Prop (formule du transfert) : Soit X VAR discrète ou à densité, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $\varphi(X)$ est intégrable ssi

$$\begin{cases} \sum_{x \in S_X} |\varphi(x)| \, \mathbb{P}(X = x) < +\infty, & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| \, f_X(x) \, dx < +\infty, & \text{si } X \text{ est à densité.} \end{cases}$$

et dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \begin{cases} \sum_{x \in S_X} \varphi(x) \, \mathbb{P}(X = x), & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, f_X(x) \, dx, & \text{si } X \text{ est à densité} \end{cases}$$

Dém: · Soit X VAR discrète. Alors $\varphi(X)$ est encore une VAR discrète.

Vérifions d'abord l'énoncé sur l'intégrabilité.

$y \in \mathbb{R}$. $\quad \mathbb{P}(\varphi(X) = y) = \mathbb{P}(X \in \varphi^{-1}(\{y\}))$.

$$= \sum_{x \in \varphi^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x : \varphi(x) = y} \mathbb{P}(X = x)$$

$$= \sum_{x \in \underbrace{S_X}_{\text{ensemble des atomes de } X.}} \mathbb{P}(X = x) \, \mathbb{1}_{\{\varphi(x) = y\}}$$

On applique Fubini positif.

$$\sum_{y \in S_Y} |y| \, \mathbb{P}(\varphi(X) = y) = \sum_{y \in S_Y} |y| \sum_{x \in S_X} \mathbb{P}(X = x) \, \mathbb{1}_{\{\varphi(x) = y\}}$$

$$= \sum_{y \in S_Y} \sum_{x \in S_X} |y| \, \mathbb{P}(X = x) \, \mathbb{1}_{\{\varphi(x) = y\}}$$

$= \varphi(x)$

Fubini ≥ 0

$$= \sum_{x \in S_X} |\varphi(x)| \, \mathbb{P}(X = x) \underbrace{\sum_{y \in S_Y} \mathbb{1}_{\{\varphi(x) = y\}}}_{= 1}$$

$$= \sum_{x \in S_X} |\varphi(x)| \, \mathbb{P}(X = x)$$

<u>Conclusion :</u> $\varphi(X)$ intégrable ssi $\sum_{x \in S_X} |\varphi(x)| \, \mathbb{P}(X = x) < +\infty$

Dans ce cas, on peut appliquer le théorème de Fubini (version signée cette fois) pour obtenir par le m calcul sans les valeurs absolues que :

$$\underbrace{\sum_{y \in S_Y} y \, \mathbb{P}(\varphi(X) = y)}_{\mathbb{E}[\varphi(X)]} = \sum_{y \in S_Y} y \sum_{x \in S_X} \mathbb{P}(X = x) \, \mathbb{1}_{\{\varphi(x) = y\}}$$

// déf

Fubini grâce à la convergence absolue $\rightarrow$

$$= \sum_{y \in S_Y} \sum_{x \in S_X} \varphi(x) \, \mathbb{P}(X = x) \, \mathbb{1}_{\{\varphi(x) = y\}}$$

$$= \sum_{x \in S_X} \varphi(x) \, \mathbb{P}(X = x).$$

expression plus simple pour $\mathbb{E}[\varphi(X)]$ que celle donnée par la définition

- Voir dans le poly la preuve pour le cas à densité.

Application de la formule de transfert.

Prop (linéarité de l'espérance) : $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et X VAR discrète ou à densité avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ positives} \\ \text{ou bien} \\ \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ tq } \varphi_1(X) \text{ et } \varphi_2(X) \text{ soient intégrables} \end{array} \right.$$

Alors : $\mathbb{E}[\varphi_1(X) + \varphi_2(X)] = \mathbb{E}[\varphi_1(X)] + \mathbb{E}[\varphi_2(X)]$

Dém : facile avec la formule de transfert. (délicat sans cette formule).

