T.E.R. : $1 + 2 + 3 + \cdots = -\dfrac{1}{12}$

CHEN Thomas et OLLIVIER Yoann

19 avril 2022

Table des matières

Chapitre 1

Introduction au sujet

1.1 Introduction

A priori, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ est bien définie ($n < +\infty$), mais les sommes du type $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k$ ne sont définies que si la limite existe. Cela fonctionne bien lorsque $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty$ car la convergence absolue entraîne la convergence simple (dans un espace de Banach).

Exemple 1.1.

- Voici un exemple de série absolument convergente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ici, on peut faire la somme dans « l'ordre que l'on veut », au sens où la valeur de la somme est stable sous toute permutation :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}), \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

On peut alors choisir n'importe quel procédé de sommation. On peut également écrire que pour toute partition de $\mathbb{N}^*$ notée $(A_i)_{i\in I}$, alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{i\in I} \left(\sum_{k\in A_i} \frac{1}{k^2} \right).$$

- Pour autant, toutes les séries convergentes ne sont pas absolument convergentes. Elles sont dites semi-convergentes.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2).$$

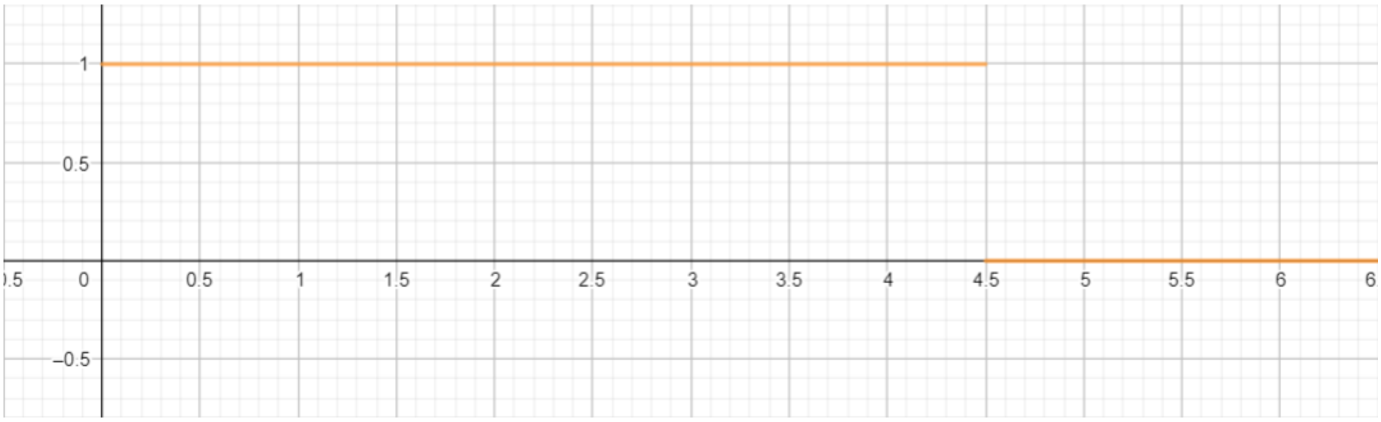
Ici, on ne peut **pas** faire de permutation quelconque des indices : le théorème de réarrangement de Riemann nous éclaire sur ce point : il affirme que pour tout réel, il existe une permutation σ sur $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\sigma(k)+1}}{\sigma(k)}$ converge vers la valeur que l'on veut, ou diverge (au sens de la première ou deuxième espèce). En revanche, pour les permutations dites bornées, cela n'influe pas sur la valeur de la limite :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}), (\exists M \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}, |\sigma(k) - k| \leq M) \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

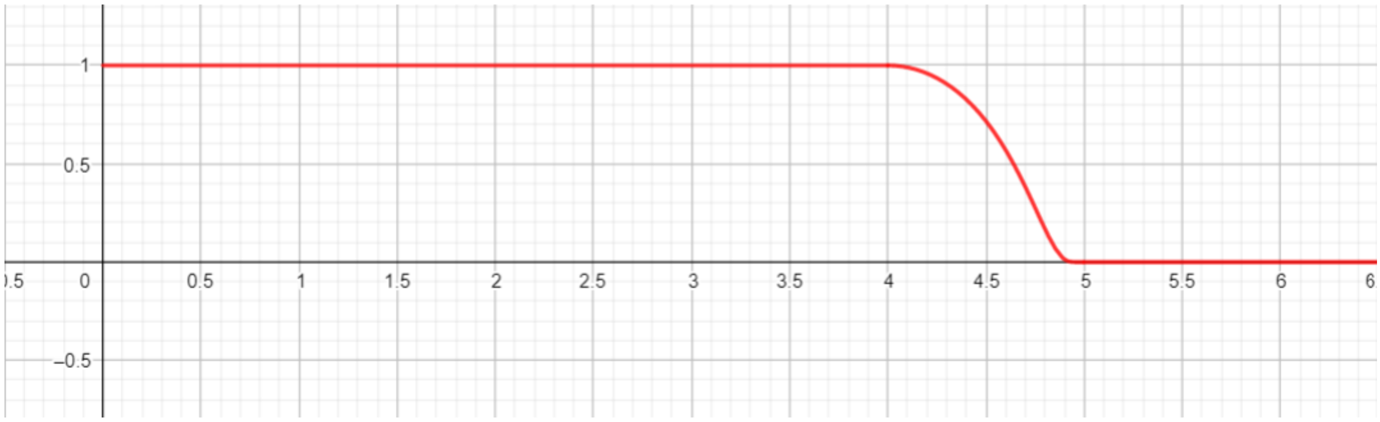
Regardons maintenant cette égalité nécessitant un léger effort mental.

