons-le α. Alors si $f(\alpha) \neq \alpha$), on a $g(f(\alpha)) = \|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\| < \|f(\alpha) - \alpha\| = g(\alpha)$, ce qui est absurde. Donc α est bien point fixe. Pour l'unicité, si α, β sont deux points fixes, on a $\|\alpha - \beta\| = \|f(\alpha) - f(\beta)\| < \|\alpha - \beta\|$. Cela signifie que $\alpha = \beta$.

Considérons maintenant la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $d_n = \|x_n - \alpha\|$ (α est point fixe de f). Alors d est une suite décroissante, minorée par 0, donc converge, disons vers ℓ. Par compacité de K, x admet une valeur d'adhérence, disons ξ. Par passage à la limite, on en déduit $\ell = \|\xi - \alpha\|$. En appliquant la même chose à $d_{n+1} = \|x_{n+1} - \alpha\| = \|f(x_n) - f(\alpha)\|$ et par continuité de f, on a $\ell = \|f(\xi) - f(\alpha)\|$. Donc $\xi = \alpha$. Ainsi, x admet une unique valeur d'adhérence qui est α : elle est donc convergente, et ce, vers α.

On présente dans ce qui suit trois résultats intéressants, pas si facile, assez utiles, de topologie.

Exercice 20. Soit E un espace vectoriel normé et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ. Montrer que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

Corrigé : Notons $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $K^{\mathbb{N}}$. Si $(y_n)_n$ prend la valeur de ℓ une infinité de fois, il est aisé de construire une extraction φ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, y_{\varphi(n)} = \ell$ donc $(y_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.

On suppose donc que ce n'est pas le cas. Notons $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Alors on peut construire une extraction φ de sorte que $(y_{\varphi(n)})_n$ soit à valeurs dans X.

- Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $y_{\varphi(k)} = x_{n_k}$. Notons $n_k = \psi(k)$.
- Alors on a $\forall k \in \mathbb{N}, y_{\varphi(k)} = x_{\psi(k)}$.
- - Si ψ est bornée, alors $(y_{\varphi(k)})_k$ prend un nombre fini de valeurs : elle admet donc une sous-suite convergente donc $(y_n)_n$ aussi.
  - Si ψ n'est pas bornée, alors il existe une extraction σ tel que $\psi \circ \sigma$ soit une extraction. On a alors

$$y_{\varphi(\sigma(k))} = x_{\psi(\sigma(k))} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

donc $(y_n)_n$ admet une sous-suite convergente.

Exercice 21. Soit E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application continue bijective. Montrer que si E est compact, alors $f^{-1} : F \to E$ est continue.

Corrigé :

On va montrer que $f^{-1} : F \to E$ est continue par caractérisation séquentielle. Soit donc $(y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergente dans F, disons vers ℓ. On veut montrer que

$$f^{-1}(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f^{-1}(\ell).$$

Par hypothèse, on sait alors que $F = f(E)$ est compact. On va donc montrer que $(f^{-1}(y_n))$ admet une unique valeur d'adhérence qui est $f^{-1}(\ell)$ ce qui conclut quant à la convergence vers cette unique valeur.

Soit φ une extraction telle que $(f^{-1}(y_{\varphi(n)}))_n$ converge, disons vers a. Alors par continuité de f, on a

$$\ell \underset{n\to+\infty}{\longleftarrow} y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$$

donc par unicité de la limite, $\ell = f(a)$ donc $a = f^{-1}(\ell)$.

Ainsi, $f^{-1}(\ell)$ est l'unique valeur d'adhérence ce qui conclut quant à la continuité de f^{-1}.

Exercice 22. Soit E, un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit F, un fermé non vide de E. Montrer que $d(x, F) := \inf_{y\in F} \|x - y\|$ est atteinte. Même question mais E est supposé de dimension infinie et F, un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Corrigé : on rappelle qu'un espace de dimension finie est fermé (rappelé en 17. Il faut savoir le démontrer !). Soit $a \in F, d = \|x - a\|$. Soit $K = F \cap B_f(x, d) = \{y \in F : \|x - y\| \leq d\}$. K est inclus dans un fermé, et K est fermé borné. Ainsi, K est compact (dans K) car F est de dimension finie . L'application $y \mapsto \|y-x\|$ est continue sur K donc atteint son minimum en $c \in K$ par le théorème des bornes atteintes. Ainsi, $\forall y \in K, \|x-y\| \leq \|x-c\|$ donc $\|x - c\| \leq d$. Par ailleurs, $\forall y \in F\backslash K, \|x - y\| > d \geq \|x - c\|$. Ainsi, $d(x, F) \geq \|x - c\|$ mais puisque $c \in F$, on a égalité.

Exercice 23 (Théorème de compacité de Riesz)**.** Soit E, un espace vectoriel normé. Montrer que sa sphère unité fermée est compacte si, et seulement si, E est de dimension finie. *Indication : On pourra utiliser l'exercice précédent et regarder un vecteur unitaire u vérifiant $d(u, F) = 1$ pour F, un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et construire une suite d'élément de $B_f(0, 1)$ sans valeur d'adhérence.*

Corrigé : Si E est de dimension finie, c'est clair. Si E est de dimension infinie, pour F de dimension finie de E, on sait par 22 qu'il existe $y \in F$, vérifiant $d(x, F) = \|x - y\|$ pour tout $x \in E\backslash F$. Posons donc $u = \dfrac{x - y}{\|x - y\|}$. Alors u est unitaire, donc $d(u, F) \leq \|u\| = 1$. Par ailleurs,

$$\forall z \in F, \|u - z\| = \frac{1}{\|x - y\|}\|x - (y + \|x - y\|z)\|.$$

De plus, $\|x-\underbrace{(y+\|x-y\|)z}_{\in F}\| \leq d(x,F) = \|x-y\|$. Donc $\|u-z\| \geq 1$, et ce, pour tout $z \in F$. Donc $d(u,F) = 1$ au final.

Considérons maintenant une suite u à valeurs dans $B_f(0,1)$ vérifiant $\forall n,p \in \mathbb{N}^2, n \neq p \Longrightarrow \|u_n - u_p\| \geq 1$. Cela signifie que u n'a pas de valeur d'adhérence, contredisant la compacité de la boule fermée de E.

On considère u_0, un élément unitaire quelconque. Supposons $u_0, \cdots, u_{n-1}$ construit. L'espace $\text{Vect}(u_0, \cdots, u_{n-1})$ étant de dimension finie, le début de la preuve assure un élément u_n vérifiant $d(u_n, F_n) = 1$. Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \|u_n - u_k\| \geq 1$. D'où la construction de u_n. On construit ainsi une suite u satisfaisante.

Les deux exercices qui suivent peuvent utiliser les exercices 20 et 21.

Exercice 24. Soit E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ injective. Montrer que f est continue si, et seulement si, l'image de tout compact de E par f est un compact de F.

Corrigé : Par le cours, si f est continue, alors l'image d'un compact de E par f est un compact de F.

Réciproquement, soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente dans E, disons vers ℓ. On veut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\ell).$$

Soit $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ qui est un compact de E par l'exercice 20. Alors $K' = f(K)$ est compact. Soit $g = f_{|K}$. g est alors bijective de K dans K' et on note alors $g^{-1} : K' \to K$.

K étant compact, g^{-1} est continue : en effet, soit A un fermé de K compact donc A est compact. Montrons que l'image réciproque de A par g^{-1} est fermé. Si c'est le cas, c'est vrai pour tout fermé donc g^{-1} est continue. Pour montrer ce fait, il suffit de remarquer que $(g^{-1})^{-1}(A) = g(A)$ qui est compact car $g(A) = f(A)$ qui est compact.

g^{-1} étant continue et K' étant compact, par l'exercice 21, $(g^{-1})^{-1}$ est continue donc g est continue. En particulier, $f(x_n) = g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(\ell) = f(\ell)$ donc

$$f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$$

donc f est continue.

L'injectivité est cruciale ! Si on prend $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}$, alors l'image de tout compact de F est soit $\{0\}, \{1\}$ ou $\{0,1\}$ qui est compact.

Exercice 25.

1. Soit E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ continue. On suppose que l'image réciproque de tout compact de F par f est un compact de E. Montrer que f est fermée *i.e.* l'image de tout fermé de E par f est un fermé de F.
2. Soit F_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$. Montrer que F_n est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé :

1. Soit A un fermé de E. Soit $(y_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $f(A)$, disons vers ℓ. Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = f(x_n)$. On veut montrer que $y \in f(A)$.

   $K := \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est un compact de F par l'exercice 20. Ainsi, par hypothèse, $f^{-1}(K)$ est compact donc puisque $(x_n)_n \in f^{-1}(K)$, par compacité, il existe une extraction φ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge, disons vers ξ. Alors de l'égalité

   $$\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \xi$$

   on tire par continuité de f

   $$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{f(x_{\varphi(n)})}_{=y_{\varphi(n)}} = f(\xi).$$

   Par unicité de la limite, $\ell = f(\xi)$ et $\xi \in A$ donc $\ell \in f(A)$.

2. Il s'agit de montrer que

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) & \mapsto & \prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k) \end{array}$$

est une application fermée car $F_n = f(\mathbb{R}^n)$. f est clairement continue car polynômiale. Ainsi, montrons que l'image réciproque de tout compact de $\mathbb{R}_n[X]$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Soit K un compact de $\mathbb{R}_n[X]$.

- $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie.
- Par continuité de f, $f^{-1}(K)$ est fermé.
- Comme K est compact, K est bornée pour la norme infinie (n'importe quelle norme puisqu'on est en dimension finie). Soit donc M une borne de sorte que $\forall P \in K, \|P\|_\infty \leq M$.

Soit $\lambda := (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in f^{-1}(K)$. Soit $P = f(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ que l'on note

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec $a_n = 1$ et $a_0, \cdots, a_{n-1}$ n réels. On va montrer que $\|\lambda\|_\infty \leq 1 + M$. Pour cela, soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- Soit $|\lambda_i| \leq 1$ et on ne fait rien.
- Soit $|\lambda_i| > 1$ et alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k + \lambda^n = 0$$

donc

$$|\lambda_i|^n = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k\right| \leq \|P\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda_i|^k.$$

Ainsi,

$$|\lambda_i| \leq \|P\|_\infty \frac{1 - \frac{1}{|\lambda_i|^n}}{|\lambda_i| - 1} \leq \|P\|_\infty.$$

On a bien $|\lambda_i| \leq 1 + \|P\|_\infty \leq 1 + M$ et ce pour tout i. Ainsi, $\|\lambda\|_\infty \leq 1 + M$.

Ainsi, $f^{-1}(K)$ est un fermé borné en dimension finie : c'est un compact.

Exercice 26. Soit F, un sous-espace vectoriel de E. On suppose que $\dim(E) = n \geq 2$ et $\dim(F) \leq n-2$. Montrer que $E\backslash F$ est connexe par arcs.

Corrigé : Soit $E = F \oplus G$. Soient π_F, π_G, projecteurs adaptés à cette décomposition. Remarquons que $x \in E\backslash F \iff \pi_G(x) \neq 0$. On sait que $\dim(G) \geq 2$. Alors $G\backslash\{0\}$ est connexe par arcs. *En effet, soit $x, y \in G\backslash\{0\}$. Soit $x = \|x\|u_x$ avec $\|u_x\| = 1$. Alors $\gamma : t \in t \in [1/\|x\|, 1] \mapsto tu_x \in G$ connecte x à la sphère unité. De même, pour y. Puisque la sphère unité est connexe par arcs, x et y sont continûment reliés. Donc $G\backslash\{0\}$ est connexe par arcs.* Soit $x, y \in (E\backslash F)^2$. Alors $\pi_G(x), \pi_G(y)$ sont tous deux non nuls. Soit γ, un chemin continu reliant $\pi_G(x)$ à $\pi_G(y)$ à valeurs dans $G\backslash\{0\}$ (possible car $G\backslash\{0\}$ est connexe par arcs). Posons alors $\psi(t) : t \in [0,1] \mapsto (1-t)\pi_F(x) + t\pi_F(y) + \gamma(t)$. Alors $\forall t \in [0,1], \pi_G(\psi(t)) = \gamma(t)$ donc ψ est à valeurs dans $E\backslash F$. ψ est continue, $\psi(0) = x, \psi(1) = y$. Donc $E\backslash F$ est connexe par arcs.

L'exercice suivant est culturel. On trouvera des similarités dans Mines MP 2015 Maths 2.

Exercice 27 (Borel-Lebesgue)**.** La notion de compacité présentée dans le cadre de CPGE est vu sous le prisme de Bolzano-Weierstraß, à savoir : toute suite de K admet une valeur d'adhérence. Il existe un autre point de vue, via le prisme de Borel-Lebesgue. De tout recouvrement d'ouverts, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Dans le cadre des espaces vectoriels normés, les deux notions sont équivalentes (mais aussi dans le cadre des espaces métriques).
Soit E, un espace vectoriel normé. Soit K, une partie de E. Montrer que les deux assertions sont

équivalentes.

1. Pour toute suite à valeurs dans K, il existe une sous-suite convergente.
2. Soit $(O_i)_{i\in I}$, une famille d'ouverts de E telle que

$$K \subset \bigcup_{i\in I} O_i.$$

(On dit que la famille $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de K). Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et, quitte à renuméroter, $O_1, \cdots O_n$ tels que recouvre K.

4.1 Topologie des espaces matriciels

Exercice 28.
Soit $n \in \mathbb{N}^*, r \in [\![0; n-1]\!]$. On considère $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \mathrm{rg}(M) \leq r\}$. Montrer que A est fermé. Que dire de $B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \mathrm{rg}(M) \leq r\}$?

Corrigé : Soit $(M_p)_p$, une suite de matrice de A. On suppose que cette suite converge, disons vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On va utiliser le fait qu'une matrice est de rang r si, et seulement si, r est la plus grande taille des sous-matrices carrées inversibles extraites de A. Par exemple, on aura le résultat en montrant que toute sous-matrice de taille $(r+1)\times(r+1)$ n'est pas inversible. Soit donc $(r+1)\times(r+1)$ indices de $[\![1,n]\!]^2$. On note $\tilde{A_p}$, l'extraite selon ces indices de A_p pour $p \in \mathbb{N}$. On fait de même pour $\tilde{A}$ et A. Puisque $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$, et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, on a la convergence coefficient par coefficient. De fait, $\tilde{A_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{A}$. Par ailleurs, $\det(\tilde{A_p}) = 0$ puisque A_p est de rang r et ce, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par continuité du déterminant, $\det(\tilde{A}) = 0$. Donc A n'admet pas de sous-matrice de taille $(r+1)\times(r+1)$ inversible. Son rang est donc au plus r. Pour B, cela ne tient pas. Considérons l'exemple simple $A_p = \begin{pmatrix} 1/p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les $(A_p)_p$ sont tous de rang 1. A_p tend vers 0 quand $p \to +\infty$ qui est de rang $0 \neq 1$.

Exercice 29.
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Corrigé : Soit M, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Considérons l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \det(M + tI_n)$. Alors cette application a au plus n zéros. Il existe donc un entier p_0 pour lequel $\forall p \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, \det(M + 1/pI_n) \neq 0$. De fait, $(M + 1/pI_n)_{p\geq p_0}$ est une suite de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tendant bien vers M.

Exercice 30.
Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$ est une application continue. (à faire quand la notion sera vue : est-ce le cas pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mu_A \in \mathbb{K}_n[X]$, avec μ_A, polynôme minimal de A).

Corrigé : L'application $A \mapsto \det(XI_n - A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (XI_n - A)_{i,\sigma(i)}$ est polynômiale en les coefficient de A donc continue. Ce n'est pas le cas de $A \mapsto \mu_A$. En effet, on considère la matrice ayant un $1/p$ en position $(1,1)$ et 0 ailleurs (dans une matrice $n \times n$). Alors son polynôme minimal est $X(X - 1/p)$ qui tend vers X^2. Pourtant, le polynôme minimal de la limite de cette matrice est le polynôme minimal de 0 qui est X. $X^2 \neq X$ donc $A \mapsto \mu_A$ n'est pas continue.

Exercice 31.
Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Corrigé : Il suffit d'utiliser le lemme suivant :

$$\forall (a_1, \cdots, a_k) \in \mathbb{C}^k, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall i \neq j, a_i + \frac{i}{n} \neq a_j + \frac{j}{n}.$$

Démonstration. Considérons a_i, a_j quelconque, $i \neq j$. Si $a_i = a_j$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_i + \frac{i}{n} \neq a_j + \frac{j}{n}$. Si $a_i \neq a_j$, puisque $\mathbb{R}$ est séparé, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a_i, \varepsilon) \cap B(a_j, \varepsilon) = \emptyset$. Puisqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geq n_0, i/n \leq \varepsilon \wedge j/n \leq \varepsilon$, alors $\forall n \geq n_0 + 1, a_i + \frac{i}{n} \neq a_j + \frac{j}{n}$. Le n_0 dépend de i, j. Puisqu'il y a un nombre fini de i, j, il y a un nombre fini de n_0 candidats : on prend le plus grand. □

Maintenant, considérons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A = PTP^{-1}$ avec T, une matrice triangulaire supérieure de la diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}_{p \geq n_0}$, on note $T_p = T + \mathrm{diag}(1/p, 2/p, \cdots, n/p)$. Alors T_p est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples par le lemme. Donc $A_p = PT_pP^{-1}$ est diagonalisable, et ce, pour tout $p \geq n_0$. Puisque $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue et que $T_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} T$, on en déduit que $A_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} A$. Donc A est bien limite de matrices diagonalisables.

Exercice 32.
Montrer que l'intérieur des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes. (*Indication : on montrera que, pour $(A_p)_p$ une suite tendant vers A et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $d(\lambda, \mathrm{Sp}(A_p)) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tendant vers A. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Par continuité du déterminant (en fait du polynôme caractéristique, c.f. l'exercice 7.3), $\chi_{A_p}(\lambda) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \chi_A(\lambda) = 0$. Soit maintenant $p \in \mathbb{N}$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, valeurs propres complexes de A. Alors

$$|\chi_{A_p}(\lambda)| = \left| \prod_{k=1}^{n} \lambda - \lambda_k \right| = \prod_{k=1}^{n} |\lambda - \lambda_k| \geq (d(\lambda, \mathrm{Sp}(A))^n.$$

L'inégalité passe à la limite quand $p \to +\infty$ et on a montré l'indication.

On raisonne par double inclusion. Considérons maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possédant n valeurs propres distinctes. Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$, une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tendant vers A. On veut donc montrer que pour p assez grand, A_p est diagonalisable. Puisque les λ_i sont deux à deux distincts, par séparabilité de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall i \neq j, B(\lambda_i, \varepsilon) \cap B(\lambda_j, \varepsilon) = \emptyset.$$

Par l'indication, $d(\lambda_k, \mathrm{Sp}(A_p)) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc il existe un rang $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_k, B(\lambda_k, \varepsilon) \cap \mathrm{Sp}(A_p) \neq \emptyset$.

Posons $P = \max(p_k)$. Soit $r \geq P$. Il existe alors une valeur propre de A_r dans chaque boule. Les boules étant deux à deux disjointes, c'est aussi le cas pour les valeurs propres donc A_r est diagonalisable.

Pour l'inclusion réciproque, considérons donc une matrice A diagonalisable. On suppose que ses valeurs propres ne sont pas deux à deux disjointes. De fait, on va montrer que $A \notin \mathrm{Int}(A)$. A étant diagonalisable, il existe $\lambda, \lambda_3, \lambda_4, \cdots, \lambda_n$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P \underbrace{\mathrm{diag}(\lambda, \lambda_3, \lambda_4, \cdots, \lambda_n)}_{=:D} P^{-1}$. Posons alors $D_p = D + 1/pE_{12}$ et $A_p = PD_pP^{-1}$. D_p n'est pas diagonalisable. En effet, l'induit de D_p par (e_1, e_2) n'est pas diagonalisable donc D_p ne l'est pas. Donc A_p n'est pas diagonalisable, et ce, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc A est limite de suite non diagonalisable : $A \notin \mathrm{Int}(A)$.

Exercice 33.
Montrer que l'adhérence des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Indication : on rappelle le résultat d'un exercice très classique : deux matrices réelles semblables dans* $\mathbb{C}$ *sont semblables dans* $\mathbb{R}$.

Corrigé : on procède par double inclusion. On note D, l'ensemble des matrices diagonalisables, T pour trigonalisable. On veut montrer que $\overline{D} = T$. Pour l'inclusion $\overline{D} \subset T$, il suffit de montrer que T est fermé, puisqu'il contient D. Faisons-le par caractérisation séquentielle. Soit $(A_p)_p$, une suite d'éléments de T convergente, disons vers A. Pour cela, on plonge les matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on trigonalise. Il suffit de montrer que les valeurs propres complexes de A sont en fait réelle. A sera ensuite trigonalisable. Comme dans l'exercice précédent, $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \chi_{A_p}(\lambda) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_A(\lambda) = 0$. Encore une fois, on peut donc écrire, en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A_p (qui sont réelles),

$$\forall p \in \mathbb{N}, |\chi_{A_p}(\lambda)| = \prod_{i=1}^{n} |\lambda - \lambda_i| = \prod_{i=1}^{n} |\Re(\lambda) - \lambda_i + i\Im(\lambda)| \geq \prod_{i=1}^{n} \Im(\lambda) = \Im(\lambda)^n.$$

L'inégalité passe à la limite quand $p \to +\infty$ et $\Im(\lambda) = 0$. D'où le résultat.

Maintenant, on souhaite montrer que $T \subset \overline{D}$. On fait comme dans 31. Soit $A \in T$. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = PTP^{-1}$ avec T, une matrice triangulaire supérieure de la diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}_{p\geq n_0}$, on note $T_p = T + \mathrm{diag}(1/p, 2/p, \cdots, n/p)$. Alors T_p est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples par le lemme. Donc $A_p = PT_pP^{-1}$ est diagonalisable, et ce, pour tout $p \geq n_0$. Puisque $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue et que $T_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} T$, on en déduit que $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$. Donc A est bien limite de matrices diagonalisables.

Chapitre 5

Polynômes

Exercice 34. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ munie de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}, u(X^k) = \dfrac{1}{k+1}X^k$. Montrer que u est continue, inversible, mais d'inverse non continue.

Corrigé : soit P, un polynôme, disons de degré n. Alors P s'écrit $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Ainsi, $u(P) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{k+1}X^k$. Ainsi,

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \left|\frac{a_k}{k+1}\right| \leq \frac{|a_k|}{k+1} \leq |a_k| \leq \|P\|_\infty.$$

D'où $\|u(P)\| \leq \|P\|$. u est donc continue car 1-lipschitzienne.

Par ailleurs, u envoie une base de $\mathbb{K}[X]$ sur une famille échelonnée en degré, qui contient tous les degrés : c'est donc une base donc u est bijective. Maintenant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{-1}(X^k) = (k+1)X^k$ donc $\|u^{-1}(X^k)\|/\|X^k\|$ n'est pas bornée. u^{-1} n'est pas continue.

Exercice 35. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P \geq 0 \iff \exists A, B \in \mathbb{R}[X], P = A^2 + B^2$.

Corrigé : l'implication réciproque est immédiate. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$, des réels $x_1, \cdots, x_r$, $b_1, \cdots, b_s, c_1, \cdots, c_s$ et des entiers $\lambda_1, \cdots, \lambda_r, \mu_1, \cdots, \mu_s$ tel que

$$P(X) = C\prod_{i=1}^{r}(X - x_i)^{\lambda_i}\prod_{j=1}^{s}(X^2 + b_jX + c_j)^{\mu_j},$$

avec $X^2 + b_jX + c_j$ irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ pour $j \in [\![1, s]\!]$.
P étant de signe constant, $X^2 + b_jX + c_j$ étant strictement positif par hypothèse, nécessairement, $\prod(X - x_i)^{\lambda_i}$ est de signe constant. On a envie de dire que tous les λ_i sont pairs. Supposons que l'un est impair, disons λ_k. Alors au voisinage de x_k, P va changer de signe. En contraposant, on a bien que tous les λ_i sont pairs.
Enfin, $P \geq 0$, donc nécessairement $C \geq 0$. Ainsi,

$$P(X) = \sqrt{C}^2\left(\prod_{i=1}^{r}(X - x_i)^{\lambda_i/2}\right)^2 \underbrace{\prod_{j=1}^{s}(X^2 + b_jX + c_j)^{\mu_j}}_{\star}.$$

Il suffit donc de montrer que $\star$ est la somme de deux carrés pour conclure. Soit z_j, une racine complexe de $X^2 + b_jX + c_j$. Alors

$$\prod_{j=1}^{s}(X^2+b_jX+c_j)^{\mu_j} = \prod_{j=1}^{s}(X-z_j)(X-\overline{z_j}) = \prod_{j=1}^{s}(X-z_j)\overline{(X-z_j)} = \prod_{j=1}^{s}(X-z_j)\prod_{j=1}^{s}\overline{(X-z_j)} = \underbrace{\prod_{j=1}^{s}(X-z_j)}_{=:K}\overline{\prod_{j=1}^{s}(X-z_j)}$$

Donc

$$\prod_{j=1}^{s}(X^2+b_jX+c_j)^{\mu_j}=K\overline{K}=\Re(K)^2+\Im(K)^2.$$

Il est clair que la partie réelle d'un polynôme complexe est dans $\mathbb{R}[X]$, donc pour

$$A=\sqrt{C}\prod_{i=1}^{r}(X-x_i)^{\lambda_i/2}\Re(K)\ ,\ B=\sqrt{C}\prod_{i=1}^{r}(X-x_i)^{\lambda_i/2}\Im(K),$$

on a le résultat voulu.

Exercice 36. A un polynôme A, on note $R(A)$, l'ensemble de ses racines. Soit P,Q, deux polynômes complexes non constants tel que $R(P)=R(Q)$ et $R(P-1)=R(Q-1)$. Montrer que $P=Q$.

Corrigé : Avant toute chose, comme tout polynôme de $\mathcal{C}[X]$ est scindé (théorème de d'Alembert-Gauss). Ainsi, $\deg(P)\geq \mathrm{Card}(R(P))$. Notons p,q, les degrés de P et Q respectivement. Par hypothèse, ces degrés ne sont pas nuls. Par symétrie, on peut supposer que $p\geq q$. Notons $D=P-Q$. Le degré de D est alors majoré par p.

Puisque $R(P)=R(Q)$, D s'annule sur les racines de $R(P)$. De même, D s'annule sur $R(P-1)$. Comme on ne peut être racine de P et de $P-1$, ces ensembles sont disjoints. Ainsi, $R(D)$ contient plus que $\mathrm{Card}(R(P))+\mathrm{Card}(P-1)$ racines.

On utilise la formule suivante

$$\mathrm{Card}(R(P))=\deg(P)-\deg(P\wedge P')$$

qui est vrai dès que P est scindé (ce qui est le cas puisque $P\in\mathcal{C}[X],\deg(P)\geq 1$).

Ainsi,

$$\mathrm{Card}(R(P-1))=\deg(P-1)-\deg((P-1)\wedge(P-1)')=\deg(P)-\deg((P-1)\wedge P').$$

Enfin, puisque $P\wedge P-1=1$, $(P\wedge P')\wedge[(P-1)\wedge P']=1$ donc $(P\wedge P')$ et $(P-1)\wedge P'$ sont deux facteurs premiers entre eux divisant P' : Ainsi, $(P\wedge P')\times[(P-1)\wedge P']\mid P'$ par le lemme d'Euclide et en prenant les degrés,

$$\deg((P-1)\wedge P')+\deg(P\wedge P')\leq p-1.$$

Ainsi, $\deg(D)\geq\mathrm{Card}(R(D))\geq\mathrm{Card}(R(P))+\mathrm{Card}(R(P-1))=2\deg(P)-\deg((P-1)\wedge P')+\deg(P\wedge P')=2p-p+1=p+1>p$. Cela contredit $\deg(D)\leq p$.

Exercice 37. Déterminer l'ensemble des polynômes P tel que P stabilise $\mathbb{Q}$. Déterminer l'ensemble des polynômes qui cette fois-ci vérifient $P(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ (plus difficile : on fera un peu d'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{K}[X]$).

Corrigé : clairement, on a envie de dire que c'est équivalent à $P\in\mathbb{Q}[X]$. La réciproque est immédiate. Concernant l'implication, soit P tel que $P(\mathbb{Q})\subset\mathbb{Q}$. Je note n, son degré. Soit $a_0,\cdots,a_n$ n rationnels, et $b_0,\cdots,b_n$ tel que $\forall i,P(a_i)=b_i$. Alors $b_i\in\mathbb{Q}$.
J'interpole via Lagrange. J'ai donc :

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}b_k\prod_{j=1,j\neq k}^{n}\underbrace{\frac{X-a_j}{a_k-a_j}}_{\in\mathbb{Q}[X]}.$$

$\mathbb{Q}[X]$ étant un anneau, il est stable par somme et multiplication interne : j'ai $P\in\mathbb{Q}[X]$.

Pour le deuxième point, il est clair que les polynômes de degré 1 conviennent. Prenons un polynôme P de degré $n \geq 2$ et montrons qu'ils ne conviennent pas (les polynômes constants ne conviennent clairement pas). Quitte à multiplier par un entier non nul, on peut supposer que $P \in \mathbb{Z}[X]$. Soit donc

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

avec $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Soit $p/q \in \mathbb{Q}$ fraction irréductible. Alors

$$q^n P(p/q) = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i q^{n-i} \in \mathbb{Z}.$$

Soit $m \in \mathcal{P}$. Si $P(p/q) = 1/m$, alors m divise q^n donc divise q par le lemme d'Euclide. Ainsi, $m^n | q^n$ mais $n \geq 2$. Donc $m | q^n/m$ et m divise tous les termes de la somme sauf le cas $i = n$ donnant $a_n p^n$. p et q étant premier entre eux, m étant premier, m ne peut diviser p^n. Par le lemme de Gauss, m divise a_n. Il suffit maintenant de choisir m comme étant un nombre premier ne divisant pas a_n. Cela est possible car il existe un nombre premier supérieur à a_n en valeur absolue. En le notant m_0, $1/m_0$ n'a pas d'antécédent par P. Donc $P(\mathbb{Q}) \neq \mathbb{Q}$.

Bilan : seuls les polynômes de degré 1 conviennent.

Chapitre 6

Algèbre linéaire

Exercice 38. Soit E, un espace vectoriel et F, G, deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si F et G admettent un supplémentaire commun dans E, alors il existe un isomorphisme entre F et G. Réciproque ?

Corrigé : Soit H tel que $F \oplus H = E$ et $G \oplus H = E$. Soit p, un projecteur sur G parallèlement à H. Je note $\varphi = p_G$ l'induit de p sur G. Alors φ est un isomorphisme de F vers G.
Soit $x \in F$. Alors $\varphi(x) \in G$. De plus, φ est clairement linéaire car c'est un induit. Donc $\varphi \in \mathcal{L}(F, G)$.
Reste à montrer le côté bijection. Soit $x \in F$ tel que $\varphi(x) = 0$. J'écris $x = g + h$ avec $g \in G, h \in H$. Alors $\varphi(x) = p(x) = p(g+h) = p(g) + p(h) = g + 0 = g$. Donc $g = 0$ et $x = h$ donc $x \in H$ et donc $x \in F \cap H = \{0\}$. Donc $x = 0$.
Ensuite, soit $y \in G$. Alors il existe $(a, b) \in F \times H$ tel que $y = a+b$. Donc $\varphi(a) = p(a) = p(a)+p(b) = p(a+b) = p(y) = y$.
Ainsi, φ est bijective.
La réciproque est vraie en dimension finie. En dimension infinie, soit $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto XP(X) \in X\mathbb{R}[X]$. Alors φ est clairement bijective et linéaire. Pour autant, le seul supplémentaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ est $\{0\}$, qui n'est pas supplémentaire de $X\mathbb{R}[X]$. En dimension finie, on procède par récurrence sur p.
Initialisation : pour $p = n - 1$, puisque $F \cup G \neq E$ (on utilise le fait qu'une union est un ev. lorsque l'un est inclus dans l'autre). Il existe alors $a \in E$ tel que $a \notin F, a \notin G$. Alors $\mathrm{Vect}(a)$ est un supplémentaire commun par Grassmann. (le caractère direct est clair).
Supposons acquis le résultat au rang $p + 1$. Je prends un a comme précédemment. Soit $F_1 = F \oplus \mathrm{Vect}(a)$ et $G_1 = G \oplus \mathrm{Vect}(a)$. Alors par hypothèse de récurrence, il existe H tel que $F_1 \oplus H = E, G_1 \oplus H = E$. Ainsi, F et $\mathrm{Vect}(a) \oplus H$ sont en somme directe (c'est facile à montrer), et de même avec G. D'où l'hérédité, et donc la récurrence.

Exercice 39. Soit E, $\dim(E) = n$ et $F_1, \cdots, F_k$, des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $\sum_{i=1}^{k} \dim(F_i) > n(k-1)$, alors $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \{0\}$.

Corrigé : soit f l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} f : & F_1 \times \cdots \times F_k & \to & E^{k-1} \\ & (x_1, \cdots, x_k) & \mapsto & (x_2 - x_1, \cdots, x_k - x_1). \end{array}$$

Alors $f(x_1, \cdots, x_k) = 0$ si, et seulement si $(x_1, \cdots, x_k) = (x, \cdots, x)$ pour $x \in \bigcap_{i=1}^{k} F_i$. Le théorème du rang nous donne donc

$$\dim(F_1 \times \cdots \times F_k) = \sum \dim(F_i) = \mathrm{rg}(f) + \dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i\right).$$

Puisque $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E^{k-1}) = n(k-1)$, on a bien $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i\right) > 0$.

Exercice 40. Soit E, F de dimension strictement positive, $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $\mathrm{rg}(g) \leq \mathrm{rg}(f) \iff \exists h \in \mathrm{GL}(F), k \in \mathcal{L}(E), h \circ g = f \circ k$.

Corrigé : l'implication réciproque est facile. Soit $h \in \mathrm{GL}(F)$ et $k \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h \circ g = f \circ k$. Alors $g = h^{-1}fk$ donc $\mathrm{Im}(g) \subset h^{-1}(\mathrm{Im}(f))$. h étant inversible, $\mathrm{rg}(g) \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$. D'où le résultat.
Maintenant, regardons le sens direct. Soit $p = \mathrm{rg}(f), q = \mathrm{rg}(g)$. On suppose $q \leq p$. Soit $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$, une base de $\ker(f)$. Je la complète en une base de E, $(e_1, \cdots, e_n)$. Soit $(\varepsilon_{q+1}, \cdots, \varepsilon_n)$, une base de $\ker(g)$. Je la complète en une base de E, $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$. La famille $(g(\varepsilon_1), \cdots, g(\varepsilon_q))$ est une base de $\mathrm{Im}(g)$, que je complète en une base de F via $g_{q+1}, \cdots, g_m$. Pareillement, je construis une base de F $(f(e_1), \cdots, f_(e_p), f_{p+1}, \cdots, f_m)$.
Soit k définie par $k(\varepsilon_1) = e_1, \cdots, k(\varepsilon_q) = e_q, k(\varepsilon_{q+1} = \cdots = k(\varepsilon_n) = 0$.
Soit h, l'automorphisme qui transforme la base des g en la base des f.
Le résultat en découle.

Chapitre 7

Réduction des endomorphismes

Exercice 41.
Soit A, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{tr}(A^n) = 0$. (On pourra redémontrer pourquoi une matrice A est semblable à une matrice triangulaire stricte).

Corrigé : Il existe plusieurs preuves qui montrent qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire stricte. Par exemple, notons χ_A le polynôme caractéristique de A. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\chi_A(\lambda) = 0$. Alors λ est valeur propre donc en notant k l'indice de nilpotence de A, on a $0 = A^k X = \lambda^k X$ où $X \in \mathcal{E}_\lambda(A)$ donc $\lambda = 0$ et $\chi_A = X^n$. A est donc trigonalisable et sa diagonale n'est composé que de 0 donc elle est semblable à une matrice triangulaire stricte.

Ainsi, les traces tombent d'elles-même.