Cas où X VAR discrète :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\varphi_1 + \varphi_2)(X)] &= \sum_{x \in S_X} (\varphi_1 + \varphi_2)(x)\, \mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{x \in S_X} \varphi_1(x)\, \mathbb{P}(X = x) + \sum_{x \in S_X} \varphi_2(x)\, \mathbb{P}(X = x) \\ &= \mathbb{E}[\varphi_1(X)] + \mathbb{E}[\varphi_2(X)]. \end{aligned}$$

II. Moments et quantités associées.

$$\mathbb{E}[X^k] = \begin{cases} \sum_{x \in S_X} x^k \, \mathbb{P}(X=x) \\ \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x)\,dx \end{cases}$$

Déf : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et X une VAR (discrète ou à densité)

Si X^k est intégrable (ou positive), on appelle $\boxed{\text{moment d'ordre } k \text{ / } k\text{-ième moment}}$ la quantité $\mathbb{E}[X^k]$

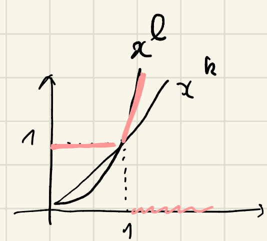
- La suite des moments $(\mathbb{E}[X^k])_{k \in \mathbb{N}}$ permet de décrire certains aspects de la loi mais attention, elle ne caractérise pas toujours la loi de X.

  $\begin{cases} \mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k] \ \forall k \\ \text{et néanmoins } X \overset{\text{loi}}{\neq} Y \end{cases}$

- Les deux premiers moments sont les plus importants.

Lemme : Soit $k < \ell \in \mathbb{N}^*$. Si X admet un moment d'ordre ℓ ($\mathbb{E}[|X|^\ell] < +\infty$), alors X admet un moment d'ordre k ($\mathbb{E}[|X|^k] < +\infty$).

Dém : $x \in \mathbb{R}$



$$|x|^k \leq \max\{1, |x|^\ell\}$$

donc $|x|^k \leq 1 + |x|^\ell$ donc $|X|^k \leq 1 + |X|^\ell$

donc $\mathbb{E}[|X|^k] \leq \mathbb{E}[1 + |X|^\ell] = 1 + \mathbb{E}[|X|^\ell]$

donc X admet un moment d'ordre k.

$< +\infty$ si X admet un moment d'ordre ℓ

1. Le premier moment : l'espérance.

C'est le moment le plus important. L'espérance d'une VAR représente sa moyenne pondérée ; on dit que la VAR X intégrable est centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$;

on appelle $\underbrace{X - \mathbb{E}(X)}$ la VAR centrée associée à X

en effet, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]$

$$= \mathbb{E}(X) - \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}(X)]}$$

$$= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$$

2. Le second moment et la variance.

le second moment est $\mathbb{E}[X^2]$: il est toujours défini car $X^2 \geq 0$ mais il peut être infini.

Déf : Soit X variable aléatoire de carré intégrable. On appelle variance de X et on note $\mathrm{Var}\, X$ la quantité

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) := \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{<+\infty} - \underbrace{\mathbb{E}[X]^2}_{<+\infty} < +\infty}$$

(car second moment fini $\Rightarrow$ premier moment fini)

Lemme : Soit X VAR de carré intégrable.

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

≥ 0 ?

En particulier, $\boxed{\mathrm{Var}(X) \geq 0}$.

Dém : on développe $(X - \mathbb{E}[X])^2 = X^2 - 2\mathbb{E}[X]X + \mathbb{E}[X]^2$

donc
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2\mathbb{E}[X]X] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]^2] \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\end{aligned}$$

Interprétation de la variance, elle mesure l'étalement des valeurs de X autour de son espérance.

Si X a une dimension, $\mathrm{Var}(X)$ a cette dimension au carré : une quantité de même dimension que X est l'écart type σ défini par $\boxed{\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$.

Déf : Soit X VAR de carré intégrable (non constante p.s.). On appelle variable aléatoire centrée réduite associée à X la VAR

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X = x) < 1}$

centrée : $\mathbb{E}[\cdot] = 0$ — réduite : $\mathrm{Var}(\cdot) = 1$

$$\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}\, X}}$$

pour ne pas diviser par 0

elle est en effet centrée : $\mathbb{E}\left[\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}\, X}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}\, X}} \underbrace{\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]}_{=0} = 0$

réduite : $\mathrm{Var}\left(\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var} X}}\right) = \frac{1}{\mathrm{Var}\, X} \mathrm{Var}(X - \mathbb{E}[X]) = \frac{1}{\mathrm{Var}(X)} \mathrm{Var}(X) = 1$.

justification à suivre.

