

Le but de la comparaison série-intégrale est d'estimer

$$\sum f(k) \text{ ou } \int_I f.$$

Pour cela, on a besoin de quelques hypothèses. 99% du temps, c'est une hypothèse de monotonie.

- On prend $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, disons décroissante.
- On se place dans $I = \mathbb{R}^+$ par exemple.
- Pour pouvoir écrire l'intégrale de f , disons que f est continue sur I .

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [k, k+1]$ ¹ Alors par décroissance de f , on a

$$f(k) \geq f(t) \geq f(k+1).$$

On intègre.

$$\int_k^{k+1} f(t)dt = (k+1-k)f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)dt \geq \int_k^{k+1} f(k+1)dt = (k+1-k)f(k+1).$$

On a donc

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)dt \geq f(k+1). \quad (1)$$

C'est une bonne étape et en sommant, on peut, par Chasles, avoir une estimation de $\int_1^{n+1} f(t)dt$. Malheureusement, la plupart des cas, on veut estimer la somme et cette inégalité ne convient pas.

Idée : on écrit l'inégalité 1 au rang $k-1$ ². Cela donne

$$f(k-1) \geq \int_{k-1}^k f(t)dt \geq f(k). \quad (2)$$

En combinant les inégalités 1 et 2³, on a

$$\int_{k-1}^k f(t)dt \geq f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)dt.$$

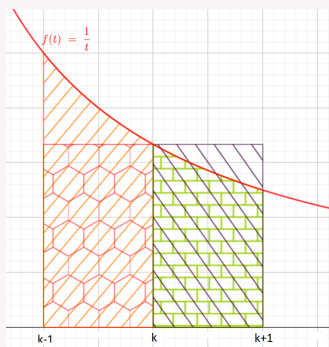
Tout ceci se voit sur un dessin : faisons-le à travers un exemple.

¹. Attention ! Il faut que cet intervalle soit dans I ! Par exemple, si $I = [1, +\infty[$, on prend $k \in \mathbb{N}^*$.

². Attention ! Il faut que l'intervalle $[k-1, k]$ soit dans I comme avant ! Par exemple, si $I = [1, +\infty[$, on prend $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

³. qui sont vraies dès que $k \geq 1$ pour 1 et $k \geq 2$ pour 2 dans l'exemple $I = [1, +\infty[$ donc on va prendre $k \geq 2$ pour satisfaire les deux conditions

Exemple 1. Établissons un équivalent de $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.



Alors les hachures oranges représentent $\int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$ et les alvéoles rouges représentent $\int_{k-1}^k \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}$.

Les briques vertes représentent $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$ et les hachures noires représentent $\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}$. Ainsi,

$$\text{Aire verte} \leq \text{Aire noire} = \text{Aire rouge} \leq \text{Aire orange}.$$

i.e.

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt.$$

Tout ceci est valide dès que $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ puisqu'ici, $I = [1, +\infty[$ (et non $]0, +\infty[$ car la fonction inverse n'est pas intégrable en 0).

On somme.

$$\sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \stackrel{\text{Chasles}}{=} \int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt \stackrel{\text{Chasles}}{=} \int_1^n \frac{1}{t} dt.$$

Pour rajouter le premier terme de la somme, il faut que je rajoute $\frac{1}{1} = 1$. $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right)$. Je rajoute donc 1 à gauche et à droite :

$$1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt.$$

Pour conclure, il faut calculer les intégrales : j'ai

$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

Le terme de droite et le terme de gauche sont clairement équivalents à $\ln(n)$ (le refaire s'il faut !) donc la somme au milieu est équivalente à $\ln(n)$ par encadrement.

Exemple 2. On souhaite trouver un équivalent de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

Par comparaison série-intégrale, on a ^a :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{k \ln(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t \ln(t)}$$

pour $k \geq 3$.

On somme de $k = 3$ à n . J'ai donc par Chasles

$$\int_3^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \int_2^n \frac{1}{t \ln(t)} dt.$$

Il manque le terme $k = 2$ pour répondre à la question donc je le rajoute comme avant à la main :

$$\frac{1}{2 \ln(2)} + \int_3^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \frac{1}{2 \ln(2)} + \int_2^n \frac{1}{t \ln(t)} dt.$$

Il faut maintenant que je calcule l'intégrale. On reconnaît du u'/u avec $u = \ln(t)$ i.e. $\frac{1}{t \ln(t)} = (\ln(\ln(t)))'$. J'ai donc

$$\frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)).$$

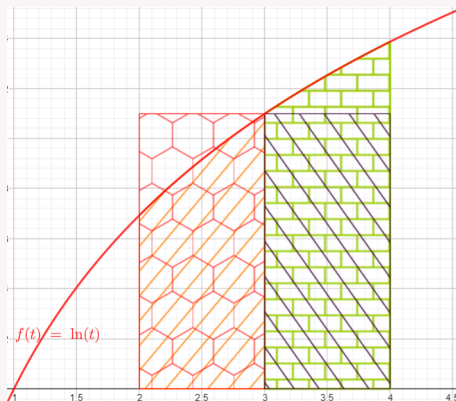
Un équivalent de la somme est alors $\ln(\ln(n))$.

