M1 Mathématiques Fondamentales et Applications

M1MFA01 – Algèbre approfondie – S1. Volume horaire : 48h CM +60h TD

Contenus enseignés :

- Anneaux commutatifs : anneaux noetheriens, principaux, factoriels, localisation des anneaux
- Modules sur un anneau commutatif : classification sur un anneau principal, produit tensoriel
- Théorie des corps : corps de rupture, corps de décomposition, éléments primitifs
- Théorie de Galois : correspondance de Galois
- Construction à la règle et au compas, radicaux.

M1MFA02 – Analyse approfondie – S1. Volume horaire : 48h CM + 60h TD

Contenus enseignés :

- Théorème de Baire, Théorème de Banach (théorème de Banach-Steinhaus, théorème du graphe fermé, prolongement des applications linéaires sur un sous-espace dense)
- Convergence faible et théorème de Hahn-Banach
- Espaces de Hilbert : projection orthogonale, théorème de Riesz et théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints
- Espaces L^p, produit de convolution, dualité
- Distribution en dimension 1 : premières propriétés et espaces de Sobolev
- Solutions fondamentales et théorèmes de régularité
- Intégrale de surface, formule des sauts.

M1MFA03 – Probabilités approfondies – S1. Volume horaire : 48h CM + 60h TD

Contenus enseignés :

- Espace de probabilité, variables aléatoires, distribution
- Théorème de classe monotone. Indépendance
- Loi du 0-1, théorème de Borel-Cantelli
- Convergence presque sûre, en probabilités, L^p, convergence en loi, Théorème de P. Levy.
- Théorèmes limites : Loi forte des grandes nombres et théorème de la limite centrale
- Vecteurs gaussiens : caractérisations, propriétés élémentaires.
- Théorème de la limite centrale pour des vecteurs aléatoires. Espérances conditionnelles. Modèles de Galton-Watson
- Chaîne de Markov associée à temps et espace discrets. Propriété de Markov forte. Théorie du potentiel. Récurrence et transience
- Martingales, sur martingales (à temps discret), inégalités de Doob. Théorème d'arrêt, théorème de convergence presque sûre, convergence dans L^1 et équi-intégrabilité, convergence dans L^p

M1MFA04 – Cryptographie – S1. Volume horaire : 24h CM + 24h TP

Contenus enseignés : Le but de ce cours est de présenter quelques algorithmes modernes utilisés en cryptographie pour chiffrer des messages (notamment avec une clef publique), s'échanger des clefs, ou signer numériquement (protocoles RSA, Diffie-Hellman, El Gamal...). Pour y parvenir, on fait des rappels ou des compléments sur les objets mathématiques en jeu, principalement les corps finis et les groupes, et on étudie le

problème du logarithme discret. Des algorithmes classiques en calcul formel interviennent de façon cruciale : exponentiation rapide, tests de primalité, pas de bébé - pas de géant, ...
Le cours est accompagné de séances de travaux pratiques lors desquelles les algorithmes et protocoles seront implémentés. La programmation se fera en Sage, un dérivé de Python (aucune connaissance préalable de Sage n'est exigée).

M1MFA05 – Analyse Appliquée – S1. Volume horaire : 24h CM + 24h TP

Contenus enseignés : Construction, analyse et résolution numérique des équations aux dérivées partielles.
Ce cours propose une introduction à l'analyse et à la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP). Nous commencerons par la construction des principales EDP (équations de conservation, transport, diffusion, réaction, ondes, …) qui interviennent en physique et dans la modélisation en sciences du vivant (biologie, dynamique des populations) et en sciences sociales. Nous aborderons la méthode des caractéristiques, qui permet de ramener l'équation de transport à la résolution d'équations différentielles ordinaires, et les approches de type Fourier, particulièrement fécondes pour les phénomènes de diffusion et la propagation d'ondes. Nous étudierons et appliquerons ensuite la méthode dite des Différences Finies (consistance, stabilité, convergence, implémentation), qui permet une résolution approchée effective de ces différentes équations.