Réciproquement, soit A une matrice triangulaire telles que $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathrm{tr}(A^k) = 0$. A est trigonalisable par d'Alembert-Gauss : soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r$. A est alors semblable à une matrice triangulaire de diagonale $(0, \cdots, 0, \lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_r, \cdots, \lambda_r)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ – a priori, il se peut qu'il n'y ait pas de 0 –. Alors A^k est semblable à une matrice triangulaire de diagonale $(0, \cdots, 0, \lambda_1^k, \cdots, \lambda_1^k, \cdots, \lambda_r^k, \cdots, \lambda_r^k)$. Par hypothèse, on a donc

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i = 0 \ ; \ \cdots \ ; \ \mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k \ ; \ \cdots .$$

Cela se traduit en le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 m_1 & + & \lambda_2 m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r m_r & = & 0 \\ \lambda_1^2 m_1 & + & \lambda_2^2 m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r^2 m_r & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & & + & \vdots & = & \vdots \\ \lambda_1^r m_1 & + & \lambda_2^r m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r^r m_r & = & 0 \end{cases}$$

et matriciellement en

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0$$

Tous les $\lambda_i, 1 \leq i \leq r$ sont non nuls donc

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} = V(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \prod_{i=1}^{r} \lambda_i = \prod_{1 \leq p < q \leq r} (\lambda_q - \lambda_p) \prod_{i=1}^{r} \lambda_i \neq 0.$$

Ainsi, on a $(m_1, \cdots, m_r) = 0$ ce qui n'est pas. Ainsi, si ce n'est 0, A n'a pas de valeur propre. Donc A est semblable à une matrice triangulaire stricte : A est nilpotente.

Exercice 42.
Résoudre l'équation matricielle $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé : On note A, le second membre. Si X est solution, X et A commutent. Donc X va laisser stable les sous-espaces propres de A. Etudions la diagonalisibilité de A. Plus généralement, je vais montrer que la matrice de $n \times n$ avec que des 1 est diagonalisables. En effet, c'est une matrice de rang 1 donc son noyau est de dimension $n-1$. Le noyau est le sous-espace propre associée à la valeur propre 0. Ici, 0 est donc de multiplicité $n-1$. Par ailleurs, cette matrice est stochastique en ligne (et en colonne). De fait, la somme des valeurs sur une ligne constitue une valeur propre associée au vecteur propre composée que de 1. Ainsi, cette matrice a n et 0 comme valeurs propres de multiplicités respectives au moins 1 et exactement $n-1$: elle est donc diagonalisable.

Bref, A est diagonalisable. On a $\mathcal{E}_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathcal{E}_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la remarque du début, si X est solution, $P^{-1}XP$ est diagonale, disons de coefficient α et β. On a donc

$$P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} P + P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P = P^{-1}AP$$

ce qui est donc équivalent à demander

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On doit donc résoudre $\alpha^2 + \alpha = 0, \beta^2 + \beta = 2$. Les solutions sont les matrices $P\text{diag}(\alpha, \beta)P^{-1}$ donc j'en ai 4 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 43.
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. On pourra commencer par A inversible, puis A de rang $r < n$.

Corrigé :

1. On écrit

$$\chi_{AB} = \det(XI_n - AB) = \det(A(XA^{-1} - B)) = \det(A)\det(XA^{-1} - B) = \det(XA^{-1} - B)\det(A) = \det(XI_n - BA)$$

2. Si A est de rang r, A est équivalente à J_r. Etudions donc le cas $A = J_r$. Si $A = J_r$, alors en décomposant par blocs $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, on a

$$AB = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}, \; BA = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

donc $\chi_{AB} = \chi_{B_1}\chi_{0_{n-r}} = \chi_{BA}$.

3. Maintenant, écrivons $A = PJ_rQ$ avec P, Q inversible.

$$\chi_{AB} = \chi_{PJ_rQB} \underset{1}{=} \chi_{J_rQBP} \underset{2}{=} \chi_{QBPJ_r} \underset{1}{=} \chi_{BPJ_rQ} = \chi_{BA}.$$

Exercice 44 (Lemme d'Hadamard, théorème de Gerschgorin)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle i-ème disque de Gerschgorin de A l'ensemble $D_i = D(a_{ii}, R_i)$ avec $R_i = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$. Montrer le théorème de Gerschgorin : toute valeur propre est dans un disque de Gerschgorin.
En déduire le lemme d'Hadamard :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{ij}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \Longrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

(on dit que A est à diagonale strictement dominante).

Corrigé : Soit λ, une valeur propre de A. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$, vecteur propre associée. Alors $AX - \lambda X = 0$. Considérons i, l'indice de $[\![1, n]\!]$ pour que $|x_i|$ soit maximal. Alors

$$(AX - \lambda X)_i = 0.$$

De fait,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - \lambda x_k = 0.$$

De fait,

$$(a_{ii} - \lambda) x_i = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} a_{ik} x_k.$$

Ainsi,

$$|a_{ii} - \lambda| = \left| \sum_{k=1, k \neq i}^{n} a_{ik} \frac{x_k}{|x_i|} \right| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \underbrace{\frac{|x_k|}{|x_i|}}_{\leq 1} \leq R_i.$$

Donc $\lambda \in D(a_{ii}, R_i)$. On souhaite montrer le lemme d'Hadamard. Raisonnons par contraposée. Supposons que A ne soit pas inversible. Alors 0 est valeur propre de A. De fait, par le théorème de Gerschgorin, il existe un indice $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Ainsi, A n'est pas à diagonale dominante.

Exercice 45.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie et $\mathrm{rg}(u) = 1$. CNS pour que u soit diagonalisable.

Corrigé : Supposons que f soit diagonalisable. Puisque $\dim \ker(f) = n - 1$, dans une base $\mathcal{B}$ de diagonalisation,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0_{n-1,1} \; 0_{1,n-1} & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = 0$, alors $f = 0$. Absurde car $\mathrm{rg}(f) = 1$. Donc $\lambda \neq 0$ et donc $\mathrm{tr}(f) \neq 0$. On va montrer que cette condition nécessaire est en fait suffisante.

Supposons maintenant que $\mathrm{tr}(f) \neq 0$. Puisque $\dim \ker(f) = n - 1$, on a $X^{n-1} | \chi_f$ de degré n. Il existe donc α tel que $\chi_f = X^{n-1}(X - \alpha)$. Or, la trace est la somme des valeurs propres donc $\alpha = \mathrm{tr}(f) \neq 0$. Ainsi, α est valeur propre de multiplicité 1, 0 l'est de multiplicité $n - 1$: f est diagonalisable.

Exercice 46.
Soit $F = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\Phi : P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto FP\%(X^n - 1) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Ecrire la matrice de Φ dans la base canonique. Calculer ses vecteurs propres et valeurs propres. Est-elle diagonalisable ?

Corrigé : Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, P, Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Soit $(Q_P, R_P), (Q_Q, R_Q)$ couple de la division euclidienne tels que

$$PF = Q_P(X^n - 1) + R_P \ , \ QF = Q_Q(X^n - 1) + R_Q.$$

Alors

$$(\lambda P + \mu Q)F = (\lambda Q_P + \mu Q_Q)(X^n - 1) + \lambda R_p + \mu R_Q$$

ce qui signifie que $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$ car $\deg(\lambda R_P + \mu R_Q) < n$ puis par unicité de la division euclidienne. ϕ est bien linéaire.

Maintenant, soit $\ell \in [\![0, n-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned} FX^\ell &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{k+\ell} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-\ell-1} a_k X^{k+\ell}}_{\text{de degré } \geq n-1<n} + \sum_{k=n-\ell}^{n-1} a_k X^{k+\ell}. \end{aligned}$$

Pour $k \geq n-\ell, X^{k+\ell} = X^n X^{n-k-\ell}$. Ainsi, $X^{k+\ell} = (X^n-1)X^{k+\ell-n} + X^{k+\ell-n}$ et $k+\ell-n \in [\![0, n]\!]$ ($n \leq k+\ell \leq 2n$). D'où

$$\left(\sum_{k=n-\ell}^{n} a_k X^{k+\ell}\right) \%(X^n - 1) = \sum_{k=n-\ell}^{n-1} a_k X^{k+\ell-n}.$$

Ainsi,

$$\phi(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n-\ell-1} a_k X^{k+\ell} + \sum_{k=n-\ell}^{n-1} a_k X^{k+\ell-n} = \sum_{k=\ell}^{n-1} a_{k-\ell} X^k + \sum_{k=0}^{\ell-1} a_{n+k-\ell} X^k.$$

D'où

$$\phi(X^0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \ , \ \phi(X^1) = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_0 \\ \vdots \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \ , \ \cdots$$

ce qui donne

$$\mathrm{Mat}_{1,X,\cdots,X^{n-1}}(\phi) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice circulante. On veut ses valeurs propres. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\phi)$. Soit P tel que $\phi(P) = \lambda P$. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $FP = (X^n-1)Q + \phi(P)$. Alors $(F-\lambda)P = (X^n-1)Q$. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. Alors $(F(\omega)-\lambda)P(\omega) = 0$. Si $F(\omega) \neq \lambda$ pour tout ω dans $\mathbb{U}_n$, alors $P = 0$ (par degré, P est de degré $n-1 < n = \mathrm{Card}(\mathbb{U}_n)$).

Ainsi, $\mathrm{Sp}(\phi) \subset \{F(\omega) : \omega \in \mathbb{U}_n\}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. Alors $X - \omega$ divise $F(X) - F(\omega)$ et $X^n - 1$. Soit donc $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X], R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$F(X) - F(\omega) = Q(X)(X - \omega) \ , \ X^n - 1 = R(X)(X - \omega).$$

Alors

$$(F(X) - F(\omega))R(X) = (X^n - 1)Q(X)$$

donc

$$F(X)R(X) = (X^n - 1)Q(X) + F(\omega)R(X).$$

Puisque $\deg(R) = n - 1 < n$, par unicité de la division euclidienne, $\Phi(R) = F(\omega)(R)$ donc $F(\omega) \in \mathrm{Sp}(\phi)$.

Ainsi, $\mathrm{Sp}(\Phi) = \{F(\omega) : \omega \in \mathbb{U}_n\}$ et R est un vecteur propre pour les $F(\omega)$ de ϕ. Notons $\omega_1, \cdots, \omega_n$, les racines n-ème de l'unité et $R_1, \cdots, R_n$, vecteurs propres respectifs. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i R_i = 0.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i R_i(\omega_j) = \lambda_j R_j(\omega_j) = 0$$

pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On rappelle que $R_j = \dfrac{X^n - 1}{X - \omega_j}$ ce qui donne $\lambda_j = 0$. Ainsi, les $(R_i)_i$ sont libres donc forment une base par cardinalité : ϕ est diagonalisable car possède une base de vecteurs propres.

Exercice 47. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit semi-simple lorsque pour tout F sous-espace vectoriel de E stable par u, il existe un supplémentaire de F dans E stable par u. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que u est semi-simple si, et seulement si, u est diagonalisable.

Corrigé : Soit u diagonalisable. Soit B une base de vecteur propre de E pour u. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Notons $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de F. On complète cette base en une base de E avec les éléments de B. Soit $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ les vecteurs ajoutés. Alors $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ vérifie $E = F \oplus G$ et G est stable par u en tant que somme d'espaces stables par u.

Réciproquement, soit u semi-simple. Raisonnons par récurrence sur la dimension de E. Si E est de dimension 1, le résultat est clair. Supposons le résultat acquis au rang $n-1$. Soit E de dimension n. Soit λ une valeur propre de u (possible car χ_u est scindé vu qu'on est dans $\mathbb{C}$) et x un vecteur propre associé. Soit $F = \mathbb{C}x$ et G un supplémentaire de F (est de dimension $n-1$) stable par u (possible car u est semi-simple et F est stable par u). u_G l'induit de u sur G est alors bien défini et est semi-simple : en effet, soit A un sous-espace vectoriel de G stable par u. A est stable par u donc par semi-simplicité de u, il existe B supplémentaire de A dans E et stable par u. Considérons alors $H = B \cap G$. Alors H est supplémentaire de A dans G et est stable par u_G : u_G est semi-simple.

Finalement, u_G est semi-simple donc par hypothèse de récurrence, u_G est diagonalisable : il existe une base de G constituée de vecteurs propres pour u. Alors cette base concaténée avec $\{x\}$ est alors une base de E constituée de vecteurs propres pour u : u est diagonalisable.

Exercice 48.
On souhaite démontrer le théorème suivant.

Théorème 1 (Décomposition de Dunford (ou Jordan-Dunford))**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que χ_f est scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ vérifiant :*

1. *d est diagonalisable.*
2. *n est nilpotent.*
3. *$f = d + n$.*
4. *$dn = nd$.*

De plus, n et d sont des polynômes en f.

1. Décomposer E en sous-espaces caractéristiques. On les note $(N_i)_{1 \leq i \leq d}$ pour les valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$.
2. On note p_i, projecteur sur N_i parallèlement à la somme directe des autres. Montrer que

$$p_i \in \mathbb{K}[f], \sum_{i=1}^{d} p_i = \text{Id}, \forall i \neq j, p_i \circ p_j = 0.$$

   Indication : on pourra trouver un candidat pour l'expression de p_i dans un premier temps.
3. Conclure.

1. Le lemme des noyaux nous donne $E = \bigoplus_{i=1}^{d} N_i$ où $N_i = \ker(f - \lambda_i \text{Id})^{m_i}$, et m_i, multiplicité de λ_i dans

χ_f.

2. Fixons $i \in [\![1, d]\!]$. Soit $M_i = X - \lambda_i$. Alors $M_i^{m_i}$ divise χ_f, et on note Q_i, le quotient. Les Q_i sont premiers entre eux dans leur ensemble donc par Bézout, il existe des polynômes U_i tel que

$$\sum_{i=1}^{r} U_i Q_i = 1.$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{r} U_i(f) \circ Q_i(f) = \mathrm{Id}. \tag{7.1}$$

Posons alors $p_i = U_i(f) \circ Q_i(f)$ pour $1 \leq i \leq r$. Montrons que

a) $\sum_{i=1}^{r} p_i = \mathrm{Id}$ b) $\forall 1 \leq i \leq r, p_i \in \mathbb{K}[f]$ c) $\forall i \neq j, p_i p_j = 0$

d) $\forall 1 \leq i \leq r, p_i^2 = p_i$. e) $\forall 1 \leq i \leq r, \mathrm{Im}(p_i) = N_i$. f) $\forall 1 \leq i \leq r, \ker(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$.

a) C'est en fait l'égalité 12.2.

b) Soit $1 \leq i \leq r$. Par construction de p_i, c'est un polynôme en f.

c) Soit $1 \leq i \neq j \leq r$. Alors en remarquant que $\chi_f | Q_i Q_j$, puisque $U_i(f), Q_i(f), U_j(f), Q_j(f)$ sont des polynômes en f, ils commutent et

$$p_i p_j = U_i(f) Q_i(f) U_j(f) Q_j(f) = Q_i(f) Q_j(f) U_i(f) U_j(f) = 0$$

par le théorème de Caylay-Hamilton.

d) Soit $1 \leq i \leq r$. Alors $p_i^2 = p_i \left(\mathrm{Id} - \sum_{j \neq i} p_j \right) = p_i - \sum_{j \neq i} p_i p_j = p_i$.

e) Soit $1 \leq i \leq r$. Montrons le résultat par double inclusion.
$\boxed{\subset}$: Soit $x \in E, y = p_i(x)$. Alors $(f - \lambda_i)^{m_i}(y) = (f - \lambda_i)^{m_i} U_i(f) Q_i(f)(x) = U_i(f) \chi_f(f)(x) = 0$. Donc $y \in N_i$.
$\boxed{\supset}$: Soit $x \in N_i$. Alors par 12.2, $x = \sum_{j=1}^{n} U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x)$ car pour tout $j \neq i$, $(X - \lambda_i)^{m_i} | Q_j$ ce qui donne $\forall j \neq i, N_i \subset \ker(Q_j(f))$.

f) Soit $1 \leq i \leq d$. Montrons le résultat par double inclusion.
$\boxed{\subset}$: Soit $x \in \ker(p_i)$. Alors toujours par 12.2, $x = \sum_{j \neq i} p_j(x) + \underbrace{p_i(x)}_{=0} \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$.
$\boxed{\subset}$: Soit $x \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$. Alors $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x)$. Mais pour tout $j \neq i, N_j \subset \ker(Q_i(f))$ puisque $(X - \lambda_j)^{m_j} | Q_i$ pour tout $j \neq i$.

3. Preuve de l'existence. On pose $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$. Alors d est par construction diagonalisable et est un polynôme en f. Posons $n = f - d$. Alors n est un polynôme en f donc commutent avec d. Par construction, $f = d + n$. Il suffit donc de montrer que n est nilpotente. Pour cela, on écrit

$$n = f - d = \sum_{i=1}^{d} f p_i - \sum_{i=1}^{d} \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^{d} (f - \lambda_i \mathrm{Id}) p_i.$$

Puisque $p_i p_j = 0$, une récurrence immédiate montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, n^k = \sum_{i=1}^{d} (f - \lambda_i \mathrm{Id})^k p_i.$$

Pour $k = \max(m_1, \cdots, m_d)$, on en déduit donc que $n^k = 0$ donc n est nilpotente.

Unicité. Considérons d, n, les endomorphismes montrés précédemment. Soit d', n', d'autres endomorphismes vérifiant les propriétés $1, 2, 3, 4$ du théorème. Alors $f = d' + n'$ et d, n sont des polynômes en f. Comme n' commute avec d', n' commute avec $d' + n' = f$ donc n' commute avec tout polynôme en f : de fait, n commute avec n', et de même, d commute avec d'. Ainsi, $n - n'$ est nilpotente par la formule du binôme et $d' - d$ est diagonalisable car d, d' sont codiagonalisables (c'est classique). Puisque $u = d + n = d' + n'$, on a donc $d' - d = n - n'$ donc $d' - d$ est diagonalisable et nilpotente : elle est nulle. Ainsi, $d = d'$ et $n = n'$.

Exercice 49.
1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, f^2 l'est et $\ker(f) = \ker(f^2)$.
2. Que se passe-t-il si on se place dans $\mathbb{R}^n$?
3. Application : à quelle condition une matrice antidiagonale est diagonalisable ? On traitera le cas complexe puis le cas réel.

Corrigé :

1. Supposons que f est diagonalisable. Notons M, sa matrice dans la base canonique. Alors il existe $(P, D) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ tel que $M = PDP^{-1}$. De fait, $M^2 = PD^2M^{-1}$ donc M^2 est diagonalisable. De plus, $\ker(M) \subset \ker(M^2)$. Il suffit de conclure par dimension. Pour cela, remarquons que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}(D^2) = \mathrm{rg}(M^2)$. Donc par dimension, $\ker(M) = \ker(M^2)$.

   Supposons maintenant la réciproque. Alors

$$\begin{aligned} E &= \ker(f^2) \oplus \bigoplus_{i=2}^{d} \mathcal{E}_{\lambda_i}(f^2) \\ &= \ker(f) \oplus \bigoplus_{i=2}^{d} \ker(f^2 - \lambda_i \mathrm{Id}) \\ &= \ker(f) \oplus \bigoplus_{i=2}^{d} \ker(f^2 - \mu_i^2 \mathrm{Id}) \\ &= \ker(f) \oplus \bigoplus_{i=2}^{d} \ker((f - \mu_i \mathrm{Id})(f + \mu_i \mathrm{Id})) \\ &= \ker(f) \oplus \bigoplus_{i=2}^{d} (\ker(f - \mu_i \mathrm{Id}) \oplus \ker(f + \mu_i \mathrm{Id})). \end{aligned}$$

   En effet, $\ker(f) = \ker(f^2)$, il existe μ_i tel que $\mu_i^2 = \lambda_i$ car c'est un complexe, que $(X - \mu_i)$ et $(X + \mu_i)$ sont premiers entre eux car $\mu_i \neq 0$ (les valeurs propres de 2 à d sont non nulles car on a sorti le noyau) et donc par le lemme des noyaux, on a la dernière ligne. Donc on a décomposé E comme somme directe de sous-espaces propres de f : f est diagonalisable.

2. Le même résultat tient sur $\mathbb{R}$ dès lors qu'il existe une racine carré d'un réel. Il est donc suffisant de demander que $\mathrm{Sp}(f^2) \subset \mathbb{R}^+$. Il est aussi nécessaire car si f et f^2 sont diagonalisable, les valeurs propres de f^2 sont celles de f au carré !

3. Notons A, la matrice antidiagonale de coefficient $(a_1, \cdots, a_n)$. Traitons d'abord le cas complexe. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$, base canonique de $\mathbb{C}^n$. Alors $Ae_i = a_i e_{n-i+1}$ donc $A^2 = a_i a_{n-i+1} e_i$. Donc A^2 est diagonalisable car possède une base de vecteur propre. Pour que A soit diagonalisable, il faut et suffit que $\ker(A) = \ker(A^2)$ (*). (Conseil : calculer A^2. Puisque $\ker(A)$ est engendré par les e_i tels que $a_i = 0$ et que $\ker(A^2)$ est engendré par les e_i tels que $a_i a_{n-i+1} = 0$. Ainsi, $\ker(A) = \ker(A^2)$ est équivalent à demander $a_i a_{n-i+1} = 0 \Longrightarrow a_i = 0$. Cela est donc équivalent à $a_i = 0 \Longleftrightarrow a_{n-i+1} = 0$.

   Dans le cas réel, on prend aussi une base canonique et il faut ajouter au niveau de (*) la condition $a_i a_{n-i+1}$ soit positifs ou nuls. Ainsi, il suffit donc d'ajouter la condition « a_i et a_{n-i+1} de même signe ».

Exercice 50.
Soit k, un corps de caractéristique nulle. (penser à $\mathbb{R}$ essentiellement). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite montrer que $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est nilpotente si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{N}^*, \mathrm{tr}(M^p) = 0$.

1. Montrer le sens direct.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. On suppose que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \mathrm{tr}(M^p) = 0$. On suppose par l'absurde que M n'est pas nilpotente.
   (a) Quelle est la forme du polynôme minimal de M par rapport au polynôme minimal attendu ?
   (b) On a donc écrit $\pi_M = X^k Q(X)$. En notant $F = \ker(M^k), G = \ker(Q(M))$, donner une décomposition de $\mathbb{K}^n$ en sous-espaces stables par M.
   (c) On note u, endomorphisme de M canoniquement associé. En considérant l'induit de u sur G, montrer qu'il existe en entier $i \in [\![1, \deg(Q)]\!]$ tel que $\mathrm{tr}(u_G^i) = 0$. Conclure.

Corrigé :

1. Puisque M est nilpotente, on peut noter p, son indice de nilpotence. Alors $M^p = 0$ donc M admet un polynôme annulateur scindé : M est donc trigonalisable d'unique valeur propre 0 : M est donc semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, et cet ensemble est stable par multiplication. Ainsi, la trace étant invariante par similitude, les traces de M et ses itérés sont nulles.
2. (a) π_M est de la forme $X^k Q(X)$ avec $X \wedge Q = 1$. On aimerait que Q soit égal à 1 pour avoir π_M de la forme X^d ce qui donne le caractère nilpotent voulu. On suppose donc que G est non réduit à 0.
   (b) Par le lemme des noyaux, X et Q étant premier entre eux (donc X^k et Q aussi), on a donc $E = \ker(\pi_M(M)) = \ker(M^k) \oplus \ker(Q(M)) = F \oplus G$. F et G sont stables par M car M et $M^k, Q(M)$ commutent.
   (c) Puisque G est stable par u, l'induit u_G est bien défini. Par ailleurs, $\forall x \in G, Q(u_G)(x) = Q(u)(x) = 0$ donc $Q(u_G) = 0$. En écrivant Q de la forme
   $$X^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i X^i,$$
   (Q est unitaire car X^k et π_M le sont), on a donc
   $$M^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i M^i = 0.$$
   En prenant la trace, on a
   $$\mathrm{tr}(M^\ell) + \sum_{i=1}^{\ell-1} a_i \mathrm{tr}(M^i) + \underbrace{a_0 \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_G)}_{= a_0 \dim(G)} = 0.$$
   On sait que $a_0 \neq 0$ et $\dim(G) \neq 0$ (on a supposé que G n'est pas réduit à 0) donc le produit est non nul. On en déduit qu'une trace de M^i est non nulle.
   (d) Disons pour i_0. Alors $\mathrm{tr}(u^{i_0})) = \underbrace{\mathrm{tr}(u_F^{i_0})}_{\neq 0} + \mathrm{tr}(u_G^{i_0})$. Donc $\mathrm{tr}(u^{i_0}) \neq 0$: ABSURDE !

Chapitre 8

Séries numériques

Exercice 51 (Cauchy)**.**
Soit u, une suite numérique. On suppose que $(|u_n|^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que
- Si $0 \leq \ell < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$, tout peut se passer.

Corrigé :

1. Dans ce cas, à partir d'un certain rang N, $\forall n \geq N$, $\sqrt[n]{u_n} \geq \ell - \dfrac{\ell - 1}{2} > 1$ donc u ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.
2. Dans ce cas, à partir d'un certain rang N, $\forall n \geq N$, $\sqrt[n]{u_n} \leq \ell - \dfrac{1 - \ell}{2} < 1$ donc en passant à la puissance n, on a u inférieur à le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1, 1[$. Par comparaison, la série converge absolument.
3. Oui, tout peut se passer. Par exemple, pour $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le critère de Cauchy (root test en anglais) donne $\ell = 1$ et la série diverge. Pour $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ell = 1$ et la série converge.

Remarque : on a plus fort. Voir l'exercice 64 du chapitre série entières.

L'exercice suivant fait appel à un peu de vocabulaire. On considère $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle primitive discrète de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$. Si besoin, on adopte la convention $V_{-1} = 0$. On appelle dérivée discrète de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = u_{n+1} - u_n$. (Les conventions changent d'une personne à l'autre au niveau des bords mais l'esprit est le même.)

Exercice 52 (Règle d'Abel)**.**
Soit u, v, deux suites numériques.

1. En faisant appel à la notion de primitive et dérivée discrète, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k.$$
On appelle cette relation "transformation d'Abel" ou "intégration par parties discrète".
2. Application 1. Pourquoi dit-on que l'on a une généralisation du critère spécial des séries alternées ?
3. Application 2. Etudier la convergence de $\sum \frac{\sin(n)}{n}$.
4. Application 3. Montrer le critère d'Abel :

Théorème 8.1. *Soit u, v, deux suites numériques. On suppose que*

(a) $(V_n)_n$ est bornée.

(b) $\sum u'_n$ est une série absolument convergente.

(c) u converge vers 0.

Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

(En pratique, comme à l'application 2, on n'a pas besoin de se souvenir des hypothèses. Elles sont écrites pour assurer la convergence...) *Remarque : on peut remplacer l'hypothèse b par la monotonie de u. On parle alors de critère de Dirichlet.*

Corrigé :

1. Soit de telles suites. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n} u_k(V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} u_k V_k - \sum_{k=0}^{n} u_k V_{k-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k V_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} V_k - u_0 V_{-1} = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k.$$
2. On applique le résultat à $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = (-1)^n$.
3. On réalise une transformation d'Abel. Si pour les intégrales on intègre sin pour dériver $\dfrac{1}{t}$, pour les séries, on fait de même. On sait d'ailleurs calculer une somme de sinus en passant par la partie imaginaire de l'exponentielle et en reconnaissant une série géométrique.
4. On réalise une transformation d'Abel. Alors $uV \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et
$$\sum_{k=0}^{n} |u'_n||V_k| \leq \|V\|_\infty \sum_{k=0}^{n} |u'_k| < \infty$$
donc la série converge absolument donc converge.

Exercice 53 (Séries de Bertrand)**.**
Nature de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Corrigé : Si $\alpha > 1, \exists \gamma \in]1, \alpha[$. Alors par croissances comparées,
$$n^\gamma u_n = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{\ln^\beta(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Donc :
$$u_n \in o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$
Donc :
$$\sum u_n \text{ converge.}$$
Si $\alpha < 1$, nu_n tend vers l'infini. Donc $\dfrac{1}{n} \in o(u_n)$. Ainsi
$$\sum u_n \text{ diverge.}$$
Pour $\alpha = 1$, cela dépend de β.
Si β est négative, il est clair que $u_n \geq \dfrac{1}{n}$. Donc la série diverge.
Si β est strictement positive, je vais pouvoir faire une comparaison série-intégrale.

Pour $k \geq 3$:

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\beta(t)} \leq \frac{1}{k\ln^\beta(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\beta(t)}.$$

D'où :

$$\sum_{k=3}^{n}\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\beta(t)} \leq \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\ln^\beta(k)} \leq \sum_{k=3}^{n}\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\beta(t)}.$$

i.e.

$$\int_3^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\beta(t)} \leq \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\ln^\beta(k)} \leq \int_2^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\beta(t)}.$$

Si $\beta = 1$, une primitive des intégrandes considérées est $\ln\circ\ln$. Donc $\sum u_n$ diverge.
Si $\beta \neq 1$, une primitive des intégrandes considérées est

$$t \mapsto \frac{\ln^{1-\beta}(t)}{1-\beta}.$$

Donc l'intégrale diverge ssi $1-\beta > 0$. Donc si $\beta > 1$, la série converge. Sinon elle diverge.
Bilan :

- $\alpha > 1$, la série converge
- $\alpha < 1$, la série diverge
- $\alpha = 1$
  - $\beta > 1$, la série converge
  - $\beta \leq 1$, la série diverge.

Exercice 54.
Déterminer un développement asymptotique de H_n jusqu'à $o(1/n)$ (au moins).

Corrigé : Montrons déjà le résultat suivant :

Proposition 8.2. $\forall \alpha > 1, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Démonstration. On procède par comparaison série intégrale. Par décroissance de $t \in [1,+\infty[\mapsto 1/t^\alpha$, on a

$$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

Fixons $n, N \in \mathbb{N}, N \geq n$. Par télescopage,

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

ce qui donne, car $\alpha \neq 1$

$$\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n+1}^{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n}^{N}.$$

Ainsi,

$$\forall n \leq N \in \mathbb{N}, \frac{-1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(N+1)}^{\alpha-1} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{-1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

Par Riemann, le terme du milieu converge quand $N \to +\infty$. L'inégalité passe donc à la limite quand $N \to +\infty$ en

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Par théorème d'encadrement,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

□

Passons au développement asymptotique de H_n.

1. Pour tout $k \geq 2$, par comparaison série-intégrale

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Ainsi, en sommant,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \ln(n+1) - 2 \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

et par encadrement, $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. Posons $u_n = H_n - \ln(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n)\\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, puisque par Riemann la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par positivité du terme général, par comparaison, on a la convergence de $\sum u_{n+1} - u_n$ ce qui entraine la convergence de u. Il existe donc $\gamma \in \mathbb{R}$ [1] tel que $H_n - \ln(n) = \gamma + o_{n\to+\infty}(1)$.

3. Posons $v_n = H_n - \ln(n) - \gamma$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n\\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{-1}{2n^2} + +o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Par le théorème de sommation des équivalents (puisque $\left(\frac{-1}{2n^2}\right)_{n\geq 1}$ est de signe constant), on a

$$-v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k\geq n}^{+\infty} v_{k+1} - v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k\geq n} -\frac{1}{2k^2} \sim \frac{-1}{2(n-1)}.$$

Ainsi, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

1. constante d'Euler-Mascheroni, environ 0,577

4. Posons $w_n = H_n - \ln(n) - \gamma - \dfrac{1}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n^3} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Par le théorème de sommation des équivalents (puisque $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)_{n\geq 1}$ est de signe constant), on a

$$-w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k\geq n}^{+\infty} w_{k+1} - w_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k\geq n} -\frac{1}{6k^3} \sim \frac{1}{12(n-1)^2}.$$

Ainsi, $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$.

5. On continue. Posons $x_n = H_n - \ln(n) - \gamma - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{12n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12(n+1)^2} - \frac{1}{12n^2} \\ &= \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^2}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ &= \frac{1}{2n^3} - \frac{1}{2n^4} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^4}\left(1 + 2\left(\frac{-1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ &= \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{12n^2}\left(-\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ &= 0 + o\left(\frac{1}{n^4}\right).\end{aligned}$$

Par le théorème de sommation des relations de comparaisons, puisque $\left(\dfrac{1}{n^4}\right)_{n\geq 1}$ est de signe constant,

$$-x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k\geq n+1} x_{n+1} - x_n = o_{n\to+\infty}\underbrace{\left(\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{n^4}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3n^3}}$$

donc par comparaison, $x_n = o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Ainsi,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 55.
On se donne $u_0 \in [0, \pi/2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$. Etudier le comportement asymptotique de u.

Corrigé : On va généraliser cette étude au théorème suivant.

Théorème 8.3. *Soit f une fonction définie au voisinage de 0 vérifiant $f(x) = x - \alpha x^{p+1} + \beta x^{2p+1} + o_{x\to 0}(x^{2p+1})$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*, \beta \in \mathbb{R}^*, p \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $f([0,\eta]) \subset [0,\eta]$ et en posant $u_0 \in]0,\eta]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\gamma := \dfrac{(1+p)\alpha^2}{2} - \beta \neq 0$, on a*

$$u_n = \left(\frac{1}{pn\alpha}\right)^{1/p} - \frac{\gamma}{p^2\alpha^2}\left(\frac{1}{pn\alpha}\right)^{1/p}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{p}}}\right).$$

Démonstration. 1. Puisque $f(x)$ vérifie ce développement limité, je peux trouver g, h continues au voisinage de 0 (car f l'est) telles que dans ce voisinage
- $f(x) = xg(x)$,
- $x - f(x) = \alpha x^{p+1}h(x)$,
- $g \underset{0}{\longrightarrow} 1, h \underset{0}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]0,\eta], g(x) > 0, h(x) > 0.$$

Ainsi,

$$\forall x \in]0,\eta], f(x) > 0, x - f(x) > 0.$$

Ainsi, $\eta \geq x > f(x)$ ce qui donne $f(]0,\eta]) \subset]0,\eta]$.

2. Soit $u_0 \in]0,\eta] \subset]0,\eta]$. Alors $(u_n)_n$ est bien définie par le point précédent. Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - f(u_n) > 0$$

i.e. $(u_n)_n$ est décroissante. Etant minorée par 0, elle converge dans $[0,\eta]$ par le théorème de la limite monotone. De fait, soit $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors l'égalité vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$ passe à la limite en $\ell = f(\ell)$. Or, pour tout $\ell \in]0,\eta]$, $\ell \neq f(\ell)$. Donc $\ell = 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Faisons l'analogie avec les équations différentielles.

> L'idée « analogie » est la suivante :
>
> $$\underbrace{u_{n+1} - u_n}_{\approx u'} \approx \alpha u_n^{p+1}.$$
>
> Donc $u' \approx \alpha u^{p+1}$ ce qui donne $\dfrac{u'}{u^{p+1}} \approx \alpha$. En intégrant, on a
>
> $$\left(\frac{1}{u^p}\right)' \approx \text{constante}.$$
>
> On s'attend donc à ce que $\dfrac{1}{u_{n+1}^p} - \dfrac{1}{u_n^p}$ soit à peu près constante.

Regardons donc la quantité

$$\frac{1}{u_{n+1}^p} - \frac{1}{u_n^p}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Cette quantité est bien définie car $u_0 \in]0,\eta]$ et cet intervalle est stable par f

donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. On a, puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^{-p} - u_n^{-p} &= (f(u_n))^{-p} - u_n^{-p} \\
&= (u_n - \alpha u_n^{p+1} + \beta u_n^{2p+1} + o_{n\to+\infty}(u_n^{2p+1}))^{-p} - u_n^{-p} \\
&= u_n^{-p}\left[\left(1 - \alpha u_n^p + \beta u_n^{2p} + o_{n\to+\infty}(u_n^{2p})\right)^{-p} - 1\right] \\
&= u_n^{-p}\left(1 - (-p)\left(-\alpha u_n^p + \beta u_n^{2p}\right) + \frac{(-p)(-p-1)}{2}\left(-\alpha u_n^p + \beta u_n^{2p}\right)^2 - 1 + o_{n\to+\infty}(u_n^{2p})\right) \\
&= u_n^{-p}\left(p\alpha u_n^p - p\left(\beta + \frac{-(p+1)}{2}\alpha^2\right)u_n^{2p} + o_{n\to+\infty}(u_n^{2p})\right) \\
&= p\alpha + p\underbrace{\left(\frac{p+1}{2}\alpha^2 - \beta\right)}_{=\gamma} u_n^p + o_{n\to+\infty}(u_n^p).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$u_{n+1}^{-p} - u_n^{-p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p\alpha.$$

Par le théorème de Cesàro (ou sommation des équivalents car $\alpha \neq 0$), on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k+1}^{-p} - u_k^{-p} \underset{n\to+\infty}{\sim} np\alpha.$$

Par télescopage, on en déduit :

$$u_{n+1}^{-p} \underset{n\to+\infty}{\sim} np\alpha$$

et on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$ puisque $f(x)/x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$. On a donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{np\alpha}\right)^{1/p}.$$

Avec ceci,

$$u_{n+1}^{-p} - u_n^{-p} - p\alpha = p\gamma u_n^p + o_{n\to+\infty}(u_n^p) \underset{n\to+\infty}{\sim} p\gamma\left(\frac{1}{np\alpha}\right)^{p\times1/p} = \frac{\gamma}{\alpha n}$$

donc par le théorème de sommation des équivalents, puisque $\frac{\gamma}{\alpha n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_{k+1}^{-p} - u_k^{-p}}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^{-p}} - p\alpha n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\gamma}{\alpha}\ln(n).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
u_n^{-p} &= p\alpha n + \frac{\gamma}{\alpha}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n)) \\
&= p\alpha n\left(1 + \frac{\gamma}{p\alpha^2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, en passant à l'exposant $-1/p$, on a

$$\begin{aligned}
u_n &= \left[p\alpha n\left(1 + \frac{\gamma}{p\alpha^2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\right]^{-1/p} \\
&= \left(\frac{1}{p\alpha n}\right)^{1/p}\left[1 - \frac{1}{p}\frac{\gamma}{p\alpha^2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right].
\end{aligned}$$

Finalement,

$$u_n = \left(\frac{1}{pn\alpha}\right)^{1/p} - \frac{\gamma}{p^2\alpha^2}\left(\frac{1}{pn\alpha}\right)^{1/p}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{p}}}\right).$$

□

Evidemment, cela s'applique pour $f = \sin$. En effet, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_{x\to0}(x^5)$. On a donc $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{1}{120}, p = 2$ et $\gamma = \frac{3}{2}\frac{1}{6^2} - \frac{1}{120} = \frac{1}{30}$. Ainsi,

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right).$$

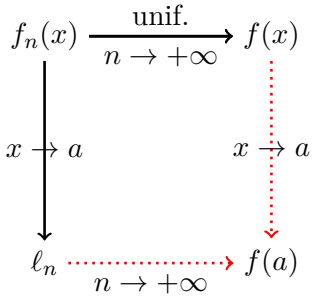
Chapitre 9

Suites et séries de fonctions

Exercice 56.
Enoncer le théorème de la double limite. Exhiber un exemple de suite de fonctions vérifiant dans un premier temps

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x) \neq \lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ avec un a réel
2. puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) \neq \lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Corrigé : voir le cours. Pour retenir, on peut réaliser le schéma suivant :



Les flèches noires sont les hypothèses. Les rouges sont les conclusions.