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \mathbf{1}_{\{k \leq N\}}.$$

Alors étudier la série des $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ revient à regarder la limite du membre de droite lorsque $N \to +\infty$. Mais peut-on vraiment le faire ? Le plus important obstacle est la discontinuité trop rude de l'indicatrice.
Typiquement, on souhaiterait transformer l'indicatrice



en une fonction plus lisse, en pensant par exemple à



On va donc utiliser une fonction de lissage $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ avec $\eta(0) = 1$, et tendant vers 0 en l'infini. Grâce à cette fonction, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \eta\left(\frac{k}{N}\right)$ est tout le temps bien définie. Pour des cas pratiques, la fonction $\eta : t \mapsto e^{-t}$ est une fonction de lissage, qui est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ même si on regarde ses propriétés dans $\mathbb{R}^+$.
On introduit alors l'espace de Schwartz :

Définition 1.1 (Espace de Schwartz)**.**
On appelle **espace de Schwartz**, l'ensemble

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^+) = \left\{ \eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+) \ : \ \forall n, m \in \mathbb{N}, \sup_{t \geq 0} t^n |\eta^{(m)}(t)| < +\infty \right\}.$$

Dans la suite, on prend $\eta : t \mapsto e^{-t} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. Traitons un exemple d'utilisation.

Exemple 1.2 (Série de Grandi)**.**

En posant $x := e^{-1/N}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\eta\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}e^{-k/N} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}x^k = x\sum_{k=0}^{+\infty}(-x)^k = \frac{x}{1+x}.$$

Alors

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

Dans la suite, on appellera **régularisation** le processus consistant à « lisser » l'indicatrice. Le résultat précédent ne dépend pas de η (*cf.* théorème 3.1).

Exemple 1.3. Après régularisation, $1-2+3-4+\cdots$ donne $x-2x^2+3x^3+\cdots = \frac{x}{(1+x)^2}$, qui converge vers $1/4$ lorsque $x\to 1^-$.

Mais le sujet de notre T.E.R. reste un problème, même après régularisation. On a :

$$1+2+3+\cdots \underset{\text{régularisation}}{\longrightarrow} x+2x^2+3x^3+\cdots = \frac{x}{(1-x)^2} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

Le résultat précédent ne dépend pas de η (*cf.* théorème 3.2).

1.2 Une première esquisse

Comme on ne peut calculer cette somme infinie, on va y soustraire une quantité qui est aussi infinie ! On appellera **normalisation** ce procédé, qui consiste à ôter une intégrale (car ressemblant beaucoup à une série). On a donc envie de considérer :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \underset{\text{renormalisation}}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} k - \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{d}t \underset{\text{régularisation}}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} k\eta\left(\frac{k}{N}\right) - \int_0^{+\infty} t\eta\left(\frac{t}{N}\right)\mathrm{d}t.$$

En prenant $\eta : t\mapsto e^{-t}$, on obtient que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\eta\left(\frac{k}{N}\right) - \int_0^{+\infty} t\eta\left(\frac{t}{N}\right)\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{12}.$$

Théorème 1.1. *On a donc*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\exp\left(\frac{k}{N}\right) - \int_0^{+\infty} t\exp\left(\frac{t}{N}\right)\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{12}.$$

Démonstration 1.1.
On va donc montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} ke^{-k/N} - \int_0^n te^{-t/N}\mathrm{d}t\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{12};$$

En effet, soit $x = e^{-1/N}$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} ke^{-k/N} = \sum_{k=1}^{n} kx^k = \left(x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k\right)'(x) = \left(x \mapsto \frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'(x) = \frac{x(nx^{n+1}-(n+1)x^n+1)}{(x-1)^2}$$

Or, $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini par croissances comparées. Donc

$$\sum_{k=1}^{n} ke^{-k/N} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{(x-1)^2}.$$

Passons au calcul de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} te^{-t/N}\mathrm{d}t \underset{u=t/N}{=} \int_0^{+\infty} N^2 \int_0^{+\infty} ue^{-u}\,\mathrm{d}u = N^2\Gamma(2) = N^2.$$

Or, $x = e^{-1/N}$, donc $N = -1/\ln(x)$, donc $N^2 = \dfrac{1}{\ln^2(x)}$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k/N} - \int_0^{+\infty} te^{-t/N}\mathrm{d}t = \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{\ln^2(x)}.$$

On souhaite connaître la limite quand N tend vers l'infini, donc quand x tend vers 1 (le changement de variable était $x = e^{-1/N}$). On réalise un changement de variable affine :

$$\lim_{x\to1} \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{\ln^2(x)} = \lim_{x\to0} \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{\ln^2(x+1)}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln^2(x+1)} &= \frac{1}{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^2} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{1-x+\underbrace{\frac{x^2}{4}+\frac{2x^2}{3}}_{11x^2/12}+\underset{x\to0}{o}(x^2)} \\
&= \frac{1}{x^2}(1+(x-11x^2/12)+(x-11x^2/12)^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)) = \frac{1+x-\frac{11x^2}{12}+x^2}{x^2}+\underset{x\to0}{o}(1) \\
&= \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{12}+\underset{x\to0}{o}(1).
\end{aligned}$$

Bilan :

$$\frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{\ln^2(x+1)} = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{12}+\underset{x\to0}{o}(1).$$

On a donc :

$$\lim_{x\to1} \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{\ln^2(x)} = -\frac{1}{12}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k/N} - \int_0^{+\infty} te^{-t/N}\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{12}.}$$

Cela termine la démonstration.

□

Chapitre 2

Premiers théorèmes, premiers résultats

2.1 Sommation des séries divergentes

Encore une fois, il faut montrer que ce résultat ne dépend pas du choix de η. Pour cela, on a besoin d'une formule fondamentale : la formule d'Euler-MacLaurin.

2.1.1 Polynômes de Bernoulli

Définition 2.1 (Polynômes de Bernoulli)**.** Les **polynômes de Bernoulli** sont définis par la fonction génératrice

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$$

Propriété 2.1 (Premières valeurs)**.**

- $B_0(x) = 1$
- $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$
- $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$

Démonstration 2.1. Immédiat en utilisant la définition.

Propriété 2.2 (Dérivée)**.**
On a $\begin{cases} B_0(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, {B_{n+1}}'(x) = (n+1)B_n(x) \end{cases}$.

Démonstration 2.2. Immédiat en utilisant la définition.

Propriété 2.3. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Autrement dit, chaque polynôme de Bernoulli est de moyenne nulle.

Démonstration 2.3. La périodicité de la partie fractionnaire conclut immédiatement.

Sur le graphe 2.1 ci-après, on voit bien que l'intégrale sur le segment $[0,1]$ est nul grâce à l'axe de symétrie $x = 1/2$.