M1MFA06 – Géométrie aléatoire – S1. Volume horaire : 24h CM + 24h TP

Contenus enseignés : Ce cours a pour but d'introduire et d'approfondir les processus ponctuels de Poisson, objets fondamentaux en géométrie aléatoire mais aussi en théorie des probabilités en général. Ces processus permettent de modéliser des ensembles aléatoires de points dans des espaces topologiques assez généraux. Ces ensembles de points peuvent par exemple servir à définir les sommets d'un graphe (modélisant par exemple un réseau de transmission sans fil) ou les positions d'objets dont la forme peut aussi être décrite par un modèle probabiliste (modélisant par exemple les étoiles dans l'espace, les fibres d'une feuille de papier). Les étudiants apprendront à manipuler les processus ponctuels de Poisson, à utiliser leurs formules fondamentales et à comprendre leurs applications en géométrie aléatoire. Des séances de travaux pratiques en Python permettront d'étudier par simulations différents modèles géométriques aléatoires (percolation continue, mosaique de Poisson-Voronoï, modèle de droites, modèles booléens).

M1MFA07 – Algèbre 1 – S1. Volume horaire : 24h CM + 30h TD

Contenus enseignés :

- Algèbre linéaire : Rappels sur les espaces euclidiens (formes bilinéaires et produits scalaires, endomorphismes adjoints, endomorphismes orthogonaux et symétriques)
- Groupes orthogonaux, structures et aspects topologiques
- Réduction des endomorphismes en dimension finie
- Groupes orthogonaux en dimension deux et trois : applications à la géométrie (sous-groupes finis de SO(3) et polyèdres réguliers notamment)
- Dualité, formes quadratiques et groupes associés
- Espaces hermitiens
- Théorie des groupes : sous-groupes distingués, groupes quotients, sous-groupe engendré par une partie, théorèmes d'isomorphisme. Opérations de groupe, formule des classes, théorèmes de Sylow. Exemples de groupes : groupes abéliens, groupe symétrique, groupe alterné, groupes linéaires. Théorèmes de simplicité.

M1MF08 – Analyse 1 – S1. Volume horaire : 24h CM + 30h TD

Contenus enseignés :

- Grands théorèmes de Banach : Baire et ses conséquences, Banach-Steinhaus, Application ouverte, graphe fermé, isomorphisme)
- Fonctions continues (complétude, densité : théorème de Weierstrass, compacité : théorème d'Ascoli)
- Espaces de Hilbert (projection sur un convexe et un sous-espace vectoriel, identification du dual, bases hilbertiennes)
- Séries de Fourier (théorie L^2, Théorème de Dirichlet, Théorème de Fejer)

M1MFA09 – Probabilités – S1. Volume horaire : 24h CM + 30h TD

Contenus enseignés :

- Mesures de probabilité, Indépendance, conditionnement
- Loi d'une variable aléatoire, Convergences de suites de variables aléatoires
- Loi des grands nombres, Théorème central limite
- Statistiques

M1JH01 – Cours de compléments Magistère 2 – S1. Volume horaire : 40h CM

Présentation générale :

L'objectif global de ce cours complémentaire du magistère est de faire progresser les étudiantes et étudiants dans l'utilisation de points de vue abstraits en mathématiques. Le but est à la fois d'éclairer les notions déjà étudiées et de préparer l'étude de théories sophistiquées en M2. La notion centrale du cours est celle de propriété universelle. Elle fait l'objet d'une utilisation systématique dans les exemples et d'une étude théorique assez approfondie. Au passage on donne des compléments de topologie générale et une introduction à la topologie algébrique et à l'algèbre homologique.

Contenus enseignés :

- Adjonctions entre ensembles ordonnés, treillis complets, théorème de l'application adjointe
- Catégories, objets initiaux et finaux, produits et coproduit.
- Foncteurs, transformations naturelles et adjonctions entre catégories.
- Filtres
- Espaces topologiques, compacité
- Groupes et espaces vectoriels topologiques
- Complexes de modules, fondements de l'algèbre homologique
- Homologie singulière, théorème de Mayer-Vietoris
- Homologie des sphères et applications (invariance de la dimension, théorème de Brouwer, théorème de la boule chevelue…).

M1MFA11 – Arithmétique – S2. Volume horaire : 40h CM + 50h TD

Contenus enseignés :

- Étude approfondie de Z/nZ
- Fonctions arithmétiques classiques, convolution
- Séries de Dirichlet, fonction zéta, fonctions L, applications aux nombres premiers
- Fractions continues, équation de Pell
- Formes quadratiques binaires, nombres de classes
- Groupe de classes d'idéaux d'un corps de nombres, lien avec les formes quadratiques.