Premier contre-exemple : cas a fini. On considère la suite de fonctions $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n \in [0,1]$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors elle ne converge pas uniformément (la limite n'est pas continue bien que chaque f_n l'est et converge simplement vers l'indicatrice de 1, qui tend vers 0 en 1^-. Par ailleurs, la limite quand $x \to 1$ de $f_n(x)$ est 1 donc ℓ_n tend vers 1 en $+\infty$ et $1 \neq 0$.

Deuxième contre-exemple : cas $a = +\infty$. On considère la suite de fonctions $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \arctan(x/n) \in [0, \pi/2[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors elle ne converge pas uniformément (Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\sup|\arctan(x/n)|$ soit majoré par ε. Sauf que pour un tel n_0, $\|f_n\|_\infty$ vaut $\pi/2$ puisque la limite en $+\infty$ de $\arctan(x/n_0)$ est $\pi/2$. On conclut par contraposée). Clairement, le théorème de la double limite ne tient pas puisque $\arctan(x/n)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, vers $\pi/2$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 57.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} \end{array}.$$

Etudier la convergence simple, uniforme. Commenter.

Corrigé : Clairement, $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle (c'est clair pour $x > 0$, c'est bon pour $x = 0$) qui est évidemment continue tout comme les $(f_n)_n$. Pourtant, la convergence n'est pas uniforme. En effet, $f_n(1/n) = 1$ pour tout n donc $\|f_n - 0\|_\infty$ ne peut pas tendre vers 0.

Exercice 58. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\begin{array}{rccc} f_n : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a_n x^n(1-x) \end{array}.$$

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$, disons vers f.
2. Montrer que f converge normalement sur $[0,r]$ pour tout $r \in]0,1[$.
3. Établir une CNS en fonction de $(a_n)_n$ pour la convergence normale de f.
4. Établir une CNS en fonction de $(a_n)_n$ pour la convergence uniforme de f.
5. Trouver une suite $(a_n)_n$ telle que f converge uniformément mais pas normalement.

Corrigé :

1. Soit $x \in [0,1]$. Si $x = 1$, $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sinon, (a_n) est décroissante positive donc elle est bornée. Ainsi,
$$a_n x^n(1-x) = O_{n\to+\infty}(x^n)$$
et $x \in [0,1[$ entraine la convergence de $\sum x^n$. Par comparaison, $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement.
2. Soir $r \in]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\forall x \in [0,r], |f_n(x)| = a_n x^n(1-x) \leq a_n r^n$$
donc $\|f_n\|_\infty = O_{n\to+\infty}(r^n)$ donc par comparaison, on a la convergence normale de f sur tout segment de $[0,1[$.
3. Calculons $\|f_n\|_\infty$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f_n'(x) = a_n x^{n-1}(n-(n+1)x)$. Ainsi, f_n croit sur $\left[0, \dfrac{n}{n+1}\right]$ puis décroit jusqu'à 1. Par positivité de f_n, on en déduit que $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$. Or,
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}}_{\substack{\to \\ n\to+\infty}\ e^{-1}} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\substack{\sim \\ n\to+\infty}\ \frac{1}{n}}.$$
Ainsi, $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{ne}$ donc f converge normalement si, et seulement si, $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.
4. Estimons $R_n(x)$ pour tous $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$. Par décroissance de $(a_n)_n$, on en déduit que
$$0 \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k(1-x) \leq a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x) = a_{n+1}\left(x^{n+1} - 0\right) \leq a_{n+1}.$$
Ainsi, $0 \leq \|R_n\|_\infty \leq a_{n+1}$ donc si $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Supposons maintenant que $(a_n)_n$ ne tend pas vers 0. En vertu du théorème de la limite monotone, $(a_n)_n$ converge, disons vers ℓ vérifiant $\ell = \inf \underbrace{\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}}_{\subset [0,a_0]} \geq 0$. $\ell \neq 0$ par hypothèse et donc $\ell > 0$.

Ainsi,
$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k(1-x) \geq \ell \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x) = \ell x^{n+1}.$$

Puisque $\|R_n\|_\infty \geq R_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \|R_n\|_\infty \geq \ell x^{n+1}.$$

L'inégalité passe donc au sup à droite en

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|R_n\|_\infty \geq \ell > 0.$$

Ainsi, $\|R_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. Ainsi, f converge uniformément si, et seulement si, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. Par le critère de Bertrand, $a_n = \dfrac{1}{\ln(n+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ convient.

Exercice 59. Soit $n \geq 2, x \geq 0$ et $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, disons vers f.
2. Montrer que f ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$ mais sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
3. Montrer que f converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
4. Établir un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Corrigé :

1. D'abord la convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Alors pour tout $n \geq 2$, $u_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$. Si $x = 0, u_n(x) = 0$. Sinon,
$$\frac{n^2 xe^{-nx}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
par croissances comparées. Ainsi,
$$u_n(x) = o_{n\to+\infty}(1/n^2)$$
donc $\sum u_n(x)$ converge. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge simplement.
2. La convergence n'est pas normale sur tout $\mathbb{R}^+$. En effet, calculons $\|u_n\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Pour cela, étudions la fonction $f_n : x \mapsto xe^{-nx}$ pour tout $n \geq 2$. On a :
$$\forall x \geq 0, f_n'(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = e^{-nx}(1 - nx).$$
Ainsi, f_n est extrémale en $\dfrac{1}{n}$, croissante puis décroissante. Ainsi, $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{\ln(n)}\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\ln(n)} f_n(1/n) = \dfrac{1}{\ln(n)}\dfrac{e^{-1}}{n}$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi, par le critère de Bertrand (hors-programme je rappelle), on a la divergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{e^{-1}}{n\ln(n)}$ donc la divergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \|u_n\|_\infty$.

   Par contre, la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[, a > 0$. En effet, soit $a > 0$ et $x \geq a$. Alors il existe N assez grand tel que $\forall n \geq N$, $\dfrac{1}{n} \leq a$ ce qui signifie qu'à partir de ce N (ce N vaut donc $\lfloor 1/a \rfloor + 1$), on a f_n qui décroit sur $[a, +\infty[$ ce qui signifie que
$$\forall n \geq N, \|f_n\|_\infty = f_n(a) = ae^{-na}.$$
Ainsi,
$$\sum_{k\geq N} \|u_n\|_\infty = \sum_{k\geq N} \frac{1}{\ln(n)} ae^{-na}.$$
Cette série converge bien évidemment ce qui entraine la convergence normale de $\sum u_n$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

3. Soit $n \geq 1$. Soit $x > 0$. Le reste $R_n(x)$ s'écrit alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(k)} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(n+1)} = \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (e^{-x})^k = \frac{xe^{-(n+1)x}}{(1-e^{-x})\ln(n+1)}.$$

Ainsi,

$$\forall x > 0, |R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)} \frac{x}{1-e^{-x}} = \frac{e^{-nx}}{\ln(n+1)} \frac{x}{e^x - 1}. \tag{9.1}$$

Or, $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ tend vers 0 en $+\infty$ donc il existe A telle que f est bornée sur $[A, +\infty[$. Par ailleurs, f est bornée sur $[0, A]$ par le théorème des bornes atteintes (f est prolongeable par continuité en 0) : f est donc bornée sur $[0, +\infty[$, disons par M. On a donc

$$\frac{e^{-nx}}{\ln(n+1)} \frac{x}{e^x - 1} \leq \frac{\overbrace{e^{-nx}}^{\leq 1} M}{\ln(n+1)} \leq \frac{M}{\ln(n+1)}.$$

Ainsi,

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{M}{\ln(n+1)}$$

ce qui conclut quant à la convergence uniforme de $\sum u_n$.

4. On a

$$f(x) = \frac{xe^{-2x}}{\ln(2)} + \underbrace{\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}}_{R_2(x)}.$$

On veut alors montrer que $R_2(x) = o_{x\to+\infty}\left(\dfrac{xe^{-2x}}{\ln(2)}\right)$ (on peut enlever le $\ln(2)$ dans le petit o bien évidemment). Pour cela, on va essayer d'avoir une estimation de $R_2(x)$. J'ai choisi de prendre la plus précise, à savoir celle que j'ai notée (12.2). On a

$$\forall x > 0, |R_2(x)| \leq \frac{e^{-2x}}{\ln(3)} \frac{x}{e^x - 1} = \frac{xe^{-2x}}{\ln(3)} \underbrace{\frac{1}{e^x - 1}}_{\substack{\longrightarrow \\ x\to+\infty}\ 0} = o_{x\to+\infty}(xe^{-2x}).$$

Ceci montre donc que $R_2(x) = o_{x\to+\infty}(xe^{-2x})$ ce qui montre que

$$f(x) = \frac{xe^{-2x}}{\ln(2)} + o_{x\to+\infty}(xe^{-2x}).$$

Ainsi,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{xe^{-2x}}{\ln(2)}.$$

Exercice 60 (Autour de ζ)**.**

1. Question de cours : Rappeler l'expression de ζ et sa régularité. Exprimer ses dérivées.
2. Etudier le comportement en $+\infty$.
3. Etablir un développement asymptotique de ζ en 1^+ à l'ordre 2.
4. On souhaite démontrer avec cette question précédente que la somme des inverses des nombres premiers diverge.

(a) On souhaite montrer l'identité suivante :

$$\forall s>1, \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-p^{-s}}=\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-p_k^{-s}}$$

où l'on dénote $\mathcal{P}=\{p_1,\cdots,p_k,\cdots\}$ rangés dans l'ordre croissant.

i. Etablir l'existence du produit infini.

ii. On fixe un $N\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier m_0 et un entier M_0 tel que $\forall m\geq m_0, \forall M\geq M_0$,

$$\forall s>1, \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}\leq\prod_{k=1}^{m}\sum_{i_k=0}^{M}\frac{1}{(p_k^{i_k})^s}\leq\zeta(s).$$

Indication : on pourra réécrire le produit du milieu en une seule somme.

iii. Conclure.

(b) Conclure.

Corrigé :

1. c.f. Cours. On rappelle que $\zeta(s):=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et que

$$\forall k\in\mathbb{N}, \forall s>1, \zeta^k(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\ln^k(n)}{n^s}.$$

2. C'est une comparaison série-intégrale. On a

$$\forall s>1, \forall n\in\mathbb{N}_{\geq 2}, \int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}\leq\frac{1}{n^s}\leq\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}.$$

Ainsi, en sommant avec Chasles,

$$\forall s>1, \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}=\frac{1}{s-1}\leq\zeta(s)\leq 1+\frac{1}{s-1}.$$

On déduit deux choses : puisque $\zeta\geq 1$, par encadrement, ζ tend vers 1 en $+\infty$. Aussi, au voisinage de 1^+, l'inégalité ci-dessus donne donc $\zeta\underset{s\to 1^+}{\sim}\frac{1}{s-1}$.

3. On a déjà obtenu le premier ordre. Pour avoir le deuxième, il faut être plus subtil dans la comparaison série-intégrale. Pour cela, on regarde

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}=\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{n^s}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}}_{=:u_n(s)}$$

On va vouloir intervertir limite et série. Pour cela, une convergence normale n'est pas de refus. On a

$$\forall s\in[1,2], \forall n\in\mathbb{N}^*, 0\leq u_n(s)\leq\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}=\int_n^{n+1}\frac{s}{t^{s+1}}\mathrm{d}t\leq 2\int_n^{n+1}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\in\ell(\mathbb{R}).$$

On a bien convergence normale de la série donc par interversion limite-série,

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\underset{s\to 1^+}{\longrightarrow}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}u_n(1)=\lim_{n\to+\infty}H_n-\ln(n+1)=\gamma.$$

Donc

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+o_{s\to 1^+}(1).$$

4. (a) i. Pour qu'un produit infini existe, il suffit de regarder avec un ln. En effet, soit $s > 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-p_k^{-s}}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \ln(1-p_k^{-s}).$$

Puisque $\ln(1-p_k^{-s}) \sim p_k^{-s} \leq n^{-s}$, par encadrement, la série avec les ln converge donc le produit converge.

ii. Considérons les entiers compris entre 1 et N et regardons p_{m_0}, le plus grand nombre premier apparaissant dans une décomposition d'un des entiers entre 1 et N. De même, regardons M_0, la plus grande valuation apparaissant dans une décomposition d'un des entiers entre 1 et N. En considérant un $m \geq m_0$ et $M \geq M_0$, tout nombre compris entre 1 et N divise $p_1^M p_2^M p_3^M \cdots p_m^M$ par construction. Mieux, chaque entier entre 1 et N s'écrit donc $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ dans $[\![0, M]\!]$. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{0 \leq \alpha_1, \cdots, \alpha_m \leq M} \frac{1}{(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m})^s} \leq \zeta(s). \tag{9.2}$$

Il faut maintenant remarquer que

$$\sum_{0 \leq \alpha_1, \cdots, \alpha_m \leq M} \frac{1}{(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m})^s} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\alpha_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{\alpha_k})^s}.$$

iii. En faisant tendre M puis m vers $+\infty$ dans 9.2 (en remplaçant avec l'identité ci-dessus) valide pour tout $m \geq m_0, M \geq M_0$, on a donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \sum_{\alpha_k=0}^{+\infty} \frac{1}{(p_k^{\alpha_k})^s} \leq \zeta(s).$$

En remarquant la série géométrique

$$\sum_{\alpha_k=0}^{+\infty} \frac{1}{(p_k^{\alpha_k})^s} = \frac{1}{1-p_k^{-s}},$$

on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}} \leq \zeta(s).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on a le résultat voulu.

(b) Supposons que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k}$ diverge. Alors par l'équivalent $\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) \sim 1/p_k$ montre que le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ converge. Notons ℓ, cette limite. Alors $\forall s > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}} \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \ell.$$

Donc ζ est majorée sur $]1, +\infty[$ ce qui est absurde puisqu'elle diverge en 1^+.

Exercice 61 (Théorème de Weierstraß via des probabilités)**.**
On souhaite démontrer le théorème de Weierstraß. Pour cela, soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$ et

considérons les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Bernstein associés à f, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f(k/n).$$

On fixe $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit X, une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n,p)$.

1. Montrer que $P_n(p) = \mathbb{E}[f(X/n)]$.
2. Calculer $f(\mathbb{E}(X/n))$.
3. Conclure à l'aide de Bienaymé-Tchebychev et Heine.
4. En déduire le cas où f est continue sur $[a,b]$.

Corrigé :

1. Par la formule de transfert,
$$\mathbb{E}[f(X/n)] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) f(k/n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f(k/n) = P_n(p).$$
2. Par linéarité de l'espérance,
$$\mathbb{E}[X/n] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X] = np/n = p.$$
Donc $f(\mathbb{E}[X/n]) = f(p)$.
3. Puisqu'elle est continue sur $[0,1]$, elle est uniformément continue par Heine. Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé. Donnons-nous un η tel que $\forall x, y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On souhaite regarder la quantité
$$|P_n(p) - f(p)| = |\mathbb{E}[f(X/n) - f(p)]| \leq \mathbb{E}|f(X/n) - f(p)|.$$
Ainsi, lorsque l'événement $|X/n - p| \leq \eta$ est réalisé, on obtient une majoration convenable. On écrit alors
$$\begin{aligned} |f(X/n) - f(p)| &= |(f(X/n) - f(p))(\mathbb{1}_{|X/n-p|\leq\eta} + \mathbb{1}_{|X/n-p|\geq\eta})| \\ &\leq \underbrace{|f(X/n) - f(p)|}_{\leq\varepsilon} \mathbb{1}_{|X/n-p|\leq\eta} + \underbrace{|f(X/n) - f(p)|}_{\leq 2\|f\|_\infty} \mathbb{1}_{|X/n-p|\geq\eta}. \end{aligned}$$
Par croissance et linéarité de l'espérance,
$$\mathbb{E}|f(X/n) - f(p)| \leq \varepsilon \underbrace{\mathbb{P}(|X/n-p| \leq \eta)}_{\leq 1} + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|X/n-p| \geq \eta).$$
Par Bienaymé-Tchebychev,
$$\mathbb{P}(|X/n-p| \geq \eta) \leq \frac{\mathrm{Var}(X/n)}{\eta^2} = \frac{p(1-p)}{\eta^2 n} \leq \frac{1}{4\eta^2 n}.$$
Donc pour n assez grand,
$$\mathbb{E}|f(X/n) - f(p)| \leq 2\varepsilon.$$
Au bout du compte,
$$|P_n(p) - f(p)| \leq 2\varepsilon$$
à partir d'un certain rang indépendant de p. Donc $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{unif.}} f$.
4. Soit f continue sur $[a,b]$ et $g : x \in [0,1] \mapsto f(a + (b-a)x)$. Soit $(P_n)_n$, suite de polynômes approchant uniformément g. Alors la suite de polynômes $(Q_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = P_n\left(\frac{X-a}{b-a}\right)$ approche uniformément f.

Exercice 62 (Autour du théorème de Weierstraß)**.**

1. Soit f, une fonction continue sur $[0,1]$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$. Que dire de f ?
2. Montrer que toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme de polynômes de la forme $P_n(X^2)$.
3. Considérons f, une fonction continue et $(a_1, \cdots, a_n)$ n réels distincts de $[0,1]$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes approximant f uniformément tel que chaque polynôme coïncident avec f en les $(a_1, \cdots, a_n)$.

Corrigé :

1. f va être nulle. On remarque déjà que par linéarité de l'intégrale, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P_n, f\rangle = 0$. Soit $(P_n)_n$, une suite de polynômes tendant uniformément vers f sur $[0,1]$ (d'après le théorème de Weierstraß). Alors par le théorème d'interversion limite-intégrale, on a
$$0 = \int_0^1 P_n f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f^2.$$
Donc f^2 est identiquement nulle donc f aussi.
2. L'astuce est de "rendre pair" f. Posons donc $g : x \in [-1,1] \mapsto f(x)\mathbb{1}_{x\geq 0} + f(x)\mathbb{1}_{x<0}$. Alors g est paire et est continue. Par le théorème de Weierstraß, il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ qui convergent uniformément sur $[-1,1]$. On remarque que $(P_n(-X))_n$ est une suite de polynômes convergeant uniformément vers $x \mapsto g(-x) = g(x)$. Ainsi, $Q_n = \dfrac{P_n(X) + P_n(-X)}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ constitue une suite de polynômes convergeant uniformément vers g sur $[-1,1]$ donc a fortiori sur $[0,1]$ donc vers f. On conclut en remarquant que Q_n est un polynôme en X^2.
3. D'après le théorème de Weierstraß, il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ convergeant uniformément vers f sur $[0,1]$. Considérons la base d'interpolation de Lagrange
$$L_i(X) = \prod_{j\neq i, j=1}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}, 1 \leq i \leq n.$$
On pose alors pour $k \in \mathbb{N}$
$$Q_k(X) = P_k(X) + \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - P_k(a_i))L_i(X).$$
Alors $\forall 1 \leq i \leq n, Q_k(a_i) = f(a_i)$. De plus,
$$\|f - Q_k\|_\infty \leq \|f - P_k\|_\infty + \sum_{i=1}^{n} |f(a_i) - P_k(a_i)|\|L_i\|_\infty \leq \|f - P_k\|_\infty \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \|L_i\|_\infty\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
On a le résultat voulu.

Exercice 63 (Théorème de Fejér)**.**
On souhaite généraliser le théorème de Weierstraß en le suivant : toute fonction continue et 2π-périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques. Le théorème de Fejér donne une réponse. L'exercice propose une preuve orienté vers ce corollaire. On laissera le cas général au lecteur. On parle dans la suite, sans le dire, de la théorie des séries de Fourier. Nous ne rentrons pas dans les détails, c'est un prétexte pour faire des séries de fonctions. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que f est 2π-périodique. Pour

tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k : x \in \mathbb{R} \to e^{ikx} \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit pour $n \in \mathbb{N}$

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t, S_n := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k, C_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k.$$

Ce sont respectivement le $n-$ème coefficient de Fourier de f, la somme partielle de la série de Fourier de f, la moyenne de Cesàro de la série de Fourier. On note aussi

$$\widetilde{S}_n := \sum_{k=-n}^{n} e_k, \widetilde{C}_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \widetilde{S}_k.$$

1. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{C}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Montrer que $(\widetilde{C}_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi]\backslash[-\alpha, \alpha]$.
3. On pourra admettre cette question dans un premier temps. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $(C_n)_n$ tend uniformément vers f.
   Indication : on pourra montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, C_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\widetilde{C}_n(x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\widetilde{C}_n(t)\mathrm{d}t$.

Corrigé :

1. Il est aisé de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_k = \delta_{k,0}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{S}_n(t)\mathrm{d}t = 1$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{C}_n(t)\mathrm{d}t = 1.$$

2. D'abord, $\widetilde{S}_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \widetilde{S}_n = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}(e^{ix})^k = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\Im(e^{i(n+\frac{1}{2})x}).$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\Im(e^{i(k+\frac{1}{2})x}) = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\Im\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}\right)\\ &= \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right) = \left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2.\end{aligned}$$

De fait,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \widetilde{C}_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2.$$

On en déduit donc que

$$\forall \alpha \in]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\pi, \pi]\backslash[-\alpha, \alpha], |\widetilde{C}_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2(\alpha/2)}.$$

Donc la série de fonctions converge uniformément.

3. Disons $T > 0$, la période. Fixons $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[-T, 2T]$: il existe donc $\eta > 0, \forall x, y \in [-T, 2T], |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On peut supposer $\eta \leq T$ (si $\eta > T$, la propriété est vraie pour T en particulier). Soit donc x, y tel que $|x-y| \leq \eta$. x est alors compris entre kT et $(k+1)T$ pour un certain k. Alors $x' = x-kT \in [0, T]$. Puisque $|x - y| \leq \eta \leq T$, on a $y' := y - kT \in [-T, 2T]$. Puisque $|x' - y'| = |x - y| \leq \eta$ et que $x', y' \in [-T, 2T]$, on a $|f(x') - f(y')| \leq \varepsilon$. Mais $f(x') = f(x), f(y') = f(y)$ donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

4. Déjà, on remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \mathrm{d}t \right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widetilde{S}_n(x-t) \mathrm{d}t.$$

Ainsi, on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, C_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widetilde{C}_n(x-t) \mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $u = x - t$ et la 2π-périodicité de l'intégrande, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, C_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widetilde{C}_n(x-t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \widetilde{C}_n(t) \mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par la question précédente, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. On peut supposer que $\eta < \pi$. Une fonction continue périodique étant bornée, notons M un majorant de $|f|$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |f(x) - C_n(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ((f(x-t) - f(x)) \widetilde{C}_n(t) \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} 2M \widetilde{C}_n(t) \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varepsilon \widetilde{C}_n(t) \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{2M}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} \widetilde{C}_n(t) \mathrm{d}t + \varepsilon. \end{aligned}$$

La convergence uniforme de $(\widetilde{C}_n)_n$ assure que l'intégrale est bornée par ε à partir d'un certain rang. On a la convergence uniforme voulue.

Chapitre 10

Séries entières

Exercice 64 (Cauchy-Hadamard)**.**
Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Montrer que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} |a_k|^{1/k}.$$

Corrigé : on va d'abord montrer les deux résultats suivants.
On a un théorème un tout petit peu plus général que Cauchy, voir l'exercice 51.

Théorème 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. En considérant la série $\sum_{n\geq 0} u_n$, en notant $\ell = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$, ($\limsup_{n\to+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} u_k$) :

1. si $\ell > 1$, la série diverge grossièrement.
2. si $\ell < 1$, la série converge absolument.
3. si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Démonstration.

1. Dans ce cas, à partir d'un certain rang N, $\sum_{k\geq N} \sqrt[k]{u_k} \geq \ell - \frac{\ell-1}{2} > 1$ donc u ne peut pas tendre vers 0 (raisonner par l'absurde) : la série diverge grossièrement.
2. Dans ce cas, à partir d'un certain rang N, $\sum_{k\geq N} \sqrt[n]{u_n} \leq \ell - \frac{1-\ell}{2} < 1$ et puisque le sup est un majorant, $\forall k \geq N$, $\sqrt[k]{u_k} \leq \sum_{k\geq N} \sqrt[n]{u_n} \leq \ell - \frac{1-\ell}{2} < 1$ et on est ramené à comme avant.
3. Les mêmes exemples fonctionnent. (la notion de limite et limite supérieure coïncident quand la suite converge. En fait, la limite supérieure est caractérisée comme étant la plus grande valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$).

□

Et bien avec ce dernier théorème, le critère de Cauchy-Riemann tombe automatiquement : on regarde la série $\sum a_n z^n$ et le critère de Cauchy donne, en notant $\ell = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} z$, le rayon de convergence est donc donné par

$$1/R = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Exercice 65 (Calcul de rayon de convergence)**.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

a) $\dfrac{1}{n(n+2)}$ b) H_n c) $n^{(-1)^n}$ d) $\mathbb{1}_{\mathcal{P}}(n)$ e) $\pi^{\sqrt{n}}$

Corrigé :

1. On trouve 1 par d'Alembert. Pour la calculer, on fait un DSE. Ensuite, on ruse en disant que $\dfrac{x^n}{n+2} = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{x^{n+2}}{n+2}$.
2. On trouve 1 par d'Alembert. Pour la calculer, on remarque que c'est le produit de Cauchy $\sum x^n$ avec $\sum x^n/n$ dont on connait les développements en séries entières.
3. C'est un terme qui est un $o(n)$ donc $R \geq 1$. Pour $x = 1$, $(a_n)_n$ n'est pas bornée, le rayon est au plus 1. Pour la calculer, on regarde $\sum nx^n$, ses termes pairs et impairs. On remarque que le rayon de convergence de la série des termes pairs est 1, de même que pour les termes impairs et
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2n)x^{2n} = 2x^2\sum_{n=1}^{+\infty}n(x^2)^{n-1} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$$
par dérivation. Par ailleurs,
$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$
4. C'est bornée par 1 donc $R \geq 1$. Pour $x = 1$, $(a_n)_n$ n'est pas bornée, le rayon est au plus 1.
5. On remarque que $\dfrac{\pi^{\sqrt{n+1}}}{\pi^{\sqrt{n}}} \sim \pi^{1/\sqrt{n}}$ donc par d'Alembert, le rayon vaut 1.

Exercice 66. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $r \in]0, R[$.

1. Etablir la convergence normale sur $[0, 2\pi]$ de $\theta \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{i(n-k)\theta}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une formule intégrale de Cauchy :
$$\forall k \in \mathbb{N}, 2\pi r^k a_k = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta.$$
3. On suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante. C'est presque le théorème de Liouville !

Remarques. Un théorème dû à Cauchy dit la chose suivante : sous certaines hypothèses,
$$\forall z_0 \in D(a, r), \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = 2i\pi f(z_0).$$
On a établi un cas particulier ici, et bien sûr, le fait que f soit somme d'une série entière entraine les « hypothèses ».

Le théorème de Liouville dit la chose suivante : si f est dérivable au sens complexe (holomorphe) sur tout $\mathbb{C}$ et bornée, alors f est constante. Une application directe est le théorème de d'Alembert-Gauss. Si P est un polynôme de degré au moins 1 qui ne s'annule pas, $1/P$ est holomorphe et est bornée en l'infini donc est bornée tout court. Donc $1/P$ est constant, donc P aussi. Absurde !

Corrigé :

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [0, 2\pi], |a_n r^n e^{i(n-k)\theta}| = |a_n r^n| \in \ell^1(\mathbb{N}).$$
Donc la série converge normalement sur tout $[0, 2\pi]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Alors
$$f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} = \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{i(n-k)\theta}.$$
On vient d'établir la convergence normale de cette série. Par le théorème d'interversion série-intégrale sous convergence normale, on a
$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta = \sum_{n\geq 0} a_n r^n \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta}\mathrm{d}\theta}_{2\pi\delta_{n,k}} = 2\pi a_k r^k.$$

3. Soit M tel que $|f| \leq M$. Alors
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, |a_k| = \frac{1}{2\pi r^k}\left|\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi} M\mathrm{d}\theta = \frac{M}{r^k}.$$
Lorsque r tend vers l'infini, on a donc $a_k = 0$ pour tout $k \geq 1$. Donc $f = a_0$.

Exercice 67 (Nombre de dérangement)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit D_n le nombre de dérangement dans $[\![1, n]\!]$ (c'est-à-dire des éléments de $\mathfrak{S}_n$ sans points fixes).

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.
2. On considère la série génératrice exponentielle de $(D_n)_n$ (à savoir $\displaystyle\sum_{n\geq 0} D_n \frac{z^n}{n!}$) et on note D sa somme. Montrer que son rayon de convergence R est supérieur ou égal à 1. En déduire $D(z)$ pour $z \in D(0, 1)$.
3. Calculer D_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé :

1. On compte les permutations de $\mathfrak{S}_n$ comme suit :
   - On fixe le nombre de points fixes d'une permutation. Disons k.
   - On choisit les points fixes. Il y a $\binom{n}{k}$ choix.
   - On dérange les éléments restants (il ne doit pas y avoir de points fixes). Il y a, par définition, D_{n-k} choix.
   - On obtient alors de manière unique une permutation.

   Ainsi,
$$|\mathfrak{S}_n| = n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k.$$

2. Clairement, $0 \leq \dfrac{D_k}{k!} \leq 1$ pour tout $k \geq 0$. Ainsi, D définit une série entière de rayon $R \geq 1$ par le lemme d'Abel. Remarquons qu'en divisant par $n!$, on a
$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{D_k}{k!}\frac{1}{(n-k)!} = \sum_{p+q=n} \frac{D_p}{p!}\frac{1}{q!}.$$
On reconnait un produit de Cauchy. En fait, pour tout $|z| < 1$,
$$\sum_{n\geq 0} \frac{D_n}{n!} z^n \sum_{\ell\geq 0} \frac{z^\ell}{\ell!} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{p+q=n} \frac{D_p}{p!}\frac{1}{q!}\right) z^n = \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

donc $\forall |z|<1, D(z)e^z = \dfrac{1}{1-z}$. On en déduit

$$\forall |z|<1, D(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

3. Eh bien, calculons $D(z)$ pour $|z|<1$. On a

$$\frac{e^{-z}}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n \sum_{\ell=0}^{+\infty} z^\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!} z^n.$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall k \geq 0, \frac{D_k}{k!} = \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p}{p!}.$$

On reconnait à droite une série alternée. Notons $R_k = \displaystyle\sum_{n\geq k+1} \frac{(-1)^n}{n!}$. Alors

$$\forall k \geq 0, \frac{D_k}{k!} = \frac{1}{e} - R_k.$$

Ainsi,

$$\frac{k!}{e} + \frac{1}{2} = D_k + \frac{1}{2} + k! R_k.$$

Par le critère spécial des séries alternées, $|R_k| \leq \dfrac{1}{(k+1)!}$ pour $k \geq 1$, donc $|k!R_k| < \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\dfrac{1}{2} + k!R_k$ est compris entre 0 et 1 donc la partie entière de $D_k + \dfrac{1}{2} + k!R_k$ est D_k (car D_k est entier) pour tout $k \geq 1$. De fait,

$$\forall k \geq 1, D_k = \left\lfloor \frac{k!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Exercice 68 (Un calcul)**.**
Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \right)$. On commencera bien sûr par justifier l'existence.

Corrigé : On commence par étudier la convergence de la série.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$. On veut appliquer le critère spécial des séries alternées.

Décroissance de (u_n).

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k+1} \\ &= \frac{1}{n+2} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= \frac{1}{n+2} \left((n+1)u_n + \frac{1}{2n+3} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} \left((n+1)u_n + \frac{1}{2n+3} - (n+2)u_n) \right) = \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{2n+3} - u_n \right).$$

Or $(u_n)_n$ est la moyenne de $n+1$ termes supérieurs à $\dfrac{1}{2n+1}$, d'où $u_n \geq \dfrac{1}{2n+1} \geq \dfrac{1}{2n+3}$.
Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et $(u_n)_n$ est décroissante.

Limite de (u_n).

$$(n+1)u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} \sim \ln(2n+1) \sim \ln(n)$$

Ainsi $u_n = O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ et en particulier, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Comme de plus $(u_n)_n$ est une suite décroissante, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n\geq 1}(-1)^n u_n$ converge.

On s'intéresse maintenant au calcul de la somme.

On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n x^n$ et on note R son rayon de convergence. On veut calculer $g(1)$.

D'après l'étape précédente, $g(1)$ converge et donc $R \geq 1$. *On peut montrer avec le critère de d'Alembert que* $R = 1$. Cela nous assure que g est continue sur $]-1,1[$ au pire, mais on aimerait que g soit continue en 1.

Montrons donc que g est continue sur $[0,1]$. Soit $x \in [0,1]$:
— La suite $(u_n x^n)_n$ est à termes positifs ;
— La suite $(u_n x^n)_n$ est décroissante (c'est un produit de deux suites positives décroissantes) ;
— La suite $(u_n x^n)_n$ converge vers 0.
D'après le critère spécial des séries alternées :
— $\sum_{n\geq 1}(-1)^n u_n x^n$ converge ;
— Le reste $R_n(x)$ vérifie : $\forall x \in [0,1]$, $|R_n(x)| \leq |u_n x^n| \leq u_n$.
Donc $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la série converge uniformément.
Par théorème de continuité des séries de fonctions, g est continue sur $[0,1]$.

On souhaite trouver une autre formule pour

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}(-x)^n\right)\right).$$

Cette dernière expression suggère de calculer le produit de Cauchy de deux séries bien choisies :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{2n+1}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}(-1)^{n-k}\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{2k+1}\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_n(-x)^n.\end{aligned}$$

Mais on connait une expression pour chacune de ces deux séries. Soit $x \in [0,1[$.
D'une part,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \frac{1}{1+x},$$

d'autre part,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{x}} = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

On obtient donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)u_n x^n = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Comme la série converge normalement sur $]-1,1[$ et donc sur $[0,x]$ pour $x \in [0,1[$, on peut intégrer terme à terme :

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n x^{n+1} = \int_0^x \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt,$$

le terme de gauche valant $xg(x)$. Par continuité de g en 1, on a alors

$$\begin{aligned} g(1) &= \int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\arctan(u)}{u(1+u^2)} 2udu \qquad \text{en posant } t = u^2,\ dt = 2udu \\ &= \int_0^1 2\arctan'(u)\arctan(u) du \\ &= \left[(\arctan(u))^2\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

Exercice 69 (Un calcul 2)**.** D.S.E. de $f := \arcsin^2$.

