

Corrigé : XLSR MP Maths A 2026

Léo CAUCHARD et Thomas CHEN

13/04/26

Préliminaires

1. On rappelle que $\|\cdot\|$ est continue car elle est 1-lipschitzienne : cela vient de l'inégalité triangulaire

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

On en déduit deux choses.

- $\{x \in \mathbb{C}^n : \|x\| = 1\} = \|\cdot\|^{-1}(\{1\})$ est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par une application continue. Étant borné et que $\mathbb{C}^n$ est de dimension finie, c'est donc un compact de $\mathbb{C}^n$.
- $\varphi : x \in \mathbb{C}^n \mapsto \|Ax\| \in \mathbb{R}$ est continue par composition.

Ainsi, par le théorème des bornes atteintes, φ est bornée et atteint ses bornes donc

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

existe et est finie : $\boxed{\|A\| \text{ est bien définie}}$. Soit $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\|A\| = \|Ax_0\|$.

Ensuite, on a

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \|Ax\| = \|x\| \left\| A \frac{1}{\|x\|} x \right\| \leq \|x\| \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$$

donc

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|.$$

Par ailleurs,

$$\|A\| = \|Ax_0\| = \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

donc par double inégalité,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Le sup est un max puisque cette valeur est atteinte pour $x = x_0$ d'où

$$\boxed{\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}.$$

2. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, [Dx]_i = \lambda_i [x]_i$$

donc

$$\|Dx\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |[X]_i|^2 \leq |\lambda_{i_0}|^2 \|x\|^2$$

avec $|\lambda_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$. Ainsi,

$$\|D\| \leq |\lambda_m|.$$

Avec $x = e_{i_0}$, le i_0 -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a

$$\|Dx\| = |\lambda_{i_0}| \|x\|$$

donc $\|D\| \geq |\lambda_{i_0}|$. Par double inégalité, on a donc

$$\|D\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

3. Soit $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Alors

$$\|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

L'inégalité passe au supremum à gauche en

$$\boxed{\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|}.$$

4. Soit U une matrice unitaire. Alors pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\|Ux\| = \|x\|$ donc

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} = 1.$$

En particulier,

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = 1$$

donc

$$\boxed{\|U\| = 1}.$$

Ensuite, on sait que la norme subordonnée est atteinte : soit donc x_0, x_1, x_2 de norme 1 tels que

$$\|AU\| = \|AUx_0\| ; \|UA\| = \|UAx_1\| ; \|A\| = \|Ax_2\|.$$

Alors comme $\|x_0\| = \|Ux_0\| = 1$, on a

$$\|AUx_0\| \leq \|A\| = \|Ax_2\|.$$

Comme U est unitaire puis que $\|x_2\| = 1$,

$$\|Ax_2\| = \|UAx_2\| \leq \|UA\| = \|UAx_1\| = \|Ax_1\|.$$

Comme U est unitaire, $U^* = U^{-1}$ est aussi unitaire (car $(U^*)^* = U$) donc en notant $y_0 = U^{-1}x_1$, on a $\|y_0\| = 1$ donc

$$\|Ax_1\| = \|AUy_0\| \leq \|AU\|.$$

On a donc

$$\|AU\| = \|AUx_0\| \leq \|A\| = \|Ax_2\| = \|UAx_2\| \leq \|UA\| = \|UAx_1\| = \|Ax_1\| = \|AUy_0\| \leq \|AU\|$$

donc

$$\boxed{\|AU\| = \|A\| = \|UA\|}.$$

5. Soit $\lambda \in \sigma(A)$ et X un vecteur propre de A pour la valeur propre λ , que l'on peut prendre unitaire. Alors

$$p(A)X = p(\lambda)X.$$

On en déduit que

$$|p(\lambda)|\|X\| = \|p(A)X\|$$

donc

$$|p(\lambda)| = \frac{\|p(A)X\|}{\|X\|} \leq \|p(A)\|.$$

Ceci tient pour tout $\lambda \in \sigma(A)$ donc

$$\|p\|_{\sigma(A)} \leq \|p(A)\|.$$

Ensuite, comme $p(A) = p(PDP^{-1}) = Pp(D)P^{-1}$,

$$\|p(A)\| = \|Pp(D)P^{-1}\| \leq \underbrace{\|P\|\|P^{-1}\|}_{=\text{cond}(P)} \|p(D)\|$$

et par la question 2,

$$\|p(D)\| = \max\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\|p\|_{\sigma(A)} \leq \|p(A)\| \leq \text{cond}(P)\|p\|_{\sigma(A)}}.$$

A. Principe du maximum pour les polynômes

6. La matrice U s'écrit

$$U = (C_1 \mid C_2 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_{n-1})$$

où $C_1 = ze_1 + se_n$; $C_2 = se_1 - \bar{z}e_n$.

