Intégrale de Dirichlet

Thomas Chen

On présente ici un exercice classique : le calcul de l'intégrale de Dirichlet. C'est un excellent exercice qui utilise la théorie des intégrales à paramètres et est une intégrale semi-convergente. Le but ici est de déterminer la valeur.

Exercice 1. Soit $F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ avec $f : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sinc}(t)e^{-xt}$. Montrer que

1. sinc n'est pas intégrable.
2. F est bien définie
3. F admet une limite en $+\infty$
4. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
5. $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Corrigé :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Par ailleurs, au voisinage de $+\infty$, lorsque $x \neq 0$, on a $t^2\operatorname{sinc}(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par comparaison, $f(x,\cdot)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ce qui assure l'existence de F sur $]0,+\infty[$. Il reste la convergence de $f(0,\cdot)$ en $+\infty$ pour conclure. Pour cela,

$$\int_1^A \operatorname{sinc}(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^A}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0+\cos(1)} - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Or l'intégrale résiduelle converge absolument donc $\displaystyle\int_1^A \operatorname{sinc}(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $A \to +\infty$.

3. sinc est bornée par 1 donc par inégalité triangulaire,

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} |\operatorname{sinc}(t)||e^{-xt}|\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. On souhaite utiliser le théorème de Leibniz. Pour cela, on a
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable en $+\infty$).
   (b) $\forall t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto f(t,x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}$. $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -t\operatorname{sinc}(t)e^{-xt}.$$

   (c) Domination :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in]a,+\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq t\operatorname{sinc}(t)e^{-at} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+).$$

Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,+\infty[$ pour tout $a>0$ donc sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t.$$

5. On a par la ligne précédente,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F'(x) &= -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t\\ &= -\Im\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\mathrm{d}t\right)\\ &= -\Im\left(\frac{-1}{i-x}\right)\\ &= \frac{-1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, il existe C réel tel que $\forall x>0, F(x) = -\arctan(x)+C$. Puisque $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, l'égalité passe à la limite et $C = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, si la limite de $x\to 0$ de $F(x)$ existe, alors, $(\star)$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \dfrac{\pi}{2}}$ et c'est ce qu'on voulait. Pour cela, on va utiliser le théorème de convergence dominée. Soit $G : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^x \operatorname{sinc}$ la primitive de sinc s'annulant en 0. G est bornée en tant que fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ ayant une limite finie en 0 et en $+\infty$. Alors pour tout $A>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$,

$$\int_0^A \operatorname{sinc}(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = \left[G(t)e^{-xt}\right]_0^A + \int_0^A xe^{-xt}G(t)\mathrm{d}t.$$

On fixe $x\in\mathbb{R}^{+*}$. G étant bornée, la convergence du crochet et de l'intégrale est du même acabit que l'équation 1 et on a finalement

$$\forall x>0, F(x) = 0 + \int_0^{+\infty} xe^{-xt}G(t)\mathrm{d}t.$$

L'application $u = xt$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même. Le théorème de changement de variable nous assure alors

$$\forall x>0, F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u}G\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u.$$

(a) Soit $x>0$. $u\mapsto e^{-u}G\left(\dfrac{u}{x}\right)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Soit $u\in\mathbb{R}^+$. $e^{-u}G\left(\dfrac{u}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} e^{-u}F(0)$.

(c) Domination : $\forall u\in\mathbb{R}^+, \forall x\in\mathbb{R}^{+*}, \left|e^{-u}G\left(\dfrac{u}{x}\right)\right| \leq e^{-u}\|G\|_\infty \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

Par le théorème de convergence dominée, on a donc bien

$$F(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-u}F(0)\mathrm{d}u = F(0).$$

Ainsi, dans $(\star)$, on a $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui signifie que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$