Intégrale de Gauss

Thomas Chen

Le calcul de l'intégrale de Gauss est extrêmement classique. Beaucoup de sujets et d'exercices font admettre la valeur de cette intégrale. On va le démontrer via le théorème de convergence dominée.

Exercice 1. On souhaite montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$. En considérant $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\mathrm{d}t$ et $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$, retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss.

Corrigé : Déjà, il est clair que $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,1] \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux. De plus,

$$\forall t \in [0,1], x \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)\ ,\ \forall x \geq 0, \forall t \in [0,1], \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2+1)}.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $\forall x \geq 0, -2xe^{-x^2(t^2+1)} \leq -2xe^{-x^2}$. Or, $\forall x \geq 0, x \leq e^{x^2}$ donc la dérivée partielle en x de f est dominée par 2. Par le théorème de dérivation sous le signe intégral,

$$\forall x \geq 0, F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)}\mathrm{d}t = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\mathrm{d}t \underset{u=xt}{=} -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u = -2f'(x)f(x).$$

En intégrant, on a donc

$$\forall x \geq 0, F(x) - F(0) = -f^2(x) + f^2(0)$$

ce qui donne $\forall x \geq 0, F(x) = \frac{\pi}{4} - f^2(x)$. Par ailleurs,

$$\forall x \geq 0, 0 \leq F(x) \leq e^{-x^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

car f est positive. En réalisant le changement de variable $u = x/\sqrt{2}$, on a donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

et par parité, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$