- Pour tout $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $\|e_i\| = 1$. Par ailleurs, $\|C_1\|^2 = |z|^2 + |s|^2 = \|C_2\|^2$. Comme $s^2 = 1 - |z|^2$, $\|C_1\|^2 = 1$ donc les colonnes de U sont normés.
- On a

$$\langle C_1 \mid C_2 \rangle = zs - \bar{s}\bar{z} = zs - sz = 0$$

donc (C_1, C_2) est une base orthonormée de $\text{Vect}(C_1, C_2) = \text{Vect}(e_1, e_n)$. Comme $\text{Vect}(e_1, e_n)$ et $\text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1})$ sont orthogonales, les colonnes de U sont orthogonales.

- Ainsi, $\boxed{U \text{ est unitaire.}}$

7. Montrons par récurrence sur $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ que

$$U^k e_1 \in z^k e_1 + \text{Vect}(e_n, \dots, e_{n-k+1}).$$

- Pour $k = 1$, on a $Ue_1 = ze_1 + se_n$ donc $Ue_1 \in ze_1 + \text{Vect}(e_n)$.
- Supposons le résultat acquis au rang $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned} U^{k+1}e_1 &= U(U^k e_1) \\ \text{donc } U^{k+1}e_1 &\in U(z^k e_1 + \text{Vect}(e_n, \dots, e_{n-k+1})) \\ \text{donc } U^{k+1}e_1 &\in z^{k+1}e_1 + z^k se_n + \text{Vect}(\underbrace{Ue_n}_{=e_{n-1}}, \dots, \underbrace{Ue_{n-k+1}}_{=e_{n-k}}) \\ \text{donc } U^{k+1}e_1 &\in z^{k+1}e_1 + \text{Vect}(e_n, \dots, e_{n-k}). \end{aligned}$$

On a donc le résultat au rang $k+1$.

- On conclut donc par le principe de récurrence le résultat.

On en déduit qu'en notant $p(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$,

$$p(U)e_1 \in \sum_{k=0}^{n-1} a_k (z^k e_1 + \text{Vect}(e_n, \dots, e_{n-k+1}))$$

donc

$$p(U)e_1 \in \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right) e_1 + \text{Vect}(e_n, \dots, e_2).$$

Enfin, comme $e_1^* X = [X]_1$, on a

$$e_1^* p(U)e_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = p(z).$$

8. La question précédente donne

$$|p(z)| \leq |e_1^* p(U)e_1|$$

et par Cauchy-Schwarz,

$$|e_1^* p(U)e_1| \leq \|p(U)e_1\| \|e_1\| \leq \|p(U)\|$$

car $\|e_1\| = 1$. Ensuite, comme U est unitaire, il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et V une matrice unitaire tels que $U = VDV^{-1}$ donc par la question 5,

$$\|p(U)\| \leq \text{cond}(V) \max_{\lambda \in \sigma(U)} |p(\lambda)|.$$

Comme V est unitaire, $V^{-1} = V^*$ aussi, $\text{cond}(V) = 1$ par la question 4. Comme les λ_i sont de module 1, on en déduit que $\sigma(U) \subset \partial\mathbb{D}$ donc

$$\max_{\lambda \in \sigma(U)} |p(\lambda)| \leq \max_{\lambda \in \partial\mathbb{D}} |p(\lambda)|$$

et on a bien au final

$$|p(z)| \leq \|p(U)\| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}.$$

9. **Dans cette question, j'utilise le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz dans le cas complexe.** Supposons par l'absurde que $|p(z)| \geq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}$. Par la question précédente, on a

$$|p(z)| = \|p(U)\|$$

donc en regardant l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée à la question 8, on est dans son cas d'égalité :

$$|p(z)| = |e_1^* p(U)e_1| = \|p(U)e_1\| \|e_1\|.$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $p(U)e_1 = \lambda e_1$.

10. Comme $\partial S \subset S$, on a $\|p\|_{\partial S} \leq \|p\|_S$.

Pour l'autre sens, soit $z_0 \in S$ tel que $\|p\|_S = |p(z_0)|$: c'est possible puisque par composition, $\|\cdot\| \circ p$ est continue sur le compact S , donc admet un maximum. Il y a deux cas.

- Si $z_0 \in \partial S$, c'est fini.
- Si $z_0 \notin \partial S$, alors par définition, il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{D}(z_0, \delta) \subset S$. Considérons alors $f : z \in \mathbb{D} \mapsto p(\delta z + z_0) \in \mathbb{C}$. Alors f est polynomiale donc par la question 9,

$$\forall |z| < 1, |f(z)| < \|f\|_{\partial\mathbb{D}}.$$

Or

$$\|f\|_{\partial\mathbb{D}} = \max_{|z|=1} |p(\delta z + z_0)| \leq \max_{z \in S} |p(z)| = p(z_0) = f(0).$$

On en déduit que $\forall |z| < 1, f(z) < f(0)$ donc en particulier, $f(0) < f(0)$ ce qui est absurde.

