

# ÉLÉMENTS D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE COMPLEXES

M2 AAG, Septembre 2021 – H. Auvray

Les objets de départ en Analyse Complexe à Plusieurs Variables sont les *fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes*, que l'on peut définir comme des fonctions continues, et holomorphes par rapport à chacune de leurs variables.

Comme en dimension (complexe) 1, une formule de Cauchy (itérée ici) donne l'analyticité, et en particulier la régularité  $C^\infty$ , de telles fonctions. On peut en conséquence définir, par analogie avec le cas réel, la catégorie des *variétés complexes* (ou holomorphes) en toute dimension complexe.

On va alors disposer de méthodes géométriques, reposant en particulier sur le formalisme des *courants* (généralisation aux variétés de la notion de distribution), adaptées à l'étude d'un phénomène nouveau par rapport à la dimension 1, à savoir la possibilité dans de nombreux cas de pouvoir prolonger *toutes* les fonctions holomorphes d'un ouvert donné de  $\mathbf{C}^n$  ( $n \geq 2$ ). Il s'agira plus précisément dans ce cours d'aborder la résolution de ce problème, consistant en une caractérisation des « *domaines d'holomorphie* », ainsi que sa généralisation aux variétés. Cet enseignement peut donc naturellement être envisagé comme introduction aux cours de J.-B. Bost (*Introduction aux variétés complexes*) au 1<sup>er</sup> semestre ; les notions d'Analyse harmonique abordées en feront également une première introduction aux thématiques liées à l'étude des EDP (elliptiques) – *cf.* entre autres cours de F. Rousset. À travers son contenu, ce cours donnera également l'occasion de mettre en pratique des notions de Géométrie différentielle (*cf.* cours d'introduction R. Leclercq, et cours d'application à la théorie de groupes de D. Monclair), ou d'apporter simplement quelques éléments de Géométrie complexe avant une orientation vers la Géométrie algébrique.

Prérequis : Analyse complexe en une variable, Théorie des Distributions (*cf.* [poly de Th. Ramond](#), ch. 1 à 4), Géométrie Différentielle (bases).

Il y aura des notes écrites partielles ; pour un support exhaustif, consulter le chapitre 1 du livre de J.-P. Demailly, [Complex Analytic and Differential Geometry](#) (disponible sur sa page web).

## Programme :

### I - *Fonctions holomorphes à plusieurs variables et variétés (analytiques) complexes*

- 1) Définition (continuité et holomorphic séparée), formule de Cauchy et conséquences immédiates (analogues à la dimension 1 : développements en série entières, prolongement analytique, inversion locale).
- 2) Variétés (analytiques) complexes
  - a) définition *via* un atlas (définition alternative/faisceautique en remarque); espaces tangent et cotangent, (bi)degré, structure complexe.
  - b) Calcul différentiel/intégral sur les variétés (complexes) : cas réel : courants (notamment la formule  $F^*[Z] = [F^{-1}(Z)]$ ,  $F$  submersion,  $Z$  sous-variété orientée); cas complexe : opérateurs  $\partial$  et  $\bar{\partial}$  (remarque : formes différentielles, intégration, lemme de Poincaré, cohomologie de de Rham : fait la semaine précédente par R. Leclercq).

### II - *Étude locale des fonctions holomorphes : prolongements*

- 1) Théorème d'extension de Hartogs
  - a) Énoncé du théorème, et démonstration modulo la résolution de l'équation  $\bar{\partial}$  à support compact en dimension  $\geq 2$ .
  - b) Noyaux (Newton, Bochner-Martinelli), formule de Koppelman et résolution de l'équation  $\bar{\partial}$  à support compact.
  - c) Lemme de Dolbeault-Grothendieck.
- 2) Phénomène de Hartogs
  - a) Figure de Hartogs; prolongement *via* la formule de Cauchy.
  - b) Théorème d'extension de Riemann.

### III - *Domaines d'holomorphic I*

- 1) Définition domaine d'holomorphic; exemples (ouverts convexes – exercice/digression sur la boule et le polydisque unité en guise de contre-exemple à l'application conforme en dimension  $\geq 2$ ?).
- 2) Enveloppe d'holomorphic et convexité holomorphic, propriétés élémentaires; caractérisation I des domaines d'holomorphic.

### IV - *Domaines d'holomorphic II et fonctions psh*

- 1) Définition fonction d'exhaustion. Caractérisation II des domaines d'holomorphic – et des variétés de Stein – *via* l'existence de fonctions d'exhaustion lisses pluri-sous-harmoniques (définies comme fonctions à hessien complexe positif).
- 2) Fonctions harmoniques. Noyau de Green et problème de Dirichlet.
- 3) Fonctions (pluri-)sous-harmoniques.
- 4) Démonstration des énoncés « un domaine d'holomorphic est (faiblement) pseudo-convexe », ainsi que « une variété de Stein est fortement pseudo-convexe »; problème de Levi.

# ELEMENTS OF COMPLEX ANALYSIS AND GEOMETRY

AAG M2, September 2021 – H. Auvray

## Programme:

### I - *Holomorphic functions of several variables and complex manifolds*

- 1) Definition (continuity and separate holomorphy), Cauchy formula and (analogous to complex dimension 1: power series expansions, analytic extension, local inversion).
- 2) Complex manifolds
  - a) definition *via* an atlas (remark: alternative/sheaf-theoretic definition); tangent and cotangent spaces, (bi)degree, complex structure.
  - b) Integral and differential calculus on (complex) manifolds: real case: currents (in particular, formula  $F^*[Z] = [F^{-1}(Z)]$ ,  $F$  submersion,  $Z$  oriented submanifold); complex case:  $\partial$  and  $\bar{\partial}$  operators; (remark: differential forms, integration, Poincaré lemma, de Rham cohomology: done the week before by R. Leclercq).

### II - *Local study of holomorphic functions: extensions*

- 1) Hartogs' extension theorem
  - a) Statement of the theorem, proof modulo resolution of  $\bar{\partial}$  equation with compact support in dimension  $\geq 2$ .
  - b) Kernels (Newton, Bochner-Martinelli), Koppelman formula and resolution of  $\bar{\partial}$  equation with compact support.
  - c) Dolbeault-Grothendieck lemma.
- 2) Hartogs' phenomenon
  - a) Hartogs' figure; extension *via* Cauchy formula.
  - b) Riemann extension theorem.

### III - *Domains of holomorphy I*

- 1) Definition; examples (convex open sets – exercise/digression on unit ball and polydisc as a counterexample of the Conformal Mapping in dimension  $\geq 2$ ).
- 2) Holomorphic hull and holomorphic convexity, basic properties; first characterisation of domains of holomorphy.

### IV - *Domains of holomorphy II and psh functions*

- 1) Definition of exhaustion functions. Second characterisation of domains of holomorphy – and of Stein manifolds – *via* the existence of smooth pluri-subharmonic exhaustion functions (*i.e.* functions with positive complex Hessian).
- 2) Harmonic functions. Green kernel and Dirichlet problem.
- 3) (Pluri-)Subharmonic functions.
- 4) Proofs of the statements "a domain of holomorphy is (weakly) pseudo convex", and "a Stein manifold is strongly pseudoconvex"; Levi problem.

There will be partial typewritten notes; most of these contents of the class may however be found in [J.-P. Demailly's book](#), first chapter. Prerequisites are: Complex analysis (in one complex variable), Basic differential geometry, Distribution theory (see e.g. [Th. Ramond's notes](#), chapters 1 to 4).