Feuille d'exercices n° 4 : Modes de convergence

Exercice 1. Énoncer dans un cadre probabiliste et avec un vocabulaire probabiliste, dans l'ordre donné, et sans regarder votre cours :

1. theorème de convergence monotone (Beppo-Levi).
2. lemme de Fatou.
3. thèorème de convergence dominée.

Exercice 2. Soit $X, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires aléatoires telles que :

(i) $X_n \to X$ ps

(ii) $\mathbb{E}[|X_n|] \leqslant 1$

Montrer que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$.

Exercice 3. Soit $X, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires aléatoires positives ou nulles telles que :

(i) $X_n \to X$ ps

(ii) $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X] < \infty$

Montrer que $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$.

Exercice 4. Soit $X, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires aléatoires telles que :

(i) $X_n \to 0$ ps

(ii) $\mathbb{E}[X_n^2] \leqslant 1$.

Montrer que $\mathbb{E}[|X_n|] \to 0$. Montrer par un exemple que les hypothèses n'entraînent pas la convergence dominée.

Exercice 5. Soit $X, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires aléatoires positives ou nulles intégrables telles que $X_n \to X$ ps. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$

(ii) $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est uniformément intégrable (i.e. : $\sup_{n \geqslant 0} \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{X_n \geqslant M}] \to 0$ quand $M \to \infty$).

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire positive, avec $\mathbb{E}[X] = 1$ et $\mathbb{P}(X \neq 1) > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[\sqrt{X}] < 1$.
2. Si $X_1, X_2, \ldots$ est une suite iid selon la loi de X, montrer [1] que $\prod_1^n X_i \overset{\text{p.s.}}{\to} 0$.

Exercice 7. Pour deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, on pose

$$d_P(X, Y) = \inf\left\{\epsilon \geqslant 0, \mathbb{P}\left(\|X - Y\|_d > \epsilon\right) \leqslant \epsilon\right\}$$

où $\|\cdot\|_d$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer que l'infimum est atteint dans la définition de $d_P(X, Y)$.
2. Montrer que l'application d_P définit une distance sur l'ensemble des classes d'équivalence de va à valeurs dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ pour la relation d'équivalence $X \sim Y$ si $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $(a_n)_{n \geqslant \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs croissant vers 1. On pose $X_n = \frac{1 - a_n}{U^{a_n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que $(X_n)_n$ converge en probabilité et identifier sa limite que l'on notera X.
4. Déterminer $d_P\left(X_n, X\right)$.
5. La suite $(X_n)_n$ converge-t-elle dans L^1 ?
6. Montrer que $d_P(X, Y) \leqslant \mathbb{E}\left(\|X - Y\|_d^r\right)^{\frac{1}{r+1}}$ pour tout $r > 0$.

1. On pourra considérer la série $\sum_1^\infty \sqrt{X_1 \ldots X_n}$ puis appliquer le théorème de convergence monotone).