Ainsi, $z_0 \in \partial S$ donc

$$\|p\|_S = \|p\|_{\partial S}.$$

B. Inégalité de Von Neumann

11. Si A est unitaire, alors il existe U une matrice unitaire et D une matrice diagonale (dont les coefficients diagonaux sont de module 1) telle que $A = UDU^{-1}$. Par la question 5, on a donc

$$\|p(A)\| \leq \text{cond}(U)\|p\|_{\sigma(A)}.$$

On a déjà vu que dans le cas unitaire, $\text{cond}(U) = 1$ et comme $\sigma(A) \subset \mathbb{D}$, on a

$$\|p\|_{\sigma(A)} \leq \|p\|_{\mathbb{D}}$$

donc

$$\boxed{\|p(A)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}}}.$$

12. On note $S_A = I - A^*A$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \langle S_A X \mid X \rangle = x^*x - x^*A^*AX = \|x\|^2 - \|Ax\|^2 \geq 0$$

car $\|A\| \leq 1$ et par la question 1. En prenant X un vecteur propre, on en déduit ainsi que les valeurs propres de S_A sont positives.

Par ailleurs, S_A est hermitienne puisque $S_A^* = I^* - A^*A = S_A$ ($I^* = I$) donc S_A est diagonalisable.

Il existe donc P unitaire et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tels que $S_A = PDP^{-1}$.

Soit donc $D_A = P \underbrace{\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})}_{=: \Delta} P^{-1}$. Alors $D_A^2 = P\Delta^2P^{-1} = PDP^{-1} = S_A$ et

$$D_A^* = (P\Delta P^{-1})^* = (P^{-1})^* \Delta^* P^* = (P^*)^{-1} \Delta P^*.$$

Comme $P^* = P^{-1}$, on a

$$D_A^* = P\Delta P^{-1} = D_A$$

donc D_A est bien hermitienne.

On a construit D_A hermitienne de valeurs propres positives vérifiant $D_A^2 = I - A^*A$.

Pour D_{A^*} , il suffit de vérifier que A^* est aussi une contraction pour conclure de même (car $(A^*)^* = A$). Pour cela, montrons que $\|A\| = \|A^*\|$. On a $A = 0 \iff A^* = 0$ donc le cas $A = 0$ est traité. Sinon, on a

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \|A^*x\|^2 = \langle A^*x \mid A^*x \rangle = \langle AA^*x \mid x \rangle \leq \|x\| \|AA^*x\|$$

par Cauchy-Schwarz. Or, $\|AA^*x\| \leq \|A\| \|A^*x\|$ donc pour x tel que $\|A^*\| = \frac{\|A^*x\|}{\|x\|}$ (possible par la question 1), on a $\|A^*x\| \neq 0$

$$\|A^*x\| \leq \|A\| \|x\|.$$

On en déduit que $\|A^*\| = \frac{\|A^*x\|}{\|x\|} \leq \|A\|$. On applique cette inégalité pour A^* à la place de A pour avoir $\|A\| \leq \|A^*\|$ donc on a bien $\|A^*\| = \|A\|$.

Ainsi, A^* est aussi une contraction donc on peut appliquer ce que l'on vient de montrer pour obtenir une matrice D_{A^*} ayant les conditions souhaitées.

Pour la question suivante, on va noter $S_{A^*} = QdQ^{-1}$ avec Q unitaire et $d = \text{diag}(\ell_1, \dots, \ell_n)$ et $\delta = \text{diag}(\sqrt{\ell_1}, \dots, \sqrt{\ell_n})$ de sorte que $D_{A^*} = Q\delta Q^{-1}$.

13. Soit $\mu_1, \dots, \mu_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A^*A . Ce sont des réels puisque A^*A est hermitienne. Comme les valeurs propres de A^*A sont positives (cela découle de $\forall x \in \mathbb{C}^n, \langle A^*Ax \mid x \rangle = \langle Ax \mid Ax \rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$), on peut considérer leurs racines carrées.

