Feuille d'exercices n° 2 : Jeu de Pile/Face.

On considère un jeu de pile ou face équilibré de longueur n, on note $X_1, \ldots, X_n \in \{-1, +1\}$ les résultats des n lancers, et on pose $S_0 = 0$ et :

$$\forall k \geqslant 1, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Exercice 1. 1. Calculer $\mathbb{P}(S_n = a)$

2. Soit $a, b \in \mathbb{N}^\star$. Calculer :

$$\mathbb{P}(\min\{S_1, \ldots, S_{n-1}\} > -b \text{ et } S_n = a).$$

3. Soit $a, b \in \mathbb{N}^\star$ tels que $b > a$. Calculer :

$$\mathbb{P}(\max\{S_1, \ldots, S_{n-1}\} < b \text{ et } S_n = a).$$

Exercice 2. [Ballot]

1. Pour k et $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = k).$$

2. En déduire

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = k) = \frac{k}{n}\mathbb{P}(S_n = k)$$

3. (Bonus) Proposer une explication combinatoire pour le résultat de la question précédente.

Exercice 3. [Temps d'atteinte]

1. Soient $a, k \in \mathbb{N}$ tels que $a \leqslant k$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(S_n = a, \max\left\{S_0, \ldots, S_n\right\} \geqslant k\right) = \mathbb{P}\left(S_n = 2k - a\right).$$

2. En déduire, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\left(\max\left\{S_0, \ldots, S_n\right\} = k\right).$$

3. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^\star$:

$$\mathbb{P}(S_0 < k, S_2 < k, \ldots, S_{n-1} < k, S_n = k) = \frac{k}{n}\mathbb{P}(S_n = k)$$

4. Proposer une explication combinatoire pour le résultat de la question précédente.

Exercice 4. [Ballot et temps d'atteinte] On considère un jeu de pile ou face équilibré de longueur $n > 0$, on note $X_1, \ldots, X_n \in \{-1, +1\}$ les résultats des n lancers, et on pose $S_0 = 0$ et

$$\forall k \in \{1 \ldots n\}, \quad S_k = X_1 + \cdots + X_k.$$

En inversant l'ordre des $+1$ et -1 qui forment la marche aléatoire, on forme une nouvelle marche aléatoire. Elle s'appelle marche aléatoire duale et est définie par $S_k^* = X_1^* + \cdots + X_k^*$, pour $k = 1, \ldots, n$, où

$$X_1^* = X_n \quad X_2^* = X_{n-1} \quad \ldots \quad X_n^* = X_1.$$

1. Exprimer S_k^* en fonction des S_j.
2. Montrer que

$$\mathbb{P}(\forall j \in \{0,\dots,n-1\},\ S_n > S_j) = \mathbb{P}(\forall j \in \{1,\dots,n\}, S_j > 0)$$

3. Montrer que, pour $b > 0$:

$$\mathbb{P}(\max\{S_0,\dots,S_{n-1}\} < b, \quad S_n = b) = \mathbb{P}(\min\{S_1,\dots,S_{n-1}\} > 0, \quad S_n = b)$$

Exercice 5. Expliquer en détail la bijection suivante, due a Nelson, issue d'un article de recherche, et qui explique un résultat clef de votre cours.

"Second, we describe a similar bijection between balanced walks and nonzero walks. Take the 'initial' segment of a balanced walk to be up to the first time it reaches either its minimum value, for walks that start with a down-step, or its maximum value, for walks that start with an up-step. Take the 'initial' segment of a non-zero walk to be up to the last time it reaches half its final value either with an up-step, for positive walks, or with a down-step, for negative walks. The bijection and its inverse reverse the signs and order of the steps in the initial segments."

De quel résultat s'agit-il ?

Exercice 6. Le but de cet exercice est le calcul de

$$\mathbb{P}\left(\min\{S_1,\dots,S_{2n}\} \geqslant 0, S_{2n} = 0\right)$$

en enumérant l'ensemble des chemins qui réalisent la condition.

1. Googler "processus de contour" et en déduire qu'il existe une bijection entre arbres plans enracinés a $n+1$ sommets et l'ensemble

$$E_n = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \in \{-1,1\}^{2n} \mid s_k \geqslant 0 \text{ pour tout } k \in \{1,\dots,2n\}, s_{2n} = 0\right\}$$

On note t_n le nombre d'arbres plans enracinés à n sommets, et on forme la série $T(z) = \sum_{n\geqslant 1} t_n z^n$.

2. Montrer que le rayon de convergence de T est supérieur ou égal à $1/4$.
3. Montrer[1] que

$$T(z) = z(1 + T(z) + T(z)^2 + \dots).$$

4. En déduire :

$$T(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4z}\right), \quad |z| < 1/4.$$

5. Montrer que :

$$\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4z}\right) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1} z^n.$$

6. En déduire une formule exacte pour t_n puis un équivalent quand $n \to \infty$.
7. Donner la valeur de $\mathbb{P}\left(\min\{S_1,\dots,S_{2n}\} \geqslant 0, S_{2n} = 0\right)$.

1. à l'aide d'une décomposition à la racine de l'arbre plan enraciné par exemple