Corrigé : déjà, sur $]-1,1[$, $\arcsin^2$ est développable en série entière en tant que produit de fonctions développables en série entière arcsin et elle-même – pour voir que arcsin est développable en série entière, on dérive et on reconnait une fonction développable en série entière que l'on intègre – [1]. Soit donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière définie sur $]-1,1[$ coïncidant avec f. On a

$$\forall x \in]-1,1[, f'(x) = \frac{2\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

donc

$$\forall x \in]-1,1[, (1-x^2)f'^2(x) = 4f(x).$$

On redérive :

$$\forall x \in]-1,1[, -2xf'^2(x) + 2f'(x)f''(x)(1-x^2) = 4f'(x)$$

ce qui donne finalement

$$\forall x \in]-1,1[, (1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2.$$

Place aux séries entières. Soit $x \in]-1,1[$.

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

et

$$xf'(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n.$$

Ainsi,

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n.$$

1. toute cette phrase, c'est sur $]-1,1[$.

En arrangeant les degrés,

$$2a_2 + 6a_3x - a_1x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + na_n)\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+1)(n+2)a_{n+2} - n^2 a_n\Big)\, x^n.$$

Cette quantité vaut 2 donc :

$$2a_2 = 2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

Puisque $f(0) = 0, f'(0) = 0$, on a $a_0 = a_1 = 0$. Par récurrence immédiate, les termes impairs sont nuls. Pour les termes pairs, une récurrence immédiate montre

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{2n} = \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{n(2n-1)!}.$$

Exercice 70. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant

$$c_0 = 1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}.$$

On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ pour x réel de rayon de convergence $R > 0$.

1. Montrer que $\forall x \in]-R, R[, f(x) = 1 + xf^2(x)$.
2. Donner une expression de f (on remarquera qu'il suffit d'imposer une condition sur R pour avoir une expression simple).
3. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ est développable en série entière sur $]-1/4, 1/4[$.
4. En déduire une expression close de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On cherche à donner du contexte sur l'apparition des $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On se place dans le carré $[\![0, n-1]\!]^2$. Une particule se trouve en position $(0,0)$ et ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut de sa position (tout en restant dans le carré). Combien existe-t-il de chemin la menant vers $(n-1, n-1)$ sachant qu'elle ne peut se trouver en position (i, j) avec $j > i$?
   (b) On dit qu'un mot est bien parenthésé lorsqu'il est soit vide, soit pour toute parenthèse fermée, il existe une parenthèse ouverte placée avant qui enferme un mot bien parenthésé. Par exemple, « (()) » est bien parenthésé, « ())(» ne l'est pas. Combien existe-t-il de mot bien parenthésé de taille $2n$?
   (c) On considère un cercle et $2n$ points de ce cercle. A chaque point, on le relie à un unique autre point. On dit que la configuration des cordes est admissible lorsque aucune corde ne s'intersecte entre elles. Combien de configurations admissibles existe-t-il ?

Corrigé :

1. Soit $x \in]-R, R[$. Alors par produit de Cauchy,

$$f^2(x) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} c_p x^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} c_q x^q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} c_p c_q\right) x^n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}1+xf^2(x) &= 1+x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n}c_pc_q\right)x^n\\ &= 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n}c_pc_q\right)x^{n+1}\\ &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\sum_{p+q=n-1}c_pc_q\right)}_{=c_n}x^n\\ &= c_0x^0+\sum_{n=1}^{+\infty}c_nx^n\\ &= f(x).\end{aligned}$$

2. Soit $x\in]0,R[$. Alors

$$xf^2(x)-f(x)+1=0\iff f^2(x)-\frac{1}{x}f(x)+\frac{1}{x}=0\iff\left(f(x)-\frac{1}{2x}\right)^2\underbrace{-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x}}_{=-\frac{1-4x}{4x^2}}.$$

Ainsi, dès lors que $1-4x\geq 0$ à savoir $x\leq\frac{1}{4}$, on a $f(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$. Si le signe devant la racine est $+$, alors en 0, f tend vers l'infini ce qui n'est pas : c'est donc un $-$. On a le même résultat sur $]-R,0[$. Ainsi, pour $R<1/4$, on a

$$\forall x\in]-R,R[\backslash\{0\},f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

3. On rappelle le D.S.E. de $\sqrt{1-x}$. Pour $x\in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-(n-1))}{n!}(-x)^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{2}-k)}{n!}(-1)^nx^n.\end{aligned}$$

Or

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-2k}{2}\right)=\frac{1}{2^n}(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1)=\frac{1}{2^n}(-1)^{n+1}\prod_{k=1,k\text{ impair}}^{2n-3}k.$$

Pour conclure, on écrit

$$\prod_{k=1,k\text{ impair}}^{2n-3}k=\frac{1}{2n-1}\prod_{k=1,k\text{ impair}}^{2n-1}k=\frac{1}{2n-1}\frac{\overbrace{\prod_{k=1,k\text{ impair}}^{2n-1}k\prod_{k=1,k\text{ pair}}^{2n}k}^{=(2n)!}}{\prod_{k=1}^{n}2k}=\frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^nn!}.$$

On a donc

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^nn!}=\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{4^nn!(2n-1)}.$$

Finalement,

$$\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{2}-k)}{n!}(-1)^n=-\frac{(2n)!}{n!^2}\frac{1}{4^n(2n-1)}$$

ce qui donne

$$\sqrt{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \frac{1}{2n-1} x^n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} &= \frac{1}{2x}\left(1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \frac{1}{2n-1} (4x)^n\right) \\
&= \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1} x^n \\
&= \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{2n+1} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{4n+2} x^n.
\end{aligned}$$

4. Pour $x \in]-1/4, 1/4[$, on a donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{4n+2} x^n.$$

Par unicité du D.S.E., on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{4n+2} = \frac{(2n)!(2n+1)2(n+1)}{n!^2(n+1)^2} \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{(2n)!}{n!^2(n+1)} = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}.$$

5. (a) Pour $n = 0$, il y a 1 seul chemin. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour construire un tel chemin, il suffit de construire un chemin qui va de $(0,0)$ à (k,k) (il y a par hypothèse c_k chemins possibles) puis de (k,k) à (n,n) (c'est-à-dire autant de chemin que pour aller de $(0,0)$ à $(n-k, n-k)$ à savoir c_{n-k-1} choix) et ce, pour chaque k dans $[\![0, n-1]\!]$. On a donc

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}.$$

(b) Pour $n = 0$, il y a un seul mot qui est le mot vide, bien parenthésé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour construire un mot bien parenthésé de taille $2n$, je note $0, \cdots, 2n-1$ les positions des parenthèses. Je note alors N la position de la parenthèse fermée qui ferme la parenthèse ouverte en position 0. k est nécessairement impair, je le note $2k+1$. Alors il suffit de construire un mot bien parenthésé entre les indices 0 et $N-1$ (donc un mot de taille $2k+1-1 = 2k$ donc c_k choix) puis un mot bien parenthésé entre les indices $N+1$ et $2n-1$ (donc un mot de taille $2n-1-N-1+1 = 2(n-k-1)$ donc c_{n-1-k} choix). Choisir N revient à choisir k dans $[\![0, n-1]\!]$ donc

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}.$$

(c) C'est la même preuve que le cas précédent, les arêtes étant davantage géométrique.

Chapitre 11

Espace euclidien

Exercice 71.
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, un espace euclidien et $(e_1, \cdots, e_p)$, une famille de vecteurs de E de norme 1 telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle^2$. Montrer que $(e_1, \cdots, e_p)$ forme une base orthonormée de E.

Corrigé : Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Alors pour $x = e_j$, on a

$$1 = \sum_{k=1}^{p} \langle e_i, e_k\rangle^2 = \sum_{k\neq i} \langle e_i, e_k\rangle^2 + \|e_i\|^2.$$

Donc $\sum_{k\neq i} \langle e_i, e_k\rangle^2$ est nulle, donc e_i est orthogonal à tous les $e_k, k \neq i$. Ainsi, les $(e_1, \cdots, e_p)$ forment bien une famille orthogonale. Unitaire, elle est donc orthonormée.
Elle est donc libre. Reste à montrer le caractère générateur. Pour cela, posons $F = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. On veut montrer que $F^\perp = \{0\}$. Soit $x \in F^\perp$. Alors x est orthogonal à tous les e_k donc la formule donne $\|x\|^2 = 0$. Donc $F^\perp = \{0\}$. Ainsi, $(F^\perp)^\perp = F = \{0\}^\perp = E$. (On a bien que le biorthogonal donne l'espace initial car E est euclidien).

Exercice 72 (Distance)**.**
Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (te^t - (at+b))^2 \mathrm{d}t$.

Corrigé : On se place dans $E = \text{Vect}(f : t \mapsto te^t, g : t \mapsto t, h : t \mapsto 1)$, muni du produit scalaire usuel sur les fonctions continues sur $[0, 1]$. On note $F = \text{Vect}(t \mapsto t, t \mapsto 1) \simeq \mathbb{R}_1[X]$. On a alors que

$$\int_0^1 (te^t - (at+b))^2 \mathrm{d}t = \|f - (ag + bh)\|^2$$

donc

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (te^t - (at+b))^2 \mathrm{d}t = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|f - (ag+bh)\|^2 = d(f, \mathbb{R}_1[X])^2.$$

Méthode : (pour calculer $d(x, F)$ avec $x \in E$ et F sev de E)

1. Trouver une famille libre de F.
2. L'orthonormaliser. On note cette famille $(e_1, \cdots, e_p)$.
3. Utiliser $d(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle^2}$

Ici, j'ai comme famille libre g, h (qui correspondent à 1 et X). Il faut l'orthonormaliser pour le produit scalaire choisi. Clairement, h est de norme 1 pour la norme induite par le produit scalaire. Notons alors $e_1 = h$. En réalisant Gram-Schmidt, on obtient $f_2 = g - \langle g, e_1\rangle e_1$ *i.e.* $f_2 : t \mapsto t - \int_0^1 t\mathrm{d}t = t - \frac{1}{2}$. Il ne reste qu'à normaliser f_2. On regarde

$$\int_0^1 f_2^2 = \int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Donc $e_2 = \sqrt{12} f_2 = \sqrt{3}(2g - e_1)$.
Il reste à appliquer la formule de la distance. Déjà la norme de f au carré.

$$\|f\|^2 = \int_0^1 f^2 = \int_0^1 t^2 e^{2t}\mathrm{d}t \underset{\text{c.f. ex ??}}{=} \frac{e^2 - 1}{4}.$$

Ensuite, les produits scalaires au carré :

$$\int_0^1 f \times 1 = \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t\mathrm{d}t = 1$$

$$\int_0^1 f(t)(\sqrt{3}(2t-1))\mathrm{d}t = 2\sqrt{3}\int_0^1 t^2 e^t t - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\left[t^2e^t\right]_0^1 - \left[2te^t\right]_0^1 + \int_0^1 2e^t\mathrm{d}t\right) - \sqrt{3} = \sqrt{3}(2e-5).$$

Donc

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (te^t - (at+b))^2\mathrm{d}t = \frac{e^2-1}{4} - 1 - 3(2e-5)^2 = -\frac{1}{4}(305 - 240e + 47e^2).$$

(Confirmé par WolframAlpha®).

Exercice 73 (Polynômes orthogonaux)**.**
Soit $a < b$, deux réels, $I = [a, b]$. Soit $\omega : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue et strictement positive sur I.

1. Montrer que $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ muni de l'application

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle : & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_a^b fg\omega \end{array}$$

   est un espace préhilbertien réel.
2. Montrer qu'il existe, dans $\mathbb{R}[X]$, une base orthogonale pour ce produit scalaire de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$ et $\mathrm{cd}(P_n) = 1$. Y a-t-il unicité ?
3. Montrer que les $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont scindés à racines simples, et que ces racines sont dans $]a, b[$.

Remarque : il y a encore tant à dire à propos des polynômes orthogonaux...

Corrigé :

1. Le fait que c'est bien un produit scalaire est la même preuve que pour le produit scalaire intégral usuel, et les arguments fonctionnent car ω est continue et strictement positive.
2. On réalise une sorte de Gram-Schmidt. Toutefois, nous devons procéder par récurrence étant donné que la suite des polynômes est une suite infinie. On considère la famille libre $(1, X, \cdots, X^n, \cdots)$ de $\mathbb{R}[X]$. On fera ici l'abus de notation entre un polynôme $P(X)$ et la fonction polynômiale associée $x \mapsto P(x)$. On fait Gram-Schmidt sur la famille puis on multiplie par l'inverse du coefficient dominant pour avoir des polynômes unitaires. Remarquons que l'on obtient une famille échelonnée en degré. On dispose de l'unicité. En effet, soit $(P_n)_n, (Q_n)_n$, deux bases de $\mathbb{R}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\|P_n - Q_n\|^2 = \langle P_n - Q_n, P_n\rangle - \langle P_n - Q_n, Q_n\rangle.$$

Or, $P_n - Q_n$ est de degré $n-1$ car c'est la différence de deux polynômes unitaires de degré n. De fait, P_n est orthogonal à $P_n - Q_n$ (il suffit de décomposer $P_n - Q_n$ dans la base $(P_0, \cdots, P_{n-1})$ par exemple). Ainsi, puisque le raisonnement marche pour Q_n, les deux produits scalaires sont nuls. De fait,

$$\|P_n - Q_n\|^2 = 0.$$

Ainsi, $P_n = Q_n$. Cela étant vrai pour tout n, on obtient l'unicité voulue.

3. Fixons n. Soit $x_1, \cdots, x_d$, les racines dans $]a,b[$ de multiplicités impaires de P_n . Notons $Q = \prod_{i=1}^{d}(X - x_i)$.

   S'il n'existe pas de racines, on note $Q = 1$. Alors P_nQ est positif. (preuve : voir (*)). Si $d = n$, alors $P_n = Q$ et P_n est scindé à racines simples, à racines dans $]a,b[$. D'où le résultat. Supposons $d \leq n-1$ donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Clairement, Q divise P_n. Notons T, le quotient. On a alors

   $$P_nQ = TQ^2.$$

   On en déduit donc que $P_nQT \geq 0$. Or, T n'a, par définition, aucune racine impaire, car sinon, elle serait dans Q. Donc Q ne change pas de signe sur $]a,b[$. Donc P_nQ est positif. De l'égalité

   $$\langle P_n, Q\rangle = 0,$$

   on en tire $P_nQ\omega = 0$ sur $[a,b]$ car $\langle P_n, Q\rangle = 0$ est une intégrale nulle d'une fonction continue positive. ω étant strictement positive, j'ai donc $P_nQ = 0$ sur $[a,b]$. $[a,b]$ étant infini, $P_nQ = 0$ dans $\mathbb{K}[X]$. Absurde car $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

Exercice 74 (Obtusangle)**.**
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle$, un espace préhilbertien réel. On dit que $(x_0, \cdots, x_p)$ est obtusangle si $\forall (i,j) \in [\![0,p]\!]^2, i \neq j \Longrightarrow \langle x_i, x_j\rangle < 0$. Montrer que $(x_0, \cdots, x_p)$ obtusangle implique $(x_1, \cdots, x_p)$ libre.

Corrigé : Supposons-la liée. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, des réels non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$. Alors

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underbrace{\langle x_i, x_0\rangle}_{<0} = 0$$

Ainsi, en considérant

$$I = \{i \in [\![1,p]\!] : \lambda_i > 0\} \text{ et } J = \{j \in [\![1,p]\!] : \lambda_j < 0\},$$

ces deux ensembles sont non vides. On a de plus

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = -\sum_{j\in J} \lambda_j x_j =: x.$$

Alors

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = -\left\langle \sum_{i\in I} \lambda_i x_i, \sum_{j\in J} \lambda_j x_j \right\rangle = -\sum_{(i,j)\in I\times J} \underbrace{\lambda_i\lambda_j}_{<0} \underbrace{\langle x_i, x_j\rangle}_{<0} < 0$$

car $I \times J$ est non vide. Absurde.

Exercice 75.
Soit E, un espace euclidien et p, un projecteur sur E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. p est un projecteur orthogonal.
2. $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

3. $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux.

Corrigé : Procédons par équivalence successives.

$1 \Longrightarrow 2$ Supposons p orthogonal. Soit $x \in E$. Alors $\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$. De fait, $\|x\|^2 \geq \|p(x)\|^2$ et en passant à la racine, on a le résultat.

$2 \Longrightarrow 3$ Soit $(x, y) \in \ker(p) \times \mathrm{Im}(p)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $p(\lambda x + y) = p(y) = y$. De fait

$$\|p(\lambda x + y)\|^2 = \|y\|^2 \leq \|\lambda x + y\|^2 = \|y\|^2 + \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle.$$

De fait, la fonction polynômiale $\lambda \mapsto \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle$ est positive, donc de discriminant négatif. Son discriminant est négatif si, et seulement si $\langle x, y\rangle^2 \leq 0$ ce qui signifie que $\langle x, y\rangle = 0$. Ainsi, $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux.

$3 \Longrightarrow 1$ C'est la définition puisque p est un projecteur.

Exercice 76. Une symétrie par rapport à un hyperplan est appelée réflexion par rapport à cet espace. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. Le théorème de Cartan-Dieudonné assure que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ est engendré par n réflexions. Nous ne contenterons ici que de montrer que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ est engendré par des réflexions.

1. Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$ avec $\|X\| = \|Y\|$ et $X \neq Y$. Soit $H = (X - Y)^\perp$ et s une symétrie par rapport à H. Montrer que $s(X) = Y$.
2. Soit $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Soit F un sous-espace stable par M. Montrer que $F^\perp$ aussi.
3. Conclure.

Corrigé :

1. On remarque que $X + Y$ et $X - Y$ sont orthogonaux. En posant $X = \frac{1}{2}(X + Y) + \frac{1}{2}(X - Y)$, on a $s(X) = Y$.
2. Une isométrie est inversible donc $\dim(u(F)) = \dim(F)$. Ainsi, par dimension, $u(F) = F$. Soit $X \in F^\perp$. Alors $\forall y \in F, \langle u(X), u(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle = 0$. Donc $\forall Y \in F, u(X) \perp u(Y)$ donc $u(X) \perp u(F) = F$ donc $u(X) \in F^\perp$.
3. Montrons par récurrence sur $p \leq n$ que

   $$\text{si } u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \dim(\ker(u - \mathrm{Id})) = p, \text{ alors } u \text{ s'écrit comme un produit de réflexions.}$$

   Si $p = n$, alors $u = \mathrm{Id}$ qui est un produit de 0 réflexion. Supposons $H_n, \cdots, H_{p+1}$ pour $p \in [\![1, n-1]\!]$ vraie. Soit $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Soit $F = \ker(u - \mathrm{Id})$ de dimension p. On souhaite alors montrer qu'il existe une réflexion s telle que $\ker(s \circ u - \mathrm{Id})$ soit de dimension strictement supérieur à p.

   Soit $X \in F^\perp$. Alors $X \notin F$ donc $u(X) \neq X$ mais on a toujours $\|u(X)\| = \|X\|$. Appliquons donc la question 1. Soit s réflexion par rapport à $\langle X - u(X)\rangle^\perp$ vérifiant $s(u(X)) = X$. Alors on a $X \in \ker(s \circ u - \mathrm{Id})$.

   En montrant que $F \subset \ker(su - \mathbb{I})$, on aura le résultat : il suffit donc de montrer que pour tout $Z \in F$, $s(Z) = Z$. Par 2, $X - u(X) \in F^\perp$. De fait, $Z \in \langle X - u(X)\rangle^\perp$ et $s(Z) = Z$. Ainsi, $F \subset \ker(s \circ u - \mathrm{Id})$ mais X est orthogonal à F donc $F \oplus \mathrm{Vect}(X) \subset \ker(s \circ u - \mathrm{Id})$ qui est de dimension au moins $p+1$ mais majoré par n. Par récurrence forte, comme $s \circ u$ est une isométrie ($\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ est stable par composition), $s \circ u$ est un produit de réflexions donc en multipliant à gauche par $s^{-1} = s$ qui est une réflexion, on obtient que u est aussi un produit de réflexion.

   Par le principe de récurrence, pour tout $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, comme $\dim(\ker(u - \mathrm{Id})) \in [\![0, n]\!]$, u s'écrit comme un produit de réflexions.

Exercice 77. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit normal lorsque $uu^* = u^*u$. Les endomorphismes autoadjoints et les isométries sont normaux. On sait réduire les réduire mais on peut faire plus général : l'exercice

propose de réduire des normaux. Soit donc E un espace euclidien [a] de dimension finie n.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u. Montrer qu'alors, si u est normal, u_F est normal.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Montrer que $\mathcal{E}_\lambda^\perp$ est stable par u^*.
3. Cas de la dimension 2. On suppose que $n = 2$ dans cette question. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Montrer que soit u est diagonalisable, soit u est une similitude, c'est-à-dire, s'écrit dans une base orthonormale,
$$M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
avec $b \neq 0$.
4. Montrer le théorème suivant : pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormale de E telle que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \boxed{s_1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{s_p} \end{pmatrix}$$
où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont des réels et $s_1, \cdots, s_p$ sont des similitudes.

a. on rappelle donc que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Corrigé :

1. Si F est $\{0\}$ ou E, il n'y a rien à faire. Soit donc F un sous-espace vectoriel non trivial de E. Alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$. Soit $\mathcal{B}_F$ base de F. En considérant une base $\mathcal{B}_{F^\perp}$ de $F^\perp$ et en les concaténant, on obtient une base $\mathcal{B}$ de E. Alors
$$M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
avec $A \in \mathcal{M}_{\dim(F)}(\mathbb{R})$. Mais M est alors normal donc par produit par blocs,
$$M^T M = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T A & * \\ * & B^T B + C^T C \end{pmatrix}$$
et
$$MM^T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T + BB^T & * \\ * & CC^T \end{pmatrix}.$$
Ainsi, on a $A^T A = AA^T + BB^T$. En prenant la trace, puisque $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, on a $\mathrm{tr}(BB^T)$ donc $B = 0$ [1]. Ainsi,
$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
donc $u(F^\perp) \subset F^\perp$: $F^\perp$ est stable par u. De plus, $A^T A = AA^T$ donc A est normal et puisque A vaut $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F)$ (par stabilité de F par u, u_F est normal. $C^T C = CC^T$ et puisqu'on a finalement montré que $F^\perp$ est stable par u, on a $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{F^\perp}}(u_{F^\perp})$ donc $u_{F^\perp}$ est normal.
2. Comme u et u^* commutent, $\mathcal{E}_\lambda$ est stable par u^*. Par la question précédente, $\mathcal{E}_\lambda^\perp$ est stable par $u^{**} = u$.
3. Soit E de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal.

1. on rappelle que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB^T)$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- Si u admet une valeur propre réelle, soit x un vecteur propre que l'on prend unitaire, quitte à diviser par sa norme. Alors $x^\perp$ est une droite, disons engendré par un vecteur unitaire y. $\mathbb{R}y$ est stable par u en vertu du lemme donc u admet deux droites stables distinctes qui sont $\mathbb{R}x$ et $\mathbb{R}y$: u est diagonalisable et (x, y) forme une base orthonormée de E donc u est diagonalisable en base orthonormée.
- Sinon, u n'a pas de valeur propre réelle et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. M est normale donc $M^TM = MM^T$ et on obtient en identifiant les coefficients $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$ et $ab + cd = ac + bd$. Si $b = 0$, u admet des valeurs propres ce qui est exclu. Si $b = c$[2], $\chi_u = X^2-(a+d)X+ad-b^2$ de discriminant $(a+d)^2-4(ad-b^2) = (a-d)^2+4b^2 \geq 0$ donc u admet des valeurs propres ce qui est exclu. Donc $b = -c$ et nécessairement $a = d$. Ainsi, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

4. On fait une récurrence sur la dimension de E.
   - Si E est de dimension 1, il n'y a rien à faire.
   - La dimension 2 est traitée avant.
   - Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$ pour $n \geq 3$ et montrons le résultat au rang n. Soit donc E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.
     - Si u admet une valeur propre réelle λ, soit e_1 un vecteur propre unitaire associé à cette valeur propre pour u. Alors $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est un espace euclidien de dimension $n-1$ et puisque u est normal et stabilise $(\mathbb{R}e_1)$, il stabilise $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ et $u_{(\mathbb{R}e_1)^\perp}$ est normal en vertu du lemme : on applique alors l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$: on obtient alors une base orthonormale de $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ notée $\mathcal{B}_1$ où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ a la forme voulue : alors la concaténation $\mathcal{B}$ entre $\{e_1\}$ et $\mathcal{B}_1$ fournit une base orthonormée de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ a la forme voulue.
     - Si u n'admet pas de valeur propre réelle, considérons μ_u son polynôme minimal. μ_u n'admet pas de racines réelles – car sinon u admettrait une valeur propre réelle – donc on peut considérer $X^2 + aX + b =: P$ un facteur irréductible de μ_u et $N = \ker(P(u))$. Alors $N \neq \{0\}$[3] donc considérons $x \in N$ et montrons que $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u. Déjà, x et $u(x)$ forment une famille libre puisque x n'est pas vecteur propre pour u. $u^2(x) = -au(x) - bx$ donc $\mathcal{P}$ est bien stable par u. $u_{\mathcal{P}}$ est normal donc il existe (e_1, e_2) une base orthonormée de $\mathcal{P}$ telle que
     $$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u_{\mathcal{P}}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
     $u_{\mathcal{P}^\perp}$ est aussi normal d'après le lemme donc par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u_{\mathcal{P}})$ a la forme voulue. On conclut en concaténant les bases.

Par principe de récurrence, on a le résultat voulu.

Exercice 78. Soit M une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C_1, \cdots, C_n$, ses colonnes. Montrer que

$$|\det(M)| \leq \|C_1\| \cdots \|C_n\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$ (on identifie $\mathcal{M}_{n,1}$ à $\mathbb{R}^n$). On pourra traiter le cas M inversible ou non, et si M est inversible, essayer d'écrire $M = QR$ avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. Quel est le cas d'égalité ? (Ce résultat est connu sous le nom d'inégalité d'Hadamard).
Application : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\exists c \in \mathbb{R}^{+*}, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, |[M]_{i,j}| \leq c$. Montrer que $|\det(M)| \leq c^n n^{n/2}$.

2. Il est important de souligner qu'on ne veut pas utiliser le théorème spectral. En effet, un corollaire important de ce théorème est justement le théorème spectral.

3. en notant $\mu_u = PQ$, on a $0 = P(u)Q(u)$ avec $Q(u) \neq 0$ (par minimalité du polynôme minimal) donc $P(u)$ ne peut être injectif

Corrigé : Si les vecteurs colonnes sont liés, le déterminant est nul et le résultat est clair. Sinon, les $C_1, \cdots, C_n$ forment donc une base. On note $U_1, \cdots, U_n$, les vecteurs obtenus par Gram-Schmidt sur $C_1, \cdots, C_n$.

On rappelle le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On considère E un espace préhilbertien réel.
Entrée : on considère une famille libre $(e_1, \cdots, e_n)$.
Sortie : on obtient une famille orthonormale $(g_1, \cdots, g_n)$ vérifiant $\forall 1 \leq i \leq n, \text{Vect}(e_1, \cdots, e_i) = \text{Vect}(g_1, \cdots, g_i)$.

Considérons donc une famille libre $(e_1, \cdots, e_n)$ dans E. On montre par récurrence finie sur $k \in [\![1, n]\!]$ l'existence d'une telle famille.

- Pour $k = 1$, on dispose de e_1 qui est non nul. Ainsi, en considérant $g_1 = \dfrac{1}{\|e_1\|} e_1$, on a $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(g_1)$ et $\|g_1\| = 1$.
- Faisons le cas $k = 2$ pour la forme. Pour $k = 2$, on réalise deux étapes.
  1. On considère $f_2 \in \text{Vect}(e_1, e_2)$ de sorte que f_2 soit orthogonal à g_1.
  2. On normalise f_2 et on le note g_2.

  Pour la première étape, l'idée est de considérer $f_2 = e_2 - (e_2, g_1)g_1$. Alors $f_2 \in \text{Vect}(e_2, g_1) = \text{Vect}(e_2, e_1)$ et $(f_2, g_1) = (e_2, g_1) - (e_2, g_1)(g_1, g_1) = 0$ car $(g_1, g_1) = \|g_1\|^2 = 1$. *On retire la composante selon g_1 du vecteur e_2.*
  Pour la seconde étape, il suffit de vérifier que $f_2 \neq 0$. C'est le cas car la famille (e_2, g_1) est libre puisque (e_2, e_1) l'est. Ainsi, on peut considérer $g_2 = \dfrac{1}{\|f_2\|} f_2$.
  Il est primordial de savoir faire un dessin.

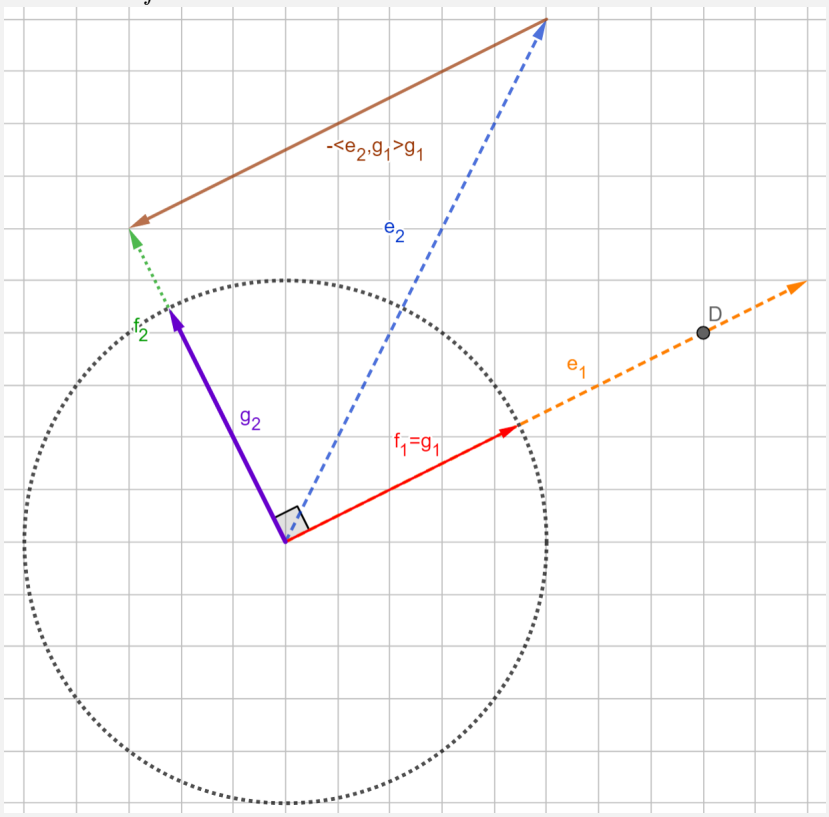


FIGURE 11.1 – Procédé de Gram-Schmidt sur deux vecteurs

On considère le vecteur e_1 et le vecteur e_2 qui forment une famille libre. On normalise le vecteur e_1 que l'on note g_1. Ensuite, on retire la composante de e_2 selon g_1 pour obtenir le vecteur f_2 que l'on normalise pour obtenir le vecteur g_2.
La famille (g_1, g_2) est donc bien orthonormée et vérifie $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(g_1), \text{Vect}(e_1, e_2) =$

$\mathrm{Vect}(g_1, g_2)$.

- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et supposons construit $g_1, \cdots, g_k$ de sorte que $(g_1, \cdots, g_k)$ soit orthogonale et

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_i) = \mathrm{Vect}(g_1, \cdots, g_i).$$

Soit $f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (e_{k+1}, g_i) g_i$. Alors

$$\forall j \in [\![1, k]\!], (f_{k+1}, g_j) = (e_{k+1}, g_j) - \sum_{i=1}^{k} (e_{k+1}, g_i) \underbrace{(g_i, g_j)}_{=\delta_{i,j}} = (e_{k+1}, g_j) - (e_{k+1}, g_j) = 0.$$

De plus, $\sum_{i=1}^{k} (e_{k+1}, g_i) g_i \in \mathrm{Vect}(g_1, \cdots, g_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ donc $f_{k+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$. Par liberté des $(e_1, \cdots, e_{k+1})$, comme le coefficient devant e_{k+1} est non nul et que la somme n'est pas dans $\mathrm{Vect}(e_{k+1})$, alors $f_{k+1} \neq 0$.
On peut donc considérer $g_{k+1} = \dfrac{1}{\|f_{k+1}\|} f_{k+1}$ et g_{k+1} est de norme 1 et orthogonaux aux autres $(g_i)_{1 \leq i \leq k}$, aussi dans $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$ donc $\mathrm{Vect}(g_1, \cdots, g_{k+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$.

- Par le principe de récurrence, on a construit une telle famille.

Remarquons que l'on a $(g_k, e_k) = \dfrac{1}{\|f_k\|} > 0$.

Soit P matrice de passage de $(U_1, \cdots, U_n)$ vers $(C_1, \cdots, C_n)$. Alors C_i s'exprime en fonction de $U_1, \cdots, U_i$ car $\mathrm{Vect}(C_1, \cdots, C_i) = \mathrm{Vect}U_1, \cdots, U_i$ donc P est triangulaire supérieure. En notant M, la matrice de passage de la base canonique à $(C_1, \cdots, C_n)$, on a $M = (U_1 | \cdots | U_n)P$. Puisque les $(U_1, \cdots, U_n)$ forment une famille orthonormale, $\det(U_1, \cdots, U_n) = 1$. De fait,

$$|\det(M)| = |\det(P)| = \left| \prod_{i=1}^{n} p_{i,i} \right|.$$

Or $|p_{i,i}| = |\langle C_i, U_i \rangle|$ étant donné que $\langle C_i, U_i \rangle$ donne exactement la composante devant U_i dans la décomposition de C_i dans la base $U_1, \cdots, U_n$ (on rappelle que $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ avec (e_i) une base orthonormée de E). Enfin, par Cauchy-Schwarz,

$$|\langle C_i, U_i \rangle| \leq \|C_i\|^2 \|U_i\|^2 = \|C_i\|^2,$$

car les $(U_1, \cdots, U_n)$ sont de norme 1. Ainsi, on a bien le résultat voulu. Le cas d'égalité correspond au cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, ce qui signifie que $U_i = \lambda C_i$ avec $\lambda \geq 0$. Autrement dit, il faut et suffit que les C_i sont deux à deux orthogonaux pour obtenir l'égalité.

Remarquons qu'on vient de démontrer la décomposition QR : en notant $Q = (U_1 | \cdots | U_n)$ et $R = P$, on a décomposé une matrice inversible M en QR avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive (les coefficients diagonaux de P sont égaux à $\langle C_i, U_i \rangle$ qui sont strictement positifs en vertu de la remarque à la fin du point sur Gram-Schmidt).

Application : il suffit de remarquer que $|C_i| \leq \sqrt{c^2 + c^2 + \cdots + c^2} = c\sqrt{n}$. Ainsi, $|\det(M)| \leq (\sqrt{n}c)^n = c^n n^{n/2}$.

Exercice 79. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ des vecteurs de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace préhilbertien réel.

1. On note $G(x_1, \cdots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$, matrice de Gram de $(x_1, \cdots, x_n)$. Montrer que $G(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{rg}(G(x_1, \cdots, x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, \cdots, x_n)$. On suppose dans la suite que $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre et on note $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$.

2. Soit $x \in E$. Montrer que
$$(d(x,F))^2 = \frac{\det(G(x,x_1,\cdots,x_n))}{\det(G(x_1,\cdots,x_n))}.$$
3. En déduire les résultats suivants :
   (a) $\det(G(x_1,\cdots,x_n)) \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.
   (b) Si on se donne $x_1,\cdots,x_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a $|\det(x_1,\cdots,x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_2$ où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$.
   (c) Les cas d'égalités dans les deux cas sont lorsque $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthogonale ou contient un vecteur nul.

Corrigé :

1. Une matrice de Gram est clairement symétrique réelle. Pour tout $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, on a
$$\sum_{1\leq i,j\leq n} \langle x_i,x_j\rangle \lambda_i\lambda_j = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\|^2 \geq 0$$
donc elle est positive. Considérons u, l'application qui à $x \in F$ associe $(\langle x,x_i\rangle)_{1\leq i\leq n}$, une application clairement linéaire. Elle est injective puisqu'un vecteur orthogonal à tous les x_i est dans $F \cap F^\perp = \{0\}$ donc est nul. Ainsi, le rang est invariant par composition par u ce qui donne le résultat voulu.