De même, on note $\nu_1, \dots, \nu_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de AA^* qui sont aussi chacune différente de μ_i pour tout i .¹

1. En réalité, AA^* et A^*A ont le même spectre.

Soit $\tilde{q}$ un polynôme interpolateur de Lagrange vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \tilde{q}(\mu_i) = \sqrt{\mu_i} \quad ; \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \tilde{q}(\nu_i) = \sqrt{\nu_i}.$$

Alors en reprenant les notations de la question précédente, on a

$$\tilde{q}(D) = \Delta \quad ; \quad \tilde{q}(d) = \delta$$

et donc

$$D_A = P\tilde{q}(D)P^{-1} = \tilde{q}(PDP^{-1}) = \tilde{q}(I - A^*A) \quad ; \quad D_{A^*} = Q\tilde{q}(d)Q^{-1} = \tilde{q}(QdQ^{-1}) = \tilde{q}(I - AA^*).$$

Posons $q = \tilde{q}(1 - X)$. Alors

$$q(A^*A) = \tilde{q}(I - A^*A) = D_A \quad ; \quad q(AA^*) = \tilde{q}(I - AA^*) = D_{A^*}.$$

On a trouvé $q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\boxed{q(A^*A) = D_A \quad ; \quad q(AA^*) = D_{A^*}}.$$

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$A^*(AA^*)^k = \underbrace{A^*A(A^*A)^{k-1}}_{=(A^*A)^k} A^*$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^*(AA^*)^k = (A^*A)^k A^*.$$

En notant $q(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on a donc

$$A^*q(AA^*) = \sum_{k=0}^n a_k A^*(AA^*)^k = \sum_{k=0}^n a_k (A^*A)^k A^* = \left(\sum_{k=0}^n a_k (A^*A)^k \right) A^* = q(AA^*) A^*.$$

Par la question précédente, on a donc

$$\boxed{A^*D_{A^*} = D_A A^*}.$$

De même, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, A(A^*A)^k = (AA^*)^k A$$

donc de même,

$$Aq(A^*A) = q(AA^*)A$$

ce qui donne

$$\boxed{AD_A = D_{A^*}A}.$$

15. On a par calcul par blocs

$$U^* = \begin{pmatrix} A^* & (-D_A)^* \\ (D_{A^*})^* & A \end{pmatrix}$$

donc

$$U^*U = \begin{pmatrix} A^*A + (D_A)^*D_A & A^*D_{A^*} - (D_A)^*A^* \\ (D_{A^*})^*A - AD_A & (D_{A^*})^*D_{A^*} + AA^* \end{pmatrix}.$$

On a $A^*A + (D_A)^*D_A = A^*A + (D_A)^2 = I$ puisque D_A est hermitienne. De même, $(D_{A^*})^*D_{A^*} + AA^* = I$. Ensuite,

$$A^*D_{A^*} - (D_A)^*A^* = A^*D_{A^*} - D_A A^* = 0 \quad (\text{Q14})$$

et de même, $(D_{A^*})^*A - AD_A = 0$ donc $U^*U = I$. La matrice U est unitaire.

16.

17. Si $\|A\| = 0$, alors $A = 0$ et $\|p(A)\| = |p(0)| = \|p\|_{\mathbb{D}(0,0)}$. Sinon, on peut poser $B = \frac{1}{\|A\|} A$. Alors $\|B\| = 1$ donc B est une contraction. On pose $q_A = p(\|A\|X)$. On a alors

$$\|q_A(B)\| \leq \|q_A\|_{\mathbb{D}}.$$

Or $q_A(B) = p(A)$

$$\|q_A\|_{\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{D}(0,\|A\|)}$$

donc

$$\boxed{\|p(A)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}(0,\|A\|)}}.$$

C. Hausdorffien et rayon numérique

18. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre unitaire de A pour la valeur propre λ . On a alors

$$\langle AX | X \rangle = \langle \lambda X | X \rangle = \lambda \|X\|^2 = \lambda$$

donc $\lambda \in \mathcal{H}(A)$ et

$$\boxed{\sigma(A) \subset \mathcal{H}(A)}.$$

19. Notons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

- Soit $\mu \in \mathcal{H}(D)$. Soit donc $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et $\lambda = \langle DX | X \rangle$. Alors

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [D]_{i,j} [X]_i [X]_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i [X]_i^2.$$

Comme $\sum_{i=1}^n [X]_i^2 = 1$, et que c'est une somme de réels positifs, on a bien

$$\lambda \in \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 ; \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

- Réciproquement, soit $\lambda \in \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 ; \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \right\}$. Soit X défini par $[X]_i = \sqrt{\alpha_i}$. Alors

$$\langle DX | X \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$$

donc $\lambda \in \mathcal{H}(D)$.

