Feuille d'exercices n°2 : Chaînes de Markov : exemples et propriétés.

Exercice 1. [Propriété de Markov] On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{t+1} = x_{t+1}) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_t, x_{t+1}), \quad t \in \mathbb{N}, x_0, \dots, x_{t+1} \in \Omega^{t+2}$$

1. Soit $A \subset \Omega^{t+1}$, $x, y \in \Omega$. Montrer que :
$$\mathbb{P}((X_s)_{0\le s\le t} \in A, X_t = x, X_{t+1} = y) = \mathbb{P}((X_s)_{0\le s\le t} \in A, X_t = x)P(x, y)$$
2. Soit $f : \Omega^{t+1} \to \mathbb{R}, g : \Omega^{r+1} \to \mathbb{R}$, $x \in \Omega$. Montrer que :
$$\mathbb{E}[f(X_0, \dots, X_t)\mathbf{1}_{\{X_t=x\}}g(X_t, \dots, X_{t+r})] = \mathbb{E}[f(X_0, \dots, X_t)\mathbf{1}_{\{X_t=x\}}]\mathbb{E}_x[g(X_0, \dots, X_r)]$$
3. On pose $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathbb{E}_x[g(X_0, \dots, X_r)]$. Montrer enfin :
$$\mathbb{E}[f(X_0, \dots, X_t)g(X_t, \dots, X_{t+r})] = \mathbb{E}[f(X_0, \dots, X_t)\varphi(X_t)].$$

Exercice 2. [Chaîne renversée] Soit P matrice de transition sur Ω fini, irréductible. On note π l'unique mesure de probabilité stationnaire de P. On pose, pour $x, y \in \Omega$,

$$Q(x, y) := \frac{\pi(y)}{\pi(x)}P(y, x).$$

1. Que vaut Q lorsque P est réversible par rapport à π ?
2. Vérifier que Q définit une matrice stochastique irréductible. Quelle est son unique mesure de probabilité stationnaire ? Calculer les puissances de la matrice Q.

Soit $n \ge 1$ un entier, et $(X_t)_{0\le t\le n}$ une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans Ω et de matrice de transition P et de mesure initiale π.

3. On pose $Y_t = X_{n-t}$, $t = 0 \dots n$. Montrer que $(Y_t)_{0\le t\le n}$ est encore une chaîne de Markov de matrice de transition Q et de mesure initiale à préciser.

Exercice 3. [Théorème de représentation] Soit Ω un ensemble fini, et $\mathcal{E}$ un espace mesurable.

1. On suppose donnée une fonction mesurable $f : \Omega \times \mathcal{E} \to \Omega$ et une suite de variables aléatoires i.i.d. $(\xi_t)_{t\ge0}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$. Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans Ω et indépendante des ξ_t. On définit par récurrence la suite $(X_t)_{t\ge0}$ par
$$X_{t+1} = f(X_t, \xi_t).$$
Montrer que pour toute suite $(x_0, \dots, x_t) \in \Omega^{t+1}$,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0\le s\le t}\{X_s = x_s\}\right) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)\,P(x_0, x_1)\,\cdots\,P(x_{t-1}, x_t),$$
pour une certaine matrice stochastique P que l'on précisera. En déduire que X est une chaîne de Markov de matrice de transition P.

2. On se donne réciproquement une matrice stochastique P sur $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, et une suite de variables aléatoires $(\xi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ i.i.d. uniformes dans $[0,1]$. On définit une fonction

$$\begin{aligned} f : \Omega \times [0,1] &\to \Omega \\ (k,x) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{x \geq \sum_{j=0}^{i-1} P(k,j)}. \end{aligned}$$

Montrer que $P(k,l) = \mathbb{P}(f(k,\xi_0) = l)$. En déduire que toute chaîne de Markov sur Ω peut être représentée en loi par une chaîne $(X_t)_{t\geq 0}$ définie par la relation de récurrence $X_{t+1} = f(X_t, \xi_t)$, avec une suite de variables i.i.d. $(\xi_t)_{t\geq 0}$.

Exercice 4. [Chaîne image] Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans Ω et de matrice P, et $f : \Omega \to \Omega'$ une fonction surjective. On pose $Y_t = f(X_t)$, et on suppose que, pour tout $y_1, y_2 \in \Omega'$, la probabilité de transition $P(x, f^{-1}\{y_2\})$ est la même pour tout $x \in f^{-1}\{y_1\}$. On note alors cette quantité $Q(y_1, y_2)$.