Remarque 2.1. Les trois conditions :

1. $\forall n \geq 1, \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. $\forall n \geq 1, B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$
3. $B_0(x) = 1$

permettent de déterminer uniquement les polynômes de Bernoulli, donc les *nombres de Bernoulli* $(B_n)_{n\geq 1}$, qui sont définis comme étant les termes constants des polynômes de Bernoulli.

Définition 2.2 ($\widehat{B}_n$)**.**
On définit les polynômes de Bernoulli « normalisés » par $\forall n \geq 1, \widehat{B}_n(x) = B_n(\{x\})$, où $\{\cdot\}$ désigne la partie fractionnaire.

Il est alors assez clair que les $(\widehat{B}_n)_{n\geq 1}$ sont 1-périodiques. Le graphe 2.2 ci-après l'illustre bien.

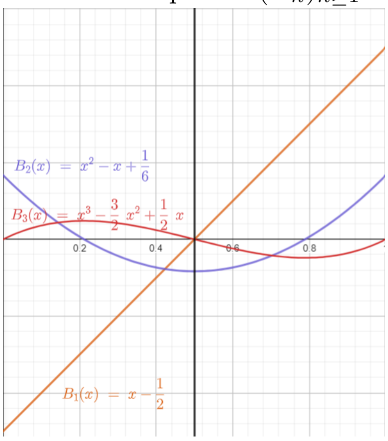


FIGURE 2.1 – Le 1[er], 2[e], et le 3[e] polynômes de Bernoulli

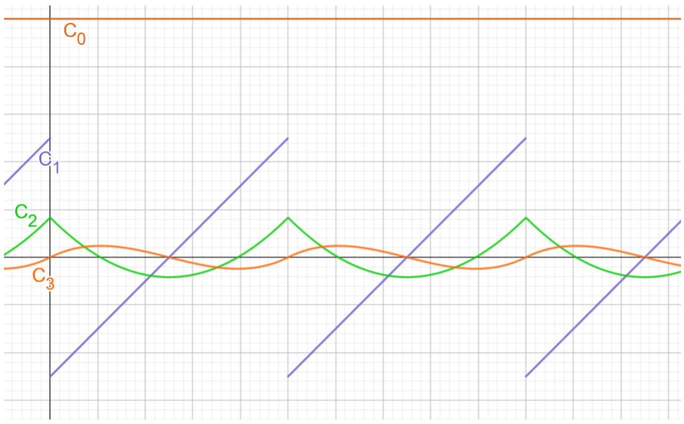


FIGURE 2.2 – Les premiers polynômes périodiques de Bernoulli

2.1.2 Formule d'Euler-MacLaurin

La formule d'Euler-MacLaurin s'énonce alors comme suit.

Théorème 2.4 (Formule d'Euler-MacLaurin)**.**
$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \forall d \geq 1, \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n,$

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) - \int_m^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{d} \frac{B_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)\right) - \frac{(-1)^d}{d!}\int_m^n \widehat{B}_d(t) f^{(d)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration 2.4.
Traitons le cas où $m = 0, n = 1$ pour voir ce qui se passe.

$$\int_0^1 1 \times f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Alors, pour tout k, on a

$$\int_k^{k+1} f = \left[\left(x-k-\frac{1}{2}\right)f(x)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \underbrace{\left(\{x\}-\frac{1}{2}\right)}_{\widehat{B}_1(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(k+1)+f(k)}{2} - \int_k^{k+1} \widehat{B}_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc :

$$\sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(m) + \sum_{k=m}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2}f(n) - \int_m^n \widehat{B}_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ensuite, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} \widehat{B}_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\widehat{B}_2(x)}{2}f'(x)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1}\frac{\widehat{B}_2(x)}{2}f''(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}(\widehat{B}_2(k+1)f'(k+1) - \widehat{B}_2(k)f'(k)) - \int_k^{k+1}\frac{\widehat{B}_2(x)}{2}f''(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}(\widehat{B}_2(1)f'(k+1) - \widehat{B}_2(0)f'(k)) - \int_k^{k+1}\frac{\widehat{B}_2(x)}{2}f''(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\widehat{B}_2(0)(f'(k+1) - f'(k)) - \int_k^{k+1}\frac{\widehat{B}_2(x)}{2}f''(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Donc en sommant, on obtient :

$$\sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1} \widehat{B}_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = B_2(0)(f'(n)-f'(m)) - \int_m^n \frac{\widehat{B}_2(x)}{2}f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

On a ainsi obtenu la formule d'Euler-MacLaurin à l'ordre 2. Il suffit d'itérer les intégrations par parties jusqu'à atteindre l'ordre d. Cela termine la démonstration.

□

On arrive alors à notre théorème intéressant.

Théorème 2.5.
Soit η une fonction de Schwartz. On pose $f_N : x \mapsto x\eta\left(\frac{x}{N}\right)$. Alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_N(k) - \int_0^{+\infty} f_N(t)\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{12}.$$

Démonstration 2.5.
On va montrer que la limite ne dépend pas du η choisi. La formule d'Euler-MacLaurin à l'ordre 3 donne :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} f_N(k) - \int_0^n f_N(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}(f_N(0)+f_N(n)) + (-1)^2\frac{B_2(0)}{2!}\left(f_N'(n)-f_N'(0)\right)\\
&\quad + (-1)^3\frac{B_3(0)}{3!}\left(f_N''(n)-f_N''(0)\right) + (-1)^2\int_0^n \frac{\widehat{B}_3(x)}{3!} f_N^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{n}{2}\eta\left(\frac{n}{N}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{n}{N}\eta'\left(\frac{n}{N}\right) + \eta\left(\frac{n}{N}\right) - \frac{0}{N}\eta'\left(\frac{0}{N}\right) - \eta\left(\frac{0}{N}\right)\right)\\
&\quad + 0 + \int_0^n \frac{\widehat{B}_3(x)}{3!} f_N^{(3)}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Morceau rouge : Pour n assez grand, $n^2\eta\left(\frac{n}{N}\right)$ est bornée car η est une fonction de Schwartz, donc $n\eta\left(\frac{n}{N}\right)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Morceau violet : η est toujours une fonction de l'espace de Schwartz donc $n^2\eta'\left(\frac{n}{N}\right)$ est bornée, d'où $n\eta\left(\frac{n}{N}\right)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Il ne reste donc que $-\eta\left(\frac{0}{N}\right) = -1$.