Par double inclusion,

$$\boxed{\mathcal{H}(D) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 ; \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \right\}}.$$

20. Que A soit unitaire ou hermitienne, il existe $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ unitaire telles que $A = PDP^{-1}$. Ainsi,

$$\forall x \in \partial\mathbb{D}, \langle Ax | x \rangle = \langle PDP^{-1}x | x \rangle = \langle D(P^{-1}x) | P^{-1}x \rangle.$$

Comme $x \in \partial\mathbb{D} \mapsto P^{-1}x \in \partial\mathbb{D}$, par unitarité de P , est bijective, on en déduit que

$$\{\langle Ax | x \rangle \mid x \in \partial\mathbb{D}\} = \{\langle D(P^{-1}x) | P^{-1}x \rangle \mid x \in \partial\mathbb{D}\} = \{\langle Dx | x \rangle \mid x \in \partial\mathbb{D}\}.$$

En notant donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D , donc les valeurs propres de A , on a par la question précédente

$$\boxed{\mathcal{H}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 ; \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \right\}}.$$

21. Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \partial\mathbb{D}$. Alors si $x_1 = 0$, on a $x_2 = 1 = 1e^{i0}$ et sinon, $x_1 = ae^{i\varphi}$ donc en notant $x_2 = be^{i\psi}$, on a

$$X = e^{i\varphi} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix}}_{=:Y}$$

avec $\theta = \psi - \varphi$. On a donc

$$\langle AX | X \rangle = \langle Ae^{i\varphi}Y | e^{i\varphi}Y \rangle = e^{i\varphi}e^{-i\varphi}\langle AY | Y \rangle = abe^{i\theta}.$$

Ainsi,

$$|\langle AX | X \rangle| = |ab| \underset{(a-b)^2 \geq 0}{\leq} \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{1}{2}$$

donc $\mathcal{H}(A) \subset \mathbb{D}(0, 1/2)$.

Réciproquement, soit $re^{i\theta} \in \mathbb{D}(0, 1/2)$ avec $r \in \mathbb{R}^+, \theta \in \mathbb{R}$. On souhaite trouver $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que $a^2 + b^2 = 1$ et $ab = r$. Un tel couple vérifie donc $b = \sqrt{1 - a^2}$ et $a^2(1 - a^2) = r^2$. Comme $r^2 \in [0, 1/4]$, $1 - 4r^2 \in [0, 1]$ donc $\sqrt{1 - 4r^2} \in [0, 1]$.

$$a^2(1 - a^2) = r^2 \iff a^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4r^2}}{2} \iff a = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4r^2}}{2}}$$

puisque $a \geq 0$. Prenons $a = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4r^2}}{2}}$ et $b = \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4r^2}}{2}}$. Alors

$$(ab)^2 = \frac{1 - (1 - 4r^2)}{4} = r^2$$

donc $ab = r$ et $a^2 + b^2 = 1$.

Maintenant, le calcul précédent donne avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\langle AX | X \rangle = ab = r$$

donc $r \in \mathcal{H}(A)$. On a bien

$$\boxed{\mathcal{H}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{D}(0, 1)}.$$

22. L'application $\varphi : (x, y) \in \mathbb{C}^n \mapsto \langle Ax, y \rangle \in \mathbb{C}$ est bilinéaire : comme $\mathbb{C}^n$ est de dimension finie, φ est continue. On en déduit que $\psi : x \in \mathbb{C}^n \mapsto \varphi(x, x) \in \mathbb{C}$ est continue sur $\mathbb{C}^n$.

Montrons ensuite que $\partial\mathbb{D}$ est un compact de $\mathbb{C}^n$: comme ce dernier est un espace de dimension finie, il suffit de montrer que $\partial\mathbb{D}$ est un fermé borné. C'est un fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{1\}$ par $\|\cdot\|$ qui est continue (car 1-lipschitzienne en vertu de l'inégalité triangulaire). Il est clairement borné donc c'est bien un compact.

Comme $\mathcal{H}(A) = \psi(\partial\mathbb{D})$, $\boxed{\mathcal{H}(A) \text{ est un compact}}$ donc en particulier fermé et borné dans $\mathbb{C}$.

23. Soit $z \in \mathcal{H}(A)$. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\langle Ax | x \rangle = z$ et $\|x\| = 1$. Alors par Cauchy-Schwarz,

$$|z| = |\langle Ax | x \rangle| \leq \|Ax\| \leq \|A\|.$$

L'inégalité passe au sup en

$$\sup_{z \in \mathcal{H}(A)} |z| \leq \|A\|.$$

Comme $\mathcal{H}(A)$ est compacte et $|\cdot|$ est continue, le théorème des bornes atteintes assure que ce supremum est un maximum. On a donc