1. Vérifier que Q est une matrice stochastique sur Ω'.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{N}$ et $(y_s)_{0\leq s\leq t} \in (\Omega')^{t+1}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0\leq s\leq t} \{Y_s = y_s\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{0\leq s\leq t-1} \{Y_s = y_s\}\right) Q(y_{t-1}, y_t)$$

et en déduire que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur Ω' de matrice de transition Q.

On appelle mesure image de π par f la mesure de probabilité $f(\pi)$ sur Ω' définie par $f(\pi)(\{y\}) = \pi(f^{-1}(\{y\}))$, $y \in \Omega'$.

3. Si π est une mesure de probabilité stationnaire pour P, montrer que $f(\pi)$ est encore stationnaire pour Q.
4. Si P est réversible par rapport à π, montrer que Q est réversible par rapport à $f(\pi)$.

Exercice 5. [Urne d'Erhenfest [1]] Soit $n \geq 1$. Le graphe $G = (V, E)$ défini par

$$V = \{0,1\}^n \text{ et } E = \{\{x,y\} \in V^2 : \sum_{1\leq i\leq n} |x(i) - y(i)| = 1\}$$

s'appelle l'hypercube de dimension n. On considère la marche aléatoire simple $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sur ce graphe. L'application somme des coordonnées $f : x \in V \mapsto \sum_{1\leq i\leq n} x(i) \in \{0, \ldots, n\}$ appliquée à $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ donne $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}} := (f(X_t))_{t\in\mathbb{N}}$.

1. Représenter le graphe obtenu pour $n = 2$ et $n = 3$, et justifier ainsi le nom d'hypercube pour le graphe $G = (V, E)$.
2. Quel est le degré des sommets de G ?
3. Donner la matrice de transition P de la chaîne $(X_t)_{t\geq 0}$. Est-elle irréductible ? Montrer que P admet une unique mesure de probabilité stationnaire π, et la préciser.

---

1. Interprétation de ce modèle, introduit en 1907 par les époux Ehrenfest pour illustrer certains des paradoxes apparus dans les fondements de la mécanique statistique : on dipose de 2 urnes qui comprennent au total n boules, et, à chaque instant, une boule choisie au hasard parmi les n boules est changée d'urne ; on veut alors comprendre la répartion des boules dans les 2 urnes.

4. Vérifier que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est encore une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition Q. Est-elle irréductible ?
5. Déterminer la mesure image $f(\pi)$ et vérifier que Q est réversible par rapport à $f(\pi)$.
6. En déduire à l'aide du cours la valeur de $g(k) = \mathbb{E}_k[\tau_k^+(Y)]$. Calculer la limite de

$$\frac{1}{n}\log(g(k))$$

lorsque $n \to \infty$ et $k = k(n)$ est une suite telle que $\frac{k(n)}{n} \to \alpha \in (0,1)$. Donner enfin un équivalent de $g(\frac{n}{2})$ (on pourra s'aider de l'équivalent de Stirling $n! \sim (\frac{n}{\mathrm{e}})^n\sqrt{2\pi n}$).

Exercice 6. [Ruine du joueur] On considère $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\Omega = \{0,\ldots,n\}$ de matrice de transition

$$P(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{\{|j-i|=1\}} & \text{si } i \in \{1,\ldots,n-1\} \\ \mathbf{1}_{i=j} & \text{si } i \in \{0,n\}. \end{cases}$$

Il s'agit de la marche aléatoire formée par les gains d'un joueur qui joue à un jeu équilibré : le joueur gagne ou perd 1 à chaque tour de jeu et s'arrête lorsqu'il son gain atteind 0 ou n. On s'intéresse au temps aléatoire $\tau = \min\{t \geq 0, X_t \in \{0,n\}\} \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ qui modélise la durée du jeu, et aussi à la variable aléatoire X_τ, définie sur l'événement $\{\tau < \infty\}$.

1. Soit $k \in \Omega \setminus \{0,n\}$. On note $\theta = \theta_1$ l'opérateur de shift, et $\tau\circ\theta$ la variable aléatoire $\tau(\theta(X))$. Observer que pour tout entier $t \in \mathbb{N}$,

$$\{\tau\circ\theta \geq t\} \cap \{\tau \neq 0\} = \{\tau \geq t+1\}$$

et en déduire l'égalité suivante à l'aide de la propriété de Markov :

$$\mathbb{P}_k(\tau \geq t+1 \,|\, X_1 = k+1) = \mathbb{P}_{k+1}(\tau \geq t).$$

2. Noter que pour tout $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $n = \sum_{t\geq 1}\mathbf{1}_{t\leq n}$, et en déduire que