Morceau bleu : Si l'on montre que le terme bleu tend vers 0, c'est gagné. Pour cela, on écrit :

$$
\begin{aligned}
\int_0^n \frac{\widehat{B}_3(x)}{3!} f_N^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{6}\int_0^n \widehat{B}_3(x)\left(\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k} x^{(k)}\left(\eta\left(\frac{x}{N}\right)\right)^{(3-k)}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{6}\int_0^n \widehat{B}_3(x)\left(\frac{x}{N^3}\eta'''\left(\frac{x}{N}\right) + \frac{3}{N^2}\eta''\left(\frac{x}{N}\right)\right)\mathrm{d}x\\
&\underset{t=x/N}{=} \frac{1}{6}\int_0^{n/N} \widehat{B}_3(tN)\left(\frac{tN}{N^3}\eta'''(t) + \frac{3}{N^2}\eta''(t)\right)N\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{6N}\int_0^{n/N} \widehat{B}_3(tN)\left(t\eta'''(t) + 3\eta''(t)\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Puisque les $\widehat{B}_k(x)$ sont bornés, $\widehat{B}_3(tN) = \underset{t\to+\infty}{O}(1)$ et on a donc

$$
\int_0^n \frac{\widehat{B}_3(x)}{3!} f_N^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{6N}\|\widehat{B}_3\|\int_0^{n/N} t|\eta'''(t)| + 3|\eta''(t)|\mathrm{d}t. \tag{2.1}
$$

En effet, puisque η est une fonction de Schwartz, $|t^2(t\eta'''(t)+3\eta''(t))| \leq |t^3\eta'''(t)| + |t^2\eta''(t)| < \infty$, on en déduit que $t\eta'''(t) + 3\eta''(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On a donc que le membre de droite converge lorsque n tend vers l'infini. On peut donc écrire :

$$
\int_0^{+\infty} \frac{\widehat{B}_3(x)}{3!} f_N^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{M_3}{6N}\int_0^{+\infty} t\eta'''(t) + 3\eta''(t)\mathrm{d}t = \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N}\right).
$$

Ainsi, en faisant d'abord $n \to +\infty$, puis $N \to +\infty$, on a bien que le morceau bleu tend vers 0. CQFD.
Bilan : on a bien :

$$
\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} k\eta\left(\frac{k}{N}\right) - \int_1^{+\infty} t\eta\left(\frac{t}{N}\right)\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 - \frac{1}{12} + 0 + 0 = -\frac{1}{12}}
$$

□

Remarque 2.2. Il existe en fait deux conventions pour définir les nombres de Bernoulli : l'une donne $B_1^+ = +\frac{1}{2}$ et l'autre donne $B_1^- = -\frac{1}{2}$, et on passe d'une convention à l'autre grâce à $B_n^+ = (-1)^n B_n^-$. Ces conventions n'altèrent alors que le terme B_1, car il ne change pas les termes pairs, et tous les termes impairs (excepté $n = 1$) sont nuls. Ici, avec notre définition des polynômes et des nombres de Bernoulli, on choisit de prendre $B_1 = -\frac{1}{2}$. Avec l'autre convention, la formule ne changerait que très peu : la première somme $\sum_{k=m}^{n-1} f(k)$ deviendrait $\sum_{k=m+1}^{n} f(k)$.

2.2 Sommation des séries alternées

Pour la sommation des séries alternées, il existe une formule analogue à la formule d'Euler-MacLaurin, appelée formule d'Euler-Boole, mais faisant intervenir d'autres polynômes : les polynômes d'Euler.

2.2.1 Polynômes d'Euler

Définition 2.3 (Polynômes d'Euler).
Les **polynômes d'Euler** sont définis par la fonction génératrice :

$$\frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n(x)}{n!} t^n$$

Propriété 2.6 (Premières valeurs).

- $E_0(x) = 1$
- $E_1(x) = x - \frac{1}{2}$
- $E_2(x) = x^2 - x$
- $E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$

Démonstration 2.6. Immédiat en utilisant la définition.

Propriété 2.7 (Dérivée).
On a $\begin{cases} E_0(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, {E_{n+1}}'(x) = (n+1)E_n(x) \end{cases}$.

Démonstration 2.7. Immédiat en utilisant la définition.

Définition 2.4 ($\widehat{E}_n$).
On définit les polynômes d'Euler « normalisés » par

$$\forall n \geq 1, \Big(\forall x \in [0,1], \widehat{E}_n(x) = E_n(x) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \widehat{E}_n(x+1) = -\widehat{E}_n(x)\Big).$$

Propriété 2.8. Les $\widehat{E}_n$ sont 2-périodiques.

Démonstration 2.8. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{E}_n(x+2) = -\widehat{E}_n(x+1) = -(-\widehat{E}_n(x)) = \widehat{E}_n(x)$$

Propriété 2.9. Les $\widehat{E}_n$ sont de moyenne nulle.

Démonstration 2.9.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \widehat{E}_n(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \widehat{E}_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \widehat{E}_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \widehat{E}_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \widehat{E}_n(x+1)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \widehat{E}_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \widehat{E}_n(x)\,\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

□

Sur le graphe 2.4 ci-après, on voit facilement la propriété d'intégrale nulle.