2. Soit $x = y + h \in F \oplus F^\perp$ [4] de sorte que $d := d(x,F) = \|h\|$. On a $\langle x,x\rangle = d^2 + \langle y,y\rangle$ et $\langle x,x_i\rangle = \langle y,x_i\rangle$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi, la première colonne de $G(x,x_1,\cdots,x_n)$ est
$$\begin{pmatrix} \|h\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle y,y\rangle \\ \langle y,x_1\rangle \\ \vdots \\ \langle y,x_n\rangle \end{pmatrix}.$$
et la première ligne est $(\|h\|^2 + \langle y,y\rangle, \langle y,x_1\rangle, \cdots, \langle y,x_n\rangle)$. Ainsi, en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, on a
$$\det(G(x,x_1,\cdots,x_n)) = \begin{vmatrix} \|h\|^2 & * \\ 0 & G(x_1,\cdots,x_n) \end{vmatrix} + G(y,x_1,\cdots,x_n).$$
Ce deuxième déterminant est nul et le premier vaut, par développement par rapport à la première colonne
$$\det(G(x,x_1,\cdots,x_n)) = \|h\|^2 \det(G(x_1,\cdots,x_n)).$$

3. On fait tout en même temps. Si la famille est liée – par exemple en contenant 0 –, il n'a rien à faire. Montrons par récurrence H_n : pour tout $(x_1,\cdots,x_n)$ famille libre de E, $\det(G(x_1,\cdots,x_n)) \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$ avec égalité si, et seulement si, la famille est orthogonale.
   - Pour $n = 1$, c'est clair.

4. On rappelle que F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale dans E préhilbertien réel si F est de dimension finie. En fait, il suffit que F soit fermé (donc F de dimension infinie ne dérange pas) mais encore mieux, la complétude suffit.

- Supposons le résultat acquis au rang n. Soit $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ une famille libre et on note F le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \cdots, x_n)$. Par la proposition précédente,

$$\begin{aligned}\det(G(x_1, \cdots, x_{n+1}) &= \det(G(x_1, \cdots, x_n))\|x_{n+1} - \pi_F(x_{n+1})\|^2 \\ &\leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \|x_{n+1} - \pi_F(x_{n+1})\|^2 \\ &\leq \prod_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2\end{aligned}$$

puisque $\|x_{n+1} - \pi_F(x_{n+1})\|^2 = \|x_{n+1}\|^2 - \|\pi_F(x_{n+1})\|^2 \leq \|x_{n+1}\|^2$. Il y a égalité dans la première inégalité si, et seulement si $(x_1, \cdots, x_n)$ est orthogonale. Il y a égalité dans la deuxième si, et seulement si, $\|\pi_F(x_{n+1})\|^2 = 0$ ce qui signifie que $x_{n+1} \in F^\perp$. On a donc montré H_{n+1}.

Par principe de récurrence, on a le premier point. En notant M la matrice de vecteurs colonnes les $(x_i)_i$ on a $G(x_1, \cdots, x_n) = M^T M$ et $\det(M^T) = \det(M)$ ce qui conclut.

Exercice 80. Soit E un espace euclidien et u autoadjoint positif (resp. défini positif). Montrer qu'il existe un unique endomorphisme autoadjoint positif (resp. défini positif) v tel que $u = v^2$. Montrer de plus que $v \in \mathbb{K}[u]$.

Corrigé : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres pour u et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels positifs valeurs propres associées respectivement aux $e_1, \cdots, e_n$. On définit $v(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors v convient clairement.

Réciproquement, soit w autoadjoint vérifiant $w^2 = u$. Alors w commute avec u donc laisse stable les espaces propres de u. Regardons w sur $\mathcal{E}_\lambda(u)$. Alors $w_{\mathcal{E}_\lambda(u)}$ est un endomorphisme autoadjoint positif dont le carré vaut $\lambda\mathrm{Id}$. Si cet induit admet une valeur propre, au carré, elle vaut λ_i donc cette valeur propre vaut nécessairement $\sqrt{\lambda_i}$ puisque par positivité de l'induit, les valeurs propres sont positives. Puisque l'induit conserve la diagonalisabilité, on en déduit que $w_{\mathcal{E}_\lambda(u)}$ vaut $\sqrt{\lambda}\mathrm{Id}$. Ainsi, pour tout $1 \leq i \leq n, w(e_i) = v(e_i)$ donc $w = v$ car ils coïncident sur une base.

Ensuite, on construit P, un polynôme vérifiant $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ par Lagrange. On a alors $P(u) = v$ car ils coïncident sur une base.

Exercice 81.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Montrer que si M est injective, alors $M^T M$ est inversible.
2. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En utilisant l'exercice 80, montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.
3. On ne suppose plus inversible. Montrer que l'on peut faire de même mais S sera symétrique positive seulement. A-t-on unicité ?
4. Application 1. Soit E un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\rho := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$ le rayon spectral de u. Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$ où $|||\cdot|||_2$ désigne la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$.
5. Application 2. Soit G un compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset G$. Montrer que $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé :

1. Soit $x \in \ker(M^T M)$. Alors $M^T M x = 0$ donc $Mx \in \ker(M^T)$ mais $Mx \in \mathrm{Im}(M)$. Puisque $\mathrm{Im}(M) \perp \ker(M^T)$, on a $Mx = 0$ donc $x = 0$ par injectivité de M. Ainsi, $M^T M$ est injective. C'est une matrice carrée : elle est inversible.
2. Supposons l'existence d'un tel couple. Alors $A^T A = S^T O^T O S = S^T S = S^2$. Donc S est racine carrée de $A^T A$ qui est inversible. Elle est clairement symétrique positive donc $A^T A$ est symétrique définie positive. Par l'exercice précédent, S est la racine carré de $A^T A$. Elle est donc inversible et $O = AS^{-1}$. Conclusion : pour A inversible, on note S, la racine carré de $A^T A$ et $O = AS^{-1}$. Alors $A = OS$

clairement. S est symétrique définie positive et $O^TO = (AS^{-1})^T AS^{-1} = S^{-1^T} A^T AS^{-1} = I_n$ donc O est bien orthogonale.

3. On raisonne par densité des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une suite de matrices inversibles convergeant vers A. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on écrit $A_p = O_p S_p$ comme précédent. Puisque $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, de la suite $(O_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il existe une extraction φ tel que $O_{\varphi(n)}$ converge, disons vers $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. En considérant la suite $S_{\varphi(p)} = O^{-1}_{\varphi(p)} A_{\varphi(p)}$, elle converge vers une matrice S qui conserve la symétrie et le caractère positif par continuité du produit scalaire (du produit matriciel ici). Donc on obtient $A = OS$ comme souhaité. On perd l'unicité car avec $A = 0$, pour toute isométrie $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $0 = O \times 0$ car $0 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Alors comme O est une isométrie, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|OSX\|_2 = \|SX\|_2$ donc $|||A|||_2 = |||S|||_2$.

   Maintenant, comme S est diagonalisable en base orthonormée (théorème spectral) à spectre dans $\mathbb{R}^{+*}$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i = \rho(S)$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $SX = \lambda_i X$ avec X de norme 1 (puisque S est diagonalisable en base orthonormée). Ainsi, $|||A|||_2 = \|SX\|_2 = \lambda_i \|X\|_2 = \sqrt{\lambda_i^2} = \sqrt{\rho(S^2)} = \sqrt{\rho(A^T A)}$ puisque $A^T A = S^T O^T OS = S^2$.
5. Soit G un tel groupe et $g \in G$. On veut montrer que $g \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Soit $(o, s) in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}$ tel que $g = os$. Comme cette décomposition est unique, on veut montrer que $s = I_n$. Pour cela, regardons ses valeurs propres. La question précédente assure que $\rho(s) = \lambda_i$ avec $\lambda_i > 0$ pour un certain i. On peut raisonner de même et avoir que $\rho(s^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda_j}$ où λ_j est la plus petite valeur propre. Or G est compact donc borné : on en déduit que la suite $(s^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est aussi bornée dans G donc par équivalence des normes, $(|||s|||^k{}_2)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée. Ainsi, comme $\forall k \geq 1, |||s|||^k{}_2 = \lambda_i^k$; $|||s|||^{-k}{}_2 = \lambda_j^{-k}$, on en déduit que $\lambda_i \leq 1$ et $\lambda_j \geq 1$ pour avoir le caractère borné. Ainsi, on a $1 \leq \lambda_j \leq \lambda_i \leq 1$ donc la plus petite valeur propre égale la plus grande : le spectre est réduit à $\{1\}$ donc $s = I_n$.

Exercice 82. Soit $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En utilisant l'exercice 80, montrer que AB est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+$.
2. Que dire du cas général ?

Corrigé :

1. A est symétrique définie positive. Il existe donc S racine carrée de A dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a alors $AB = S^2 B = SSBSS^{-1}$. Donc AB est semblable à SBS qui est diagonalisable car symétrique réelle. Donc AB est diagonalisable.
2. On écrit encore $A = S^2$ mais avec S seulement symétrique positive. Alors SBS est encore symétrique positive (petit exercice). Notons r son rang et $X_1, \cdots, X_r$, vecteurs propres associées aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ strictement positive de SBS. On a donc $SBSX_k = \lambda_k X_k$ donc $AB(SX_k) = \lambda_k SX_k$.

   Comme $\mathrm{Vect}(X_1, \cdots, X_k) \cap \ker(SBS) = \{0\}$, on a $\mathrm{Vect}(X_1, \cdots, X_k) \cap \ker(S) = \{0\}$. Ainsi, $(SX_1, \cdots, SX_r)$ est libre : c'est le théorème du rang ! La restriction de S à un supplémentaire de $\ker(S)$ est injective ! On a donc une famille libre de r vecteurs propres de valeurs propres strictement positives.

   Concluons. Pour avoir AB diagonalisable de spectre positif, il faudrait que $\dim(AB) = n - r$. On sait déjà que $\ker(A) = \ker(S)$ par construction. Donc $\ker(AB) = \ker(SB)$ et $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(SB)$. On va maintenant montrer que $\ker(SBS) = \ker(BS)$ ce qui va conclure. Pour cela, soit T racine carrée de S, T étant symétrique positive. Soit $X \in \ker(SBS)$. Alors $0 = X^T SBSX = X^T STTSX = X^T S^T T^T TSX = \|TSX\|^2$ donc $TSX = 0$ et $BSX = 0$ donc $X \in ker(BS)$. L'autre inclusion est claire donc on a finalement $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(SBS)$.

Chapitre 12

Intégrales généralisées

Exercice 83. 1. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_p : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{(t-z)^p} \in \mathbb{C}$. Montrer que f_p est intégrable, si, et seulement si $p \geq 2$ et dans ce cas, d'intégrale nulle. Montrer aussi que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-z} = i\pi \mathrm{sgn}(\Im(z)).$$

2. Soit P, Q deux polynômes réels tels que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. On note $F = \dfrac{P}{Q}$. On suppose que Q ne possède aucune racine réelle. On note $(z_1, \cdots, z_k)$ les pôles de F de multiplicités respectives $(p_1, \cdots, p_k)$. On note aussi F fonction rationnelle associée.
   (a) Rappeler la décomposition en éléments simples de F.
   (b) Soit $j \in [\![1, k]\!]$. On note $\mathrm{Res}_{z_j}(F)$ le coefficient devant $\dfrac{1}{X - z_j}$ dans la décomposition en éléments simples de F. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t = i\pi \sum_{j=1}^{k} \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(z_j))\mathrm{Res}_{z_j}(F).$$

   C'est le théorème des résidus pour une classe de fractions rationnelles.
   (c) Montrer que pour tout pôle simple z_j de F, on a

$$\mathrm{Res}_{z_j}(F) = \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)}.$$

3. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t$. *Ce calcul apparait dans le calcul d'une primitive de* $\sqrt{\tan}$.

Corrigé :

1. Déjà, f_p est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, $f(t)$ est équivalente à $\dfrac{1}{t^p}$ quand $|t| \to +\infty$. On en déduit donc que f_p est intégrable si, et seulement si $p \geq 2$.
   Concernant le calcul, soit $p \geq 2$. Remarquons que $t \in \mathbb{R} \mapsto (t-z)^{-p} \in \mathbb{C}$ a pour primitive

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1-p}\frac{1}{(t-z)^{p-1}} \in \mathbb{C}.$$

   Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t-z)^p} = \lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \left[\frac{1}{1-p}\frac{1}{(t-z)^{p-1}}\right]_a^b = 0.$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\forall t \in]-x, x[, f_1(t) &= \frac{1}{t-z} = \frac{t-\overline{z}}{|t-z|^2} \\ &= \frac{t-\overline{z}}{(t-\Re(z))^2+\mathrm{Im}(z)^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2(t-\Re(z))}{(t-\Re(z))^2+\mathrm{Im}(z)^2} + \frac{\overbrace{\Re(z)-\overline{z}}^{=i\Im(z)}}{(t-\Re(z))^2+\mathrm{Im}(z)^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\mathrm{Im}(z) \neq 0$,

$$\int_{-x}^{x} f_1(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-x}^{x}\frac{2(t-\Re(z))}{(t-\Re(z))^2+\mathrm{Im}(z)^2}\mathrm{d}t}_{=[\ln((t-\Re(z))^2+\mathrm{Im}(z)^2)]_{-x}^{x}} + i\Im(z)\underbrace{\int_{-x}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{(t-\Re(z))^2+\Im(z)^2}}_{=\left[\frac{1}{|\Im(z)|}\arctan\left(\frac{t-\Re(z)}{|\Im(z)|}\right)\right]_{-x}^{x}}.$$

Ainsi, le premier crochet étant nul par parité de la fonction dans le crochet, en faisant tendre x vers $+\infty$, le deuxième crochet devient $i\Im(z)\frac{1}{|\Im(z)|}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = i\mathrm{sgn}(\Im(z))\pi$ [1].

2. (a) Le cours de Mathématiques Supérieures assure l'existence d'une famille de complexes $(a_{q,r})_{(q,r)\in\mathbb{N}^2}$ vérifiant

$$F(X) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{p=1}^{m_j}\frac{a_{j,p}}{(X-z_j)^p}.$$

(b) Comme Q n'a pas de racine réelle, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\deg(Q) \geq \deg(P)+2$ donc au voisinage de $\pm\infty$, $F(t) \in o_{|t|\to+\infty}(1/t^2)$ donc par comparaison, F est intégrable. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} F(t)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\int_{-x}^{x}\sum_{j=1}^{k}\sum_{p=1}^{m_j}\frac{a_{j,p}}{(t-z_j)^p}\mathrm{d}t\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{k}\int_{-x}^{x}\frac{a_{j,1}}{t-z_j}\mathrm{d}t}_{\substack{\text{somme de } k \text{ fonctions en } x \\ \text{admettant une limite en } +\infty}} + \int_{-x}^{x}\underbrace{\sum_{j=1}^{k}\sum_{p=2}^{m_j}\frac{a_{j,p}}{(t-z_j)^p}\mathrm{d}t}_{=\text{somme de fonctions intégrables}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k}\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x}\frac{a_{j,1}}{t-z_j}\mathrm{d}t}_{=i\Im(\mathrm{sgn}(z_j))\pi a_{j,1}} + \sum_{j=1}^{k}\sum_{p=2}^{m_j}a_{j,p}\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x}\frac{1}{(t-z_j)^p}\mathrm{d}t}_{=0} \\ &= i\pi\sum_{j=1}^{k}\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(z_j))\mathrm{Res}_{z_j}(F).\end{aligned}$$

(c) C'est du cours de Mathématiques Supérieures. Soit $j \in [\![1,k]\!]$. Comme z_j est pôle simple de F, z_j est racine simple de Q donc il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q = (X-z_j)R$ avec $R(z_j) \neq 0$. Alors $Q' = R + (X-z_j)R'$ donc $Q'(z_j) = R(z_j)$. Maintenant,

$$(X-z_j)F(X) = (X-z_j)\frac{P(X)}{(X-z_j)R(X)} = \frac{P(X)}{R(X)}$$

1. On rappelle que $\mathrm{sgn}(x)$ vaut 1 si $x>0$, -1 si $x<0$ et on choisit ici, 0 si $x=0$. Ici, $\Im(z) \neq 0$ donc $\frac{\Im(z)}{|\Im(z)|} = \mathrm{sgn}(\Im(z))$.

et

$$(X-z_j)F(X)=(X-z_j)\sum_{\ell=1,\ell\neq j}^{k}\sum_{p=1}^{m_p}\frac{a_{\ell,p}}{(X-z_\ell)^p}+(X-z_j)\frac{a_{j,1}}{X-z_j}$$

donc $\dfrac{P(z_j)}{R(z_j)}=\dfrac{P(z_j)}{Q'(z_j)}=0+a_{j,1}=\mathrm{Res}_{z_j}(F)$.

3. Rappelons que pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$1+z^4=0\iff z^4=(e^{i\pi/4})^4\iff te^{-i\pi/4}\in\mathbb{U}_4\iff\exists k\in[\![0,3]\!],t=e^{i\pi/4}i^k.$$

Ainsi, les pôles de Q sont simples et complexes donc on est dans le cadre de la question précédente donc l'intégrale converge. Maintenant, calculons les résidus. Notons $z_k=e^{i\pi/4}i^k$ pour $k\in[\![0,3]\!]$. En écrivant $\dfrac{P}{Q}=F$ avec $P=1$ et $Q=1+X^4$, on a $Q'=4X^3$ donc

$$\mathrm{Res}_{z_k}(F)=\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}=\frac{1}{4e^{i\pi/3\times3}(i^3)^k}=\frac{1}{4}e^{-3i\pi/4}\frac{1}{(-i)^k}.$$

On a donc

$$\mathrm{Res}(z_0)(F)=\frac{1}{4}e^{-3i\pi/4}\ ;\ \mathrm{Res}(z_1)(F)=\frac{1}{4}e^{-3i\pi/4}i\ ;\ \mathrm{Res}(z_2)(F)=-\frac{1}{4}e^{-3i\pi/4}\ ;\ \mathrm{Res}(z_3)(F)=-\frac{1}{4}e^{-3i\pi/4}i.$$

On a aussi

$$\mathrm{sgn}(\Im(z_0))=\mathrm{sgn}(\Im(z_1))=1\ ;\ \mathrm{sgn}(\Im(z_2))=\mathrm{sgn}(\Im(z_3))=-1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t&=i\pi\frac{1}{4}(e^{-3i\pi/4}+ie^{-3i\pi/4}+e^{-3i\pi/4}+e^{-3i\pi/4})\\&=\frac{i\pi}{2}\underbrace{e^{-3i\pi/4}}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}(1+i)\\&=-\frac{i\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{(1+i)^2}_{=2i}\\&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Exercice 84. Donner un équivalent quand $t\to+\infty$ de

$$I(t)=\int_0^1\cos(x)\exp(it\cosh(x))\mathrm{d}x.$$

Corrigé : Lorsque $t\to+\infty$, la quantité $t\cosh(x)$ est très grande donc $\exp(it\cosh(x))$ oscille très vite. Le lemme classique de Riemann-Lebesgue nous mets sur la voie sur le fait que l'intégrale va être petite lorsque $t\to+\infty$. Pour autant, lorsque x est proche de 0, $\cosh(x)$ varie peu (sa dérivée est nulle) donc l'effet oscillant (permettant la convergence vers 0) se trouve atténué. Ainsi, c'est au voisinage de 0 que l'intégrande a sa partie la plus prépondérante.

Étudions donc l'intégrande en 0. Par Taylor-Young, on a $\cosh(x)=1+\dfrac{x^2}{2}+o_{x\to0}(x^2)$. Ainsi, on a

$$\cosh(x)-1\underset{x\to0}{\sim}\frac{x^2}{2}.$$

Il est de bon goût de poser le changement de variable $y=\sqrt{2(\cosh(x)-1)}=2\sinh(x/2)$ (et on s'affranchit tout de suite du 2 devant sinh) qui est bien $\mathcal{C}^1$ bijectif de $[0,1]$ dans $[0,\sinh(1/2)=:a]$. Alors $\cosh(x)=$

$2\sinh^2(x/2)+1$, $\cosh(x/2)=\sqrt{1+\sinh^2(x/2)}$, $\mathrm{d}y=\dfrac{\cosh(x/2)}{2}\mathrm{d}x$ et par le théorème de changement de variable,

$$I(t)=\int_0^a \underbrace{\frac{\cos(2\mathrm{argsinh}(y))}{\sqrt{1+y^2}}}_{=:h(y)} e^{2ity^2}2e^{it}\mathrm{d}y.$$

h a été créé pour peu contribuer donc on a bon espoir que

$$I(t)\underset{t\to+\infty}{\sim} 2e^{it}\int_0^a e^{2ity^2}\mathrm{d}y.$$

Avant d'estimer l'écart, assurons-nous déjà à quel ordre nous devons faire nos contrôles. Par le changement de variable $x=2ty^2$, on voit immédiatement que

$$\int_0^a e^{2ity^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2\sqrt{2t}}\int_0^{2ta^2}\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge (en 0, c'est trivial. En $+\infty$, c'est une intégration par parties : assurez-vous de savoir le faire). Ainsi, si on trouve des contrôles de l'ordre de $\dfrac{1}{t}$ par exemple, on est sur la bonne voie. Considérons maintenant $H(t)$ égal à $I(t)$ sans le facteur $2e^{it}$ et regardons

$$H(t)-\int_0^a e^{2ity^2}\mathrm{d}y=\int_0^a (h(y)-1)e^{2ity^2}\mathrm{d}y.$$

Pour contrôler ce genre d'intégrale, une intégration par parties est une bonne idée pour mettre en exergue les oscillations. On aimerait intégrer l'exponentielle mais le y^2 est gênant. Par contre, avec un y devant, cela change la donne.

$$H(t)-\int_0^a e^{2ity^2}\mathrm{d}y=\int_0^a (h(y)-1)e^{2ity^2}\mathrm{d}y=\int_0^a \underbrace{\frac{h(y)-1}{y}}_{\widetilde{h}} ye^{2ity^2}\mathrm{d}y$$

et $\widetilde{h}$ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en la prolongeant convenablenablement en 0. Par intégration par parties, on obtient donc

$$H(t)-\int_0^a e^{2ity^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{4it}\underbrace{\left[\widetilde{h}(y)e^{2ity^2}\right]_0^a}_{\text{bornée en } t}-\frac{1}{4it}\underbrace{\int_0^a \widetilde{h}'(y)e^{2ity^2}\mathrm{d}y}_{|\cdot|\le a\|\widetilde{h}'\|_\infty}=O(1/t).$$

($\|\widetilde{h}'\|_\infty<\infty$ par le théorème des bornes atteintes). Ainsi,

$$H(t)=\int_0^a e^{2ity^2}\mathrm{d}y+O(1/t)$$

ce qui donne l'équivalent de H espéré et

$$I(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{Ke^{it}}{\sqrt{2t}}$$

avec $\displaystyle K=\int_0^{+\infty}\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (*Remarque* : K vaut $\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}$).

Exercice 85. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\mathrm{Li}(x):=\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)}\right).$$

Corrigé : On réalise des intégrations par parties jusqu'à obtenir

$$\mathrm{Li}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k! \left[\frac{t}{\ln^{k+1}(t)}\right]_2^x + n! \int_2^x \frac{1}{\ln^{n+1}}.$$

On cherche un équivalent du dernier terme. Pour cela, « on dérive ce qui lentement vite et on intègre ce qui bouge vite ». Ici, on dérive le ln et intègre 1. On obtient alors par intégration par parties

$$\int_2^x \frac{1}{\ln^{n+1}} = \left[\frac{t}{\ln^{n+1}(t)}\right]_2^x + (n+1)\int_2^x \frac{1}{\ln^{n+2}}.$$

Mais $\frac{1}{\ln^{n+2}} \in o_\infty \frac{1}{\ln^{n+1}}$ et par divergence de l'intégrale, par le théorème d'intégration des relations de comparaisons, on a le résultat souhaité.

Exercice 86. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que g ne s'annule pas en l'infini et que

$$g'/g \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mu}{x}$$

pour $\mu \neq 0, \mu \neq -1$. On suppose que $\mu > -1$. Montrer que

$$\int_a^{+\infty} g \text{ diverge et } \int_a^x g \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{xg(x)}{\mu+1}.$$

(Si $\mu < -1$, il y a convergence et $\int_x^{+\infty} g \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{xg(x)}{\mu+1}$ et le résultat se montre de la même manière).

Corrigé : Le théorème d'intégration des relations de comparaisons entraine

$$\int_a^x \frac{g'(t)}{g(t)}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \mu \int_a^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

Ainsi, $\ln \circ g \underset{+\infty}{\sim} \mu \ln$. Par définition, en fixant $\varepsilon > 0$ telle que $\mu - \varepsilon > -1$, il existe $A > a$ tel que $\forall x \geq A, \ln(g(x)) \geq (\mu - \varepsilon)\ln(x)$ ce qui donne $g(x) \geq x^{\mu-\varepsilon}$. Ainsi, $\int_a^{+\infty} g$ diverge vers $+\infty$. Par intégration par parties, on trouve

$$\int_a^x (g(t) + tg'(t))\mathrm{d}t = xg(x) - ag(a).$$

Or, $g(t) + tg'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)(1+\mu)$. Par le théorème d'intégration des relations de comparaisons, sachant qu'on est dans le cas divergent, on a bien

$$xg(x) \sim (\mu+1)\int_a^x g.$$

Exercice 87. Soit $F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ avec $f : (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \mathrm{sinc}(t)e^{-xt}$. Montrer que

1. sinc n'est pas intégrable.
2. F est bien définie
3. F admet une limite en $+\infty$
4. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
5. $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Par ailleurs, au voisinage de $+\infty$, lorsque $x \neq 0$, on a $t^2\mathrm{sinc}(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par comparaison, $f(x,\cdot)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ce qui assure l'existence de F sur $]0,+\infty[$. Il reste la convergence de $f(0,\cdot)$ en $+\infty$ pour conclure. Pour cela,
$$\int_1^A \mathrm{sinc}(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^A}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0+\cos(1)} - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t. \tag{12.1}$$
Or l'intégrale résiduelle converge absolument donc $\displaystyle\int_1^A \mathrm{sinc}(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $A \to +\infty$.

3. sinc est bornée par 1 donc par inégalité triangulaire,
$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} |\mathrm{sinc}(t)||e^{-xt}|\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. On souhaite utiliser le théorème de Leibniz. Pour cela, on a
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable en $+\infty$).
   (b) $\forall t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto f(t,x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}.\ \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -t\mathrm{sinc}(t)e^{-xt}.$$
   (c) Domination :
   $$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in]a,+\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq t\mathrm{sinc}(t)e^{-at} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+).$$
   Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,+\infty[$ pour tout $a > 0$ donc sur $]0,+\infty[$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t.$$

5. On a par la ligne précédente,
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F'(x) &= -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t \\ &= -\Im\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\mathrm{d}t\right) \\ &= -\Im\left(\frac{-1}{i-x}\right) \\ &= \frac{-1}{1+x^2}.\end{aligned}$$
Ainsi, il existe C réel tel que $\forall x > 0, F(x) = -\arctan(x) + C$. Puisque $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, l'égalité passe à la limite et $C = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, si la limite de $x \to 0$ de $F(x)$ existe, alors, $(\star)$ $\boxed{\lim_{x\to0^+} F(x) = \frac{\pi}{2}}$ et c'est ce qu'on voulait. Pour cela, on va utiliser le théorème de convergence dominée. Soit $G : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{sinc}$ la primitive de sinc s'annulant en 0. G est bornée en tant que fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ ayant une limite finie en 0 et en $+\infty$. Alors pour tout $A > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,
$$\int_0^A \mathrm{sinc}(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = \left[G(t)e^{-xt}\right]_0^A + \int_0^A xe^{-xt}G(t)\mathrm{d}t.$$

On fixe $x \in \mathbb{R}^{+*}$. G étant bornée, la convergence du crochet et de l'intégrale est du même acabit que l'équation 12.1 et on a finalement

$$\forall x > 0, F(x) = 0 + \int_0^{+\infty} xe^{-xt}G(t)\mathrm{d}t.$$

L'application $u = xt$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même. Le théorème de changement de variable nous assure alors

$$\forall x > 0, F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u}G\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u.$$

(a) Soit $x > 0$. $u \mapsto e^{-u}G\left(\frac{u}{x}\right)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Soit $u \in \mathbb{R}^+$. $e^{-u}G\left(\dfrac{u}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} e^{-u}F(0)$.

(c) Domination : $\forall u \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \left|e^{-u}G\left(\dfrac{u}{x}\right)\right| \leq e^{-u}\|G\|_\infty \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

Par le théorème de convergence dominée, on a donc bien

$$F(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-u}F(0)\mathrm{d}u = F(0).$$

Ainsi, dans $(\star)$, on a $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui signifie que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 88. On souhaite montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$. En considérant $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\mathrm{d}t$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$, retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss.

Corrigé : Déjà, il est clair que $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,1] \mapsto \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux. De plus,

$$\forall t \in [0,1], x \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)\ ,\ \forall x \geq 0, \forall t \in [0,1], \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2+1)}.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $\forall x \geq 0, -2xe^{-x^2(t^2+1)} \leq -2xe^{-x^2}$. Or, $\forall x \geq 0, x \leq e^{x^2}$ donc la dérivée partielle en x de f est dominée par 2. Par le théorème de dérivation sous le signe intégral,

$$\forall x \geq 0, F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)}\mathrm{d}t = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\mathrm{d}t \underset{u=xt}{=} -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u = -2f'(x)f(x).$$

En intégrant, on a donc

$$\forall x \geq 0, F(x) - F(0) = -f^2(x) + f^2(0)$$

ce qui donne $\forall x \geq 0, F(x) = \dfrac{\pi}{4} - f^2(x)$. Par ailleurs,

$$\forall x \geq 0, 0 \leq F(x) \leq e^{-x^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

car f est positive. En réalisant le changement de variable $u = x/\sqrt{2}$, on a donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

et par parité, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Exercice 89.
1. Donner le domaine de définition de Γ. On le note D.
2. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On explicitera la valeur de $\Gamma^{(k)}$, pour $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $\Gamma(1) = 1$. On dira que Γ vérifie la propriété (1).
4. Montrer que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Dans la suite, on dira que Γ vérifie la propriété (2). En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$.
5. Montrer que $\ln\Gamma$ est convexe. Dans la suite, on dira que Γ vérifie la propriété (3).
6. Soit f, une fonction strictement positive sur D vérifiant les propriétés (1), (2), (3). On pose $g = \ln f$.
   (a) Montrer que $x \mapsto g(x) - \ln\Gamma(x)$ est 1-périodique.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = \ln\Gamma(n)$.
   (c) Montrer que $f = \Gamma$.

Corrigé : Dans toute la suite, on notera $h(t,x) = t^{x-1}e^{-t}$.

1. Au voisinage de 0, $h(t,x) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ Or l'étude des intégrale de Riemann nous indique que $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0 dès lors que $x > 0$. Par ailleurs, $t^2 h(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $h(x,t) = o_{t\to+\infty}(1/t^2)$ et $t \mapsto t^{-2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$: par comparaison, $h(x,\cdot)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi, comme $h(\cdot,x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que Γ est bien définie dès lors que $x > 0$.
2. - $\forall t > 0, x \mapsto h(t,x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*})$: $\forall t > 0, \forall x > 0, \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(t,x) = \ln^n(t)t^{x-1}e^{-t}$.
   - Pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}, t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(t,x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - **Domination** : Soit (a,b) tels que $0 < a < 1 < b < +\infty$. Alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \forall t > 0, |\ln^n(t)|t^{x-1}e^{-t} \leq |\ln^n(t)|e^{-t} \times (t^{a-1} + t^{b-1}) := g_n(t).$$
   Il suffit de montrer que g_n est intégrable ce qui est le cas car elle est continue, et par croissances comparées, elle est intégrable en 0 et $+\infty$.
   Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, j'ai :
   $$\Gamma \in \mathcal{C}^\infty, \forall x > 0, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(t,x)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln^n(t)t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$
3. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$.
4. Soit $0 < a < b$ deux réels. Alors :
   $$\int_a^b t^x e^{-t}\mathrm{d}t = [-t^x e^{-t}]_a^b + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$
   Le crochet tend vers 0 quand $a \to 0, b \to +\infty$. Or, pour $x > 0$, l'intégrale de droite converge vers $x\Gamma(x)$. L'égalité passe donc la limite en :
   $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$
   Une simple récurrence nous dit donc que :
   $$\Gamma(n+1) = n!$$

5. Par la question 2, nous savons que pour $x > 0$:

$$|\Gamma'(x)| \leq \int_0^{+\infty} |\ln(t)| t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} |\ln(t)| t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \mathrm{d}t.$$

J'utilise donc Cauchy-Schwarz :

$$|\Gamma'(x)| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} \left(|\ln(t)| t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}\right)^2 \mathrm{d}t} \sqrt{\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}\right)^2 \mathrm{d}t}$$

Je développe le carré, et j'ai au final :

$$|\Gamma'(x)| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} \ln^2(t) t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t} \sqrt{\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t} = \Gamma''(x)\Gamma(x).$$

D'où :

$$\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2 > 0$$

Par ailleurs,

$$\ln(\Gamma)'' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} > 0$$

Donc $\ln \Gamma$ est convexe.

6. (a)

$$\forall x > 0, \ln(\Gamma(x+1)) = \ln(x) + \ln(\Gamma(x)) \ ; \ \forall x > 0, \ln(f(x+1)) = \ln(x) + \ln(f(x))$$

D'où :

$$\forall x > 0, (\ln(\Gamma) - g)(x+1) = (\ln(\Gamma) - g)(x).$$

C'est la 1-périodicité.

(b) Comme $(\ln(\Gamma) - g)(1) = 0$, par une récurrence immédiate, j'ai :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = \ln(\Gamma(n)).$$

(c) Alors pour tout $x > 0$, on a $g(x+1) = g(x) + \ln(x)$ $(\star)$. Il suffit de montrer que $\ln \circ \Gamma = g$ sur $]0, 1[$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Par convexité de g et par le lemme des pentes croissantes, sur $n \leq n+1 \leq n+1+x \leq n+2$ avec $x \in]0, 1[$, on a

$$g(n+1) - g(n) \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq g(n+2) - g(n+1).$$

Par $(\star)$, on a

$$\ln(n) \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq \ln(n+1)$$

ce qui donne

$$x \ln(n) \leq g(n+1+x) - \ln(n!) \leq x \ln(n+1) = x \ln(n) + x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Par ailleurs, en itérant $(\star)$ par récurrence, on a $g(n+1+x) = g(x) + \ln\left(\prod_{i=0}^{n}(x+i)\right)$. On obtient donc

$$0 \leq g(n+1+x) - \ln(n! n^x) \leq x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

ce qui donne

$$0 \leq g(x) - \ln\left(\frac{n! n^x}{\prod_{i=0}^{n}(x+i)}\right) \leq x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, g est uniquement déterminé par

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n!n^x}{\prod_{i=0}^{n}(x+i)}\right).$$

Par continuité de exp, on a donc

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{i=0}^{n}(x+i)}$$

donc on a bien unicité de f vérifiant $(a),(b)$ et (c) donc comme Γ satisfait ces propriétés, $f=\Gamma$ et on a de surcroît

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{i=0}^{n}(x+i)}$$

constituant la formule d'Euler.

Exercice 90. 1. Montrer le théorème suivant :

> **Théorème 12.1.** *Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f' \in \mathrm{L}^1(]1,+\infty[)$. Alors $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\sum_{n\geq 0} f(n)$ ont la même nature.*

Remarque : on pourra remplacer $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge par $\left(\int_1^n f(t)\mathrm{d}t\right)_n$ converge, plus simple à montrer et suffisant pour la suite.

2. Étudier la nature des séries suivantes :

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$. b) $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$.

3. Soit $\alpha > 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^{1/2}}}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 1/2$ (Le sens direct est dur).

La suite est culturelle. Avec une formule du type Euler-Maclaurin, on peut démontrer le théorème suivant

> **Théorème 12.2.** *Soit $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Soit $f \in \mathcal{C}^p([0,+\infty[)$ telle que f et ses dérivées jusqu'à $p-1$ tendent vers 0 à l'infini et que $f^{(p)}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Alors $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.*

> **Corollaire 12.3.** Soit $\alpha > 0, \beta \in]0,1[$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^\beta}}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha+\beta > 1$

Corrigé :

1. Soit $F : x \in]0, +\infty[\mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Alors $F \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ et par le théorème de Taylor avec reste intégral, pour tout $n > 0$,
$$F(n+1) - F(n) = F'(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)F''(t)\mathrm{d}t$$
ce qui s'écrit
$$\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n) = \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\mathrm{d}t.$$
Ainsi,
$$\left|\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right| \leq \int_n^{n+1} \underbrace{|n+1-t|}_{\leq 1} |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\mathrm{d}t.$$
Ainsi,
$$\sum_{n\geq 0} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$$
converge absolument donc elle converge. Ainsi, $\sum f(n)$ converge si, et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)\mathrm{d}t\right)$ converge. On va alors montrer que c'est équivalent à la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.
$\Longleftarrow$ C'est évident. Si $F(x)$ converge en $+\infty$ quand $x \to +\infty$, alors la suite $(F(n))_n$ converge.
$\Longrightarrow$ Soit x réel. Alors
$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{\lfloor x\rfloor} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\mathrm{d}t.$$
Or, l'intégrale $\int_1^{\lfloor x\rfloor} f(t)\mathrm{d}t$ converge lorsque $x \to +\infty$ ce qui entraine que $\sum f(n)$ converge donc $f(n)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. f' étant intégrable, nécessairement, $f(t)$ converge quand $t \to +\infty$ vers 0 donc $\int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\mathrm{d}t$ converge [2]. Ainsi, $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

2. (a) On regarde $f : x \in [1, +\infty[\mapsto \sin(\sqrt{x})/x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée
$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})x - \sin(\sqrt{x})}{x^2} = \frac{1}{2x^2}(\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) - 2\sin(\sqrt{x})).$$
Au voisinage de $+\infty$, cette fonction est intégrable car $\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) - 2\sin(\sqrt{x}) \in O(\sqrt{x})$ donc $f'(x) \in O(x^{-3/2})$. La continuité sur $[1, +\infty[$ assure donc l'intégrabilité de f'. Ainsi,
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n} \text{ et } \left(\int_1^n \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x\right)_n$$
ont la même nature. Soit $n > 0$. Un changement de variable indique que
$$\int_1^n \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x = 2\int_1^{n^2} \frac{\sin(u)}{u} < +\infty.$$
(c'est classique. Faites une IPP). La série converge.