M1MFA12 – Géométrie – S2. Volume horaire : 40h CM + 50h TD

Contenus enseignés :

- Rappels de topologie générale, espaces contractiles et simplement connexes, homotopie, groupe fondamental, invariance homotopique du groupe fondamental
- Définition des revêtements. Relation entre homéomorphismes locaux et revêtements. Actions de groupes topologiques. Revêtements construits par actions propres et libres de groupes discrets. Définition des relèvements d'application et unicité. Relèvement des chemins et des homotopies. Action sur la fibre d'un revêtement du groupe fondamental de la base. Groupes fondamentaux des espaces quotients d'actions propres et libres de groupes discrets. Définition des groupes libres.
- Graphe de Cayley de groupes. Groupes fondamentaux des graphes et application. Existence de relèvements. Structure des morphismes de revêtements. Revêtements galoisiens. Revêtements universels. Classification des revêtements.
- Présentations de groupes par générateurs et relations. Produits libres et sommes amalgamées de groupes. Le théorème de van Kampen.
- Rappels de calcul différentiel. Sous-variétés, applications différentiables entre sous-variétés, espaces tangents aux sous-variétés et exemples de sous-variétés (sphères, tores, groupes linéaires).
- Variété différentielle, structure de variétés des espaces projectifs, théorème de plongement de Whitney. Valeurs critiques et valeurs régulières. Théorème de Sard, densité des valeurs régulières.
- Sous-variété à bord, classification des variétés à bord de dimension 1, théorème du point fixe de Brouwer, orientation des sous-variétés à bord (dont orientation du bord), théorie du degré (dont invariance par homotopie lisses), application : théorème de peignage (ou pas) des sphères
- Théorie de Morse (points critiques non dégénérés, transversalité, topologie sur C_\infty(M,N), fibré cotangent, existence de fonctions de Morse). Champs de vecteurs (module sur les fonctions, image réciproque, flots de champs de vecteurs)
- Fin champs de vecteurs (transitivité du groupe des difféomorphismes isotope à l'identité, dérivation associée à un champs de vecteurs, théorème du redressement). CW-complexes et caractéristique d'Euler. Décomposition en anses et type d'homotopie de CW complexes des variétés. Recollements lisses de variétés à bord, isotopie de plongements de disques.
- Classification à isotopie près des difféomorphisme du cercle. Surfaces (somme connexe, calcul des groupes fondamentaux des surfaces compactes connexes et de leur caractéristique d'Euler, classification des surfaces compactes connexes lisses par la théorie de Morse). Courbes planes (courbure, exemples, classification)
- Courbes gauches (courbure, torsion, exemples, théorème de rigidité isométrique des courbes gauches régulières de courbure et torsion donnée). Première et seconde forme fondamentale des sous-variétés des espaces euclidiens. Points focaux, courbures principales, courbure moyenne, courbure scalaire. Application de Weingarten. Lien entre points focaux et courbures principales.
- Cas des surfaces de \RR^3 : courbure de Gauss, position par rapport aux plans tangents, courbure des surfaces de révolution, ombilics. Géodésiques, dérivée covariante des champs de vecteurs, surfaces minimales, théorème de Gauss-Bonnet, théorème egregium de Gauss.

M1MFA13 – EDP et analyse de Fourier – S2. Volume horaire : 40h CM + 50h TD

Objectifs d'apprentissage : L'objectif de ce cours est de présenter un panorama des méthodes d'étude des équations aux dérivées partielles dites d'évolution, c'est-à-dire décrivant les phénomènes hors équilibre, en se limitant aux problèmes linéaires. Il s'agit donc d'un cours d'analyse, faisant suite au cours 'Analyse approfondie'.

Contenus enseignés :

- Théorie des semi-groupes linéaires. Théorème de Hille-Yosida
- Exemples d'applications : équations de la chaleur et des ondes dans un domaine, opérateurs autoadjoints et mécanique quantique
- Espaces de Sobolev en dimension 1 et en dimension supérieure
- Application à l'étude des équations aux dérivées partielles
- Analyse de Fourier (espace de Schwartz, distributions tempérées, analyse de Fourier sur le tore), théorie spectrale du Laplacien

- Équations aux dérivées partielles d'évolution et usage de l'analyse de Fourier dans la résolution de problèmes d'évolution.

M1MFA14 – Statistiques – S2. Volume horaire : 40h CM

Objectifs d'apprentissage : En probabilité, on s'intéresse au comportement d'un processus aléatoire dont on connait la loi. En statistique, on considère donné (ou observé) un processus (ou une variable aléatoire), et l'on cherche à en déduire quelque chose de sa loi. L'objectif du cours est de donner les fondements de la théorie mathématique statistique.