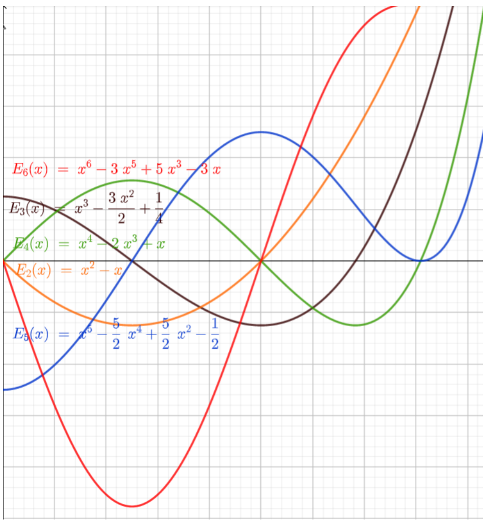


Figure 2.3 – Quelques polynômes d'Euler

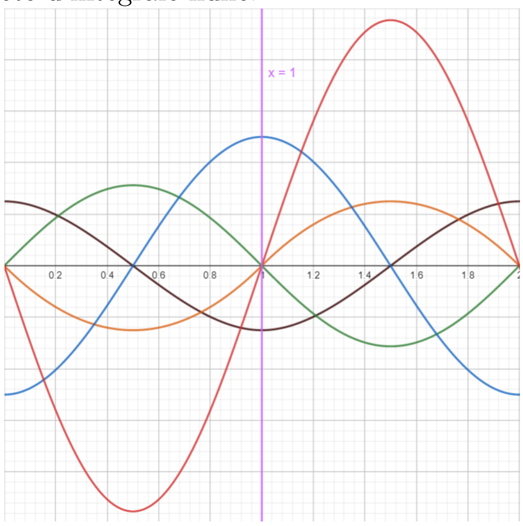


Figure 2.4 – Les polynômes périodiques d'Euler associés

2.2.2 Formule d'Euler-Boole

Voici la version de la formule d'Euler-MacLaurin adaptée à la sommation des séries alternées :

Théorème 2.10 (Formule d'Euler-Boole)**.**
$\forall f \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}), \forall d \geq 1, \forall m, n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$,

$$2\sum_{k=m}^{n-1}(-1)^{k+1}f(k+x) = \sum_{k=1}^{d}\frac{E_{k-1}(x)}{(k-1)!}\Big((-1)^n f^{(k-1)}(n) - (-1)^m f^{(k-1)}(m)\Big) - \int_m^n \frac{f^{(d)}(t)\widehat{E}_{d-1}(x-t)}{(d-1)!}\mathrm{d}t$$

.

Démonstration 2.10. Similaire à Euler-Maclaurin.

2.3 Justification des formules d'Euler-MacLaurin et d'Euler-Boole

Au-delà des quelques récurrences qui font que les formules précédentes sont valables, il faut bien évidemment aussi justifier la convergence de ces intégrales.

Proposition 2.11.
Si f est une fonction continue périodique de période $T > 0$ de moyenne nulle, *i.e.* $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors $g : t \mapsto \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ est aussi périodique, de même période T et il existe une (unique) constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $g + \alpha$ est de moyenne nulle.

Démonstration 2.11.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$g(t+T) = \int_0^{t+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{t+T} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \int_0^t f(x+T)\,\mathrm{d}x = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = g(t)$$

Ensuite, si F est une primitive de f et G est une primitive de F, alors, en posant $C = \frac{G(0)-G(T)}{T}$, on a que $F + C$ est une primitive de f de moyenne nulle : en effet,

$$\int_0^T (F+C)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T F(x)\,\mathrm{d}x + \frac{G(0)-G(T)}{T} \times T = G(T) - G(0) + G(0) - G(T) = 0$$

Il y a bien sûr unicité d'une telle primitive car si F_1 et F_2 sont deux telles primitives, alors il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $F_2 = F_1 + \alpha$ et donc $\int_0^T F_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T F_2(x)\,\mathrm{d}x + \alpha T$ d'où $0 = 0 + \alpha T$, ce qui implique que $\alpha = 0$ et donc $F_1 = F_2$.

□

Lemme 2.12. Une fonction continue périodique f de moyenne nulle est uniformément bornée.

Démonstration 2.12. Elle est majorée par $\sup\limits_{[0,T]} |f|$.

Remarque 2.3.
L'hypothèse de moyenne nulle est très importante : c'est elle qui fait que les primitives de cette fonction sont aussi périodiques et sans cette condition, non seulement les primitives ne seraient plus périodiques, mais dès la deuxième étape d'intégration, elles ne seraient tout simplement plus bornées !

Ici, les fonctions périodiques qui vont nous intéresser sont en fait les polynômes de Bernoulli et d'Euler que nous trouvons dans les deux formules d'Euler. Mais cela ne suffit pas encore pour justifier la convergence des intégrales que nous rencontrons. Pour autant, dans les exemples qui nous intéressent, les fonctions f des formules que nous utilisons vont être de la forme $f = f_N\eta$, où η est une fonction de lissage ; ainsi, elles ne nous poseront pas de problème quant à la convergence des intégrales, comme nous l'avons vu. En outre, f_N est une fonction polynomiale, donc, de par la nature de la fonction η, cela ne change rien non plus pour la convergence des intégrales. Enfin, on multiplie encore ces fonctions par les polynômes de Bernoulli ou d'Euler qui sont, comme leur nom l'indique, des fonctions polynomiales et ne posent pas de problème non plus.

2.4 Linéarité, stabilité, régularité

Mentionnons à présent quelques notions un peu plus générales concernant ce qu'on appelle les méthodes de sommation de suites (réelles).

Définition 2.5 (Méthode de sommation)**.**
Une **méthode de sommation** (réelle) est une fonction $M : \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ définie sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de l'ensemble des suites réelles, et qui contient le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ des suites dont la série converge. Elle attribue à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une valeur qui correspond à une valeur possible de la somme infinie de ses termes.

Exemple 2.1.
Par exemple, on parle de méthode de sommation :

* de Cesàro $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} S_k$, où $(S_k)_{k\geq 1}$ est la suite des sommes partielles.
* d'Abel $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(-nx)$, où x est un réel quelconque.

Définition 2.6 (Linéarité)**.**
On dit qu'une méthode de sommation M est **linéaire** lorsque son ensemble de départ admet une structure d'espace vectoriel (réel ou complexe), et qu'elle définit une application linéaire de cet espace dans l'ensemble d'arrivée.

Exemple 2.2.
Si M est une méthode de sommation linéaire qui attribue la valeur x à la somme infinie $1+2+3+4+5+\cdots$, alors elle doit nécessairement attribuer la valeur $2x$ à la somme $2+4+6+8+10+\cdots$. Autrement dit, si $M(u=(2^n)_{n\in\mathbb{N}}) = x$, alors $M(2u) = 2x$.