$$\max_{z \in \mathcal{H}(A)} |z| \leq \|A\|.$$

Maintenant, comme $\max_{x \in \mathcal{H}(A)} |x| = r(A)$, on a

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \langle Ax \mid x \rangle \leq r(A) \|x\|^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 4|\langle Ax \mid y \rangle| &\leq |\langle A(x+y) \mid x+y \rangle| + |\langle A(x-y) \mid x-y \rangle| + |\langle A(x+iy) \mid x+iy \rangle| + |\langle A(x-iy) \mid x-iy \rangle| \\ &\leq r(A) (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2) \\ &= r(A) (2(\|x\|^2 + \|y\|^2) + 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)) \\ &= 4r(A)(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Si $A = 0$, le résultat est évident car $r(A) = \|A\| = 0$. Sinon, soit x un vecteur tel que $\|Ax\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \neq 0$. Quitte à diviser par sa norme, prenons x unitaire. Soit $y = \frac{1}{\|Ax\|} Ax$. Alors x et y sont unitaires donc

$$|\langle Ax \mid y \rangle| = \frac{1}{\|Ax\|} |\langle Ax \mid Ax \rangle| = \|Ax\| \leq 2r(A)$$

donc

$$\frac{1}{2} \|A\| \leq r(A).$$

Finalement,

$$\frac{1}{2} \|A\| \leq r(A) \leq \|A\|.$$

24. • Déjà, r est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}^+$ par la question précédente.
 • Si A est telle que $r(A) = 0$, alors $\frac{1}{2} \|A\| \leq 0$ donc $\|A\| = 0$ i.e. $A = 0$.
 • Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\lambda = 0$, on a $r(\lambda A) = r(0) = 0 = \lambda r(A)$. Sinon, on a

$$r(\lambda A) = \max_{x \in \mathcal{H}(\lambda A)} |x|.$$

Or $\mathcal{H}(\lambda A) = \{\langle \lambda Ax \mid x \rangle : x \in \partial \mathbb{D}\} = \lambda \mathcal{H}(A)$ donc

$$r(\lambda A) = \max_{x \in \mathcal{H}(\lambda A)} |x| = \max_{\lambda y \in \lambda \mathcal{H}(A)} |\lambda y| = \lambda \max_{y \in \mathcal{H}(A)} |y| = |\lambda| r(A).$$

- Enfin, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $x \in \partial \mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned} |\langle (A+B)x \mid x \rangle| &= |\langle Ax \mid x \rangle + \langle Bx \mid x \rangle| \\ &\leq |\langle Ax \mid x \rangle| + |\langle Bx \mid x \rangle| \\ &\leq \max_{x \in \partial \mathbb{D}} |\langle Ax \mid x \rangle| + \max_{x \in \partial \mathbb{D}} |\langle Bx \mid x \rangle| \\ &= r(A) + r(B). \end{aligned}$$

L'inégalité passe au supremum à gauche en

$$r(A+B) \leq r(A) + r(B).$$

Ainsi, r est bien une norme.

25. On a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, AB est diagonale donc hermitienne : ses valeurs propres sont 0 et 1 donc par la question 19, c'est l'enveloppe convexe de $\{0, 1\}$ à savoir $[0, 1]$. On a donc $r(AB) = 1$. Par ailleurs, $r(A) \in \mathbb{D}(0, 1/2)$ par la question 21 et il nous faut calculer $r(A^*)$. Montrons que $r(A) = r(A^*)$.

- Soit z tel que $r(A) = |z|$. Alors z s'écrit $\langle Ax, x \rangle$ i.e. $\langle x, A^*x \rangle = \overline{\langle A^*\bar{x} | \bar{x} \rangle}$. Ainsi,

$$|z| \leq \left| \overline{\langle A^*\bar{x} | \bar{x} \rangle} \right| = |\langle A^*y, y \rangle|$$

avec $y = \bar{x}$ de norme 1. En particulier, $|\langle A^*y, y \rangle| \leq r(A^*)$ donc

$$r(A) \leq r(A^*).$$

- Comme $(A^*)^* = A$, on a $r(A^*) \leq r(A)$.

On a bien $r(A) = r(A^*)$. Ici, $r(B)$ vaut donc $\frac{1}{2}$ donc

$$\boxed{r(AB) = 1 \text{ et } r(A)r(B) = \frac{1}{4} \text{ ce qui contredit } r(AB) \leq r(A)r(B)}.$$

26. (a) Pour cette question, on travaillera dans $\mathbb{C}(X)$. Notons $P = X^k - 1$. Alors la fraction rationnelle $X^k P(1/X)$ vérifie

$$X^k P(1/X) = X^k \left(\frac{1}{X^k} - 1 \right) = 1 - X^k$$

et

$$X^k P(1/X) = X^k \prod_{\ell=1}^k (X^{-1} - \omega_k^\ell) = \prod_{\ell=1}^n (1 - \omega_k^\ell X).$$

Ainsi, on a l'égalité des fractions rationnelles

$$\boxed{1 - X^k = \prod_{\ell=1}^n (1 - \omega_k^\ell X)}$$

et comme ce sont des polynômes, $\boxed{\text{c'est une égalité de polynômes}}$.