$\mathrm{Var}(aX) = a^2\, \mathrm{Var}(X)$

Prop : Soit X VAR de carré intégrable.

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\, \mathrm{Var}(X)$

et en particulier $\mathrm{Var}(X+b) = \mathrm{Var}(X)$

2. $\mathrm{Var}(X) = 0$ ssi $\exists x \in \mathbb{R},\ X \sim \delta_x$ (càd $X = x$ (p.s.)) $\mathbb{P}(X=x) = 1$.

presque sûrement = avec proba 1.

Dém : 1. Soit X VAR de carré intégrable. Alors $aX+b$ est encore de carré intégrable, et

$(aX+b)^2 = a^2 X^2 + 2ab X + b^2$

$$\mathbb{E}[aX+b] = a\,\mathbb{E}[X] + b$$

$$\mathbb{E}[(aX+b-\mathbb{E}[aX+b])^2] = \mathbb{E}[(a(X-\mathbb{E}[X]))^2]$$

$$= a^2\, \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = a^2\, \mathrm{Var}(X).$$

$\mathbb{E}[(aX+b-\mathbb{E}[aX+b])^2] = \mathrm{Var}(aX+b)$

2. On ne fait que la réciproque qui est le sens facile.

On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tq $X \sim \delta_x$ (loi de Dirac en x) : cela signifie que $X = x$ p.s. donc $X^k = x^k$ p.s. d'où $\mathbb{E}[X^k] = x^k$.

En particulier $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = x^2 - (x)^2 = 0$. $\square$

Pour finir, une jolie propriété qui lie espérance et variance.

Prop: Soit X VAR de carré intégrable. Alors

$$\mathrm{Var}(X) = \min_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[(X-a)^2],$$

$a \mapsto \mathbb{E}[(X-a)^2]$

et le minimum est atteint en un unique point $a = \mathbb{E}(X)$.

(la constante qui approche le mieux la variable aléatoire au sens du "risque quadratique" est l'espérance de X)

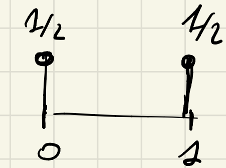
Dém: $(X-a)^2 = X^2 - 2aX + a^2$

$$\mathbb{E}[(X-a)^2] = \mathbb{E}(X^2) - 2a\,\mathbb{E}(X) + a^2$$

$$= \underbrace{(a-\mathbb{E}(X))^2}_{\geq 0 \text{ avec } = 0 \text{ ssi } \mathbb{E}(X) = a} \underbrace{- \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X^2)}_{\to \mathrm{Var}(X).}$$

donc $\mathbb{E}[(X-a)^2] \geq \mathrm{Var}(X)$ avec égalité ssi $a = \mathbb{E}(X)$.

Corollaire: Soit X tq $\mathbb{P}(X \in [0,1]) = 1$.



Alors $Var(X) \leq 1/4$ avec égalité ssi

$X \sim Ber(1/2)$

Dém: $Var(X) \leq \mathbb{E}[(X - \overset{\overset{\forall a}{a}}{1/2})^2]$ $\overset{\text{car } X \in [0,1]}{\leq} \frac{1}{4}$

↑ Prop. précédente

$Z \sim Unif(0,1)$

$\mathbb{E}[Z] = 1/2$

$\mathbb{E}[Z^2] = \frac{1}{3}$

$Var(Z) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$ $<$

$Y \sim Ber(1/2)$

$\mathbb{E}[Y] = 1/2$

$\mathbb{E}[Y^2] = 1/2$

$Var(Y) = 1/2 - (1/2)^2 = 1/4$

avec égalité dans la première inégalité ssi $\boxed{\frac{1}{2} = \mathbb{E}[X]}$

et égalité ds la seconde inégalité ssi $(X - 1/2)^2 = 1/4$ p.s. càd $|X - 1/2| = 1/2$ p.s.

càd $X \in \{0, 1\}$ ps

Donc si X vérifie les deux égalités $X \in \{0,1\}$ ps $\Rightarrow X \sim Ber(p)$

et $\underset{p}{\mathbb{E}[X]} = 1/2$

III. Fonction génératrice des moments.

Déf : Soit X VAR. On appelle fonction génératrice des moments de la VAR X la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto \varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] \in]0, +\infty]$

toujours défini

car. ≥ 0

Prop : Supposons qu'il existe $t_0 > 0$ tq $\varphi_X(t) < +\infty$, $\forall t \in]-t_0, t_0[$.