Définition 2.7 (Stabilité)**.**
On rappelle la notation « shift » $s : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. On dit alors qu'une méthode de sommation est **stable** lorsque $\mathcal{H}$ est stable par s, et ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, M(s^k(u)) = M(u) - \sum\limits_{i=0}^{k} u_i$.

Remarque 2.4. En particulier, ajouter 0 à une somme ne doit pas changer sa valeur.

Exemple 2.3.
Si M est une méthode de sommation stable qui attribue la valeur x à la somme infinie $1+2+3+4+5+\cdots$, alors elle doit nécessairement attribuer la même valeur x à la somme infinie $0+1+2+3+4+\cdots$ et la valeur $x+1$ à la somme infinie $1+1+2+3+4+\cdots$.

Définition 2.8 (Régularité)**.**
On dit qu'une méthode de sommation M est **régulière** lorsque, dès que la suite de sommes partielles $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite u converge vers une limite S, l'identité $M(u) = S$ est vérifiée. Autrement dit,

lorsqu'une série est déjà convergente et a donc une vraie valeur S, alors toute méthode de sommation régulière va attribuer la valeur S à cette somme.

Remarque 2.5.
C'est pour cette raison que l'on souhaite que le sous-espace vectoriel de définition de M contienne le sous-espace vectoriel des suites dont la série converge déjà au sens classique, afin que la méthode de sommation parvienne à sommer le plus de suites possible.

Exemple 2.4.
On sait que la série $S = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}$ converge vers la valeur 2 donc toute méthode de sommation M régulière est telle que $M((2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}) = 2$.

Théorème 2.13. *Toute méthode de sommation M linéaire, stable et régulière donne*

$$M((2^n)_{n\in\mathbb{N}}) = -1.$$

Démonstration 2.13.
On a

$$\begin{aligned} S = 1+2+4+8+16+\cdots &\overset{\text{linéarité}}{\Longrightarrow} 2S = 2+4+8+16+32+\cdots \\ &\overset{\text{stabilité}}{\Longrightarrow} 2S = 0+2+4+8+16+\cdots \\ &\overset{\text{linéarité}}{\Longrightarrow} 2S - S = -1+0+0+0+0+\cdots \\ &\overset{\text{régularité}}{\Longrightarrow} S = -1 \end{aligned}$$

et donc $S = -1$.

□

Théorème 2.14.
Il n'existe pas de méthode de sommation linéaire, stable et régulière qui attribue une valeur à

$$1+2+3+4+5+\cdots.$$

Démonstration 2.14.
Supposons par l'absurde qu'il existe une telle méthode M qui attribue la valeur S à la somme infinie $1+2+3+4+5+\cdots$. Alors, en utilisant les trois propriétés de régularité, stabilité et linéarité, on obtient

$$\begin{aligned} S - 2S + S &= 1+2+3+4+5+\cdots \\ &+0-2-4-6-8-\cdots \\ &+0+0+1+2+3+\cdots \\ &= 1+0+0+0+0+\cdots \end{aligned}$$

et on aurait donc $0 = 1$.

□

La comparaison de deux méthodes distinctes de sommation peut se faire à travers les notions suivantes :

Définition 2.9 (Compatibilité (ou consistance))**.**
Deux méthodes de sommation A et B sont dites **compatibles** (ou **consistantes**) lorsqu'elles assignent la même valeur à chaque série qu'elles somment toutes deux.

Définition 2.10.
Entre deux méthodes compatibles, si l'une parvient à sommer toutes les séries que l'autre parvient à sommer, elle est dite **plus forte**.

Chapitre 3

Ramanujan's tricks

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les « Ramanujan's tricks ».

3.1 Indépendance de η dans deux sommes alternées

Le but de cette section est de montrer que :

Théorème 3.1.

$$\forall \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+), \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \eta\left(\frac{k}{N}\right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

et

Théorème 3.2.

$$\forall \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+), \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} k\eta\left(\frac{k}{N}\right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

Démonstration 3.1.
On fixe $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ et on écrit :

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \eta\left(\frac{k}{N}\right) &= \sum_{k=0}^{2-1} \frac{E_k(0)}{k!}\left((-1)^{n-1}\frac{\mathrm{d^k}}{\mathrm{d}x^k}\eta\left(\frac{x}{N}\right)(n) + (-1)^1 \frac{\mathrm{d^k}}{\mathrm{d}x^k}\eta\left(\frac{\cdot}{N}\right)(1)\right) \\
&\quad - \int_1^n \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\eta\left(\frac{\cdot}{N}\right)(t)\frac{\widehat{E}_1(-t)}{1!}\mathrm{d}t \\
&= (-1)^{n-1}\eta\left(\frac{n}{N}\right) + (-1)^1\eta\left(\frac{1}{N}\right) + \frac{-1}{2}\left((-1)^{n-1}\frac{1}{N}\eta'\left(\frac{n}{N}\right) + (-1)^1\frac{1}{N}\eta'\left(\frac{1}{N}\right)\right) \\
&\quad + \int_1^n \frac{1}{N^2}\eta''\left(\frac{t}{N}\right)\frac{\widehat{E}_1(-t)}{1!}\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{(-1)^{n-1}\eta\left(\frac{n}{N}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} - 1 - \underbrace{\frac{1}{2N}(-1)^{n-1}\eta'\left(\frac{n}{N}\right)}_{\in \underset{N\to+\infty}{O}(1/N)} + \frac{1}{N}\underbrace{\int_1^{n/N}\eta''(x)\widehat{E}_1(-xN)\,\mathrm{d}x}_{\in \underset{N\to+\infty}{O}(1)}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\eta\left(\frac{k}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\eta\left(\frac{k}{N}\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}.$$

□

Démonstration 3.2.
On fixe $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. On va devoir calculer les dérivées de $f_N : x \mapsto x\eta\left(\frac{x}{N}\right)$. Alors

$$\begin{aligned}
f_N'(x) &= \frac{x}{N}\eta'\left(\frac{x}{N}\right)+\eta\left(\frac{x}{N}\right).\\
f_N''(x) &= \frac{x}{N^2}\eta''\left(\frac{x}{N}\right)+\frac{2}{N}\eta'\left(\frac{x}{N}\right)+0.\\
f_N'''(x) &= \frac{x}{N^3}\eta'''\left(\frac{x}{N}\right)+\frac{3}{N^2}\eta''\left(\frac{x}{N}\right)+0+0.
\end{aligned}$$

et on écrit :