Ensuite, on dérive P : on obtient

$$kX^{k-1} = \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (X - \omega_k^\ell).$$

En écrivant la fraction rationnelle $X^{k-1}P'(1/X)$, on a

$$k = X^{k-1} \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (X^{-1} - \omega_k^\ell) = \sum_{j=1}^k X^{k-1} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (X^{-1} - \omega_k^\ell) = \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n (1 - \omega_k^\ell X)$$

et comme ce sont des polynômes, c'est une $\boxed{\text{égalité de polynômes}}$. En divisant par k , on obtient

$$\boxed{1 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n (1 - \omega_k^\ell X)}.$$

(b) Par la question précédente, on a

$$I - A^k = \prod_{\ell=1}^k (I - \omega_k^\ell A)$$

donc

$$\langle (I - A^k)x \mid x \rangle = \|x\|^2 - \langle A^k x \mid x \rangle = 1 - \langle A^k x \mid x \rangle.$$

Par ailleurs,

$$I = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (I - \omega_k^\ell A).$$

donc

$$x = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^n \underbrace{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (I - \omega_k^\ell A)x}_{=x_j}$$

et

$$\begin{aligned} \langle (I - A^k)x \mid x \rangle &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \langle (I - A^k)x \mid x_j \rangle \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\langle \prod_{\ell=1}^k (I - \omega_k^\ell A)x \mid x_j \right\rangle \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\langle (I - \omega_k^j A) \prod_{\ell=1, \ell \neq j}^k (I - \omega_k^\ell A)x \mid x_j \right\rangle \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \langle (I - \omega_k^j A)x_j \mid x_j \rangle \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j A x_j \mid x_j \rangle. \end{aligned}$$

On a bien

$$1 - \langle A^k x \mid x \rangle = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j A x_j \mid x_j \rangle.$$

(c) Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Re(\langle \omega_k^j e^{i\theta} A x_j \mid x_j \rangle) \leq |e^{2i\pi j/k} e^{i\theta} \langle A x_j \mid x_j \rangle| = |\langle A x_j \mid x_j \rangle|.$$

donc en appliquant la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \Re(1 - e^{i\theta} \langle A^k x \mid x \rangle) &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \|x_j\|^2 - \Re(\langle \omega_k^j e^{i\theta} A x_j \mid x_j \rangle) \\ &\geq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \|x_j\|^2 - \langle A x_j \mid x_j \rangle \geq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \underbrace{\|x_j\|^2 - r(A)\|x_j\|^2}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \Re(1 - e^{i\theta} \langle A^k x \mid x \rangle) \geq 0.$$

Choisissons $\theta = -\arg(\langle A^k x \mid x \rangle)$. Alors

$$0 \leq 1 - \Re(e^{i\theta} \langle A^k x \mid x \rangle) = 1 - \Re(|\langle A^k x \mid x \rangle|) = 1 - |\langle A^k x \mid x \rangle|.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1, |\langle A^k x \mid x \rangle| \leq 1.$$

L'inégalité passe au maximum en

$$\boxed{r(A^k) \leq 1}.$$

- (d) Soit $k \geq 1$. Si $A = 0$, c'est clair. Sinon, $r(A) \neq 0$ par la question 24 et on considère $B = \frac{1}{r(A)}A$. On a, par la question 24, que

$$r(B) = \frac{1}{r(A)}r(A) = 1$$

donc par la question précédente,

$$r(B^k) = r\left(\frac{1}{r(A)^k}A^k\right) \leq 1$$

et donc

$$\boxed{r(A^k) \leq r(A)^k}.$$

D. Conjecture de Crouzeix

27. Considérons le polynôme $p = X$. Alors $p(A) = A$ et

$$\|p(A)\| = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{D}(0,1)} \|A(x_1 \ x_2)\| = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{D}(0,1)} |x_2| = 1$$

et par la question 21, $\mathcal{H}(A) = \mathbb{D}(0, 1/2)$ donc

$$\|p\|_{\mathcal{H}(A)} = \max_{x \in \mathbb{D}(0, 1/2)} |x| = \frac{1}{2}$$

donc

$$\boxed{\|p(A)\| = 2\|p\|_{\mathcal{H}(A)}}.$$

28. Par la question 23, on a

$$\|p(A)\| \leq 2r(p(A)).$$

Pour $p = X^k$, on a $r(p(A)) = r(A^k) \leq r(A)^k$ par la question 26. Par croissance de $x \mapsto x^k$ sur $\mathbb{R}^+$,

$$r(A)^k = \left(\max_{z \in \mathcal{H}(A)} |z| \right)^k = \left(\max_{z \in \mathcal{H}(A)} |z^k| \right) = \|p\|_{\mathcal{H}(A)}$$

et donc

$$\boxed{\|p(A)\| \leq 2\|p\|_{\mathcal{H}(A)}}.$$

29. Soit $p(X) = \sum_{k=0}^r c_k X^k$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $c_k = |c_k| e^{i(\varphi - k\theta)}$ pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$. On a

$$\|p(A)\| = \left\| \sum_{k=0}^r c_k A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^r |c_k| \|A^k\|$$

par inégalité triangulaire.