Contenus enseignés :
- Outils probabilistes pour le statisticien
- Modélisation statistique, exhaustivité et complétude
- Estimation paramétrique
- Intervalles et régions de confiance
- Test d'hypothèses
- Modèle linéaire et modèle linéaire gaussien
- Éléments de théorie de l'information pour les statistiques

M1MFA16 – Méthodes effectives pour les polynômes. Volume horaire : 20h CM + 20h TP

Contenus enseignés : L'objectif de ce cours est de parvenir à des algorithmes de preuve automatique d'identités (datant de la fin du 20ème siècle), par exemple le fait que la somme des 'k parmi n'est égale à 2 puissance n, et bien d'autres identités sommatoires qu'on verrait mal comment prouver à la main ! Pour cela, de nombreux outils algorithmiques sont nécessaires, qui concernent principalement les polynômes : arithmétique, évaluation, interpolation, résultant... Ce cours combine de nouveaux résultats mathématiques avec la présentation d'algorithmes efficaces.Le cours est accompagné de séances de travaux pratiques lors desquelles les algorithmes seront implémentés. La programmation se fera en Sage, un dérivé de Python (aucune connaissance préalable de Sage n'est exigée).

M1MFA18 - Méthodes Markoviennes. Volume horaire : 20h CM + 20h TP

Contenus enseignés : Dans de nombreuses situations réelles, nous devons prendre des décisions dans des environnements à la fois incertains et influencés par nos propres actions. L'apprentissage par renforcement relève ce défi en étudiant comment nous pouvons agir de manière optimale à long terme dans des contextes aussi complexes et évolutifs. Ce cours se concentre sur les environnements modélisés par des chaînes de Markov contrôlées, une extension de la théorie classique des chaînes de Markov qui intègre la prise de décision. Nous explorerons comment l'incertitude, le retour séquentiel d'information et la structure de la dynamique markovienne se combinent pour définir le problème de l'apprentissage par renforcement, et comment un agent peut apprendre des stratégies de décision efficaces directement à partir d'observations. Des travaux pratiques en Python permettront aux étudiants d'acquérir une expérience concrète de la mise en œuvre et du test de ces algorithmes dans des exemples de petite taille. L'accent est mis sur le lien entre les fondements mathématiques, les techniques de calcul et le comportement empirique. À la fin du cours, les étudiants auront une base théorique solide sur l'apprentissage par renforcement pour les processus de décision markoviens et sauront comment ces méthodes fonctionnent en pratique. Simulation de variables aléatoires. Lois classiques, représentations et analyse de données. Convergence de variables aléatoires. Grands théorèmes de convergence. Simulation par chaîne de Markov. Martingales et applications.

M1MFA19 – Logique – S2. Volume horaire : 40h CM

Objectifs d'apprentissage : Le but de ce cours introductif est de présenter un panorama des différentes branches de la logique.

Contenus enseignés :

- Calcul des prédicats. Logique du premier ordre, formules, théories, modèles
- Théorie des ensembles. Axiomes de Zermelo-Fraenkel. Axiome du choix. Ordinaux. Cardinaux
- Théorie des modèles. Théorème de complétude. Théorème de compacité et applications. Ultra-produits
- Récursivité. Fonctions primitives récursives, récursives. Machines de Turing
- Arithmétique. Axiomes de Péano. Théorème d'incomplétude de Gödel.

M1MFA20 – Algèbre 2 – S2. Volume horaire : 20h CM + 24h TD

Contenus enseignés :

- Théorie des anneaux : anneaux principaux, idéaux, quotients, anneaux factoriels, anneaux noethériens, caractéristique d'un anneau
- Théorie des corps : Extension de corps, éléments algébriques, corps de rupture et corps de décomposition, théorie des corps finis
- Irréductibilité des polynômes de K\[X\], polynômes cyclotomiques et applications.

M1MFA21 – Analyse 2 – S2. Volume horaire : 20h CM + 24h TD

Contenus enseignés :

- Espaces L^p (inégalité Hölder, complétude, densité des fonctions continues, convolution, densité des fonctions lisses)
- Transformée de Fourier (dans l'espace de Schwartz S, dans L^1 et dans L^2)
- Analyse complexe (fonctions holomorphes, principe du maximum, prolongement analytique, fonctions méromorphes, théorème des résidus)