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k\eta\left(\frac{k}{N}\right) &= \sum_{k=0}^{3-1}\frac{E_k(0)}{k!}\left((-1)^{n-1}f_N^{(k)}(n)+(-1)^1 f_N^{(k)}(1)\right)-\int_1^n f_N^{(3)}(t)\frac{\widehat{E}_2(-t)}{2!}\mathrm{d}t\\
&= (-1)^{n-1}n\eta\left(\frac{n}{N}\right)-1\eta\left(\frac{1}{N}\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\left((-1)^{n-1}\frac{n}{N}\eta'\left(\frac{n}{N}\right)+\eta\left(\frac{n}{N}\right)+(-1)^1 1\eta'\left(\frac{1}{N}\right)+(-1)^1\eta\left(\frac{1}{N}\right)\right)\\
&\quad +0+\int_1^n\left(\frac{t}{N^3}\eta'''\left(\frac{t}{N}\right)+\frac{3}{N^2}\eta''\left(\frac{t}{N}\right)\right)\frac{\widehat{E}_2(-t)}{2!}\mathrm{d}t\\
&= \underbrace{(-1)^{n-1}n\eta\left(\frac{n}{N}\right)-\frac{n}{2N}(-1)^{n-1}\eta'\left(\frac{n}{N}\right)-\frac{1}{2}\eta\left(\frac{n}{N}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}\underbrace{-\eta\left(\frac{1}{N}\right)+\frac{1}{2}\eta\left(\frac{1}{N}\right)}_{=-\frac{1}{2}}\\
&\quad +\frac{1}{2N}\int_1^{n/N}(x\eta'''(x)+3\eta''(x))\widehat{E}_2(-xN)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que pour la convergence établie dans la démonstration 2.5, ligne 2.1, on a bien qu'en faisant tendre $n\to+\infty$ puis $N\to+\infty$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k\eta\left(\frac{k}{N}\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}-\frac{1}{4}.$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}k\eta\left(\frac{k}{N}\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{4}.$$

□

3.2 Ramanujan tricks

Ramanujan se permet de réaliser trois opérations : en notant

$$\begin{aligned}
A &= 1-1+1-1+1-1+\cdots,\\
B &= 1-2+3-4+5-6+\cdots,\\
C &= 1+2+3+4+5+6+\cdots,
\end{aligned}$$

il écrit que

$$1 - A = A, \tag{3.1}$$
$$1 + B + A = -B, \tag{3.2}$$
$$4C = C - B. \tag{3.3}$$

Il s'agit d'étudier ces « tricks ». Dans toute la suite, on note alors

$$A = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \eta\left(\frac{k}{N}\right),$$
$$B = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} k\eta\left(\frac{k}{N}\right),$$
$$C = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} k\eta\left(\frac{k}{N}\right) - \int_0^{+\infty} t\eta\left(\frac{t}{N}\right) \mathrm{d}t.$$

3.2.1 L'équation $1 - A = A$

Théorème 3.3 (L'équation $1 - A = A$)**.**
Avec les notations précédentes, on a $1 - A = A$ (cf. 3.1).

Démonstration 3.3.
Ce que Ramanujan a en tête, c'est

$$\begin{array}{ccccc} & -A & = & & -1+1-1+1-1\cdots \\ 1 & -A & = & 1 & -1+1-1+1-1\cdots = A, \end{array}$$

comme si $-A$ était A en enlevant le premier terme. A-t-on le droit d'enlever le premier terme ? Dans les considérations ci-avant, on cherche à regarder

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \eta\left(\frac{k-1}{N}\right).$$

On reprend les mêmes calculs qu'en 3.1. On a :

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \eta\left(\frac{k-1}{N}\right) &= \sum_{k=0}^{2-1} \frac{E_k(0)}{k!}\left((-1)^{n-1}\left(\eta\left(\frac{\cdot - 1}{N}\right)\right)^{(k)}(n) + (-1)^0\left(\eta\left(\frac{\cdot - 1}{N}\right)\right)^{(k)}(1)\right) \\
&\quad - \int_0^n \left(\eta\left(\frac{\cdot - 1}{N}\right)\right)^{(2)}(t)\frac{\widehat{E}_1(-t)}{1!}\mathrm{d}t \\
&= (-1)^{n-1}\eta\left(\frac{n-1}{N}\right) - \eta\left(\frac{0}{N}\right) - \frac{1}{2}\left((-1)^{n-1}\frac{1}{N}\eta'\left(\frac{n-1}{N}\right) - \frac{1}{N}\eta'\left(\frac{0}{N}\right)\right) \\
&\quad + \int_1^n \frac{1}{N^2}\eta''\left(\frac{t-1}{N}\right)\frac{\widehat{E}_1(-t)}{1!}\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{(-1)^{n-1}\eta\left(\frac{n-1}{N}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} - 1 - \underbrace{\frac{1}{2N}(-1)^{n-1}\eta'\left(\frac{n-1}{N}\right)}_{\in \underset{N\to+\infty}{O}(1/N)} \\
&\quad + \frac{1}{N}\underbrace{\int_1^{\frac{n-1}{N}} \eta''(x)\widehat{E}_1(-xN-1)\,\mathrm{d}x}_{= \underset{N\to+\infty}{O}(1)}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\eta\left(\frac{k-1}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\eta\left(\frac{k-1}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

que l'on peut récrire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\eta\left(\frac{k}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

et finalement récrire :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\eta\left(\frac{k}{N}\right)}_{\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} A} = \underbrace{1-\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\eta\left(\frac{k}{N}\right)}_{\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1-A}.$$

D'où $1-A=A$, *i.e.* 3.1 est vérifiée. Donc $A=\frac{1}{2}$.