(b) On regarde $g : x \in [1, +\infty[\mapsto \dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée
$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{-\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))}{x^2}$$

2. c'est un petit exercice. Il suffit de passer aux ε pour conclure rapidement. Pour x assez grand, l'intégrale est plus petite que $\varepsilon(x - \lfloor x\rfloor) \leq \varepsilon$.

intégrable au voisinage de $+\infty$, continue sur $[1,+\infty[$. Elle est donc intégrable sur $[1,+\infty[$. Ainsi, la série converge si, et seulement si $\left(\int_1^n \frac{\cos(\ln(x))}{x}\mathrm{d}x\right)_n$ converge. On réalise le changement de variable $u=\ln(x)$ ce qui donne $\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\int_1^n \frac{\cos(\ln(x))}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\ln(n)}\cos(x)\mathrm{d}x.$$

Ainsi, la série diverge.

3. On changera $\beta=1/2$ juste après. Notons $f:t\in]0,+\infty[\mapsto\frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}$. Alors f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall t>0,|f'(t)|=\left|\frac{\beta i t^{\beta-1}e^{it^\beta}}{t^\alpha}-\frac{e^{it^\beta}}{t^{\alpha+1}}\right|\leq\frac{\beta}{t^{1+\alpha-\beta}}+\frac{1}{t^{\alpha+1}}.$$

Puisque β est strictement positif, f' est intégrable sur $]1,+\infty[$ dès que $1+\alpha-\beta>1$ c'est-à-dire $\alpha>\beta$.

Ainsi, le théorème s'applique. La série $\sum_{n\geq1}\frac{e^{in^\beta}}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si,

$$\left(\int_1^n\frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}\mathrm{d}t\right)_n$$

converge. Or, par le changement de variable $u=t^\beta$ puis par intégration par parties, on a, en notant $\gamma=\alpha+\beta-1$

$$\begin{aligned}\int_1^n\frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}\mathrm{d}t&=\int_1^{n^\beta}\frac{e^{iu}}{u^{\alpha/\beta}}\frac{1}{\beta u^{1-1/\beta}}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\beta}\int_1^{n^\beta}\frac{e^{iu}}{u^{(\alpha+\beta-1)/\beta}}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\beta}\left(\left[\frac{1}{i}\frac{e^{iu}}{u^\gamma}\right]_1^{n^\beta}+\int_1^{n^\beta}\frac{\gamma}{i}\frac{e^{iu}}{u^{\gamma+1}}\mathrm{d}u\right)\end{aligned}$$

donc

$$\int_1^n\frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}\mathrm{d}t=\frac{1}{\beta}\left(\left[\frac{1}{i}\frac{e^{iu}}{u^\gamma}\right]_1^{n^\beta}+\int_1^{n^\beta}\frac{\gamma}{i}\frac{e^{iu}}{u^{\gamma+1}}\mathrm{d}u\right)\tag{12.2}$$

donc converge dès que $\gamma>0$. Ainsi, on impose $\alpha>\beta$ et $\alpha+\beta>1$.

Ainsi, lorsque $\beta=\frac{1}{2}$, la série converge lorsque $\alpha>\frac{1}{2}$. Si $\alpha\leq\frac{1}{2}$, f' n'est plus intégrable donc il faut être plus fin. Ici, f étant $\mathcal{C}^2$, on pourrait écrire un Taylor avec reste intégral un cran plus loin :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\left|\int_n^{n+1}f(t)\mathrm{d}t-f(n)-\frac{f'(n)}{2}\right|\leq\int_n^{n+1}\underbrace{\left|\frac{(n+1-t)^2}{2}\right|}_{\leq1}f''(t)\mathrm{d}t$$

et ici, par Leibniz

$$f''(t)=\frac{-e^{i\sqrt{t}}}{4t^{\alpha+1}}+o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$$

donc f'' est intégrable. Ainsi, en raisonnant comme avant,

$$\sum\left|\int_n^{n+1}f(t)\mathrm{d}t-f(n)-\frac{f'(n)}{2}\right|$$

converge. Or, $f'(n) = \dfrac{ie^{i\sqrt{n}}}{2n^{\alpha+1/2} - \alpha\dfrac{e^{i\sqrt{n}}}{n^{1+\alpha}}}$ donc le résultat dans le cas « $\alpha > 1/2$ s'applique ici pour assurer la convergence de $\sum f'(n)$. Ainsi, $\sum \left| \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n) \right|$ converge donc $\sum f(n)$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature. Vu l'équation (12.2), on a la divergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ donc la série diverge dans le cas $\alpha \leq 1/2$.

Exercice 91. Donner un équivalent quand $t \to +\infty$ de

$$I(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^t}.$$

Corrigé : Le théorème de convergence dominée donne immédiatement que $I(t)$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$.

Pour trouver un équivalent, la recette est la suivante : déterminer là où l'intégrande est la plus « importante » car c'est cette quantité qui régit l'intégrale. L'intégrande, ici, apporte sa contribution la plus importante en 0 (puisqu'elle est maximale en 0). On va donc réaliser un développement limité de l'intégrande en 0. On a

$$\frac{1}{(1+x+x^2)^t} = \exp(-t\ln(1+x+x^2)) = \exp(-t(x+o_{x\to 0}(x))) = \exp(-tx + o_{x\to 0}(x))$$

donc on a envie de dire que $I(t)$ est pas si loin de $\int_0^1 \exp(-tx)\mathrm{d}x$. Par un changement de variable,

$$\int_0^1 \exp(-tx)\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int_0^t e^{-u}\mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

puisque $\int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = 1$.

Ainsi, on aura gagné si on arrive à montrer que

$$I(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_0^1 \exp(-tx)\mathrm{d}x.$$

Pour cela, contrôlons la différence. On a

$$\begin{aligned}
\left| I(t) - \int_0^1 \exp(-tx)\mathrm{d}x \right| &\leq \int_0^1 |\exp(-t\ln(1+x+x^2)) - \exp(-tx)|\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \exp(-tx)|\exp(-t\ln(1+x+x^2)+tx]) - 1|\mathrm{d}x \\
&\underset{u=tx}{=} \frac{1}{t}\int_0^t e^{-u}\left|\exp\left(-t\left[\ln\left(1+\frac{u}{t}+\frac{u^2}{t^2}\right)-\frac{u}{t}\right]\right)-1\right|\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Une banale étude de fonction montre que $x \mapsto \ln(1+x+x^2) - x$ montre que cette quantité est positive sur $[0,1]$ donc $\exp\left(-t\left[\ln\left(1+\dfrac{u}{t}+\dfrac{u^2}{t^2}\right)-\dfrac{u}{t}\right]\right) - 1$ est négative. On peut donc enlever les valeurs absolues en mettant un signe $-$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\left| I(t) - \int_0^1 \exp(-tx)\mathrm{d}x \right| &\leq \frac{1}{t}\int_0^t e^{-u}\left(1-\exp\left(-t\ln\left(1+\frac{u}{t}+\frac{u^2}{t^2}\right)+u\right)\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-u}\left(1-\exp\left(-t\ln\left(1+\frac{u}{t}+\frac{u^2}{t^2}\right)+u\right)\right)\mathbb{1}_{[0,t]}(u)}_{=:\phi(u)}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

On applique maintenant le théorème de convergence dominée puisque ϕ est dominée par e^{-u}, intégrable sur $[0, +\infty[$. Puisque ϕ tend vers 0 en $+\infty$, on en déduit que, après application du théorème de convergence dominée,

$$\left| I(t) - \int_0^1 \exp(-tx)\mathrm{d}x \right| = o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ainsi,

$$I(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}.$$

Chapitre 13

Combinatoire et dénombrement

Dans les exercices, on pourra utiliser librement la formule d'inversion de Pascal :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \left(\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k\right) \Longrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k\right).$$

Exercice 92.
On dit que $x \in \mathbb{C}$ est un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$ lorsqu'il existe un polynôme P à coefficient dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(x) = 0$. Sinon, il est dit transcendant. Montrer l'existence de réels transcendants.

Corrigé : Il suffit de montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable. En notant A cet ensemble, on a $(\mathbb{C}\backslash A) \cap \mathbb{R}) = \mathbb{R}\backslash A \neq \emptyset$ car sinon, $\mathbb{R}$ serait dénombrable ce qui n'est pas. On conclut en écrivant :

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{P \in \mathbb{Q}_n[X]} \{x \in \mathbb{C} : P(x) = 0\}.$$

Cet ensemble est dénombrable car l'ensemble des racines d'un polynôme de degré fixé est fini, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc $\mathbb{Q}_n[X] \simeq \mathbb{Q}^{n+1}$ l'est aussi et $\mathbb{N}$ est dénombrable donc A l'est.

Exercice 93. Soit n, p deux entiers naturels et on note $E_n := [\![1, n]\!]$. Dénombrer :

1. les applications de E_p dans E_n.
2. les applications injectives de E_p dans E_n.
3. les applications surjectives de E_p dans E_n. *On pourra exprimer le cardinal obtenu en* 1 *en fonction du cardinal des applications surjectives de* E_p *dans* E_k *pour* k *variant de* 0 *à* n. *On pourra ensuite utiliser la formule d'inversion de Pascal.*

Corrigé :

1. C'est du cours. C'est n^p.
2. C'est aussi du cours. Si $p > n$, il n'existe pas d'applications injectives de E_p dans E_n. En effet, par le principe des tiroirs, il existe un élément de $[\![1, n]\!]$ tel qui admet deux antécédent par l'application en question. Soit donc $p \leq n$. Pour déterminer une application injective,
   (a) on fixe la valeur de $f(1)$: il y a n choix.
   (b) On fixe la valeur de $f(2)$: il y a $n - 1$ choix.
   (c) On itère le procédé.

   Si, au cours de la construction, le nombre de choix tombe à zéro, cela signifie que $p > n$ ce qui est exclu : on a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ applications injectives de E_p dans E_n.

3. Avant toute chose, si $p < n$, il n'existe pas d'applications surjectives de E_p dans E_n. En effet, par le principe des tiroirs, vu que chaque élément de E_n admet un antécédent, il existerait un élément de E_p qui aurait deux images : cela est exclu par la définition d'une application.

   Soit donc $p \geq n$. Pour construire une application f de E_p dans E_n,

   (a) on fixe un $k \in [\![0, n]\!]$ et

   (b) on fixe k valeurs parmi n de E_n qui vont admettre des antécédents par f et les autres n'en auront pas.

   (c) On construit alors une application surjective de E_p dans E_k qui coïncide avec f sur E_p.

   Ce procédé permet de construire de manière unique une application : on a donc

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p,k)$$

   où $S(p,k)$ désigne le nombre d'applications surjectives de E_p dans E_k. Il suffit d'appliquer la formule d'inversion de Pascal pour obtenir

$$S(p,n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p.$$

Exercice 94. Soit n, p deux entiers naturels et on note $E_n := [\![1, n]\!]$. Dénombrer :

1. les applications strictement croissantes de E_p dans E_n.
2. les applications croissantes de E_p dans E_n.

Corrigé :

1. Puisqu'une application strictement croissante est injective, il n'en existera pas dès lors que $p > n$. Construire une application strictement croissante de E_p dans E_n, on peut par exemple construire une application injective – ce qui fait $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ choix – puis sélectionner la seule qui est strictement croissante (à savoir trier dans l'ordre croissant les images) ce qui revient à diviser par $p!$. Ainsi, on a $\binom{n}{p}$ choix.

2. On peut construire intelligemment une bijection entre les applications croissantes et strictement croissantes à condition de changer les ensembles de départs et d'arrivées.

   On note $C(p,n)$ les applications croissantes de E_p dans E_n et $C^+(p,n)$, celles qui sont strictement croissantes

   Soit f une application croissante. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_f : & E_p & \to & E_{n+p-1} \\ & k & \mapsto & f(k)+k-1 \end{array}.$$

   Alors φ est strictement croissante par croissance de f. De plus, l'application $f \in C(p,n) \mapsto \varphi_f \in C^+(p, n+p-1)$ est bijective. Ainsi,

$$|C(p,n)| = |C^+(p,n)| = \binom{n+p-1}{p}.$$

Exercice 95. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Déterminer le nombre de p-cycles dans $\mathfrak{S}_n$ lorsque $p \in [\![1, n]\!]$.
2. Exprimer le cardinal de $\mathfrak{S}_n$ en fonction du nombre de dérangement dans $\mathfrak{S}_k$ pour k variant de 0 à n. En déduire une expression du nombre de dérangement sous forme d'une somme. *On peut*

montrer que le nombre de dérangement est la partie entière de $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$.

Corrigé :

1. On considère $p \geq 2$. Pour obtenir un p-cycle, on choisit $n-p$ éléments de $[\![1, n]\!]$ à fixer. Il nous reste p élément. Pour le premier élément, il doit s'envoyer sur l'un des $p-1$ restants. Pour le deuxième, sur les $p-2$ restants, etc. Le dernier doit obligatoirement s'envoyer sur le premier élément ! Il n'y a donc pas de choix pour le dernier. Ainsi, il y a $(p-1)!$ choix pour le p-cycles. Finalement, le nombre de p-cycles est
$$\binom{n}{p}(p-1)!.$$
2. Pour construire une permutation, on fixe $n-k$ valeurs qui sont fixé par cette permutation puis on regarde le nombre de permutations à k éléments sans point fixe. Par définition, on a
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_k.$$

Exercice 96. Pour tout ensemble E de cardinal n, on définit B_n le nombre de classes d'équivalences de E. Exprimer B_n en fonction de B_k pour k variant de 0 à $n-1$.

Corrigé : Pour construire une classe d'équivalence,

1. on choisit un élément de E au hasard.
2. On regarde combien d'éléments constitue sa classe d'équivalence. C'est k pour k allant de 1 à n. On regarde les éléments qui sont en relation d'équivalence avec lui, il y a $\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles pour construire cette classe d'équivalence.
3. On construit une classe d'équivalence avec les éléments restants, à savoir $n-k$ éléments.

Ainsi, on a
$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$

Chapitre 14

Probabilités

Dans tout le chapitre, sauf mention du contraire, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où toutes les variables aléatoires sont bien définis.

Exercice 97 (Borel-Cantelli)**.**
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'événements. On définit

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k}_{=:B_n}.$$

1. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que ω réalise $\limsup_{n\to+\infty} A_n$ si, et seulement si, $\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\}$ est de cardinal infini (dit en français, A_n est réalisé une infinité de fois).
   (b) Lemme de Borel-Cantelli. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$.
2. Loi du zéro-un de Borel. On suppose que les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des événements indépendants. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n)$ vaut 0 ou 1 selon que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge ou diverge.

Corrigé :

1. Par définition, on a ω réalise $\limsup A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, \omega \in A_k$.
2. Il est aisé de montrer que $(B_n)_n$ est décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante, on a donc

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

   Or, par σ-sous-additivité,

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Si la série converge, on a déjà le résultat et pas besoin d'indépendance. Prenons donc la série divergente. L'astuce est d'utiliser l'inégalité de convexité $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déjà,

$$\Omega\backslash B_n = \Omega\backslash \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \Omega\backslash A_k.$$

Fixons alors $N \geq n$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega\backslash B_n) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \Omega\backslash A_k\right)\\ &\underset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{k=n}^{N}(1-\mathbb{P}(A_k))\\ &\leq \prod_{k=n}^{N}\exp(-\mathbb{P}(A_k))\\ &= \exp\left(-\sum_{k=n}^{N}\mathbb{P}(A_k)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\Omega\backslash B_n) = 0$. Par σ-sous-additivité, on a donc

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega\backslash B_n) = 0.$$

En passant au complémentaire, on a le résultat.

Exercice 98 (Produit eulérien de ζ)**.** On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Soit $s > 1$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

1. Est-ce une loi d'une variable aléatoire ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement "n divise X". Montrer que $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille d'événements indépendants. En déduire
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right).$$
3. Calculer la probabilité qu'aucun carré outre 1 ne divise X.

Corrigé :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{n^{-s}}{\zeta(s)} > 0$ et
$$\sum_{n\geq 1}\frac{n^{-s}}{\zeta(s)} = 1$$
par définition.
2. Remarquons que $A_n = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}^*}\{X = nj\}$ est un événement et
$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}(X = nj) = \sum_{j\geq 1}\frac{n^{-s}j^{-s}}{\zeta(s)} = n^{-s}.$$
Soit $(p_i)_{i\in I}$, une liste de nombres premiers distincts. Par le lemme de Gauss, on a
$$\bigcap_{i\in I} A_{p_i} = A_{\prod_{i\in I} p_i}.$$
Ainsi,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_{p_i}\right) = \mathbb{P}(A_{\prod_{i\in I} p_i}) = \left(\prod_{i\in I} p_i\right)^{-s} = \prod_{i\in I} p_i^{-s} = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_{p_i}).$$

Les $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont donc indépendants et leurs complémentaires dans Ω le sont aussi. Notons $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des nombres premiers. On note $E_n = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_{p_i}}$ vérifiant $E_{n+1} \subset E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, en notant, $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(E).$$

Or $E = \{1\}$ puisque ne pas être divisible par un nombre premier revient à être inférieur strictement à 2 en valeur absolue. On est dans $\mathbb{N}^*$ donc il ne reste que 1. Ainsi, il suffit de calculer $\mathbb{P}(E_n)$ puisque $\mathbb{P}(E) = \dfrac{1}{\zeta(s)}$. On a

$$\mathbb{P}(E_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{P}(A_{p_i}) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)$$

où la deuxième égalité provient de l'indépendance des $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$. Ainsi, le produit de droite admet une limite quand $n \to +\infty$ et cette limite vaut $\mathbb{P}(E)$.

3. Si on note E, cet événement, on montre facilement que

$$E = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_{p^2}}.$$

Comme dans la question précédente, on a le résultat qui est $\dfrac{1}{\zeta(2s)}$.

Exercice 99 (Inégalité de Cantelli)**.** Soit X, une variable aléatoire réelle. Soit $\alpha > 0$.

1. Soit $\lambda \geq 0$. Montrer que
$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X] + \lambda)^2] = \mathrm{Var}(X) + \lambda^2.$$
2. Montrer que $\forall \lambda > 0$,
$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \geq \alpha) \leq \frac{\mathrm{Var}(X) + \lambda^2}{(\alpha + \lambda)^2}.$$
3. En déduire que
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha) \leq \frac{2\mathrm{Var}(X)}{\alpha^2 + \mathrm{Var}(X)},$$
et comparer avec Bienaymé-Tchebychev.

Corrigé : On note $m = \mathbb{E}[X], \sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

1.
$$\mathbb{E}[(X - m + \lambda)^2] = \mathbb{E}[(X - m)^2] + 2\lambda(\mathbb{E}[X] - m) + \lambda^2 = \sigma^2 + \lambda^2.$$

2. On a

$$\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) = \mathbb{P}(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda) \leq \mathbb{P}((X - m + \lambda)^2 \geq (\alpha + \lambda^2)) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - m + \lambda)^2]}{(\alpha + \lambda)^2} = \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\alpha + \lambda)^2}.$$

3. Soit $\varphi : \lambda \mapsto \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\lambda + \alpha)^2}$. On dérive φ et on montrer que $\varphi'(\lambda) = 0$ si, et seulement si, $\lambda = \dfrac{\sigma^2}{\alpha}$. Mais alors, $\varphi(\sigma^2/\alpha) = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}$, d'où le résultat. En remplaçant $X - m$ par $-(X - m$, le raisonnement ci-dessus en change pas. On a donc

$$\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2},$$

et

$$\mathbb{P}(-X + m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(|X-m|\leq\alpha)=\mathbb{P}(X-m\geq\alpha)+\mathbb{P}(-X+m\geq\alpha)\leq\frac{2\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}.$$

(Je laisse la comparaison avec Bienaymé-Tchebychev pour vous).

Exercice 100 (Inégalité de Paley-Zygmund)**.** Soit $\lambda\in]0,1[$, X variable aléatoire réelle strictement positive. Montrer que

$$(1-\lambda)^2\mathbb{E}[X]^2\leq\mathbb{P}(X\geq\lambda\mathbb{E}[X])\mathbb{E}[X^2].$$

Corrigé : Soit $a>0$. Alors $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X<a}X]+\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geq a}X]\leq a+\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geq a}X]$. Il suffit maintenant de prendre $a=\lambda\mathbb{E}[X]$. J'ai donc

$$\mathbb{E}[X]-\lambda\mathbb{E}[X]\leq\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X\geq\lambda\mathbb{E}[X]}X].$$

Finalement,

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}[(1-\lambda)X])^2&\leq\left(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X\geq\lambda\mathbb{E}[X]}X]\right)^2\\&\leq\mathbb{E}[\mathbb{1}^2_{X\geq\lambda\mathbb{E}[X]}]\mathbb{E}[X^2]\text{ par Cauchy-Schwarz}\\&=\mathbb{P}(X\geq\lambda\mathbb{E}[X])\mathbb{E}[X^2].\end{aligned}$$

Exercice 101 (Inégalité de Bernstein)**.** Soit S_n variable aléatoire tel que $S_n\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p), x>0, q=1-p$.

1. Soit $\lambda>0$. Montrer que
$$\mathbb{P}(S_n-np\geq nx)\leq\frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda(S_n-np)}\right]}{e^{n\lambda x}}.$$
2. Montrer que $\mathbb{E}\left[e^{\lambda(S_n-np)}\right]=\left(pe^{\lambda q}+qe^{-\lambda p}\right)^n$.
3. Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}, e^t\leq e^{t^2}+t$. En déduire que
$$\mathbb{P}(S_n-np\geq nx)\leq e^{n(\lambda^2-\lambda x)}.$$
4. Conclure que
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq x\right)\leq 2e^{\frac{-nx^2}{4}}.$$

Corrigé :

1. On a
$$\{S_n-np\geq nx\}=\{\lambda(S_n-np)\leq n\lambda x\}=\left\{e^{\lambda(S_n-np)}\geq e^{n\lambda x}\right\}.$$
Par Markov, puisque $e^{\lambda(S_n-np)}\geq 0$,
$$\mathbb{P}(S_n-np\geq nx)\leq\frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda(S_n-np}\right]}{e^{n\lambda x}}.$$
2. Par le théorème de transfert,
$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda(S_n-np}\right]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^\lambda p)^k q^{n-k}=e^{-n\lambda p}(e^\lambda p+q)^n=(pe^{\lambda q}+qe^{-\lambda p})^n.$$
3. On pose $f: t\mapsto e^{t^2}+t-e^t$. On étudie ses variations. On a un minimum en 0 et $f(0)=0$. f est décroissante puis croissante donc f est positive. On applique l'inégalité précédente à λq et $-\lambda p$. On a
$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda(S_n-np}\right]\leq\left(p(e^{\lambda^2q^2}+\lambda q)+q(e^{\lambda^2p^2}-\lambda p)\right)\leq((p+q)e^{\lambda^2})^n\leq e^{n\lambda^2}.$$
Puis,
$$\mathbb{P}(S_n-np\geq nx)\leq e^{n(\lambda^2-\lambda x)}.$$

4. On minimise à droite. On trouve $\lambda = x/2$. On a donc $\mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq e^{-nx^2/4}$.
5. On montre de même que $\mathbb{P}(S_n - np \leq -nx) \leq e^{-nx^2/4}$. D'où

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) = \mathbb{P}(S_n - np \geq nx) + \mathbb{P}(S_n - np \leq -nx) \leq 2e^{-nx^2/4}.$$

Exercice 102. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit $x \in [-1, 1], t \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$
2. Soit X une variable aléatoire discrète ayant une espérance. On la suppose centrée bornée par 1. Montrer que e^{tX} admet une espérance et que
$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] \leq e^{t^2/2}.$$
3. Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes centrées indépendantes. On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!], |X_i|$ est bornée par un réel a_i. En notant $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}\left[e^{tS_n}\right] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$
4. En déduire l'inégalité de Hoeffding :
$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right).$$

Remarque. Si on ne suppose plus les variables centrées, le résultat tient à condition d'estimer $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geq \varepsilon)$.

Corrigé :

1. exp est convexe donc par l'inégalité de convexité, on a
$$\forall x \in [-1, 1], \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tx) = \exp\left(\frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}t\right) \leq \frac{1-x}{2}\exp(-t) + \frac{1+x}{2}\exp(t)$$
puisque $\frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2} = 1$ et que ces deux termes que l'on somme sont dans $[0, 1]$, x étant lui dans $[-1, 1]$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $tX \leq |t||X| \leq |t|$ donc par croissance de exp, on a $0 \leq \exp(tX) \leq \exp(|t|)$. Ainsi, $\exp(tX)$ est positive bornée donc elle admet une espérance. Par ailleurs, X est bornée par 1 donc par la question précédente, on a
$$\exp(tX) \leq \frac{1-X}{2}\exp(-t) + \frac{1+X}{2}\exp(t).$$
Par croissance puis linéarité de l'espérance, puisque X est centrée (donc $\mathbb{E}[X] = 0$), on a
$$\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \frac{1-\mathbb{E}[X]}{2}\exp(-t) + \frac{1+\mathbb{E}[X]}{2}\exp(t) = \frac{1}{2}(\exp(-t) + \exp(t)) = \cosh(t).$$
Or, on a l'inégalité classique
$$\forall t \in \mathbb{R}, \cosh(t) \leq \exp(t^2/2).$$

Pour cela, on va utiliser les séries entières. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cosh(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} \ , \ \exp(t^2/2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!2^n} t^{2n}.$$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \leq \prod_{k=n+1}^{2n} k$$

donc

$$\frac{1}{(2n)!} \leq \frac{1}{n!2^n}$$

donc par positivité de t^{2n} pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\cosh(t) \leq \exp(t^2/2).$$

Finalement, on a bien $\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp(t^2/2)$.

3. Assurons-nous de l'existence des objets. Soit $t \in \mathbb{R}$. S_n est bornée comme somme finie de variables aléatoires bornées donc $\exp(tS_n)$ l'est aussi et admet donc une espérance. Par indépendance des $(X_i)_i$, on a alors l'indépendance des $(\exp(tX_i))_i$ ce qui donne

$$\mathbb{E}[\exp(tS_n)] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \exp(tX_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(tX_i)].$$

On veut utiliser la question précédente. Pour obtenir X_i bornée par 1, il suffit de diviser par a_i donc on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq i \leq n, \mathbb{E}\left[\exp(tX_i/a_i)\right] \leq \exp(t^2/2).$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq i \leq n, 0 \leq \mathbb{E}\left[\exp(tX_i)\right] \leq \exp(a_i^2 t^2/2).$$

Ainsi, par produit, on a

$$\mathbb{E}[\exp(tS_n)] \leq \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i^2 t^2/2) = \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

4. Fixons maintenant $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. Par positivité de $\exp(tS_n)$, par Markov, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\exp(tS_n) \geq \exp(t\varepsilon)) \leq \frac{\mathbb{E}[\exp(tS_n)]}{\exp(t\varepsilon)} \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{n} c_j^2 - t\varepsilon\right).$$

Cela étant vrai pour tout t, il faut trouver un t « optimal ». Posons $a = \sum_{j=1}^{n} c_j^2$ et $f : t \geq 0 \mapsto \frac{t^2}{2} a - t\varepsilon \in \mathbb{R}$. f est polynômiale : elle atteint un unique minimum en ε/a et f vaut $-\varepsilon^2/2a$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \exp(-\varepsilon^2/2a) = \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right).$$

Remarque culturelle : Les notions de convergence de variables aléatoires sont **hors-programme** mais on en voit sans le dire. La loi faible des grands nombres montre qu'une suite tend vers une autre variable aléatoire mais insistons sur le « tend ». Il en existe essentiellement 4. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. Soit X une variable aléatoire. La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- converge presque sûrement vers X, ce que l'on note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} X$ lorsque
$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$
- converge dans L^p pour $p \geq 1$, ce que l'on note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X$ lorsque
$$\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
- converge en probabilité, ce que l'on note $X \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X_n$ lorsque
$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$
- converge en loi vers X ce que l'on note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ lorsque pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a
$$\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)].$$

Par exemple, la loi faible des grands nombres indique que S_n converge en probabilité vers $\mathbb{E}[X_1]$.

Exercice 103 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Rademarcher de paramètre $p \in [0,1]$ (c'est une loi de support $\{-1,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1) = p; \mathbb{P}(X=-1) = 1-p$). On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \geq 1$ et $S_0 = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\exists n \geq 1 : S_n = 0) = 1 \Longrightarrow \mathbb{P}(\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geq k, S_n = 0) = 1$. Interpréter.
2. On note $T = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$ avec la convention $\inf(\emptyset) = +\infty$, $u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ et $f_n = \mathbb{P}(T = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}$. En déduire que $\forall s \in [0,1[, U(s) - 1 = U(s)F(s)$ avec U, F séries génératrices des suites u et f respectivement (donc $U(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n s^n$).
3. En déduire l'équivalence des trois assertions suivantes (i.o. = infinitely often = infiniment souvent) :
   a) $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$ diverge.
   b) $\mathbb{P}(\exists n \geq 1 : S_n = 0) = 1$.
   c) $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ i.o.}) = 1$.
4. Montrer qu'il existe une seule valeur de p pour que la série diverge et que dans les autres cas, la série diverge. *Indication : on pourra regarder S_{2n}.*

Corrigé :

1. Montrons l'implication directe, la réciproque étant triviale. Notons R l'instant de la dernière visite en 0 (on pose $S_0 = 0$). On note $R = \sup\{n \geq 0 : S_n = 0\}$ et on souhaite montrer que $\mathbb{P}(R = +\infty) = 1$ Puisque R est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, il suffit de montrer que $\mathbb{P}(R = k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Fixons $k \in \mathbb{N}$. Par définition,
$$\mathbb{P}(R = k) = \mathbb{P}((S_k = 0) \cap (\forall n > k, S_n - S_k \neq 0)).$$
L'événement $(S_k = 0)$ est un événement qui ne dépend que des valeurs de $X_1, \cdots, X_k$. L'événement $\left(\bigcap_{n>k} \{S_n - S_k \neq 0\}\right)$ ne dépend que des valeurs de $(X_n)_{n>k}$. Par le lemme des coalitions, ils sont indépendants.

On a donc

$$\mathbb{P}(R=k)=\mathbb{P}\left((S_k=0)\cap(\forall n>k, S_n-S_k\neq 0)\right)=\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(\forall n>k, S_n-S_k\neq 0).$$

Or, on a l'égalité $(S_n-S_k)_{n>k}=(S_{n-k})_{n>k}=(S_n)_{n\geq 1}$ en loi (il suffit d'écrire les événements avec une intersection multi-indicée). Ainsi,

$$\mathbb{P}(\forall n>k, S_n-S_k\neq 0)=\mathbb{P}(\forall n\geq 1, S_n\neq 0)=1-\mathbb{P}(\exists n\geq 1, S_n=0)=1-1=0.$$

De fait,

$$\mathbb{P}(R=k)=\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(\forall n>k, S_n-S_k\neq 0)=\mathbb{P}(S_k=0)\times 0=0.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(R\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\})=1=\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(R=k)+\mathbb{P}(R=+\infty)=0+\mathbb{P}(R=+\infty).$$

Ainsi, $\mathbb{P}(R=+\infty)=1$. C'est ce qu'on voulait.

2. On remarque que $(S_n=0)=\bigsqcup_{k=1}^{n}(S_n=0\cap T=k)$, que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, si $T=k$, alors $S_k=0$ et que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, les événements $(S_n-S_k=0)$ et $(T=k)=0$ sont indépendantes puisque S_n-S_k est une fonction de $X_{k+1},\cdots,X_n$ et $T=k$ une fonction de $X_1,\cdots,X_k$ par le lemme des coalitions (alors que $S_n=0$ et $T=k$ ne sont pas indépendants, d'où l'astuce machiavélique de retirer S_k (qui vaut 0 puisque $T=k$), et enfin, que S_n-S_k et S_n-k pour $n>k$ ont même loi. Ainsi,

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}(\mathbb{P}(S_n=0\cap T=k)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(S_n-S_k=0)\mathbb{P}(T=k)=\sum_{k=1}^{n}f_k u_{n-k}.$$

Ainsi,

$$U(s)-1=\sum_{n\geq 1}u_n s^n=\sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}f_k u_{n-k}s^n=\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}f_k u_{n-k}s^n=U(s)F(s)$$

par produit de Cauchy.

3. On a donc $U(s)(1-F(s))=1$ pour $0\leq s<1$. En faisant tendre s vers 1^- on a $U(1)(1-F(1))=1$ (il y a convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque U et F sont croissantes (théorème de la limite monotone)). Par définition, on a, toujours dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=0)\right)(1-\mathbb{P}(\exists n\geq 1: S_n=0))=1.$$

Passons maintenant à la preuve de l'équivalence.

Pour (1) implique (2), la divergence de la série entraine, vu que le produit vaut 1, que le deuxième terme est nul *i.e.* $\mathbb{P}(\exists n\geq 1: S_n=0)=1$ ce qui est (2).

Pour (2) implique (3), on l'a montré question 1.

Pour (3) implique (1), montrons que $\neg(1)$ implique $\neg(3)$. $\neg(1)$ est la série converge. Par Borel-Cantelli, on sait alors que $\mathbb{P}(S_n=0 \text{ i. o.})=0$ (petit jeu d'écriture) ce qui implique que $\neg(1)$.

4. Déjà,

$$\forall k\in[\![-n,n]\!], \mathbb{P}(S_n=k)=\binom{n}{\alpha}p^\alpha(1-p)^\beta$$

avec α le nombre de $+1$ et β le nombre de -1 dans les valeurs prises par $X_1,\cdots,X_n$. Ainsi, $\alpha=\dfrac{n+k}{2}$ et $\beta=\dfrac{n-k}{2}$. De fait,

$$\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\binom{2n}{n}(p(1-p))^n\sim\frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Pour $p\neq 1/2$, la série converge, pour $p=1/2$, la série diverge par comparaison.

Exercice 104. Soit $S = (s_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique réelle. Montrer que S est positive si, et seulement si, il existe un espace probabilisé et une famille $(X_1, \cdots, X_n)$ de variables aléatoires réelles bornées telles que $s_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ appelée matrice de covariance.

Corrigé : Soit une famille $(X_1, \cdots, X_n)$ de variables aléatoires réelles bornées et on note $s_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Soit Y un vecteur de coordonnées $(y_1, \cdots, y_n)$. Alors

$$Y^T SY = \sum_{1\leq i,j\leq n} y_i y_j s_{ij} = \sum_{1\leq i,j\leq n} y_i y_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Or, par développement d'une forme bilinéaire,

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^n y_i X_i, \sum_{j=1}^n y_j X_j\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} y_i y_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

et on reconnait à gauche $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n y_i X_i\right)$ que l'on sait positive.

Réciproquement, soit S positive et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, ses valeurs propres (positives donc). Un théorème du cours assure l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et des variables aléatoires indépendantes $Y_1, \cdots, Y_n$ sur cet espace de lois fixées, et ici, on les prend de sorte que $\forall 1 \leq i \leq n, \mathbb{P}(Y_i = \sqrt{\lambda_i}) = \mathbb{P}(Y_i = -\sqrt{\lambda_i}) = 1/2$ si $\lambda_i > 0$ et $Y_i = 0$ sinon. On a alors Y_i centrée de variance λ_i pour tout $1 \leq i \leq n$ et le couple (Y_i, Y_j) est décorrélée pour $i \neq j$. Soit P une matrice quelconque et posons

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

de sorte que pour tout $1 \leq i \leq n, X_i = \sum_{k=1}^n p_{ki} Y_k$ avec $P = [p_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$. La bornitude des X_i est alors automatique et par linéarité de l'espérance, les X_i sont centrées. Pour $i \neq j$, on a

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{1\leq k,l\leq n} p_{ki} p_{lj} \underbrace{\mathrm{Cov}(Y_k, Y_l)}_{=\delta_{k,l}\mathrm{Var}(Y_k)=\delta_{kl}\lambda_k} = \sum_{k=1}^n p_{ki}\lambda_k p_{kj} = P^T DP$$

qui est une matrice symétrique.

