# Étude de la fonction $\eta$ de Dirichlet

Thomas CHEN

On étudie ici une fonction peu originale : la fonction $\eta$ de Dirichlet. Elle fait suite à l'étude de la fonction $\zeta$ de Riemann.

**Exercice 1.** Soit $s \in \mathbb{R}$. On note pour $s \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\eta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

On note $g_n : s \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

1. Montrer que $\eta$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que $\eta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que $\forall s > 1, \eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$.

Corrigé :

1. Soit $s > 0$. Alors $\left(\dfrac{1}{n^s}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial des séries alternées, $\eta(s)$ converge.
2. Il n'y aura pas de convergence normale sur tout $]0, +\infty[$ (elle n'existe déjà pas sur $]1, +\infty[$...) mais le critère spécial des séries alternées nous donne **un contrôle uniforme** (et c'est le point important de ce critère) : plaçons nous sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
   - $\eta$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - $g_n$ est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a

   $$\forall s > 0, g_n'(s) = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^s}.$$

   Étudions la fonction $h : x \in ]0, +\infty[ \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^s}$ pour $s > 0$ (on peut prendre $s > a$ si on veut). Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée

   $$\forall x > 0, h'(x) = \frac{1 - s\ln(x)}{x^{s+1}}$$

   donc $h'$ s'annule en $\exp(1/s) =: x_s$. De plus, $h'$ est positive puis négative donc $h$ est croissante sur $]0, x_s]$ puis décroissante sur $[x_s, +\infty[$. Soit donc $n_s = \lfloor x_s \rfloor + 1$. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln(n)}{n^s}\right)$ décroit à partir du rang $n_s$ et tend trivialement vers 0. Comme $s \geq a$, on a $n_a \geq n_s$. Par le critère spécial des séries alternées, on a le contrôle du reste :

   $$\forall s > a, \forall n \geq n_a, |R_n(s)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^s} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

   Ainsi,

   $$\|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   On en déduit que $\eta'$ converge uniformément sur tout $]a, +\infty[$.

Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, $\eta$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et ce, pour tout $a > 0$ donc $\eta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. Soit $s > 1$. Alors
$$\eta(s) - \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^s}.$$
Or, $(-1)^{n-1} - 1$ vaut 0 si $n$ est impair, $-2$ sinon. Ainsi,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^s} \underset{\star}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2n)^s} = -2\frac{1}{2^s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = -2^{1-s}\zeta(s).$$

**Remarque 1.** L'égalité $(\star)$ est loin d'être anodine. Si la notion de familles sommables a été vue, on s'en sort aisément mais c'est `overkill`. Le mieux est d'écrire
$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^s} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{2N} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^s} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{2N} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{-2}{(2n)^s} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2n)^s}.$$