Par la question 28, on a $\forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket, \|A^k\| \leq 2\|X^k\|_{\mathcal{H}(A)}$. Ainsi,

$$\|p(A)\| \leq 2 \sum_{k=0}^r |c_k| \|X^k\|_{\mathcal{H}(A)} = 2 \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k \quad (1)$$

par la question précédente.

Montrons que la somme de droite vaut $\|p\|_{\mathcal{H}(A)}$.

$$\forall \zeta \in \mathcal{H}(A), |p(\zeta)| \leq \sum_{k=0}^r |c_k| |\zeta|^k \leq \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k$$

donc l'inégalité passe au maximum en

$$\max_{\zeta \in \mathcal{H}(A)} |p(\zeta)| \leq \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k.$$

$$\text{Enfin, } p(z) = \sum_{k=0}^r \underbrace{c_k e^{ik\theta}}_{=|c_k|e^{i\varphi}} r(A)^k = e^{i\varphi} \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k \text{ ce qui donne}$$

$$|p(z)| = \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k.$$

En particulier,

$$\max_{\zeta \in \mathcal{H}(A)} |p(\zeta)| \geq \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k$$

et donc par double inégalité, on a

$$\max_{\zeta \in \mathcal{H}(A)} |p(\zeta)| = \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k.$$

Dans 1, on a donc

$$\|p(A)\| \leq 2\|p\|_{\mathcal{H}(A)}.$$

30. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $A = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon, considérons $B := \frac{1}{r(A)}A$ et $q(X) = p(r(A)X)$.

Ainsi, $q(B) = p(r(A)B) = p(A)$.

On a aussi $r(B) = 1$ donc par le résultat de Okubo-Ando, il existe $X \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{cond}(X) \leq 2$ et $C := X^{-1}BX$ soit une contraction.

Par l'inégalité de von Neumann (partie B), on a

$$\|q(C)\| \leq \|q\|_{\mathbb{D}}.$$

Par ailleurs, $C = X^{-1}BX$ donc

$$\|q(B)\| \leq \text{cond}(X)\|q(C)\| \leq 2\|q\|_{\mathbb{D}}.$$

Or, comme à la question 17, on a $\|q\|_{\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{D}(0, r(A))}$ donc

$$\|p(A)\| \leq 2\|p\|_{\mathbb{D}(0, r(A))}.$$

- (b) Soit $a \in \mathbb{C}, \rho > 0$ et $\mathbb{D}(a, \rho)$ un disque contenant $\mathcal{H}(A)$ et $\mathcal{C} = \mathcal{C}(a, \rho)$ son bord.

On veut appliquer la question précédente. Soit donc $B = \frac{1}{\rho}(A - aI_n)$. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ avec $\|x\| = 1$. On a

$$\langle Bx | x \rangle = \frac{1}{\rho} \langle Ax | x \rangle - \frac{a}{\rho}$$

donc comme $\rho > 0$

$$\mathcal{H}(B) = \frac{1}{\rho} (\mathcal{H}(A) - a).$$

Comme $\mathcal{H}(A) \subset \mathbb{D}(a, \rho)$, on en déduit que $\mathcal{H}(B) \subset \mathbb{D}(0, 1)$. Ainsi, $r(B) = \max(|\mathcal{H}(B)|) \leq 1$. En particulier,

$$\mathbb{D}(0, r(B)) \subset \mathbb{D}(0, 1).$$

Comme à la question précédente, considérons un autre polynôme : on pose $q(X) = p(a + \rho X)$. On a alors

$$q(B) = p(a + \rho B) = p(A)$$

et

$$\|q\|_{\mathbb{D}} = \max_{|x| \leq 1} |p(a + \rho x)| = \max_{|x-a| \leq \rho} |p(x)| = \|p\|_{\mathbb{D}(a, \rho)}.$$

On peut donc conclure : grâce à la question précédente appliquée à B , on a

$$\|q(B)\| \leq 2\|q\|_{\mathbb{D}(0, r(B))}$$

$$\boxed{\|p(A)\| = \|q(B)\| \leq 2\|q\|_{\mathbb{D}(0, r(B))} \leq 2\|q\|_{\mathbb{D}} = 2\|p\|_{\mathbb{D}(a, \rho)}}.$$

FIN DU SUJET