^a. En pratique, il faut refaire les calculs

Exemple 3. On souhaite trouver un équivalent de $\ln(n!)$. On pourrait utiliser Stirling et composer à gauche par $\ln$ mais il faut toujours faire attention aux compositions à gauche par une fonction ! Seule la mise à la puissance est acceptée sans preuve (et encore).

Bref, $\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln(k)$ car $\ln(1) = 0$. On va donc faire une comparaison série-intégrale.

Usuellement, on a des fonctions décroissantes. Là, on est croissant, donc ça ressemble un peu plus à ça :



Adaptons les notations. Pour tout $i \geq 2$,

$$\int_{i-1}^i \ln(t) dt \leq \ln(i) \leq \int_i^{i+1} \ln(t) dt.$$

L'inégalité est vraie à partir de $i \geq 2$ donc je vais sommer à partir de 2. J'ai donc

$$\sum_{i=2}^n \int_{i-1}^i \ln(t) dt \leq \sum_{i=2}^n \ln(i) + \ln(1) \leq \sum_{i=2}^n \int_i^{i+1} \ln(t) dt.$$

(J'ai rajouté le petit $\ln(1)$ qui vaut 0). J'ai donc par Chasles pour les intégrales, par somme de logarithme pour le terme central,

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq \ln(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n) = \ln(n!) \leq \int_2^{n+1} \ln(t) dt.$$

Je calcule les intégrales : j'ai

$$\int_1^n \ln(t) dt = n \ln(n) - n + 1 ; \quad \int_2^{n+1} \ln(t) dt = (n+1) \ln(n+1) - (n+1) - 2 \ln(2) + 2.$$

Je divise tout par $n \ln(n)$. J'ai à gauche

$$\frac{n \ln(n) - n + 1}{n \ln(n)} = 1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

J'ai à droite

$$\frac{(n+1) \ln(n+1) - (n+1) - 2 \ln(2) + 2}{n \ln(n)} = \frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln(n)} + \frac{\ln(n+1)}{n \ln(n)} - \frac{n+1}{n \ln(n)} - \frac{2 \ln(2) - 2}{n \ln(n)}.$$

La comparaison série-intégrale possède trois grands résultats théoriques.

1. Elle permet de démontrer le critère de Riemann.
2. Elle permet d'obtenir un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ quand $\alpha > 1$.
3. Elle permet d'établir le critère de Bertrand.⁴

Théorème 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Cours. □

Théorème 2. Soit $\alpha > 1$. Alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}.$$

Démonstration. On procède par comparaison série intégrale. Par décroissance de $t \in [1, +\infty[\mapsto 1/t^\alpha$, on a

$$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Fixons $n, N \in \mathbb{N}, N \geq n$. Par télescopage,

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}$$

ce qui donne, car $\alpha \neq 1$

$$\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{n+1}^{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_n^N.$$

Ainsi,

$$\forall n \leq N \in \mathbb{N}, \frac{-1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right) \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{-1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right).$$

Par Riemann, le terme du milieu converge quand $N \rightarrow +\infty$. L'inégalité passe donc à la limite quand $N \rightarrow +\infty$ en

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Par théorème d'encadrement,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

□

⁴. Ce critère est hors-programme. Il faut s'entraîner à le refaire au cas par cas.

Théorème 3 (Bertrand). Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Démonstration. On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$. Si $\alpha > 1$, il existe $\gamma \in]1, \alpha[$ (faire un dessin). Alors par croissances comparées,

$$n^\gamma u_n = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{\ln^\beta(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc :

$$u_n \in o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$

Donc :

$$\sum u_n \text{ converge.}$$

Si $\alpha < 1$, nu_n tend vers l'infini. Donc $\frac{1}{n} \in o(u_n)$. Ainsi

$$\sum u_n \text{ diverge.}$$

Pour $\alpha = 1$, cela dépend de β .

Si β est négative, il est clair que $u_n \geq \frac{1}{n}$. Donc la série diverge.

Si β est strictement positive, je vais pouvoir faire une comparaison série-intégrale.

Pour $k \geq 3$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln^\beta(t)} \leq \frac{1}{k \ln^\beta(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t \ln^\beta(t)}.$$

D'où :

$$\sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln^\beta(t)} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln^\beta(k)} \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t \ln^\beta(t)}.$$

i.e.

$$\int_3^{n+1} \frac{dt}{t \ln^\beta(t)} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln^\beta(k)} \leq \int_2^n \frac{dt}{t \ln^\beta(t)}.$$

Si $\beta = 1$, une primitive des intégrandes considérées est $\ln \circ \ln$. Donc $\sum u_n$ diverge.

Si $\beta \neq 1$, une primitive des intégrandes considérées est

$$t \mapsto \frac{\ln^{1-\beta}(t)}{1-\beta}.$$

Donc l'intégrale diverge ssi $1 - \beta > 0$. Donc si $\beta > 1$, la série converge. Sinon elle diverge.

Bilan :

- $\alpha > 1$, la série converge
- $\alpha < 1$, la série diverge
- $\alpha = 1$
 - $\beta > 1$, la série converge
 - $\beta \leq 1$, la série diverge.

□