

Décomposition de FITTING

Thomas CHEN

Soit u dans $\mathcal{L}(E)$ avec E un K -espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que la suite $(\ker u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante jusqu'à un rang p puis devient constante.
2. Que dire de la suite $(\operatorname{Im} u^k)_{k \in \mathbb{N}}$?
3. Montrer qu'il existe un couple (F, G) de sous-espaces supplémentaires de E tous les deux stables par u tel que u induise sur F un endomorphisme nilpotent et sur G un automorphisme.
4. Montrer l'unicité de ce couple (F, G) .

Corrigé :

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \ker(u^k)$. Alors

$$u^{k+1}(x) = u(u^k(0)) = u(0) = 0$$

donc $x \in \ker(u^{k+1})$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$.

Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$. On va montrer par récurrence que $\forall i \in \mathbb{N}^*, \ker(u^k) = \ker(u^{k+i})$.

- Initialisation. Pour $i = 1$, c'est vrai.
- Hérédité. Supposons qu'il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ker(u^k) = \ker(u^{k+i})$. On a la chaîne d'inclusion

$$\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1}) \subset \dots \subset \ker(u^{k+i}).$$

L'égalité $\ker(u^k) = \ker(u^{k+i})$ entraîne que ces inclusions sont des égalités. On va montrer que $\ker(u^{k+i}) = \ker(u^{k+i+1})$. L'inclusion $\subset$ est déjà obtenue. Montrons l'autre. Soit donc $x \in \ker(u^{k+i+1})$. Alors $0 = u^{k+i+1}(x) = u^{k+i}(u(x))$ donc $u(x) \in \ker(u^{k+i}) = \ker(u^{k+i-1})$ car $i \neq 0$. On en déduit donc que

$$0 = u^{k+i-1}(u(x)) = u^{k+i}(x)$$

donc $x \in \ker(u^{k+i})$. Ainsi, on a bien l'égalité souhaitée.

- Conclusion. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\ker(u^{k+i}) = \ker(u^{k+i+1})$.

Avec ce résultat, on peut maintenant conclure. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_k = \dim(\ker(u^k))$. Comme E est de dimension finie, disons n sa dimension, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_k \leq n$ et

$$d_k = d_{k+1} \iff \ker(u^k) = \ker(u^{k+1}).$$

De plus, la suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Supposons que pour tout $k \leq n$, $d_k < d_{k+1}$. Alors $d_{k+1} - d_k > 0$ i.e. $d_{k+1} - d_k \geq 1$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n d_{k+1} - d_k = d_{n+1} - d_0 \geq \sum_{k=0}^n 1 = n + 1.$$

Comme $d_0 = \dim(\ker(u^0)) = \dim(\ker(\operatorname{id})) = 0$, on a $\dim(\ker(u^{n+1})) \geq n + 1$. Ceci est une contradiction donc il existe $k \leq n$ tel que $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$.

Notons $p = \min(k \in \mathbb{N} : \ker(u^k) = \ker(u^{k+1}))$. Alors par minimalité de p , $(\ker(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante jusqu'au rang p puis stationne.

2. On a

$$\ker(u^0) \subsetneq \ker(u^1) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(u^p) = \ker(u^{p+1}) = \cdots$$

et

$$d_0 < d_1 < \cdots < d_p = d_{p+1} = \cdots$$

D'une part, on a facilement

$$\operatorname{Im}(u^0) \supset \operatorname{Im}(u^1) \supset \cdots \supset \operatorname{Im}(u^p) \supset \cdots$$

d'autre part, par le théorème du rang, puisque

$$n = \dim(\ker(u^p)) + \dim(\operatorname{Im}(u^p)),$$

on a, en notant $\delta_k = \dim(\operatorname{Im}(u^k))$ pour tout k ,

$$\delta_0 = n > \delta_1 > \cdots > \delta_p = \delta_{p+1} = \cdots$$

Par dimension, on a donc les inclusions strictes et les égalités suivantes :

$$\operatorname{Im}(u^0) \supsetneq \operatorname{Im}(u^1) \supsetneq \cdots \supsetneq \operatorname{Im}(u^p) = \operatorname{Im}(u^{p+1}) \cdots$$

3. On montre un lemme.

$$E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u) \iff \ker(u) = \ker(u^2).$$

Démonstration. $\boxed{\implies}$ On a déjà $\ker(u) \subset \ker(u^2)$. Soit $x \in \ker(u^2)$. Alors $u(x) \in \ker(u)$ mais $u(x) \in \operatorname{Im}(u)$. On a donc $u(x) \in \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$ donc $x \in \ker(u)$.

$\boxed{\impliedby}$ Par le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u))$. Il suffit alors de montrer que $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$. Soit donc $x \in \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u)$. Il existe alors $a \in E$ tel que $u(a) = x$. Or $u(x) = 0$ donc $u(u(a)) = 0$ i.e. $a \in \ker(u^2) = \ker(u)$. On a donc $x = u(a) = 0$.

□

Concluons. On a $\ker(u^p) = \ker(u^{2p})$. Par le lemme, on a bien

$$E = \ker(u^p) \oplus \operatorname{Im}(u^p).$$

Posons $F = \ker(u^p)$ et $G = \operatorname{Im}(u^p)$. Comme F et G sont stables par u , on peut définir u_F (resp. u_G) l'induit de u sur F (resp. G). Montrons que u_F est nilpotente et u_G est inversible. On a

$$\forall x \in F, u_F^p(x) = u^p(x) = 0$$

car $x \in F = \ker(u^p)$ donc $u_F^p = 0_{\mathcal{L}(F)}$ et u_F est nilpotente. On a aussi

$$\forall x \in G, u_G(x) = 0 \iff u(x) = 0 \iff x \in \ker(u).$$

Comme $\ker(u) \subset \ker(u^p) = F$, $\ker(u) \cap G \subset F \cap G = \{0\}$ donc $x \in \ker(u_G) \implies x \in \ker(u) \cap G = \{0\}$. Ainsi u_G est injective donc bijective puisque c'est un endomorphisme de G qui est de dimension finie.

4. Soit un tel couple. Montrons que $F = \ker(u^p)$ et $G = \operatorname{Im}(u^p)$. On note encore u_F et u_G les induits. Soit $x \in E$. On écrit $x = f + g$ où $(f, g) \in F \times G$. Alors $u^p(x) = u_F^p(f) + u_G^p(g)$ et

$$\begin{aligned} x \in \ker(u^p) &\iff 0 = \underbrace{u_F^p(f)}_{=0} + u_G^p(g) \\ &\iff 0 = u_G^p(g) \\ &\iff g = 0 \\ &\iff x = f \in F \end{aligned}$$

donc $\ker(u^p) = F$. Par le théorème du rang, on a donc $\dim(\operatorname{Im}(u^p)) = \dim(G)$. Comme u_G^p est bijective, $G = \operatorname{Im}(u_G^p) \subset \operatorname{Im}(u^p)$ donc par dimension, $G = \operatorname{Im}(u^p)$.