Alors pour tout $t \in]-t_0, t_0[$,
$$\varphi_X(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X^k) \frac{t^k}{k!}$$
et le rayon de convergence de la série entière de droite est $\geq t_0$; ds ce cas, φ_X admet des dérivées à tout ordre sur $]-t_0, t_0[$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
$$\varphi_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}[X^k].$$

$$\varphi_X'(t) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[X^{k+1}] \frac{t^k}{k!}$$

$$\frac{k\, t^{k-1}}{k!} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

III. Fonction génératrice des moments.

$$\varphi_X : \mathbb{R} \to]0,+\infty] \quad \text{est la fonction génératrice des moments de la VAR } X$$
$$t \mapsto \mathbb{E}[e^{tX}]$$

$\geqslant 0$

$= 1 + \mathbb{E}(X)\, t + \mathbb{E}(X^2)\, \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

Prop : S'il existe $t_0 > 0$ tq $\forall t \in]-t_0, t_0[$, $\varphi_X(t) < +\infty$ alors $\forall t \in]-t_0, t_0[$,

$$\boxed{\varphi_X(t) = \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{E}(X^k) \frac{t^k}{k!}}$$

et le rayon de cvg de la série du membre de droite est $\geqslant t_0$. Dans ce cas, φ_X admet des dérivées à tt ordre sur $]-t_0, t_0[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]-t_0, t_0[$,

dérivée n-ième de φ_X

$$\varphi_X^{(n)}(t) = \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{E}[X^{n+k}] \frac{t^k}{k!}$$

En particulier,

$$\boxed{\varphi_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]}$$

n° moment de X

(d'où le nom fonction génératrice des moments)

Exemple : ① $X \sim \mathcal{N}_1(\underset{\smile}{0}, \underline{1})$ loi normale / gaussienne $\underbrace{\text{centrée}}_{\substack{0 \\ \parallel \\ \mathbb{E}(X)}}$ $\underbrace{\text{réduite}}_{\substack{1 \\ \parallel \\ \mathrm{Var}(X)}}$.

Calculons sa fonction génératrice des moments.

$t \in \mathbb{R}$. $\underset{\substack{\parallel \\ \varphi_X(t)}}{} \mathbb{E}[\underbrace{e^{tX}}_{\geq 0}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Formule de} \\ \text{transfert}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$$= \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx}_{y = x - t} \Big) \times e^{\frac{t^2}{2}} = e^{t^2/2}$$

$$\parallel$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$ car on reconnaît la densité gaussienne.

On veut maintenant calculer les moments au moyen du thm précédent :

$$\varphi_X(t) = e^{t^2/2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DSE}}}{=} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k \frac{1}{k!} \;\text{=}\; \sum_{k \geq 0} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \times \underbrace{\frac{(2k)!}{2^k \times k!}}_{\substack{\parallel \\ \mathbb{E}[X^{2k}]}}$$

$e^z = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}$

on utilise le thm à cet endroit

on retrouve directement l'expression factorisée des moments (voir TD4)

et $\mathbb{E}[X^{2k+1}] = 0$

Lemme : Si la fonction génératrice des moments φ_X de la VAR X vérifie

$$\varphi_X(t) = 1 + at + b\frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad \text{alors}$$

(DL au voisinage de 0)

X est de carré intégrable et $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathbb{E}(X^2) = b$.

Exemple 2 : utiliser le lemme précédent pour calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ lorsque $X \sim \mathcal{P}_0(\lambda)$. [$\varphi_X(t)$, DL en 0 à l'ordre 2].

$t \in \mathbb{R}$. $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k\geq 0} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k\geq 0} \frac{(e^t\lambda)^k}{k!}}_{e^{(e^t\lambda)}}$

$$= e^{\lambda(e^t-1)}$$

Mais $e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ donc $e^{\lambda(e^t-1)} = e^{\lambda\left(t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)}$

$$= 1 + \lambda\left(t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right) + \frac{(\lambda t)^2}{2} + o(t^2)$$

$$= 1 + \underset{\mathbb{E}(X)}{\lambda} t + \underset{\mathbb{E}(X^2)}{(\lambda+\lambda^2)} \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$