Feuille d'exercices n° 8 : Convergence en loi et fonction caractéristique

Exercice 1. [Convergences en loi usuelles]

1. Soit $N_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$. Montrer que, si $n \to \infty$ avec $np_n \to \lambda > 0$:
$$N_n \Longrightarrow \text{Poi}(\lambda).$$
2. Soit $N_p \sim \text{Geom}(p)$. Montrer que, lorsque $p \to 0$:
$$pN_p \Longrightarrow \text{Exp}(1).$$

Exercice 2. Soit $E_1, \ldots, E_n$ des variables aléatoires i.i.d. selon la loi $\text{Exp}(1)$, M_n leur maximum et L_n leur minimum.

1. Calculer la limite en loi de $M_n - \log(n)$ quand $n \to \infty$.
2. Calculer la loi de nL_n.
3. Calculer la loi du vecteur $(E_{(1)}, E_{(2)}, \ldots, E_{(n)})$ avec $E_{(1)}, \ldots, E_{(n)}$ le réarrangement croissant de $E_1, \ldots, E_n$ [1].

Exercice 3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d, et L_n leur minimum. On suppose $\mathbb{P}(X_1 > 0)$ et X_1 à densité, de densité f avec $f(0) \neq 0$ et f continue à droite en 0.

1. Calculer la limite en loi de nL_n quand $n \to \infty$

Exercice 4. [TCL et Stirling] Soit $X_1, X_2, \ldots$ de loi $\text{Poi}(1)$, la loi de Poisson de paramètre 1, et $S_n = X_1 + \ldots X_n$.

1. Montrer que $S_n \sim \text{Poi}(n)$.
2. Montrer à l'aide de Stirling que, si $k = (k_n)$ est une suite telle que $(k - n)/\sqrt{n} \to x \in \mathbb{R}$, alors
$$\sqrt{2\pi n}\, \mathbb{P}(S_n = k) \to e^{-x^2/2}.$$

Exercice 5. [Convergence en probabilité et convexité]

Soit $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. positives. On suppose qu'il existe $0 < \alpha < \beta$ tels que $\mathbb{E}[X_n^\alpha] \to 1$ et $\mathbb{E}[X_n^\beta] \to 1$.

1. Soit $\varepsilon > 0$, et $\gamma > 1$. Montrer qu'il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $x \geq 0$,
$$x^\gamma \geq 1 + \gamma(x - 1) + \delta \mathbb{1}_{|x-1|>\varepsilon}.$$
2. En déduire : $\mathbb{E}[X_n^\beta] \geq 1 + \frac{\beta}{\alpha}(\mathbb{E}[X_n^\alpha] - 1) + \delta \mathbb{P}(|X_n^\alpha - 1| > \varepsilon)$
3. Conclure que $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} 1$.

Exercice 6. [Glivenko-Cantelli et théorème de Dini]

Soit $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. réelles i.i.d. de fonctions de répartition F, que l'on suppose continue. On pose $F_n(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \leqslant t}/n$ la fonction de répartition empirique [2]

1. en particulier, $E_{(1)} = L_n$ et $E_{(n)} = M_n$
2. à la différence de F, c'est une fonction aléatoire

1. Montrer que, pour tout t, $F_n(t)$ converge p.s. vers $F(t)$.
2. On fixe $m \geqslant 2$ un entier puis on pose pour $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, $t_k = \inf\{t \in \mathbb{R}, F(t) = k/m\}$.
   (a) Soit $0 \leq k < m$. Pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, montrer que :
   $$|F_n(t) - F(t)| \leq \big|F_n(t_k) - F(t_k)\big| + \big|F_n(t_{k+1}) - F(t_{k+1})\big| + \frac{1}{m}$$
   (b) Conclure que $\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \to 0$ p.s.

Exercice 7. [Lemme de Slutsky] Soit $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ des couples de variables aléatoires i.i.d. On suppose $X_n \xrightarrow{(loi)} X$ et $Y_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} c$ constante.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour n entier et v réel, $|e^{iY_n v} - e^{icv}| \leqslant |v|\varepsilon + 2\,\mathbb{1}_{\{|Y_n - c| > \varepsilon\}}$.
2. En déduire[3] que pour tous réels u et v, la fonction caractéristique bivariée satisfait
   $$\mathbb{E}[e^{i(uX_n + vY_n)}] \to \mathbb{E}[e^{iuX}]e^{icv}.$$
3. Établir le lemme de Slutzky : $(X_n, Y_n) \xrightarrow{(loi)} (X, c)$.

Exercice 8. [Une identité trigonométrique]

1. Montrer l'identité :
   $$\frac{\sin(t)}{t} = \prod_{m \geqslant 0} \cos\left(\frac{t}{2^m}\right).$$
2. Interpréter cette identité comme une convergence en loi - on pourra voir chaque membre comme une fonction caractéristique.

Exercice 9. [Fonction caractéristique et atomes]

Soit φ la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X, de loi μ, $\varphi(t) = \int e^{itx}\mu(dx)$ pour tout réel t.

1. Montrer que, pour tout réel a :
   $$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(t)e^{-ita}dt = \mu(\{a\})$$
2. Montrer que $Re(\varphi)$ et $|\varphi|^2$ sont encore des fonctions caractéristiques.
3. Montrer que
   $$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi(t)|^2 dt = \sum_x \mu(\{x\})^2$$

3. On pourra écrire $e^{i(uX_n+vY_n)} - e^{i(uX+vc)} = (e^{iuX_n} - e^{iuX})e^{ivc} + (e^{ivY_n} - e^{ivc})e^{iuX_n}$