□

3.2.2 L'équation $1+B+A=-B$

Théorème 3.4 (L'équation $1+B+A=-B$)**.**
Avec les notations précédentes, $1+B+A=-B$ *(cf. 3.2).*

Démonstration 3.4.
On cherche à calculer $A+B$ donc à écrire

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\eta\left(\frac{k}{N}\right)+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}k\tilde{\eta}\left(\frac{k}{N}\right).$$

Ces deux sommes étant convergentes, et ce pour tout η, on peut 1) choisir le même η, 2) librement les manipuler. On peut donc écrire

$$A+B=\sum_{k=1}^{+\infty}((-1)^{k+1}+(-1)^{k+1}k)\eta\left(\frac{k}{N}\right).$$

Donc

$$A+B=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}(k+1)\eta\left(\frac{k}{N}\right).$$

En décalant les indices, on se retrouve avec

$$A+B=\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k}k\eta\left(\frac{k-1}{N}\right).$$

Donc

$$1+A+B=-\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}k\eta\left(\frac{k-1}{N}\right).$$

Il s'agit donc de montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}k\eta\left(\frac{k-1}{N}\right)=B=\frac{1}{4}.$$

Pour le démontrer, on va donc utiliser la formule d'Euler-Boole... On écrit (en introduisant localement un nouveau $f_N(x)=x\eta\left(\frac{k-1}{N}\right)$) :

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k\eta\left(\frac{k-1}{N}\right) &= \sum_{k=0}^{3-1}\frac{E_k(0)}{k!}\left((-1)^{n-1}f_N^{(k)}(n)+(-1)^1 f_N^{(k)}(1)\right)-\int_1^n f_N^{(3)}(t)\frac{\widehat{E}_2(-t)}{2!}\mathrm{d}t\\
&= (-1)^{n-1}n\eta\left(\frac{n-1}{N}\right)-1\eta\left(\frac{0}{N}\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\left((-1)^{n-1}\frac{n}{N}\eta'\left(\frac{n-1}{N}\right)+\eta\left(\frac{n-1}{N}\right)+(-1)^1 1\eta'\left(\frac{0}{N}\right)+(-1)^1\eta\left(\frac{0}{N}\right)\right)\\
&\quad +0+\int_1^n\left(\frac{t}{N^3}\eta'''\left(\frac{t-1}{N}\right)+\frac{3}{N^2}\eta''\left(\frac{t-1}{N}\right)\right)\frac{\widehat{E}_2(-t)}{2!}\mathrm{d}t\\
&= \underbrace{(-1)^{n-1}n\eta\left(\frac{n-1}{N}\right)-\frac{n}{2N}(-1)^{n-1}\eta'\left(\frac{n-1}{N}\right)-\frac{1}{2}\eta\left(\frac{n-1}{N}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}\underbrace{-\eta(0)+\frac{1}{2}\eta(0)}_{=-\frac{1}{2}}\\
&\quad +\frac{1}{2N}\int_1^{\frac{n-1}{N}}(x\eta'''(x)+3\eta''(x))\widehat{E}_2(-xN-1)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que pour la convergence établie dans la démonstration 2.5, ligne 2.1, on a bien qu'en faisant tendre $n\to+\infty$ puis $N\to+\infty$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k\eta\left(\frac{k-1}{N}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}-\frac{1}{4}.$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}k\eta\left(\frac{k-1}{N}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{1}{4}.$$

Donc, en fait, on a bien que $1+A+B=-B$, *i.e.* l'équation 3.2 est vérifiée et $B=\frac{1}{4}$.

□

3.2.3 L'équation $4C=C-B$

Pour la suite, énonçons un théorème.

Théorème 3.5 (Invariance par dilatation)**.**

$$\forall a\in\mathbb{R}_*^+,\sum_{k=1}^{+\infty}k\eta\left(\frac{ak}{N}\right)-\int_0^{+\infty}t\eta\left(\frac{ak}{N}\right)\mathrm{d}t\xrightarrow[N\to+\infty]{}-\frac{1}{12}.$$

Démonstration 3.5. En regardant la formule d'Euler-Maclaurin, le fait que N soit un entier n'influe en rien sur le résultat. $\frac{a}{N}$ tend vers 0 quand $N\to+\infty$ donc c'est terminé.

Théorème 3.6 (L'équation $4C = C - B$).
Avec les notations précédentes, $4C = C - B$ (cf. 3.3).

Démonstration 3.6.
Notons
$$C_N = \sum_{k=1}^{+\infty} k\eta\left(\frac{k}{N}\right) - \int_0^{+\infty} t\eta\left(\frac{t}{N}\right) \mathrm{d}t.$$
On sait d'ores et déjà que $(C_N)_N$ converge, disons vers C. J'ai alors
$$\begin{aligned}
4C_{N/2} &= 2\sum_{k=1}^{+\infty} 2k\eta\left(\frac{k}{N/2}\right) - 2\int_0^{+\infty} 2t\eta\left(\frac{t}{N/2}\right) \mathrm{d}t \\
&= 2\sum_{k=1}^{+\infty} 2k\eta\left(\frac{2k}{N}\right) - 2\int_0^{+\infty} 2t\eta\left(\frac{2t}{N}\right) \mathrm{d}t \\
&= 2\sum_{k=1}^{+\infty} 2k\eta\left(\frac{2k}{N}\right) - \int_0^{+\infty} u\eta\left(\frac{u}{N}\right) \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}
C_N - 4C_{N/2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\eta\left(\frac{k}{N}\right) - \int_0^{+\infty} t\eta\left(\frac{t}{N}\right) \mathrm{d}t - 2\sum_{k=1}^{+\infty} 2k\eta\left(\frac{2k}{N}\right) + \int_0^{+\infty} u\eta\left(\frac{u}{N}\right) \mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1)\eta\left(\frac{2k-1}{N}\right) + 2k\eta\left(\frac{2k}{N}\right) - 4k\eta\left(\frac{2k}{N}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1)\eta\left(\frac{2k-1}{N}\right) - 2k\eta\left(\frac{2k}{N}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} k\eta\left(\frac{k}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} B.
\end{aligned}$$
Donc
$$C - 4C = B \text{ i.e. } C - B = 4C,$$
donc l'équation 3.3 est vérifiée. Donc $B = -3C$, *i.e.* $C = -\dfrac{1}{12}$.

□