Chapitre 15

Equations différentielles ordinaires

15.1 Exercices de calculs

Exercice 105.
Déterminer les solutions développables en série entière de $(E) : xy'' + 2y' + xy = 0$.

Corrigé : Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $|x| < R$. Alors

$$xf''(x) = x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n,$$
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$
$$xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n.$$

Supposons que f soit solution de E. Alors

$$xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0$$

ce qui donne

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + a_{n-1})x^n = 0$$

ce qui donne $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \dfrac{-a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$. Par récurrence immédiate, $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et encore par récurrence immédiate,

$$\forall n \geq 1, a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n+1)!}.$$

Réciproquement, $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec a_n vérifiant les conditions juste avant est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (en utilisant la règle de d'Alembert pour les séries numériques par exemple) et satisfait l'équation différentielle par le calcul du début. D'ailleurs, $f = a_0\dfrac{\sin(t)}{t}$ prolongée par continuité par 1 en 0.

Exercice 106. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + y = \tan(t)\ ;\ t \in]-\pi/2, \pi/2[=: I$.

Corrigé : c'est une équation d'ordre 2 linéaire à coefficients constants avec second membre non constant. Les solutions de l'équation homogène sont $\{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) \in \mathbb{R} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Pour trouver une solution

particulière, faisons une variation de la constante. Etant donné que $(\cos, \sin)$ forme un système fondamental de solutions, soit λ, μ, deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $y(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$ pour $t \in I$. Alors pour que y soit solution, il suffit que

$$\begin{cases} \lambda'(t)\cos(t) + \mu'(t)\sin(t) = 0 \\ \lambda'(t)(-\sin(t)) + \mu'(t)\cos(t) = \tan(t) \end{cases}.$$

Je recommande l'utilisation des formules de Cramer. Je vous propose un petit rappel. On souhaite résoudre le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}.$$

Alors pour obtenir x, on divise par le déterminant de la matrice le déterminant de la matrice formé des colonnes du système où l'on a remplacé la colonne de x par le second membre :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}.$$

De manière générale, si l'on a un système d'équation $AX = B$ avec $A = (a_{ij})_{ij}$ inversible et $X = (x_i)_i$, alors $x_k = \dfrac{1}{\det(A)}\det(B_k)$ où B_k est la matrice A où la k-ème colonne a été remplacée par B.

Ici, on a donc le déterminant du système qui vaut $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Ainsi,

$$\lambda'(t) = \begin{vmatrix} 0 & \sin(t) \\ \tan(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} \; , \; \mu'(t) = \begin{vmatrix} \cos(t) & 0 \\ -\sin(t) & \tan(t) \end{vmatrix} = \sin(t).$$

On peut choisir $\mu(t) = -\cos(t)$. Pour obtenir $\lambda'(t)$, on intègre [1] :

$$\int^x \lambda' = \int^x \frac{-\sin^2(t)}{\cos(t)}\mathrm{d}t \underset{u=\sin(t)}{=} \int^{\sin(x)} \frac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u = \int^{\sin(x)} 1 - \frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u = \sin(x) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\ln(1+\sin(x))}{\ln(1-\sin(x))}\right).$$

On choisit alors $\lambda = \sin(x) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\ln(1+\sin(x))}{\ln(1-\sin(x))}\right)$.

On vient d'obtenir une solution particulière :

$$y(t) = \frac{\cos(t)}{2}\ln\left(\frac{\ln(1+\sin(x))}{\ln(1-\sin(x))}\right).$$

L'ensemble des solutions de (E) est alors

$$\left\{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) - \frac{\cos(t)}{2}\ln\left(\frac{\ln(1+\sin(x))}{\ln(1-\sin(x))}\right) \in \mathbb{R} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 107. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = \dfrac{2e^x}{(x+1)^3}$.

Corrigé : c'est une équation d'ordre 2 linéaire à coefficients constants avec second membre non constant. Les solutions de l'équation homogène sont $\{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^t + \mu t e^t \in \mathbb{R} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Pour trouver une solution

1. on peut aussi écrire $\dfrac{\sin^2(t)}{\cos(t)} = \cos(t) - \dfrac{\cos(t)}{1-\sin^2(t)} = \cos(t) - \dfrac{\cos(t)}{2(1+\sin(t))} - \dfrac{\cos(t)}{2(1-\sin(t))}$

particulière, faisons une variation de la constante. Etant donné que $(\exp, t \mapsto te^t)$ forme un système fondamental de solutions, soit λ, μ, deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $y(t) = \lambda(t)e^t + \mu(t)te^t$. Alors pour que y soit solution, il suffit que

$$\begin{cases} \lambda'(t)e^t + \mu'(t)te^t = 0 \\ \lambda'(t)e^t + \mu'(t)(1+t)e^t = \dfrac{2e^t}{(t+1)^3} \end{cases}.$$

Le déterminant du système est $(1+t)e^{2t} - te^{2t} = e^{2t}$. Ainsi,

$$\lambda'(t) = e^{-2t}\begin{vmatrix} 0 & te^t \\ \dfrac{2e^t}{(t+1)^3} & (1+t)e^t \end{vmatrix} = \frac{-2t}{(t+1)^3} \; ; \; \mu'(t) = e^{-2t}\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & \dfrac{2e^t}{(t+1)^3} \end{vmatrix} = \frac{2}{(t+1)^3}.$$

Une primitive de $t \mapsto (-2t)(t+1)^{-3}$ est $\dfrac{2t+1}{(t+1)^2}$. Une primitive de $t \mapsto (t+1)^{-3}$ est $\dfrac{-1}{2(t+1)^2}$.

$$t \mapsto \frac{2te^t + e^t}{(t+1)^2} - \frac{te^t}{(t+1)^2} = \frac{e^t}{t+1}$$

est solution particulière. Les solutions de (E) sont donc

$$\{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^t + \mu te^t + \frac{e^t}{t+1} \in \mathbb{R} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 108. Résoudre le système différentiel suivant : $(S) : \begin{cases} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$.

Corrigé : on écrit le système sous la forme $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On pose alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\chi_A = (X-1)(X-i)(X+i)$. On calcule alors les espaces propres à l'aide d'un système. On obtient

$$\mathcal{E}_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \; , \; \mathcal{E}_i(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}\right) \; , \; \mathcal{E}_{-i}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Le cours assure que les solutions **complexes** du système sont les

$$\left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu e^{it} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix} + \nu e^{-it} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C} \right\}.$$

Pour obtenir les solutions réelles, on extrait partie réelle et partie imaginaire d'un vecteur propre associé à la valeur propre i de A[2]. On constate en fait qu'en notant V_1, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et V_i, le vecteur $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$, $e^t V_1, \Re(e^{it}V_2), \Im(e^{it}V_2)$ forment une base de solution. Ainsi, les solutions du système sont les

$$\left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

15.2 Exercices standards

2. Eh oui, lorsque $AX = \lambda X$ avec λ complexe, alors $A\overline{X} = \overline{\lambda}\ \overline{X}$ car A est réelle ! On savait déjà que si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ était valeur propre complexe de A réelle, $\overline{A}$ aussi mais cela fonctionne aussi avec les vecteurs propres.

Exercice 109. On note $(E) : xy'' + y' + xy = 0 \ ; \ x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
2. Montrer qu'il en existe une unique qui vaut 1 en 0. On la note f.
3. Soit g une autre solution sur $]0, \alpha[$ avec $\alpha > 0$. On suppose que (f, g) est libre. Montrer que g n'est pas bornée.
4. On note $J(x) := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$. Montrer que J est solution de (E).
5. Montrer que J est développable en série entière et donner son expression.

Corrigé :

1. Soit $f = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $x \in]-R, R[$.

$$xf''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} = \sum_{n=1} a_{n+1}n(n+1)x^n, f'(x) \quad = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)x^n, xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n.$$

Analyse : f est solution de (E) si, et seulement si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_{n+1}n(n+1) + a_{n+1}(n+1) + a_{n-1}\right) x^n + a_1 x^0 = 0$$

ce qui revient à demander par unicité des coefficients d'une série entière

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1}(n+1)^2 + a_{n-1} = 0, a_1 = 0.$$

Par récurrence, on a donc immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0 \ ; \ a_{2n+2} = \frac{-a_{2n}}{[2(n+1)]^2} = \cdots = \frac{(-1)^{n+1}a_0}{2^{2(n+1)}(n+1)!^2}.$$

On a donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^{2n} a_0.$$

Synthèse : soit f série entière définit ci-avant. Montrons que son rayon de convergence est strictement positif. Pour cela, le lemme d'Abel nous dit que $R = +\infty$. En effet, en notant $b_n = \begin{cases} \frac{(-1)^p}{4^p(p!)^2} & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$, la suite $(b_n R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $R > 0$. Il suffit d'écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}, n = 2p, \frac{(-1)^p}{4^p(p!)^2} R^{2p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par les calculs antérieurs à l'analyse, f est solution de (E) : c'est ce qu'il fallait démontrer.

2. On a un degré de liberté sur a_0. En fixant $a_0 = 1$, on a le résultat.
3. Soit g telle que (f, g) soit libre et g solution de (E). Soit W wronskien de f, g, c'est-à-dire, $W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$. Alors W est dérivable de dérivée $W' = f'g' + fg'' - f''g - f'g'$ donc $xW' = f(-g' - xg) - (-f' - xf)g = -fg' + f'g = -W$. Ainsi, $(xW)'$ est constant sur $]0, \alpha[$ donc il existe une constante réelle A tel que $\forall x \in]0, \alpha[, xW(x) = A$. A est non nulle : sinon, W est nulle ce qui contredit la liberté de (f, g). g étant bornée, je la prolonge en 0. Ainsi,

$$A = xf(x)g'(x) - xf'(x)g(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} xf(x)g'(x).$$

Puisque $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, on a donc $g'(x) \underset{x\to 0^+}{A} /x$. Soit $x_0 \in]0,\alpha[$. Puisque $\int_0^{x_0} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge, par théorème d'intégration d'équivalents, on a

$$g(x_0) - g(x) \underset{x\to 0}{\sim} A(\ln(x_0) - \ln(x)).$$

Cela contredit le caractère bornée de g. Ainsi, par l'absurde, on a g non bornée.

4. Soit $J : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$. Soit $f : (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\pi] \mapsto \cos(x\sin(t)) \in \mathbb{R}$.
   - $\forall t \in [0,\pi], x \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; $\forall t \in [0,\pi], \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = -\sin^2\cos(x\sin(t))$.
   - Pour tout x réel, ces dernières applications sont mesurables sur $[0,\pi]$.
   - Domination : chacune de ces applications sont continues sur le segment $[0,\pi]$ donc dominée sur $[0,\pi]$.

   Par le théorème de dérivation $\mathcal{C}^2$ sous le signe intégral, J est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$J'(x) = -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\mathrm{d}t \ , \ J''(x) = -\int_0^\pi \sin^2\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t.$$

   Ainsi,

$$x(J''(x)+J(x)) = x\int_0^\pi (1-\sin^2(t))\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(t)(x\cos(t))\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t.$$

   On réalise une intégration par parties, on est en présence de deux fonctions $\mathcal{C}^1$: on intègre $t \mapsto (x\cos(t))\cos(x\sin(t))$ dont une primitive est $t \mapsto \sin(x\sin(t))$ et on dérive cos. On obtient alors

$$x(J''(x)+J(x)) = \underbrace{[\sin(x\sin(t))\cos(t)]_0^\pi}_{=0} + \int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\mathrm{d}t = -J'(x).$$

   On a donc J solution de (E).
5. De plus, J est bornée sur $\mathbb{R}$. Par précédent, $J = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or, $J(0) = \pi = \lambda f(0) = \lambda$ donc $J = \pi f$.

Exercice 110.
Soit $\lambda > 0$.

1. Résoudre $(E) : xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^+$.
3. Déterminer les solutions de $xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$ développables en série entière au voisinage de 0.
4. Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}.$$

Corrigé :

1. C'est une équation d'ordre 1. Les solutions homogènes sont de la forme $Cx^{-\lambda}$ pour C un réel. Par variation de la constante, on cherche une fonction dérivable $x \mapsto C(x)$ tel que $y : x \mapsto C(x)x^{-\lambda}$ soit solution. On en déduit que $xC'(x)x^{-\lambda} = \frac{1}{1+x}$ ce qui donne $C'(x) = \frac{x^{1-\lambda}}{1+x}$. $x \mapsto \frac{x^{1-\lambda}}{1+x}$ est positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est intégrable au voisinage de 0[3]. Il existe alors A réel tel que $\forall x > 0, C(x) = A + \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

3. c'est équivalent $x^{\lambda-1}$ et $\lambda - 1 > -1$ donc par Riemann, on a le résultat

2. Soit y solution. Alors y coïncide avec une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc est de la forme

$$y(x) = x^{-\lambda}\left(A + \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\mathrm{d}t\right)$$

avec A un réel. y étant continue en 0, puisque $x^{-\lambda} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, l'intégrale étant nul quand $x \to 0$, A est nécessairement nul. Ainsi, $\forall x > 0$,

$$y(x) = x^{-\lambda}\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\mathrm{d}t \underset{u=1/x}{=} \int_0^1 \frac{u^{\lambda-1}}{1+xu}\mathrm{d}u.$$

Appliquons le théorème de convergence dominée. Soit $f : (x,u) \in \mathbb{R}^+\times]0,1] \mapsto \dfrac{u^{\lambda-1}}{1+xu} \in \mathbb{R}$.

- C'est une fonction continue en u pour tout x.
- $\forall u \in [0,1], f(u,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} u^{\lambda-1}$.
- Domination : $\forall u \in]0,1], \forall x \geq 0, |f(x,u) \leq u^{\lambda-1} \in \mathrm{L}^1(]0,1])$.

Par le théorème de convergence dominée,

$$y(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \int_0^1 u^{\lambda-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda} =: y(0).$$

Ainsi, $y : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+xt}\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Il reste à montrer le caractère $\mathcal{C}^1$. Pour cela, on applique le théorème de dérivation sous le signe intégral.

- $\forall u \in]0,1], f(\cdot,u) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$; $\forall u \in]0,1], \forall x \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = -\frac{u^\lambda}{(1+xu)^2}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x,\cdot) \in \mathcal{C}^0_{pm}(]0,1],\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^1(]0,1]$.
- Domination : $\forall u \in]0,1], \forall x \geq 0$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(u,x)\right| \leq u^\lambda \in \mathrm{L}^1(]0,1]).$$

Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, y est bien $\mathcal{C}^1$.

3. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ série entière de rayon de convergence $R > 0$. On a, pour $|x| < R$

$$xf'(x) + \lambda f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+\lambda)a_n x^n.$$

Ainsi, f est solution de (E) si, et seulement si, $(-1)^n = (n+\lambda)a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n+\lambda}{n+1+\lambda} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $R = 1$. Ainsi, une telle série entière existe : il n'existe qu'une seule solution de E développable en série entière au voisinage de 0. C'est

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\lambda}x^n.$$

4. f coïncide avec y obtenu en question 2 sur $]0,1[$: on a

$$\forall x \in]0,1[, \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\lambda}x^n = \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+xt}\mathrm{d}t.$$

On prend alors $\lambda = \frac{1}{3}$ et $x = \frac{1}{8}$. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{3}} \frac{1}{8^n} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)} = \int_0^1 \frac{t^{-2/3}}{1+t/8}\mathrm{d}t.$$

Il reste à calculer cette intégrale. On le fait en posant $u = t^{1/3}$ ce qui donne

$$\int_0^1 \frac{t^{-2/3}}{1+t/8}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{u^{-2}}{8+u^3} 3u^2 \mathrm{d}u = 3\int_0^1 \frac{1}{8+u^3}\mathrm{d}u.$$

Une décomposition en éléments simples donne aisément :

$$\frac{1}{8+u^3} = \frac{1}{12(2+v)} + \frac{-2u+2}{24(u^2-2u+4)} + \frac{1}{4((u-1)^2+3)}.$$

L'intégration se déroule tranquillement et on obtient

$$3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)} = 3\times 8\times \int_0^1 \frac{1}{8+u^3}\mathrm{d}u = \ln(3) + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Ainsi, la somme à calculer vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)} = \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi.$$

Exercice 111 (Lemme des zéros isolés)**.** Soit $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0, t \in I$ avec I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et a, b continues sur I. Soit y une solution non nulle de (E). Soit t_0 un zéro de y. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, y ne s'annule qu'en t_0. En déduire que y n'admet qu'un nombre fini de zéros sur tout segment de $\mathbb{R}$ (c'est le lemme des zéros isolés).

Corrigé : Soit t_0 tel que $y(t_0) = 0$. Si $y'(t_0) = 0$, alors par Cauchy-Lipschitz linéaire, on a $y = 0$ ce qui n'est pas. Donc $y'(t_0) \neq 0$. Par continuité de y', il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], y'(t) \neq 0$. Par la contraposée du théorème de Rolle, $\forall a \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], y(a) = y(t_0) = 0 \Longrightarrow a = t_0$.

Supposons par l'absurde qu'il en existe une infinité dans $[a, b]$. Soit u, une suite de tels zéros. u est à valeurs dans $[a, b]$ compact : le théorème de Bolzano-Weierstrass assure donc qu'il existe φ extraction telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge, disons vers ℓ. Par continuité de y, $y(\ell) = 0$ et par précédent, ℓ est isolé. Soit un η comme précédent. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\eta}{2}$. Comme $u_{\varphi(n)}$ est un zéro dans $[\ell - \eta, \ell + \eta]$, il vaut ℓ. Ainsi, $(u_{\varphi(n)})_n$ stationne à ℓ ce qui est absurde.

Exercice 112 (Théorème d'entrelacement de Sturm)**.** Soit q_1, q_2 deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $q_1 \geq q_2$. Soit $y''(t) + q_i(t)y(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ (E_i) pour $i \in \{1, 2\}$.

1. Soit y_1 et y_2 solutions de (E_1) et (E_2). Soit α, β deux zéros de y_2 consécutifs. Montrer que y_1 s'annule sur $]\alpha, \beta[$. *On pourra calculer la monotonie du wronskien $W(y_1, y_2)$.* C'est le théorème d'entrelacement de Sturm.
2. On considère l'équation (E) : $y''(t) + e^t y(t) = 0, t \in \mathbb{R}^+$. Soit y une solution de (E). Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui constitue les zéros de y. *On pourra montrer que y s'annule sur un intervalle de la forme $[\alpha, \alpha + \pi\exp(\alpha/2)]$ grâce à une équation auxiliaire bien choisie.*
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \pi e^{-t_{n+1}/2} \leq t_{n+1} - t_n \leq \pi e^{-t_n/2}$. En déduire un équivalent de $(t_n)_n$.

1. Soit $f = W(y_1, y_2)$. Alors $f = y_1y_2' - y_2y_1'$ donc

$$f' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1(-q_2y_2) - y_2(-q_1y_1) = y_1y_2(q_1 - q_2).$$

Comme $q_1 \geq q_2$, f' est du signe de y_1y_2. Comme y_2 est continue sur $]\alpha, \beta[$ et ne s'y annule pas, elle est de signe constant, disons positif.

Supposons par l'absurde que y_1 ne s'annule pas. Alors y_1 est de signe constant par continuité, disons positif. Alors f' est aussi positive donc f croit. On obtient alors

$$f(\alpha) \leq f(\beta)$$

ce qui donne

$$y_1(\alpha)y_2'(\alpha) \leq y_1(\beta)y_2'(\beta) \ ; \ (\star).$$

Concluons grâce à l'argument suivant. Soit $\beta > t > \alpha$. Alors

$$\frac{y_2(t) - y_2(\alpha)}{t - \alpha} = \frac{y_2(t)}{t - \alpha} \geq 0.$$

L'inégalité passe à la limite en $y_2'(\alpha) \geq 0$. De même, $y_2'(\beta) \leq 0$. Ces inégalités sont strictes car par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $y_2 \neq 0$ donne $\neg(y_2(\alpha) = 0 \wedge y_2'(\alpha) = 0$ ce qui donne $y_2'(\alpha) \neq 0$ et on a la même chose pour β.

Ainsi, par positivité de y_1, $y_1(\alpha)y_2'(\alpha) > 0$ et $y_1(\beta)y_2'(\beta) < 0$ ce qui contredit $(\star)$.

2. On applique le lemme des zéros isolés (exercice 111). On en déduit que sur chaque compact $[k, k+1], k \in \mathbb{N}$, il existe un nombre fini de zéros sur $[k, k+1]$. Comme $\mathbb{R}^+$ s'écrit comme l'union dénombrable des $[k, k+1[, k \in \mathbb{Z}$ (caractère archimédien de $\mathbb{R}$), cet ensemble de zéros est au plus,dénombrable. On peut donc construire $(t_n)_{n\in I}$ une suite de tels zéros et les ranger dans l'ordre croissant. Le caractère isolé rend cette suite strictement croissante. Montrons que I est infini. On en déduira que I est équipotent à $\mathbb{N}$.

Pour cela, appliquons la question précédente. Soit $\alpha \geq 0$. Considérons $q_1 = \exp$ et $q_2 = \exp(\alpha)$ (fonction constante). Les solutions de (E_2) sont de la forme

$$y_2(t) = A\sin(\exp(\alpha/2)(t - \varphi)) \ ; \ A, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Posons donc $A = 1$ et $\varphi = \alpha$. Alors $y_2(t) = \sin(\exp(\alpha/2)(t - \alpha)$ donne une solution de (E_2) qui possède α comme zéro. Le prochain zéro de y_2 est, grâce à la fonction sinus, $\alpha + \pi\exp(-\alpha/2)$. Le théorème d'entrelacement de Sturm s'applique sur $I = [\alpha, \alpha + \pi\exp(-\alpha/2)]$ et comme $q_1 \geq q_2$ sur I, y s'annule sur $[\alpha, \alpha + \pi\exp(-\alpha/2)]$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, y possède bien une infinité de solutions.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons l'intervalle $[t_n, t_{n+1}] = I$. Soit $q_2 = \exp(t_{n+1})$. Alors $q_2 \geq q_1$ donc par le théorème d'entrelacement de Sturm, toute solution de (E_2) admet un zéro dans $[t_n, t_{n+1}]$. Les solutions de (E_2) sont de la forme $t \mapsto A\sin(\exp(t_{n+1}/2)(t - \varphi))$ donc avec $A = 1$ et $\varphi = t_n$, les zéros de cette fonction sont les $t_n + k\pi\exp(-t_{n+1}/2) =: u_k$. Ils sont rangés dans l'ordre croissant selon k et comme $u_0 \notin I$ et $u_1 \geq t_n$ nécessairement, $u_1 \in I$ ce qui donne $t_n + \pi\exp(-t_{n+1}/2) \in [t_n, t_{n+1}]$.

Cela donne donc $\pi\exp(-t_{n+1}/2) \leq t_{n+1} - t_n$.

Pour l'autre morceau, on applique la question précédente avec $\alpha = t_n$ ce qui donne que y s'annule entre t_n et $t_n + \pi\exp(-t_n/2)$ et le prochain zéro de y après t_n est t_{n+1} donc $t_{n+1} \in [t_n, t_n + \pi\exp(-t_n/2)$ ce qui donne $t_{n+1} - t_n \leq \pi\exp(-t_n/2)$.

Concluons. Comme $(t_n)_n$ converge vers $+\infty$, $\exp(-t_n/2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, $t_{n+1} - t_n$ tend vers 0. Il est bien connu que $\exp(f) \underset{a}{\sim} \exp(g)$ si, et seulement si $f - g \underset{a}{\longrightarrow} 0$ ce qui donne que $\pi\exp(-t_n/2) \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\exp(-t_{n+1}/2)$. Par encadrement, $t_{n+1} - t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\exp(-t_n/2)$.

Obtenons maintenant un équivalent de $(\exp(t_n/2) =: v_n)_n$. Alors $2\ln(v_n) = t_n$ donc

$$2\ln(v_{n+1}) - 2\ln(v_n) = t_{n+1} - t_n \sim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{v_n}.$$

On écrit aussi

$$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_{n+1}}{v_n} - 1$$

puisque $\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\ln(x) \underset{x\to1}{\sim} x-1$. Par transitivité de l'équivalent, on en déduit que

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

Par le théorème de Cesàro, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi n}{2}$. Ainsi, $2\ln(v_n) = 2\ln(\pi/2)+2\ln(n) = t_n$ donc $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)$.

Chapitre 16

Calcul différentiel

Voici mes notations en calcul différentiel.

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = \partial_1 f$: dérivée partielle par rapport à la première variable, par rapport à la première coordonnée.
- $D_v f(a)$: dérivée directionnelle selon v de f en a. On a alors $D_{e_1} f(a) = \partial_1 f(a)$.
- df_a : différentielle de f en a. df_a est une application linéaire.
- $\nabla f(a)$: gradient de f en a. On a $f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f_a, h\rangle + o(\|h\|)$ (on rappelle que l'on définit le gradient pour une fonction vectorielle à valeur réelle).
- Jacf_a : jacobienne de f en a.
- Pour les dérivées secondes, je préfère $\partial^2_{xy} f$ pour dire $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
- Hess$f(a)$: hessienne de f en a.

16.1 Les 6 exercices à savoir faire si on veut abandonner le calcul différentiel

Exercice 113. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \mapsto \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}} \in \mathbb{R}$. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Etudier l'existence de dérivées partielles.

Corrigé : Si f est continue, alors la valeur en 0 doit être la limite de $f_0 : y \mapsto f(0,y)$ quand $y \to 0$ à savoir 0.

Ainsi, pour montrer la continuité de f en 0, on regarde alors

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, |f(x,y)| = \left|\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{3/4}} = (x^2+y^2)^{1/4} = \sqrt{\|(x,y)\|} \underset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, f est continue. Pourtant, f n'admet pas de dérivée partielle en la première variable en $(0,0)$. En effet,

$$\frac{f(t,0)-f(0)}{t} = \frac{t^2/(t^2)^{3/4}}{t} = 1/\sqrt{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

La continuité n'induit pas l'existence de dérivées partielles.

Exercice 114. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Montrer qu'elle admet des dérivées selon tout vecteur en $(0,0)$ mais qu'elle n'y est pas continue.

Corrigé : soit $v = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Il va nous servir de direction. On souhaite alors montrer que

$$g_v : t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{f(0+tv) - f(0)}{t} \in \mathbb{R}$$

admet une limite quand $t \to 0$. On a

$$g_v(t) = \frac{f(tv)}{t} = \frac{t^3x^2y}{t^4x^4 + t^2y^2}\frac{1}{t} = \frac{x^2y}{t^2x^4 + y^2}.$$

Si $y = 0$, alors $g_v(t) = 0$ donc g_v admet une limite quand $t \to 0$. Si $y \neq 0$, alors $g_v(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} x^2/y \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout v, g_v admet une limite en 0 : f admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur en $(0, 0)$.

f n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet, par exploitation séquentielle de la continuité, puisque $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0)$, f n'est pas continue.

Exercice 115. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Différentiable sur $\mathbb{R}^2$? (Pour plus tard, montrer que cette fonction constitue un contre-exemple au lemme de Schwarz.)

Corrigé : D'abord, la continuité. Soit x, y deux réels. Alors

$$|f(x, y)| = \left|xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| \leq |xy|\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = |xy|.$$

Pour un point méthode, pour montrer la différentiabilité, il est beaucoup plus simple de montrer le caractère $\mathcal{C}^1$! En effet, être $\mathcal{C}^1$, c'est être différentiable de différentielle continue. C'est équivalent à demander existence et continuité des dérivées partielles d'après le cours, ce qui est nettement plus aisé à montrer.

(Bien sûr, il existe des fonctions différentiables mais pas $\mathcal{C}^1$.)

Calculons les dérivées partielles. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x^2y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Or, $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ (il faut en abuser) donc

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\right| \leq \frac{|x^4||y| + |y|^5 + 4|x|^2|y|^5}{(x^2 + y^2)^2} \leq 6\sqrt{x^2 + y^2}$$

car $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. x et y joue des rôles antisymétrique donc on a le même résultat pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc différentiable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 116. Déterminer les extrema locaux puis globaux de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 1$. Etudier les extrema globaux de $f_{|[0,1]^2}$.

Corrigé : Déjà, f est de classe $\mathcal{C}^2$ donc on peut utiliser tous les théorèmes du programme pour conclure. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 + 6y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x - 6y$$

donc

$$\nabla f(x,y)=0 \iff \begin{cases} 6x^2+6y=0 \\ 6x-6y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ 6x^2+6x=0 \end{cases}.$$

Ainsi, si (x,y) est un point critique, alors $(x,y)=(0,0)$ ou $(-1,-1)$. On calcule ensuite les hessiennes en $(0,0)$ et en $(-1,-1)$ afin de voir si $f(0,0)$ et $f(-1,-1)$ sont des extrema de f. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on trouve que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=6\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-6.$$

Alors

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \mathrm{Hess}(f)(x,y)=\begin{pmatrix} 12x & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A:=\mathrm{Hess}(f)(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$ et $B:=\mathrm{Hess}(f)(-1,-1)=\begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$. Comme $\det(A)<0$, alors f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$. En revanche, on a $\det(B)>0$ et $\mathrm{tr}(B)<0$ donc f admet un maximum local en $(-1,-1)$. Ce maximum ne peut pas être un maximum global : en effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x,0)=2x^3+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la fonction ne saurait être majorée. Par conséquent, f n'admet pas de maximum global.

Sur le compact $[0,1]^2$, f étant continue, f y est bornée et atteint ses bornes en vertu du théorème des bornes atteintes. Soit donc

$$I_1=[0,1]\times\{0\}\ ;\ I_2=[0,1]\times\{1\}\ ;\ I_3=\{0\}\times[0,1]\ ;\ I_4=\{1\}\times[0,1].$$

Alors

$$\forall (x,y)\in I_1, f(x,y)=2x^3+2.$$

$f_{|I_1}$ présente un maximum en $(1,1)$ qui vaut 4 et un minimum en $(0,0)$ qui vaut 2.

$$\forall (x,y)\in I_2, f(x,y)=2x^3+6x-1=:g(x).$$

Alors $\forall x\in[0,1], g'(x)=6x^2+6\geq 0$ donc g est croissante. $f_{|I_2}$ présente un maximum en $(1,1)$ qui vaut 7 et un minimum en $(0,1)$ qui vaut -1.

$$\forall (x,y)\in I_3, f(x,y)=-3y^2+2.$$

$f_{|I_3}$ présente un maximum en $(0,0)$ qui vaut 2 et un minimum en $(0,1)$ qui vaut -1.

$$\forall (x,y)\in I_2, f(x,y)=-3y^2+6y+4=:h(y).$$

h est une parabole tournée vers le bas qui a son maximum en $-\dfrac{6}{2\times(-3)}=1$. Ainsi, $f_{|I_4}$ présente un maximum en $(1,1)$ qui vaut 7 et un minimum en $(1,0)$ qui vaut 4.

Ainsi, $f_{|[0,1]^2}$ est maximale en $(1,1)$ et minimale en $(0,1)$.

Exercice 117. Déterminer les extrema de $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2$.

Corrigé : f est $\mathcal{C}^2$ donc on pourra appliquer tous les théorèmes du programme. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4(x^3-x+y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4(y^3-y+x).$$

Ainsi,

$$\nabla f(x,y)=0\iff\left\{\begin{array}{l}x^3-x+y=0\\y^3-y+x=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}x^3+y^3=0\\x^3-x+y=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}x=-y\\x^3-2x=0\end{array}\right..$$

De fait, si (x,y) est un point critique, alors $(x,y)\in\left\{(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})\right\}$. On calcule ensuite les hessiennes en $(0,0)$ et en $(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$ afin de voir si $f(0,0)$ et $f(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$ sont des extrema de f. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on trouve que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=4\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2-4\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=12y^2-4.$$

Ainsi,

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\mathrm{Hess}f(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2-4&4\\4&12y^2-4\end{pmatrix}.$$

On note alors $A:=\mathrm{Hess}(f)(0,0)=\begin{pmatrix}-4&4\\4&-4\end{pmatrix}$ et $B:=\mathrm{Hess}(f)(\sqrt{2},-\sqrt{2})=\begin{pmatrix}20&4\\4&20\end{pmatrix}=\mathrm{Hess}(f)(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Comme $\det(A)=0$, alors on ne peut pas encore conclure. Pour conclure, on remarque que pour $t\in\mathbb{R}$, $f(x,x)=2x^4$ et $f(x,0)=x^2(x^2-2)\underset{x\to0}{\sim}-2x^2$ donc dans tout voisinage de $(0,0)$, il existe des points où f prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives. On en déduit que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$: c'est un point col.

Ensuite, on a $\det(B)>0$ et $\mathrm{tr}(B)>0$ donc f admet un maximum local en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Montrons que f admet un minimum global. On sait que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a $2|ab|\leq a^2+b^2$. On en déduit que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$(x-y)^2\leq 2(x^2+y^2) \text{ et } (x^2+y^2)^2\leq 2(x^4+y^4).$$

On en déduit que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)\geq\frac{\|(x,y)\|^4}{2}-4\|(x,y)\|\underset{\|(x,y)\|\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Par conséquent, il existe $R>0$ tel que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|>R\Longrightarrow f(x,y)\geq 1$. Sur l'extérieur de la boule de centre 0 de rayon $R>0$, on calcule minore aisément l'infimum : $\inf\limits_{\|(x,y)\|>R}\geq 1$. Etudions sur la boule. On a $\inf\limits_{\|(x,y)\|\leq R}\leq f(0,0)=0$ donc l'infimum sur $\mathbb{R}^2$ est atteint dans la boule fermée de centre 0 de rayon R qui est atteint – c'est un compact et f est continue –. Puisque les seuls minima de $\mathbb{R}^2$ sont atteint en $(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$, ce sont des minima globaux.

Exercice 118. Déterminer les extrema de $f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto x^2+y^2+z^2$ sur $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^4+y^4+z^4=1\}$.

Corrigé : On considère $g:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto x^4+y^4+z^4-1$, qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$, au même titre que f. L'ensemble $\mathcal{E}=g^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$ et il est inclus dans le compact $[-1,1]^3$, donc est également compact. Par suite, $f_{|\mathcal{E}}$ admet des extrema. Soit $m=(x,y,z)\in\mathcal{E}$ un point où $f_{|\mathcal{E}}$ admet un extremum. Puisque $\nabla g(m)=4m$ est non nul (car $0\notin\mathcal{E}$), le théorème d'optimisation sous contrainte donne la colinéarité de $\nabla f(m)$ et $\nabla g(m)$, donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$2(x,y,z) = 4\lambda(x^3, y^3, z^3).$$

ce qui est équivalent à demander

$$\begin{cases} x(1-2\lambda x^2) = 0 \\ y(1-2\lambda y^2) = 0 \\ z(1-2\lambda z^2) = 0 \end{cases}$$

Étudions les points m de $\mathcal{E}$ qui vérifient cette condition.

- Si x, y et z sont tous les trois non nuls, alors $(*)$ donne $x^2 = y^2 = z^2$ donc $3x^4 = 1$ car $(x,y,z) \in \mathcal{E}$. Cela donne les points $m = \left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$ et $f(m) = \sqrt{3}$.
- Supposons deux des trois coordonnées non nulles et la troisième nulle. Vu la symétrie en (x,y,z) du problème, on peut supposer $z = 0$. Comme plus haut, cela implique $2x^4 = 1$ donc cela donne les points $m = \left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right)$ et $f(m) = \sqrt{2}$.
- Si deux des trois coordonnées sont nulles, alors $m = (\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ ou $(0, 0, \pm 1)$ et dans ce cas $f(m) = 1$.

On en conclut que la valeur du maximum de $f_{|\mathcal{E}}$ est $\sqrt{3}$ et qu'il est atteint exactement aux points $m = \left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$. La valeur du minimum est 1 et elle est atteinte exactement aux points $m = (\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ ou $(0, 0, \pm 1)$.

Il reste à déterminer si f admet $\sqrt{2}$ comme extremum local en $\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right)$ ou non (à une symétrie des coefficients près). Déjà, pour $\varepsilon > 0$ au voisinage de 0, on a

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \varepsilon\right) \geq f(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right))$$

et

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \varepsilon, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right) - \varepsilon\left(\frac{2}{\sqrt[4]{2}} + \varepsilon\right) \leq f(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right)).$$

Ainsi, f n'admet $\sqrt{2}$ comme extremum local en $\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right)$ et les cas symétrique se traite de manière similaire.

