Intégrale de Fresnel

Thomas Chen

L'intégrale de Fresnel est moins étudiée mais l'étude reste très intéressante. Elle fait aussi travailler l'intégration complexe.

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{it-xt}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence de $f(x)$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Trouver une équation linéaire homogène d'ordre 1 satisfaite par f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Déterminer la limite de $\sqrt{x} f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Calculer f.
5. Montrer que f est continue en 0.
6. Déterminer $\int_0^{+\infty} e^{iu^2} \mathrm{d}u$.

Corrigé :

1. Pour $x > 0$, j'ai :

$$\left| \frac{e^{it} e^{-xt}}{\sqrt{t}} \right| = \frac{e^{-xt}}{t} \begin{cases} \in O_{t \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \\ \in o_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right) \end{cases}.$$

Par ailleurs,

$$t \mapsto \frac{e^{it} e^{-xt}}{\sqrt{t}} \text{ est continue sur }]0, +\infty[.$$

En effet,

$$\forall t > 0, \forall x > 0, \frac{e^{it} e^{-xt}}{\sqrt{t}} = \frac{\cos(t) e^{-xt}}{\sqrt{t}} + i \frac{\cos(t) e^{-xt}}{\sqrt{t}}.$$

On voit clairement que la partie réelle et la partie imaginaire sont continues à x fixé en tant que fonction de la variable t. D'où la continuité de la fonction à valeurs complexes. Donc f est bien définie pour $x > 0$. Étudions le cas $x = 0$.

$$\int_0^\alpha \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$$

est bien définie pour $\alpha > 0$. Par ailleurs :

$$\int_1^\alpha \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{t} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} \right]_1^\alpha - \frac{i}{2} \int_1^\alpha \frac{e^{it}}{t^3/2} \mathrm{d}t.$$

On obtient facilement la convergence du membre de droite lorsque $\alpha \to +\infty$. Donc l'intégrande est intégrable au voisinage de $+\infty$. Elle est aussi intégrable au voisinage de 0 car elle appartient à un $O(1/\sqrt{t})$. Par continuité de cette fonction, $f(0)$ est bien définie.

2. On note dans toute la suite
$$\varphi(t,x)=\frac{e^{(i-x)t}}{\sqrt{t}}.$$
Alors
$$\forall t\in\mathbb{R}^{+*}, x\mapsto\varphi(t,x)\in\mathcal{C}^1.$$
Je peux donc calculer les dérivées partielles :
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{it}\times -te^{-xt}=\sqrt{t}e^{(i-x)t}.$$
De plus, $\forall x\geq 0, t\mapsto\varphi(x,t)\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{+*})$ **Domination.** J'ai
$$\forall a>0,\forall(t,x)\in\mathbb{R}^{+*}\times[a,+\infty[,\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)\right|\leq\sqrt{t}e^{-at}:=g(t)$$
Alors : $g(t)\in O_{t\to 0}(1)$ et $g(t)\in o_{t\to+\infty}(1/t^2)$. Comme g est continue, elle devient intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, j'ai donc que $f\in\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, et ce, pour tout $a>0$. Donc $f\in\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et
$$\forall x\in\mathbb{R}^+, f'(x)=-\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{(i-x)t}\mathrm{d}t.$$
Puis, par une intégration par parties, j'ai donc :
$$\int_\varepsilon^\alpha -\sqrt{t}e^{(i-x)t}\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{1-x}\sqrt{t}e^{(i-x)t}\right]_\varepsilon^\alpha+\frac{1}{2(i-x)}\int_\varepsilon^\alpha\frac{e^{(i-x)t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$
L'égalité passe à la limite quand $\varepsilon\to 0,\alpha\to+\infty$ en
$$f'(x)=0+\frac{1}{2(i-x)}f(x).$$

3. Je pose $u=xt$. Alors $\sqrt{u}=\sqrt{x}\sqrt{t}$ et $\mathrm{d}u=x\mathrm{d}t$. J'ai donc :
$$\forall x>0,\sqrt{x}f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu/x}e^{-u}}{\sqrt{u}/\sqrt{x}}\frac{1}{x}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu/x}e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$
Domination :
$$\forall x\geq 0,\forall u>0,\left|\frac{e^{iu/x}e^{-u}}{u}\right|\leq\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\in L^1(\mathbb{R}^{+*}).$$
Par le théorème de convergence dominée, j'ai donc que
$$xf(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

4. Par la question 2, je peux résoudre l'équation différentielle vérifiée par f, ce qui me donne
$$\exists C\in\mathbb{C},\forall x>0, f(x)=C\exp\left(\int_0^x\frac{1}{2(i-t)}\mathrm{d}t\right).$$
Calculons cette intégrale. J'ai
$$\int_0^x\frac{1}{i-t}\mathrm{d}t=-\left(\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t+i\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-i\arctan(x).$$

Ainsi,

$$\forall x > 0, f(x) = C\frac{\exp(-\frac{i}{2}\arctan(x))}{(1+x^2)^{1/4}}.$$

Déterminons la constante C. J'ai :

$$\sqrt{x}f(x) = C\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^{1/4}}\exp(-\frac{i}{2}\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} Ce^{-i\pi/4} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Donc :

$$C = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{i\pi/4}.$$

Immédiatement, en en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = C.$$

5. Ce que nous souhaitons, c'est

$$f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0}\frac{e^{(t-x)t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Il faut donc justifier l'interversion. Alors pour tout $x \geq 0$, $t \mapsto e^{(t-x)t}/\sqrt{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, f est continue en 0, et on a

$$f(0) = C = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{i\pi/4} = \int_0^{+\infty}\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

6. Par le changement de variable $t = u^2$, j'ai donc

$$2\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}t = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Par culture générale,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

En particulier :

$$\int_0^{+\infty}\cos(u^2)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\sin(u^2)\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$