$$\mathbb{E}_k[\tau \,|\, X_1 = k+1] = 1 + \mathbb{E}_{k+1}[\tau].$$

Pour la seconde identité, noter qu'on ne sait pas si la variable aléatoire τ est p.s. finie, mais comme elle est à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, son espérance est bien définie, possiblement égale à $+\infty$.
3. Soit $k \in \Omega$. Posons $h(k) = \mathbb{E}_k[\tau]$. Expliciter $h(0)$ et $h(n)$, et donner l'équation de récurrence satisfaite par h. Résoudre ce système (on pourra poser $\ell(k) = h(k+1) - h(k)$).
4. Soit $k \in \Omega \setminus \{0,n\}$. Justifier l'identité :

$$\{(\theta\circ X)_{\tau\circ\theta} = n\} \cap \{\tau \neq 0\} \cap \{\tau < \infty\} = \{X_\tau = n\} \cap \{\tau \neq 0\} \cap \{\tau < \infty\}$$

puis en déduire à l'aide de la propriété de Markov que

$$\mathbb{P}_k(\tau < \infty \text{ et } X_\tau = n \,|\, X_1 = k+1) = \mathbb{P}_{k+1}(\tau < \infty \text{ et } X_\tau = n).$$

Soit $k \in \Omega$. Posons $g(k) = \mathbb{P}_k(\tau < \infty \text{ et } X_\tau = n)$. Expliciter $g(0)$ et $g(n)$, et donner l'équation de récurrence satisfaite par g. Résoudre ce système.

5. Pour cette dernière question, on modifie les probabilités de transition depuis l'état 0 en supposant que $P(0,1) = 1$ (autrement dit, le joueur est un addict et il se remet à jouer immédiatement après avoir perdu). On pose $\tau^0 = \min\{t \geq 0, X_t = n\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et $h^0(k) = \mathbb{E}_k(\tau^0)$. Donner $h^0(0) - h(1)$ et $h^0(n)$. Montrer que h^0 vérifie la même équation de récurrence que h, et la résoudre.

Exercice 7. [Temps d'atteinte et de retour d'espérance finie] Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible sur Ω fini. On fixe $y \in \Omega$ dans ce qui suit.

1. Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{N}$, et $\delta \in]0,1]$ tel que pour tout $x \in \Omega$, $\mathbb{P}_x(\tau_y \leq t_0) \geq \delta$.
2. Soit $x \in \Omega$. En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_x(\tau_y > kt_0) \leq (1-\delta)^k$.
3. Conclure que $\mathbb{E}_x[\tau_y] \leq t_0/\delta$.
4. En déduire que $\mathbb{E}_x[\tau_y^+] \leq \mathbf{1}_{\{x=y\}} + t_0/\delta$.

Exercice 8. [Chaîne induite] Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans Ω et de matrice de transition P. On pose

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ \theta_{t+1} = \min\{s \in \mathbb{N} : s > \theta_t, X_s \neq X_{\theta_t}\} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

puis $Y_t = X_{\theta_t}$ pour tout entier $t \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que $\mathbb{P}(\theta_t < \infty) = 1$ pour tout entier $t \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est encore une chaîne de Markov, et exprimer sa matrice de transition à l'aide de P.

Exercice 9. [Dernier site occupé] Soit $n \geq 3$. On considère la marche aléatoire $(X_t)_{t\geq 0}$ sur le n-cycle :

$$G = (V,E) \quad ; \quad V = \{1,2,\ldots,n\} \quad ; \quad E = \{\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{n-1,n\},\{n,1\}\}.$$

On convient dans ce qui suit que les additions sont modulo n. On note Y le dernier site visité par la marche aléatoire, formellement défini par

$$\{Y = y\} = \{\tau_y = \max_{1\leq x\leq n} \tau_x\}.$$

1. Expliquer pourquoi
$$\{Y = y\} = \{\tau_{y-1} < \tau_{y+1} < \tau_y\} \cup \{\tau_{y+1} < \tau_{y-1} < \tau_y\}.$$
2. Montrer que, pour tout $y \in \{1,\ldots,n\}$,
$$\mathbb{P}_{y-1}(\tau_{y+1} < \tau_y) = \frac{1}{n-1}.$$
On pourra chercher un système d'équations pour la fonction $f(k) = \mathbb{P}_k(\tau_{y+1} < \tau_y)$ puis résoudre ce système.
3. En déduire la valeur de $\mathbb{P}_x(Y = y)$, et reconnaître la distribution de la variable aléatoire Y. Commenter ce résultat.