16.2 Exercices

Exercice 119. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $f : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle + \langle B, X\rangle$. Montrer que f est continue puis différentiable et calculer la différentielle en tout point.

Corrigé : Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} f(X+H) &= \frac{1}{2}\langle AX + AH, X + H\rangle + \langle B, X + H\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle AX, X\rangle + \langle AX, H\rangle + \langle AH, X\rangle + \langle AH, H\rangle\right) + \langle B, X\rangle + \langle B, H\rangle \\ &= f(X) + \frac{1}{2}\left(\langle AX, H\rangle + \langle AH, X\rangle\right) + \langle B, H\rangle + \langle AH, H\rangle \end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz, $\langle AH, H\rangle \leq |||A|||\|H\|\|H\|$ (d'ailleurs, cela assure la continuité du produit scalaire) et $\langle AH, X\rangle = \langle H, A^T X\rangle = \langle H, AX\rangle$ par symétrie de A. Ainsi, $df_X(H) = \langle AX + B, H\rangle$ et $\nabla f_X = AX + B$.

Exercice 120.

1. Soit $\varphi_1 : (r,\theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times [0,2\pi[\mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2$. Existence puis calcul de la matrice jacobienne et de son déterminant de φ_1 en (r,θ) pour tout $(r,\theta) \in \mathrm{R}^{+*} \times [0,2\pi[$.
2. Soit $\varphi_2 : (r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^{+*} \times [0,2\pi[\times[0,\pi[\mapsto (r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\varphi))$. Même question.

Corrigé :

1. On note $\varphi_1(r,\theta) = (u(r,\theta), v(r,\theta))$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc φ_1 l'est. On a
$$\mathrm{Jac}(\varphi_1)_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
Son déterminant est r. On retrouve alors $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |r|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.
2. *On me dit que j'ai inversé θ et φ... Les calculs sont tout de même exactement identique.* On note $\varphi_2(r,\theta,\varphi) = (u(r,\theta,\varphi), v(r,\theta,\varphi), w(r,\theta,\varphi))$. u,v,w sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc φ_2 l'est. On a
$$\mathrm{Jac}(\varphi_2)_{(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{\partial u}{\partial \theta} & \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} & \dfrac{\partial v}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} & \dfrac{\partial w}{\partial \theta} & \dfrac{\partial w}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$
Pour obtenir le déterminant, on développe par rapport à la dernière ligne :
$$\det(\mathrm{Jac}(\varphi_2)_{(r,\theta,\varphi)}) = \cos(\varphi)\begin{vmatrix} -r\sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \end{vmatrix} - r\sin(\varphi)\begin{vmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) \end{vmatrix}.$$
On a
$$\begin{vmatrix} -r\sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \end{vmatrix} = -r^2\left(\sin^2(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \cos^2(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi)\right) = -r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi),$$
$$\begin{vmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) \end{vmatrix} = -r\left(\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)\right) = -r\sin^2(\varphi).$$
Ainsi,
$$\det(\mathrm{Jac}(\varphi_2)_{(r,\theta,\varphi)}) = -r^2\sin(\varphi)(1-\sin^2(\varphi)) - r^2\sin^2(\varphi)\sin(\varphi) = -r^2\sin(\varphi).$$
On a alors $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = |r^2\sin(\varphi)|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

Exercice 121. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne $\|\cdot\|$. Montrer que $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto e^{-1/\|x\|^2}\mathbb{1}_{x\neq 0}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Corrigé : C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Déjà, regardons la continuité en 0. f tend vers 0 quand $\|x\| \to 0 = f(0)$ ce qui assure la continuité. Soyons naïf et calculons les dérivées partielles[1]. On a
$$f(x) = f(x_1,\cdots,x_n) = \exp\left(-\frac{1}{\sum_{k=1}^n x_i^2}\right).$$
Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Alors
$$\partial_i f(x) = -\frac{2x_i}{\|x\|^4}\exp\left(-\frac{1}{\sum_{k=1}^n x_i^2}\right)$$

1. cette fonction est en réalité de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On a $\left|\frac{2x_i}{\|x\|^4}f(x)\right| \leq \frac{2\|x\|}{\|x\|^4}f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparées et on peut donc prolonger par 0 en 0. Les dérivées partielles sont donc de classe $\mathcal{C}^0$ donc f est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 122. Soit $\varphi_p : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que φ_p est différentiable et calculer sa différentielle pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Corrigé : On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\|\cdot\|$ d'algèbre [2] On écrit

$$\varphi_p(M+H) = (M+H)^p = M^p + \sum_{i=1}^{p} M^{i-1}HM^{p-i} + \eta(M,H)$$

où $\eta(M,H)$ est une somme de produit de matrices M et H contenant au moins deux fois H dans le produit. Par sous-multiplicativité de la norme $\|\cdot\|$, $\|\eta(M,H)\| \leq \|H\|^2\|C(M,H)\|$ où $C(M,H)$ est bornée par un produit de $\|M\|$ et de $\|H\|$. On a donc

$$\varphi_p(M+H) = M^p + \sum_{i=1}^{p} M^{i-1}HM^{p-i} + o(H)$$

et $\sum_{i=1}^{p} M^{i-1}HM^{p-i}$ est linéaire en H. Ainsi,

$$d(\varphi_p)_M(H) = \sum_{i=1}^{p} M^{i-1}HM^{p-i}.$$

Exercice 123. Soit $\text{Inv} : M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que Inv est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. On souhaite calculer la différentielle de l'inverse.
   (a) Première méthode. Déterminer les dérivées partielles de Inv en I_n, puis en déduire la différentielle de Inv en I_n et le cas général.
   (b) Deuxième méthode. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $|||\cdot|||$. Soit H telle que $|||H||| < 1$. Montrer que $\sum_{k\geq 0} H^k$ converge. En déduire que $I_n + H$ est inversible puis déterminer la différentielle de Inv en I_n puis le cas général.
   (c) Troisième méthode. Etudier la différentielle de l'application $M \mapsto M \times \text{Inv}(M)$.

Corrigé :

1. Déjà, Inv a pour ensemble de départ un ouvert [3].Pour une matrice M quelconque, on a $A[\text{Com}(A)]^T = \det(A)I_n$. Alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[\text{Com}(A)]^T$ et A^{-1} est alors une fraction rationnelle en les coefficients de A ($\det(A)$ est polynômial en les coefficients de A, $\text{Com}(A)$ aussi car les mineurs le sont) donc Inv est $\mathcal{C}^\infty$.
2. (a) On note $(E_{ij})_{i,j}$ base canonique et on note une matrice M par ses coefficients (m_{ij}). Alors

$$\frac{\partial \text{Inv}}{\partial m_{ij}}(I_n)(M) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left([I_n + tE_{ij}]^{-1} - I_n\right).$$

Si $i = j$,

$$\frac{\partial \text{Inv}}{\partial m_{ii}}(I_n)(M) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\left[\frac{1}{t+1} - 1\right]\right)E_{ii} = -E_{ii}.$$

2. il en existe. Par exemple, la norme d'opérateur associée à M pour la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$, ou encore la norme euclidienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$

Si $i \neq j$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, (I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij}$$

car $E_{ij}^2 = 0$. Ainsi, $\dfrac{\partial \text{Inv}}{\partial m_{ij}}(I_n)(M) = -E_{ij}$. Ainsi, vu que Inv est $\mathcal{C}^1$, l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles est

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d\text{Inv}_{I_n}(H) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{ij} \frac{\partial \text{Inv}}{\partial m_{ij}}(I_n) = -H.$$

Repartons dans le cas général. Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour H suffisamment petit, $M+H$ est inversible (car $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est inversible) donc

$$\begin{aligned}(M+H)^{-1} &\underset{\star}{=} (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} \\ &= \text{Inv}(I_n + M^{-1}H)M^{-1} = (\text{Inv}(I_n) + d\text{Inv}_{I_n}(M^{-1}H) + o(H))M^{-1} \\ &= \text{Inv}(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(H)\end{aligned}$$

quand $H \to 0$. Attention à $\star$: les matrices ne commutent *a priori* pas ! On a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$! On en déduit que

$$\forall M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d\text{Inv}_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}.$$

(b) Une norme d'algèbre est sous-multiplicative. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\!\left|\!\left| H^k \right|\!\right|\!\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |||H|||^k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1 - |||H|||}.$$

La série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} H^k$ converge alors absolument donc converge. Ainsi, on peut considérer

$$(I_n - H)\sum_{k=0}^{+\infty} H^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(H^k - H^{k+1}) = I_n.$$

Ainsi,

$$(I_n + H)\sum_{k=0}^{+\infty}(-H)^k = I_n$$

et

$$(I_n + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-H)^k = I_n - H + o(H)$$

quand H tend vers 0. On retrouve alors les résultats de la méthode précédente et on continue de même :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d\text{Inv}_{I_n}(H) = -H.$$

Repartons dans le cas général. Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour H suffisamment petit, $M+H$ est inversible (car $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est inversible) donc

$$\begin{aligned}(M+H)^{-1} &\underset{\star}{=} (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} \\ &= \text{Inv}(I_n + M^{-1}H)M^{-1} \\ &= (\text{Inv}(I_n) + d\text{Inv}_{I_n}(M^{-1}H) + o(H))M^{-1} \\ &= \text{Inv}(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(H)\end{aligned}$$

quand $H \to 0$. Attention à $\star$: les matrices ne commutent *a priori* pas ! On a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$! On en déduit que

$$\forall M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d\text{Inv}_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}.$$

(c) $\varphi : M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M\mathrm{Inv}(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est constante égale à I_n donc de différentielle nulle. En fait, en notant $\psi : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AB$ est différentiable et ici, $\varphi(M) = \psi(M, \mathrm{Inv}(M))$. Par la règle de la chaîne[4], on a

$$0 = d\varphi_M(H) = \mathrm{Id}(H)\mathrm{Inv}(M) + Md\mathrm{Inv}_M(H)$$

ce qui donne

$$-M^{-1}HM^{-1} = d\mathrm{Inv}_M(H).$$

Exercice 124. Montrer que le déterminant $\det : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M) \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle.

Corrigé : on utilise ici la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$[5].

On calcule la différentielle de det en I_n. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors $\det(I_n + tH) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i)$, où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(H)$, donc

$$\det(I_n + tH) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i) = 1 + t\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}_{=\mathrm{tr}(H)} + o_{t\to 0}(t)$$

donc $d\det_{I_n}(H) = \mathrm{tr}(H)$.

On calcule la différentielle de det en $P \in \mathrm{GL}_($. Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\det(P + H) &= \det\left(P\left(I_n + P^{-1}H\right)\right) = \det(P)\det(I_n + P^{-1}H) \\
&= \det(P)\left(1 + \mathrm{Tr}(P^{-1}H) + o(H)\right) \\
&= \det(P) + \det(P)\mathrm{Tr}(P^{-1}H) + o(H) \\
&= \det(P) + \mathrm{Tr}(\det(P)P^{-1}H) + o(H)) \\
&= \det(P) + \mathrm{Tr}([\mathrm{Com}(P)]^T H) + o(H)
\end{aligned}$$

quand $H \to 0$ car $P[\mathrm{Com}(P)]^T = \det(P)I_n$. Ainsi, $d\det_P(H) = \mathrm{tr}((\mathrm{Com}(P))^T H)$.

On calcule la différentielle de det en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit une suite de matrices M_p inversibles tel que $M_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} M$. Alors

$$d\det_{M_p}(H) = \mathrm{tr}((\mathrm{Com}(M_p))^T H).$$

Par continuité de la comatrice, par continuité de la différentielle du déterminant, on a donc

$$d\det_M(H) = \mathrm{tr}((\mathrm{Com}(M))^T H).$$

Exercice 125. Déterminer les triangles d'aire maximale dans un cercle de centre 0 de rayon 1.

Corrigé : Tout d'abord, une première esquisse. Soit C cercle de centre 0 de rayon 1. Soit $f : (A, B, C) \in C^3 \mapsto \mathcal{A}_{ABC} \in \mathbb{R}$ où l'on note $\mathcal{A}_{ABC}$ aire du triangle ABC. Alors

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{2}$$

4. plus simplement, la différentielle d'une application bilinéaire

5. Ce n'est pas dur. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(M + xI_n)$ est polynômiale en x donc n'a qu'un nombre fini de racines. Soit alors x_0, la racine de module la plus petite. On considère alors la suite $(1/p)_{p\geq p_0}$ tel que $|1/p_0| < |x_0|$. On construit ainsi $(M + \frac{1}{p}I_n)_{p\geq p_0}$ suite de matrices inversibles qui tend vers M en $+\infty$.

où A, B, C sont rangés dans le sens direct. On cherche à maximiser f. Déjà, en notant R_θ rotation d'angle θ, on a

$$\overrightarrow{R_\theta(A)R_\theta(B)} = R_\theta\left(\overrightarrow{AB}\right).$$

Ainsi, pour tout $A, B, C \in C^3$, on a

$$f(R_\theta(A), R_\theta(B), R_\theta(C)) = \frac{\det\left(\overrightarrow{R_\theta(A)R_\theta(B)}, \overrightarrow{R_\theta(A)R_\theta(C)}\right)}{2} = \det(R_\theta)\frac{\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{2} = f(A, B, C)$$

car une matrice de rotation est de déterminant 1. Par ailleurs, $f(A, B, C) = f(A, C, B)$. Ainsi, le problème est invariant par rotation et par orientation. On peut donc poser $A = (1, 0)$, $B = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $C = (\cos(\theta'), \sin(\theta'))$ avec $0 \leq \theta \leq \theta' \leq 2\pi$. Avec ces notations,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{ABC} &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos(\theta) - 1 & \cos(\theta') - 1 \\ \sin(\theta) & \sin(\theta') \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2\sin^2(\theta/2) & -2\sin^2(\theta'/2) \\ 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) & 2\cos(\theta'/2)\sin(\theta'/2) \end{vmatrix} \\
&= 2\sin(\theta/2)\sin(\theta'/2)\begin{vmatrix} -\sin(\theta/2) & -\sin(\theta'/2) \\ \cos(\theta/2) & \cos(\theta'/2) \end{vmatrix} \\
&= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) =: g(\theta, \theta').
\end{aligned}$$

Soit D le domaine qu'on cherche à optimiser $D = \{(\theta, \theta') : 0 \leq \theta \leq \theta' \leq 2\pi\}$. Par définition,

$$\partial D = (\{\theta = 0\} \cup \{\theta' = 2\pi\} \cup \{\theta = \theta'\}) \cap D.$$

Ainsi, g est nulle sur ∂D et est strictement positive sur $\overset{\circ}{D}$. Par compacité de D et continuité de g, le maximum de g existe et est atteint en un point critique. On calcule donc les dérivées partielles :

$$\begin{aligned}
\forall(\theta, \theta') \in \overset{\circ}{D}, \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, \theta') &= 2\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right)\right) \\
&= \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta'}{2} - \theta\right).
\end{aligned}$$

De même, j'ai

$$\forall(\theta, \theta') \in \overset{\circ}{D}, \frac{\partial g}{\partial \theta'}(\theta, \theta') = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2} - \theta'\right).$$

Sur l'intérieur de D, les sin d'angle moitié ne s'annule jamais donc (θ, θ') est point critique si, et seulement si

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \sin\left(\frac{\theta'}{2} - \theta\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\theta}{2} - \theta'\right) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, 2\theta' - \theta = 2k\pi \\ \exists K \in \mathbb{Z}, 2\theta - \theta' = 2K\pi \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, 2\theta' - \theta = 2k\pi \\ \exists K \in \mathbb{Z}, 3\theta = (4K + 2k)\pi \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, 6\theta' - 4K\pi - 2K\pi = 2k\pi \\ \exists K \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{4K + 2k}{3}\pi \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \theta' = \frac{4\pi}{3}(K + k) \\ \exists K \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2\pi}{3}(2K + k) \end{cases}.
\end{aligned}$$

On conserve les solutions dans $\overset{\circ}{D}$ à savoir $K = 0$ et $k = 1$. On a alors

$$\theta' = \frac{4\pi}{3} \ , \ \theta = \frac{2\pi}{3}$$

donc

$$\mathcal{A}_{ABC} = g\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Remarque : si on veut un cercle de rayon quelconque noté R, alors l'aire est multiplié par R^2. L'exercice original était pour une ellipse. Toute ellipse se ramène à un cercle par une transformation très simple. En effet, l'équation cartésienne d'une ellipse est

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \ ; \ (\mathcal{E})$$

où $a, b > 0$ désigne respectivement le demi-grand axe et demi-petit axe. On considère alors $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (ax, by) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\varphi(C) = \mathcal{E}$. En effet, pour $x, y \in \mathbb{R}$, notons $(u, v) = \varphi(x, y)$. On a alors

$$1 = x^2 + y^2 = \left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2.$$

Ainsi, $(u, v) \in \mathcal{E}$. Par ailleurs, φ est clairement $\mathcal{C}^1$ et bijective : sa réciproque aussi est clairement $\mathcal{C}^1$ (on parle de $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme). Comme $\det(\varphi) = ab > 0$, on obtient que $ab\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{\varphi(ABC)}$ où $\varphi(ABC)$ désigne le triangle transformé par φ (il suffit de dessiner le triangle $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)$).

Exercice 126. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x^2 + 3y^2)\exp(-\|(x, y)\|^2)$. Déterminer les extrema de f. *Indication : on pourra écrire $f(x, y) = g(x^2 + y^2, y^2)$.*

Corrigé : On pose $g : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2u + v)e^{-u} \in \mathbb{R}$. L'application $\psi : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, y^2)$ est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq v \leq u\}$. En effet, pour tout $(u, v) \in E$, $\psi(\sqrt{u - v}, \sqrt{v}) = (u, v)$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2$.

Ainsi, on peut étudier les extrema de g sur E pour obtenir ceux de f. g est $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{E}$ qui est ouverte mais

$$\forall (u, v) \in \overset{\circ}{E}, \partial_2 g(u, v) = e^{-u} \neq 0$$

donc h n'a pas de point critique. Ainsi, les extrema de g sont sur la première bissectrice ou « l'axe des réels ». Les extrema de h existent sur E car E est compact et g est continue.

- Sur la première bissectrice, $\forall u \in \mathbb{R}^+, g(u, u) = 3ue^{-u}$. C'est une fonction réelle de la variable réelle. Il est aisé de montrer qu'il admet un maximum en $u = 1$ et ce maximum vaut $3e^{-1}$ [6], admet un minimum en 0 et ce minimum vaut 0.
- Sur « l'axe des réels », on a $\forall u \in \mathbb{R}^+, g(u, 0) = 2ue^{-u}$. Le maximum est atteint en $(1, 0)$ et vaut $2e^{-1}$, le minimum est atteint en $(0, 0)$.

Par ailleurs,

$$\forall (u, v) \in E, g(u, v) = ve^{-u} + 2ue^{-u} \leq ve^{-v} + 2ue^{-u} \leq 3e^{-1}.$$

Ainsi, g atteint son maximum global en $(1, 1)$. Enfin,

$$\forall (u, v) \in E, g(u, v) \geq 0$$

donc g atteint son minimum global en $(0, 0)$.

Ainsi, f atteint son minimum en (x, y) lorsque $x^2 + y^2 = 0, y^2 = 0$ ce qui signifie que $(x, y) = (0, 0)$. f atteint son maximum en (x, y) lorsque $x^2 + y^2 = 1, y^2 = 1$ ce qui signifie que $(x, y) = (0, 1)$ ou $(x, y) = (0, -1)$.

6. on a $xe^{-x} \leq e^{-1}$ pour $x \geq 0$ et cela servira plus tard

Exercice 127 (Expression du laplacien en polaire)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2\backslash 0, \mathbb{R})$ et $g : (r,\theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in \mathbb{R}$. Calculer $\Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ en fonction des dérivées partielles de g (on rappelle que pour une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans F, $\Delta f = \partial^2_{xx} f + \partial^2_{yy} f$). *Indication : on pourra le faire pour* $\partial_1 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)$ *dans un premier temps.*

Corrigé : On calcule les dérivées partielles de g d'abord. Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. En notant $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$,

$$\partial_1 g(r,\theta) = \cos(\theta)\partial_1 f(x,y) + \sin(\theta)\partial_2 f(x,y)$$

et

$$\partial_2 g(r,\theta) = -r\sin(\theta)\partial_1 f(x,y) + r\cos(\theta)\partial_2 f(x,y).$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \partial_1 g(r,\theta) \\ \partial_2 g(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}.$$

On inverse la matrice carrée pour obtenir

$$\partial_1 f(x,y) = \cos(\theta)\partial_1 g(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_2 g(r,\theta) =: \varphi(r,\theta)\ ,\ \partial_2 f(x,y) = \sin(\theta)\partial_1 g(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial_2 g(r,\theta) =: \psi(r,\theta).$$

Pour plus de lisibilité, on a défini φ, ψ.

Prenons du recul sur ce qu'on vient de montrer. Si on a $F(x,y) = G(r,\theta)$, on vient de montrer que

$$\partial_1 F(x,y) = \cos(\theta)\partial_1 G(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_2 G(r,\theta)$$

et

$$\partial_2 F(x,y) = \sin(\theta)\partial_1 G(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial_2 G(r,\theta).$$

On applique alors le résultat pour $F = \partial_1 f$ ou $F = \partial_2 f$ ce qui donne

$$\partial^2_{xx} f(x,y) = \cos(\theta)\partial_1 \varphi(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_2 \varphi(r,\theta)$$

et

$$\partial^2_{yy} f(x,y) = \sin(\theta)\partial_1 \psi(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial_2 \psi(r,\theta).$$

Alors [7]

$$\partial_1 \varphi(r,\theta) = \cos(\theta)\partial^2_{rr} g(r,\theta) + \frac{\sin(\theta)}{r^2}\partial_2 g(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial^2_{r\theta} g(r,\theta)$$

et

$$\partial_2 \varphi(r,\theta) = -\sin(\theta)\partial_1 g(r,\theta) + \cos(\theta)\partial^2_{r\theta} g(r,\theta) - \frac{\cos(\theta)}{r}\partial_2 g(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial^2_{\theta\theta} g(r,\theta).$$

De plus,

$$\partial_1 \psi(r,\theta) = \sin(\theta)\partial^2_{rr} g(r,\theta) - \frac{\cos(\theta)}{r^2}\partial_2 g(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial^2_{r\theta} g(r,\theta)$$

et

$$\partial_2 \psi(r,\theta) = \cos(\theta)\partial_1 g(r,\theta) + \sin(\theta)\partial^2_{r\theta} g(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_2 g(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial^2_{\theta\theta} g(r,\theta).$$

On obtient alors

7. on utilise dès qu'on le voit le théorème de Schwarz, nos fonctions étant de classe $\mathcal{C}^2$

$$\begin{aligned}\partial^2_{xx} f(x,y) &= \cos(\theta)\partial_1\varphi(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_2\varphi(r,\theta)\\ &= \cos^2(\theta)\partial^2_{rr}g(r,\theta) + \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\partial_2 g(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\partial^2_{r\theta}g(r,\theta)\\ &+ \frac{\sin(\theta)^2}{r}\partial_1 g(r,\theta) - \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{r}\partial^2_{r\theta}g(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)\sin(\theta}{r^2}\partial_2 g(r,\theta) + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2}\partial^2_{\theta\theta}g(r,\theta)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\partial^2_{yy} f(x,y) &= \sin(\theta)\partial_1\psi(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial_2\psi(r,\theta)\\ &= \sin^2(\theta)\partial^2_{rr}g(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\partial_2 g(r,\theta) + \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\partial^2_{r\theta}g(r,\theta)\\ &+ \frac{\cos^2(\theta)}{r}\partial_1 g(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{r}\partial^2_{r\theta}g(r,\theta) - \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2}\partial_2 g(r,\theta) + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2}\partial^2_{\theta\theta}g(r,\theta).\end{aligned}$$

Heureusement pour nous, les termes se ressemblent et on peut sommer facilement terme à terme :

$$\partial^2_{xx} f(x,y) + \partial^2_{yy} f(x,y) = \partial^2_{rr}g(r,\theta) + \frac{1}{r}\partial_1 g(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta}g(r,\theta).$$

Exercice 128.
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$. On appelle quotient de Rayleigh associée à u l'application

$$\begin{array}{rccc} R(u,\cdot): & E\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}\end{array}$$

que l'on note f dans cet exercice. On note $\|\cdot\|$ norme euclidienne associée.

1. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.
2. Montrer que f est différentiable sur $E\backslash\{0\}$ et calculer sa différentielle en tout point de $E\backslash\{0\}$.
3. En déduire une preuve du théorème spectral.

Corrigé :

1. Cette question est classique. Nous présentons ici deux preuves. Une première plutôt algébrique, celle qu'on attend en général, une plutôt topologique qui doit être utilisée pour cet exercice. En effet, la preuve algébrique utilise le théorème spectral mais c'est ce qu'on cherche à démontrer à la question 3 !

   Méthode 1 : Par le théorème spectral, il existe $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ valeurs propres de u et $e_1, \cdots, e_n$ vecteurs propres associées aux valeurs propres respectivement telle que $(e_1, \cdots, e_n)$ forment une base orthogonale. Soit $x \in E, x \neq 0$ et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ des réels tels que

   $$x = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k.$$

   Alors

   $$\langle u(x), x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \mu_i u(e_i), \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mu_i\mu_j\lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mu_i^2.$$

   Ainsi,

   $$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mu_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2.$$

Puisque $\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = \langle x, x\rangle$, on a finalement

$$\lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n.$$

f est donc bornée. f atteint ses bornes puisque $f(e_1) = \lambda_1$ et $f(e_n) = \lambda_n$.

Méthode 2 : Par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\forall x \in E\backslash\{0\}, f(x) = \left\langle u\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|}\right\rangle.$$

Ainsi, en notant $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$, puisque $\forall x \in E\backslash\{0\}, \frac{x}{\|x\|} \in S$, on a

$$\inf_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = \inf_{y\in S} f(y)\ ,\quad \sup_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = \sup_{y\in S} f(y)$$

S est bornée et $S = \|\cdot\|^{-1}(\{1\})$ donc est fermé car $\|\cdot\|$ est continue – par exemple, par la deuxième inégalité triangulaire, elle est 1-lipschitzienne – et $\{1\}$ est un fermé : S était donc l'image réciproque d'un fermé par une application continue. S étant inclus dans E de dimension finie, S est compact.

u est continue car linéaire en dimension finie. $x \mapsto \langle u(x), x\rangle$ est continue puisque par Cauchy-Schwarz, $|\langle u(x), x\rangle| \leq \|u(x)\|\|x\| \leq |||u|||\|x\|^2$. Enfin, $x \mapsto \|x\|^2$ est continue donc par quotient bien définie d'applications continues sur $E\backslash\{0\}$, f est continue sur cet ensemble. En particulier, f est continue sur S.

Par le théorème des bornes atteintes, f_S est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $a, b \in S$ tel que

$$\inf_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = \inf_{y\in S} f(y) = f(a)\ ,\quad \sup_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = \sup_{y\in S} f(y) = f(b).$$

Ainsi, f est bornée sur $E\backslash\{0\}$ et atteint ses bornes.

2. *On rappelle que le calcul différentiel dans un autre espace que $\mathbb{R}^n$ amène à des délicatesses. Dans $\mathbb{R}^n$, on dispose d'une base canonique où la plupart des calculs sont faits dans cette base. Ici, E est de dimension finie donc on pourrait plonger dans $\mathbb{R}^n$ mais cela serait maladroit. Contentons-nous de la définition de la différentielle, à savoir un développement limité.*

Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire, en notant $B(x) = \langle u(x), x\rangle$

$$\forall h \in E, B(x+h) = \langle u(x+h), x+h\rangle = \langle u(x)+u(h), x+h\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(h), x\rangle + \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), h\rangle.$$

u étant symétrique, $\langle u(x), h\rangle = \langle u(h), x\rangle$ pour tout $x, h \in E$. De plus, par Cauchy-Schwarz, $|\langle u(h), h\rangle| \leq \|u(h)\|\|h\| \leq |||u|||h\|^2 = o_{h\to 0}(\|h\|)$ [8]. Finalement,

$$\forall h \in E, B(x+h) = B(x) + 2\langle u(x), h\rangle + o_{h\to 0}(\|h\|).$$

De plus,

$$\forall h \in E, \|x+h\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + o_{h\to 0}(\|h\|).$$

Ainsi, par quotient,

$$\forall h \in E, \frac{1}{\|x+h\|^2} = \frac{1}{\|x\|^2}\frac{1}{1 + \frac{2\langle x,h\rangle}{\|x\|^2} + o_{h\to 0}(\|h\|)} = \frac{1}{\|x\|^2}\left(1 - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^2} + o_{h\to 0}(\|h\|)\right).$$

Ainsi, par produit,

$$\forall h \in E, f(x+h) = \frac{1}{\|x\|^2}\left(\langle u(x), x\rangle + 2\langle u(x), h\rangle - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^2}\langle u(x), x\rangle + o_{h\to 0}(\|h\|)\right) = f(x) + a_x(h) + o_{h\to 0}(\|h\|)$$

8. On n'a pas besoin d'être si précis. u étant continue et $u(0) = 0$, la première estimée donnait déjà le $o(|h|)$ souhaité.

avec

$$a_x(h) = \frac{2}{\|x\|^2}\left(\langle u(x), h\rangle - \langle x, h\rangle f(x)\right) = \left\langle \frac{2(u(x) - f(x)x)}{\|x\|^2}, h \right\rangle.$$

Ainsi, f est différentiable en x pour tout $x \in E\backslash\{0\}$ et

$$df_x(h) = \left\langle \frac{2(u(x) - xf(x))}{\|x\|^2}, h \right\rangle \text{ et } \nabla f(x) = \frac{2(u(x) - f(x)x)}{\|x\|^2}.$$

3. Montrons donc le théorème spectral par récurrence sur la dimension de E.
   - Si $n = 1$, c'est clair.
   - Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$. La question 1 nous a donné $a \in S$ tel que $\inf_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = f(a)$. Puisque $\{0\}$ est un fermé, $E\backslash\{0\}$ est un ouvert donc tout extremum de f dans $E\backslash\{0\}$ est point critique de f car f y est différentiable. Ainsi, $\nabla f(a) = 0$ donc $u(a) - f(a)a = 0$ et $u(a) = f(a)a$: a est non nul donc a est vecteur propre pour u pour la valeur propre $f(a)$.
     - Si $\mathcal{E}_{f(a)}(u) = E$, alors $u = f(a)\mathrm{Id}_E$ donc u est diagonalisable en base orthonormée.
     - Si ce n'est pas le cas, comme $\mathcal{E}_{f(a)}(u)$ est stable par u et u est symétrique, l'orthogonal $\left(\mathcal{E}_{f(a)}(u)\right)^\perp$ est stable par $u^* = u$. Ainsi, on peut définir $\widetilde{u}$ l'induit par u sur $\left(\mathcal{E}_{f(a)}(u)\right)^\perp$. Par hypothèse de récurrence, comme $\dim\left(\left(\mathcal{E}_{f(a)}(u)\right)^\perp\right) \in [\![1, n-1]\!]$, on dispose d'une base de $\left(\mathcal{E}_{f(a)}(u)\right)^\perp$ de diagonalisation orthonormée pour $\widetilde{u}$.

     En concaténant une base de $\mathcal{E}_{f(a)}(u)$ et la base précédente, on obtient une base de diagonalisation orthonormée de u. Le théorème spectral est démontré pour la dimension n.

   Par principe de récurrence, le théorème spectral est démontré.

Exercice 129. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y - x\|^2.$$

1. Montrer que f est coercive (*i.e.* $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$).
2. En déduire que f admet un minimum que l'on va noter a.
3. Montrer que ce minimum est unique. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = 0 \iff x = a$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{a\}$. On note $\varphi_x : t \in \mathbb{R} \mapsto f(x + t\nabla f(x)) \in \mathbb{R}$. Montrer que φ_x admet un et unique minimum noté $t_{n,x}$.
5. On construit la suite récurrente $x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + t_{n,x_n}d_n$ où $d_n = \nabla f(x_n)$ et $t_{n,x} = \begin{cases} 0 \text{ si } x = a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. On souhaite montrer que $(x_n)_n$ converge vers le zéro de ∇f.
   (a) Montrer que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $x_{n_0} = a$, alors $(x_n)_n$ stationne. *On suppose dans la suite que ce n'est jamais le cas.*
   (b) Montrer que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) En déduire qu'à une sous-suite près, $(x_n)_n$ converge, disons vers x.
   (d) En déduire que $\|\nabla f(x)\|^2 = 0$.
   (e) Conclure.

Corrigé :

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors
$$f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Ainsi, f est coercive.

2. En particulier, il existe $A > 0$ tel que $\forall \|x\| > A, f(x) \geq f(0)$. Sur le compact $B_f(0, A)$, f est continue donc admet un minimum noté a. Ainsi, $f(0) \geq a$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq a$.
3. Soit b un minimum de f. Alors

$$f(b) - f(a) = 0 \geq \langle \nabla f(a), b - a \rangle + \frac{\alpha}{2}\|b - a\|^2$$

mais a est point critique donc $0 \geq \|b - a\|^2 : b = a$. On en déduit que si $\nabla f(x) = 0$, alors par coercivité, $f(a) - f(x) \geq 0 + \frac{\alpha}{2}\|a - x\|^2$ donc $f(x) \leq f(a)$. Par minimalité de f en a, $f(x) = f(a)$ et par unicité du minimiseur, $x = a$.
4. Supposons que $\nabla f(x) \neq 0$. φ est coercive par composition de limite. Par continuité, elle admet un minimum. Il manque l'unicité. Ce minimum est point critique, disons t_0. On a donc $\varphi'(t_0) = 0$. Or,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \mathrm{d}f_{x+t\nabla f(x)}(\nabla f(x)) = \langle \nabla f(x + t\nabla f), \nabla f(x) \rangle.$$

En $t = t_0$, on a donc

$$\langle \nabla f(x + t_0 \nabla f), \nabla f(x) \rangle = 0.$$

(c'est important, on va l'utiliser à $(\star)$). On a alors

$$\varphi(t) = f(x + t\nabla f(x)) \geq f(x + t_0 \nabla f(x)) + \langle \nabla f(x + t_0 \nabla f), (t - t_0)\nabla f(x) \rangle + \frac{\alpha}{2}(t - t_0)^2 \|\nabla f(x)\|^2$$

donc $\varphi(t) > \varphi(t_0)$ pour tout $t \neq t_0$. On a bien unicité du minimum.
5. (a) Supposons que $x_{n_0} = a$. Alors $\nabla f(x_{n_0}) = 0$ donc $x_{n_0+1} = x_{n_0} + 0 \times 0$ et la suite stationne à partir du rang n_0.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $x_{n+1} = x_n + t_{n,x_n} \nabla f(x_n)$ donc

$$f(x_{n+1}) = f(x_n + t_{n,x_n} \nabla f(x_n)) = \varphi_{x_n}(t_{n,x_n}) \leq \varphi_{x_n}(t_{n,x_n}) = f(x_n + 0\nabla f(x_n)) = f(x_n).$$

   (c) Comme f est coercive, il existe $A > 0$ tel que $\forall \|x\| > A, f(x) \geq f(x_0)$. Par la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(x_0)$ donc par contraposée, $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq A$. Ainsi, la suite $(x_n)_n$ vit dans $B_f(0, A)$ qui est compacte (fermée bornée en dimension finie). Elle admet donc une sous-suite convergente, notée $(x_{\varphi(n)})_n$ et on note x la limite.
   (d) On écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = \underbrace{\langle \nabla f(x_{n+1}), t_{n,x_n} \nabla f(x_n) \rangle}_{=0 \text{ par } (\star)} + \frac{\alpha}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \geq 0.$$

   Comme $(f(x_n))_n$ est décroissante minorée (par le minimum de f qu'est a), elle converge donc par encadrement, $\|x_{n+1} - x_n\|^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que

$$0 = \langle \nabla f(x_{\varphi(n)+1}, \nabla f(x_{\varphi(n)}) \rangle \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \langle \nabla f(x), \nabla f(x) \rangle = \|\nabla f(x)\|^2$$

   puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est continue de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, ∇f est continue sur $\mathbb{R}^n$ par le caractère $\mathcal{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}^n$ et que

$$x_{\varphi(n)+1} = \underbrace{x_{\varphi(n)+1} - x_{\varphi(n)}}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0} + x_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x.$$

   (e) Ainsi, $\nabla f(x) = 0$ donc $x = a$. Ainsi, $(x_n)_n$ admet une unique valeur d'adhérence qu'est a : comme elle est à valeurs dans un compact, elle converge.